Übungen zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 21: (H19T3A2) Gegeben sei die Abbildung $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x(1-y), xy) \end{array}$.

a) Zeigen Sie, dass f den Streifen $S :=]0,\infty[\times]0,1[$ diffeomorph auf den ersten Quadranten $Q :=]0,\infty[^2$ abbildet (dh. f bildet S bijektiv auf Q ab und $f : S \to Q$ sowie die Umkehrabbildung $f^{-1} : Q \to S$ sind stetig differenzierbar.)

b) Wir identifizieren nun $\mathbb{R}^2$ in kanonischer Weise mit $\mathbb{C}$ und fassen f als Funktion $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ auf. Bildet dann f den Streifen $S = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,(z) > 0, 0 < \mathrm{Im}\,(z) < 1\}$ konform (dh. biholomorph) auf den ersten Quadranten $Q = \{w \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,(w) > 0, \mathrm{Im}\,(w) > 0\}$ ab? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 22: (F02T2A1) Gegeben seien die Funktionen

$$\begin{array}{rcl} u : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & e^{-y}(x\cos(x) - y\sin(x)) \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{rcl} v : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & e^{-y}(y\cos(x) + x\sin(x)) \end{array}$$

a) Zeigen Sie, daß diese Funktionen die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen erfüllen, und daß deswegen die Funktion $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z = x+iy & \mapsto & u(x,y) + iv(x,y) \end{array}$ holomorph ist.

b) Zeigen Sie für $z = iy$ mit $y \in \mathbb{R}$, daß

$$f(z) = ze^{iz}$$

ist und folgern Sie daraus $f(z) = ze^{iz}$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 23: (F01T3A1)
Es sei $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ und $f : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit der Eigenschaft $f(z) = f(z^2)$ für alle $z \in \mathbb{E}$. Zeigen Sie, daß f konstant ist.

Aufgabe 24: (F17T2A4)
Sei $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$

a) Bestimmen Sie alle holomorphen Funktionen $f : D \to \mathbb{C}$ mit

$$f(0) = 1 \text{ und } f'(z) = (f(z))^2 \text{ für alle } z \in D$$

b) Bestimmen Sie alle holomorphen Funktionen $g = u+iv : D \to \mathbb{C}$, u und v reellwertig mit

$$u(0) = v(0) = 0 \text{ und } \sin u(z) + iv(z)\cos v(z) = 0 \text{ für alle } z \in D$$

Aufgabe 25: (F14T2A3)

Berechnen Sie für $\gamma : \begin{array}{rcl} [0,2\pi] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & 2e^{2it} \end{array}$ und $\eta : \begin{array}{rcl} [0,2\pi] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & i + e^{-it} \end{array}$ die Kurvenintegrale:

a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^{iz^2} - 1}{z^2} dz$

b) $\displaystyle\int_\eta \frac{e^z}{(z-i)^3} dz$

c) $\displaystyle\int_\gamma e^{\frac{1}{z}} dz.$

Aufgabe 26: (F14T1A5)

Berechnen Sie unter Benutzung von $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ für $\lambda > 0$ das Integral

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \cos(\lambda x) dx.$$

Hinweis: Wenden Sie für reelles $R > 0$ den Cauchy-Integralsatz auf das Rechteck mit den Ecken $\pm R$, $\pm R + i\frac{\lambda}{2}$ an und betrachten Sie $R \to \infty$.

Aufgabe 27: (H06T3A3)

Gegeben sei die Funktion $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$

a) Bestimmen Sie die Laurententwicklung von f auf $A := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-1| < 1\}$ und $B := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-2| < 1\}$.

b) Berechnen Sie für $\gamma : \begin{array}{rcl} [0,1] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & 3e^{2\pi i t} \end{array}$ das Integral $\displaystyle\int_\gamma f(z) dz.$

Aufgabe 28: (H19T2A3) Auf dem Gebiet

$$\Omega := \{z = x + iy \in \mathbb{C} : x \in \mathbb{R}, -\pi < y < 2\pi\}$$

betrachten wir die meromorphe Funktion $f(z) := \frac{1}{z \sinh(z)}$, wobei $\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$ ist.

a) Bestimmen Sie alle Singularitäten von f und deren Typ.

b) Berechnen Sie die Residuen von f in allen Polstellen.

c) Besitzt die Funktion f eine Stammfunktion in Ω?

d) Bestimmen Sie $c \in \mathbb{C}$, so daß die Funktion $z \mapsto f(z) + c\frac{1}{z - i\pi}$ auf Ω eine Stammfunktion besitzt.