MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. D. Rost

SoSe 2015
Blatt 5
05.06.2015

Lösung zum 5. Übungsblatt

1. *Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2007*

In Abhängigkeit vom reellen Parameter $t \in \mathbb{R}$ sei die Matrix

$$A_t = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ t & t+1 & 0 \\ t+1 & t+1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

gegeben.

a) Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom χ_t von A_t gegeben ist durch

$$\chi_t(\lambda) = -(\lambda+1)(\lambda-t)(\lambda-1).$$

b) Untersuchen Sie A_t in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$ auf Diagonalisierbarkeit.

c) Nun sei $t = 0$. Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $P^{-1}A_0P = D$.

Lösung:

a) Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\chi_t(\lambda) = \det(A_t - \lambda\, E_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ t & t+1-\lambda & 0 \\ t+1 & t+1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{3. Spalte}}{=}$$
$$= -(\lambda+1)\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ t & t+1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)\left(-\lambda\,(t+1-\lambda)+t\right) =$$
$$= -(\lambda+1)\left(\lambda^2 - t\,\lambda - \lambda + t\right) \underset{\text{Vieta}}{=} -(\lambda+1)(\lambda-t)(\lambda-1).$$

b) Die in a) gezeigte Zerlegung von χ_t in Linearfaktoren legt die folgende Fallunterscheidung nahe:

Fall 1: $t \notin \{-1, 1\}$. Die Matrix A_t besitzt die drei verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = t$ und $\lambda_3 = 1$ und ist folglich als 3×3–Matrix diagonalisierbar.

Fall 2: $t = -1$. Die Matrix

$$A_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ist symmetrisch und damit als reellwertige Matrix auch diagonalisierbar.

Fall 3: $t = 1$. Die Matrix A_1 besitzt die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 1$ mit den algebraischen Vielfachheiten $\alpha_1 = 1$ und $\alpha_2 = 2$. Wegen

$$A_1 - \lambda_2 E_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $r_2 = \operatorname{Rang}(A_1 - \lambda_2 E) = 2$. Für die geometrische Vielfachheit γ_2 von λ_2 gilt damit $\gamma_2 = 3 - r_2 = 1 < \alpha_2$; folglich ist A_1 nicht diagonalisierbar.

c) Gemäß a) besitzt die Matrix A_0 die drei verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$ und $\lambda_3 = 1$. Wegen

$$A_0 - \lambda_1 E_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = -1$, wegen

$$A_0 - \lambda_2 E_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = 0$, und wegen

$$A_0 - \lambda_3 E_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_3 = 1$. Mit

$$P = (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$$

und

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt damit $P^{-1} A_0 \, P = D$.

2. *Staatsexamensaufgabe Herbst 2011*

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

a) Es gibt eine Basis v_1, v_2, v_3, v_4 des $\mathbb{R}^4$ mit $v_1 = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ 23 \\ 5 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ -17 \\ 23 \\ 11 \end{pmatrix}$.

b) Jede diagonalisierbare Matrix ist invertierbar.

c) Jede invertierbare Matrix ist diagonalisierbar.
Hinweis: Widerlegen Sie diese Aussage durch die Angabe eines möglichst einfachen Gegenbeispieles.

d) Sei A eine Matrix mit $A^3 = A$. Dann sind die einzig möglichen Eigenwerte von A gleich 0 oder ± 1.

Lösung:

a) Die Aussage ist richtig: so ist etwa

$$v_1 = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ 23 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ -17 \\ 23 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

wegen

$$\det(v_1, v_2, v_3, v_4) = \begin{vmatrix} 12 & 10 & 0 & 0 \\ -1 & -17 & 0 & 0 \\ 23 & 23 & 1 & 0 \\ 5 & 11 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{4.Spalte}}{\overset{\text{Laplace}}{=}} \underbrace{(-1)^{4+4} \cdot 1}_{=1} \cdot \begin{vmatrix} 12 & 10 & 0 \\ -1 & -17 & 0 \\ 23 & 23 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\underset{\text{3.Spalte}}{\overset{\text{Laplace}}{=}} \underbrace{(-1)^{3+3} \cdot 1}_{=1} \cdot \begin{vmatrix} 12 & 10 \\ -1 & -17 \end{vmatrix} = 12 \cdot (-17) - (-1) \cdot 10 = -194 \neq 0$$

eine Basis von $\mathbb{R}^4$.

b) Die Aussage ist falsch: so ist etwa die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

gemäß $A^\top = A$ symmetrisch und damit insbesondere diagonalisierbar, wegen

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 0$$

allerdings nicht invertierbar.

c) Die Aussage ist falsch: so ist etwa die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

wegen

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 - 1 \cdot (-1) = 1 \neq 0$$

invertierbar; wegen

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda\, E_2) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^2 - 1 \cdot (-1) = \lambda^2 + 1 > 0$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ ist allerdings A ohne Eigenwert und damit insbesondere nicht diagonalisierbar.

d) Die Aussage ist richtig: sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $A^3 = A$. Für einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ von A gibt es einen Vektor $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ mit $A \cdot x = \lambda \cdot x$, und es folgt

$$\begin{aligned} A^2 \cdot x = (A \cdot A) \cdot x = A \cdot (A \cdot x) = A \cdot (\lambda \cdot x) = \\ = \lambda \cdot (A \cdot x) = \lambda \cdot (\lambda \cdot x) = (\lambda \cdot \lambda) \cdot x = \lambda^2 \cdot x \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} A^3 \cdot x = (A \cdot A^2) \cdot x = A \cdot (A^2 \cdot x) = A \cdot (\lambda^2 \cdot x) = \\ = \lambda^2 \cdot (A \cdot x) = \lambda \cdot (\lambda^2 \cdot x) = (\lambda \cdot \lambda^2) \cdot x = \lambda^3 \cdot x, \end{aligned}$$

woraus sich wegen $A^3 = A$ zunächst

$$\lambda^3 \cdot x = A^3 \cdot x = A \cdot x = \lambda \cdot x,$$

also

$$(\lambda^3 - \lambda) \cdot x = \lambda^3 \cdot x - \lambda \cdot x = 0,$$

ergibt; wegen $x \neq 0$ folgt

$$0 = \lambda^3 - \lambda = \lambda \cdot (\lambda^2 - 1) = \lambda \cdot (\lambda - 1) \cdot (\lambda + 1)$$

und damit $\lambda = 0$ oder $\lambda = 1$ oder $\lambda = -1$.

3. *Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2007*

Es sei V ein 4–dimensionaler $\mathbb{R}$–Vektorraum mit der Basis v_1, v_2, v_3, v_4. Weiter sei $\varphi : V \to V$ die lineare Abbildung mit

$$\varphi(v_1) = v_2, \quad \varphi(v_2) = v_3, \quad \varphi(v_3) = v_4, \quad \varphi(v_4) = v_1.$$

Berechnen Sie Basen für die Eigenräume von φ in V und entscheiden Sie, ob φ reell diagonalisierbar ist.

Hinweis: Bestimmen Sie zuerst die darstellende Matrix von φ bezüglich der Basis v_1, v_2, v_3, v_4 von V.

Lösung:

Der gegebene Endomorphismus $\varphi : V \to V$ des Vektorraums V besitzt wegen

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\varphi(v_1) & = & v_2 & = & 0 \cdot v_1 & + & 1 \cdot v_2 & + & 0 \cdot v_3 & + & 0 \cdot v_4 \\
\varphi(v_2) & = & v_3 & = & 0 \cdot v_1 & + & 0 \cdot v_2 & + & 1 \cdot v_3 & + & 0 \cdot v_4 \\
\varphi(v_3) & = & v_4 & = & 0 \cdot v_1 & + & 0 \cdot v_2 & + & 0 \cdot v_3 & + & 1 \cdot v_4 \\
\varphi(v_4) & = & v_1 & = & 1 \cdot v_1 & + & 0 \cdot v_2 & + & 0 \cdot v_3 & + & 0 \cdot v_4
\end{array}$$

bezüglich der Basis v_1, v_2, v_3, v_4 von V die darstellende Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4};$$

dabei ist ein Vektor

$$v = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \alpha_3 \cdot v_3 + \alpha_4 \cdot v_4 \in V$$

genau dann ein Eigenvektor des Endomorphismus φ zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$, wenn sein Koordinatenvektor

$$p(v) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

bezüglich der Basis v_1, v_2, v_3, v_4 ein Eigenvektor der darstellenden Matrix M zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ ist. Wegen

$$\begin{aligned}
\chi_M(\lambda) = \det(M - \lambda\, E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} &\underset{\text{1. Zeile}}{=} \\
= (-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} &\underset{\text{matrizen}}{\overset{\text{Dreiecks–}}{=}} \\
= (-\lambda) \cdot (-\lambda)^3 - 1 \cdot 1^3 = \lambda^4 - 1 = (\lambda - 1)\,(\lambda + 1)\,\big(\lambda^2 + 1\big)
\end{aligned}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt M genau zwei Eigenwerte, nämlich $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$; wegen

$$M - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{II+I}}{\leadsto} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III+II}}{\leadsto}$$

$$\leadsto \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{IV+III}}{\leadsto} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist der Koordinatenvektor

$$p\,(b_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

eine Basis für den Eigenraum $\mathrm{Eig}(M; \lambda_1)$ der Matrix M zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$, und wegen

$$M - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{II-I}}{\leadsto} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III-II}}{\leadsto}$$

$$\leadsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{IV-III}}{\leadsto} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist der Koordinatenvektor

$$p\,(b_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

eine Basis für den Eigenraum $\mathrm{Eig}(M; \lambda_2)$ der Matrix M zum Eigenwert $\lambda_1 = -1$.

Folglich besitzt auch der Endomorphismus $\varphi : V \to V$ genau die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$, und für die beiden Eigenräume ergibt sich

$$\mathrm{Eig}(\varphi; \lambda_1) = \mathbb{R} \cdot b_1 \qquad \text{mit der Basis} \qquad b_1 = v_1 + v_2 + v_3 + v_4$$

und

$$\mathrm{Eig}(\varphi; \lambda_2) = \mathbb{R} \cdot b_2 \qquad \text{mit der Basis} \qquad b_2 = -v_1 + v_2 - v_3 + v_4.$$

Damit gibt es nur zwei linear unabhängige Eigenvektoren von φ, insbesondere also keine Basis des 4–dimensionalen Vektorraums V aus Eigenvektoren von φ; damit ist φ nicht diagonalisierbar.

4. *Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2013*

Man betrachte den von den vier Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

aufgespannten Untervektorraum $V = \langle v_1, v_2, w_1, w_2 \rangle$ im $\mathbb{R}^3$.

a) Man zeige, dass v_1, v_2 eine Basis von V ist, und stelle w_1 und w_2 als Linearkombinationen von v_1, v_2 dar.

b) Man begründe, dass es genau einen Endomorphismus $f : V \to V$ von V mit $f(v_1) = w_1$ und $f(v_2) = w_2$ gibt, und gebe die darstellende Matrix von f bezüglich der Basis v_1, v_2 von V an.
Hinweis: Welche Dimension hat V?

c) Man zeige, dass f diagonalisierbar ist, und bestimme eine Basis von V aus Eigenvektoren von f.

Lösung:

a) Für die Matrix $A = (v_1, v_2, w_1, w_2) \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ gilt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \underset{\text{III+I}}{\leadsto} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 8 \end{pmatrix} \underset{\text{III}-2\cdot\text{II}}{\overset{\text{I}-\text{II}}{\leadsto}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

damit sind v_1, v_2 linear unabhängig mit

$$w_1 = 2 \cdot v_1 + 3 \cdot v_2 \qquad \text{und} \qquad w_2 = 1 \cdot v_1 + 4 \cdot v_2,$$

insbesondere also eine Basis von $V = \langle v_1, v_2, w_1, w_2 \rangle$.

b) Da v_1, v_2 eine Basis von V sind, gibt es nach dem Prinzip der linearen Fortsetzung für jeden Vektorraum V' und jede Wahl von v_1', $v_2' \in V'$ genau eine lineare Abbildung $f : V \to V'$ mit $f(v_1) = v_1'$ und $f(v_2) = v_2'$; insbesondere existiert genau ein Endomorphismus $f : V \to V$ von V mit $f(v_1) = w_1$ und $f(v_2) = w_2$. Wegen

$$\begin{array}{ccccccc} f(v_1) & = & w_1 & = & 2 \cdot v_1 & + & 3 \cdot v_2 \\ f(v_2) & = & w_2 & = & 1 \cdot v_1 & + & 4 \cdot v_2 \end{array} \qquad \text{ist} \qquad M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

die darstellende Matrix von f bezüglich der Basis v_1, v_2 von V.

c) Wegen

$$\chi_M(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(4-\lambda) - 3 =$$

$$= \lambda^2 - 6\lambda + 5 = (\lambda - 1)(\lambda - 5)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt M die beiden einfachen Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 5$ und ist damit als 2×2–Matrix insbesondere diagonalisierbar; wegen

$$M - \lambda_1 E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{II}-3\cdot\mathrm{I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von M zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$, und wegen

$$M - \lambda_2 E_2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{II}+\mathrm{I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von M zum Eigenwert $\lambda_2 = 5$. Folglich ist auch der Endomorphismus f von V diagonalisierbar, und

$$b_1 = (-1) \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b_2 = 1 \cdot v_1 + 3 \cdot v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ist eine Basis von V aus Eigenvektoren von f.