Übungsblatt 12

(Besprechungstermin: 7.2.2005, 16:15, Raum 251)

1. Ein standard Brownsches Teilchen (Start in 0) bewegt sich ein einem absorbierenden Medium mit ortsabhängiger Absorptionsrate $V(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Die Überlebenswahrscheinlichkeit des Teilchens bis zur Zeit t, bedingt auf seinen Pfad $(B_s)_{0 \le s \le t}$, lautet also

$$\exp\left(-\int_0^t B_s^2\, ds\right).$$

   (a) Berechnen Sie die asymptotische Überlebensrate des Teilchens, d.h. berechnen Sie

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log E\left[\exp\left(-\int_0^t B_s^2\, ds\right)\right].$$

   (b) Berechnen Sie die Verteilung des Ortes des Teilchens zur Zeit t, bedingt auf Überleben, im Limes $t \to \infty$.

2. Es sei $X_t = B_t - tB_1$, $0 \le t \le 1$, eine standard Brownsche Brücke.

   (a) Zeigen Sie: $(X_t)_{0 \le t < 1}$ hat die gleiche Verteilung wie $((1-t)B_{t/(1-t)})_{0 \le t < 1}$, wobei $B.$ eine standard Brownsche Bewegung bezeichnet.

   (b) Zeigen Sie: $X.$ erfüllt die stochastische Differentialgleichung

$$dX_t = -\frac{X_t}{1-t}\, dt + dW_t$$

   mit einem standard Gaußschem weißen Rauschen dW_t.