Mathematisches Institut der Universität München | Daniel Rost
Sommersemester 2014 | Lukas-Fabian Moser

Grundlagen der Mathematik II – 9. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Wahrscheinlichkeitsmaße)

a) Es sei $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$ und P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω mit $P(\{1, 3, 4\}) = \frac{1}{2}$, $P(\{1, 2\}) = \frac{1}{3}$ und $P(\{1, 2, 3, 4\}) = \frac{2}{3}$. Man berechne $P(\{1\})$ und $P(\{2\})$.

b) Es sei $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$ und P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω mit $P(\{1, 2, 3, 5\}) = \frac{2}{3}$ und $P(\{1, 3\}) = \frac{1}{6}$. Man berechne $P(\{2, 5\})$, $P(\{4, 6\})$ und $P(\{1, 3, 4, 6\})$.

c) Es sei $\Omega = \{1, 2, 3\}$. Es seien weiter die Zahlen $p_1 = 1 - \frac{1}{a}$ und $p_2 = 1 - \frac{1}{b}$, wobei die Zahl a Ihr Geburtstag und die Zahl b Ihr Geburtsmonat ist. (Für einen Geburtstag am 9. November wäre also $a = 9$ und $b = 11$.)

Gibt es ein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf Ω mit $P(\{1, 2\}) = p_1$ und $P(\{2, 3\}) = p_2$?

Welche Eigenschaft müssen $a, b \in \mathbb{N}$ allgemein erfüllen, damit es ein solches Wahrscheinlichkeitsmaß gibt? Man untersuche in diesen Fällen, ob die Ereignisse $\{1, 2\}$ und $\{2, 3\}$ unabhängig sind.

Aufgabe 2 (Baumdiagramme). Aus einer Urne mit zwei schwarzen, drei weißen und fünf blauen Kugeln werden zufällig drei Kugeln mit Zurücklegen bzw. ohne Zurücklegen gezogen.

a) Man modelliere beide Fälle jeweils durch einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega^{\text{mit}}, P^{\text{mit}})$ bzw. $(\Omega^{\text{ohne}}, P^{\text{ohne}})$.

(Für die Ermittlung von P^{ohne} bietet sich die Anfertigung eines Baumdiagramms an.)

b) Man bestimme für beide Fälle die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

A : „Es werden genau zwei blaue Kugeln gezogen“
B : „Alle gezogenen Kugeln haben die gleiche Farbe“
C : „Die gezogenen Kugeln haben drei verschiedene Farben.“
D : „Mindestens zwei gezogene Kugeln haben die gleiche Farbe.“

Aufgabe 3 (Staatsexamensprüfungen). Zu den mündlichen Staatsexamensprüfungen im Fach Mathematik haben sich insgesamt $3k$ Kandidaten angemeldet, darunter auch drei befreundete Studentinnen. Es kommen drei Prüfer A, B und C in Frage, von denen jeder (nach zufälliger Zuordnung) k Kandidaten übernimmt.

a) Man bestimme in Abhängigkeit von $k \in \mathbb{N}$ die Wahrscheinlichkeit P dafür, daß die drei befreundeten Studentinnen alle den von ihnen bevorzugten Prüfer C bekommen. (Es ist sinnvoll, diese Wahrscheinlichkeit als $P(k)$ zu bezeichnen, um die Abhängigkeit von k auszudrücken.)

(Anleitung: Man modelliere die Situation durch ein Urnenexperiment!)

b) Man zeige $P < \frac{1}{27}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Für welche $k \in \mathbb{N}$ ist $P \geq \frac{1}{30}$? Man interpretiere das Ergebnis!

(bitte wenden)

Aufgabe 4 (Schafkopf). Andreas, Barbara, Clara und Daniel treffen sich zum Schafkopfspielen. Zu Beginn des Spiels werden an jeden Spieler verdeckt je acht Karten verteilt.

a) Man beschreibe die Verteilung der Karten als Zufallsexperiment durch die Angabe eines geeigneten Wahrscheinlichkeitsraumes (Ω, P).

b) Man berechne die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

A : „Irgendein Spieler erhält ausschließlich Ober und Unter."

B_k : „Die höchsten k Trumpfkarten sind in den Händen von höchstens zwei Spielern."
für $3 \leq k \leq 8$

c) Daniel hat bei der Verteilung genau zwei Asse (Schellen und Herz) erhalten. Man berechne die (bedingte!) Wahrscheinlichkeit, daß die beiden übrigen Asse (Eichel und Gras) sich in der Hand nur *eines* anderen Spielers befinden.

d) Im nächsten Spiel hat Daniel bei der Verteilung ein einziges As (nämlich Herz) erhalten. Man berechne die (bedingte!) Wahrscheinlichkeit, daß irgendeiner der anderen Spieler mehr als ein As erhalten hat.

Zum Spiel: Schafkopf wird, zumindest in München, mit 32 Karten gespielt, und zwar gibt es von jeder der vier Farben (Eichel, Gras, Herz und Schellen) acht Werte (7, 8, 9, Unter, Ober, König, 10, As). Die höchsten Trumpfkarten (in einem gewöhnlichen Spiel) sind in absteigender Wertigkeit

Eichel-Ober, Gras-Ober, Herz-Ober, Schellen-Ober, Eichel-Unter, Gras-Unter, Herz-Unter, Schellen-Unter.

Schafkopfspieler wissen außerdem, daß die in dieser Aufgabe berechneten Wahrscheinlichkeiten im Spiel alle relevant sind; insbesondere die in c) und d) betrachteten Ereignisse können bei einer bestimmten Spielvariante, dem „Wenz", von spielentscheidender Bedeutung sein.

Die Lösungen sind spätestens am **Montag, 7. Juli 2014, 14 Uhr** im Übungskasten der Vorlesung (im 1. Stock vor der Bibliothek) einzuwerfen. Bitte die Angabe des eigenen Namens nicht vergessen!