Universität Ulm
Institut für Betriebswirtschaft
Hellwig/Meuser

SS 2007
27.06.2007
Blatt 5

Lösungen zu AVWL III

Aufgabe 20

Wir betrachten hier eine reine Tauschökonomie ohne Produktion mit m Konsumenten und n Gütern und haben folgende Ausgangssituation:

- Jeder Konsument l verfügt über eine Präferenzordnung $\overset{l}{\succeq}, \quad l = 1, \ldots, m$.
- $\overset{l}{\succeq}, \quad l = 1, \ldots, m$ ist stetig, streng monoton und konvex.
- Seine Anfangsausstattung sei $w^l = (w_1^l, \ldots, w_n^l)$.
- Der gesamte Gütervorrat der Ökonomie ist gegeben durch $W := \sum_{l=1}^{m} w^l$.

a) Jedes m-Tupel $q = (q^1, \ldots, q^m)$ von Güterbündeln $q^l \in R_+^n,\ l = 1, \ldots, m$, für das

$$\sum_{l=1}^{m} q^l = \sum_{l=1}^{m} w^l = W$$

gilt, ist eine zulässige Allokation. Produktion bzw. Vergeudung von Gütern (wegwerfen) wird also nicht berücksichtigt.

b) Eine zulässige Allokation q heißt Pareto-effizient genau dann, wenn es keine zulässige Allokation $\tilde{q}$ gibt mit:

1. $\tilde{q}^l \overset{l}{\succeq} q^l \quad \forall\, l = 1, \ldots, m$ sowie
2. $\tilde{q}^k \succ q^k \quad$ für mindestens ein $k \in \{1, \ldots, m\}$

Eine Allokation wird als Pareto-effizient bezeichnet, wenn es nicht mehr möglich ist, durch eine Umverteilung ein Individuum besser zu stellen, ohne gleichzeitig die Lage eines anderen Individuums zu verschlechtern. In einer Pareto-effizienten Allokation tangieren sich die Indifferenzkurven der beteiligten Akteure, d.h. die Grenzrate der Substitution sind gleich groß.

Eine Pareto-effiziente Allokation ist nicht immer gerecht (z. B.: ein Konsument hat alles, die anderen nichts).

c) Ein Tupel (q, p) mit Allokation $q = (q^1, \ldots, q^m)$ und Preisvektor $p = (p_1, \ldots, p_n)$ heißt Tauschgleichgewicht (Konkurrenzgleichgewicht, Competitive Equilibrium), wenn gilt:

1. Die gesamte Nachfrage nach Gut i darf das gesamte Angebot von Gut i nicht übersteigen:
$$\sum_{l=1}^{m} q_i^l \leq \sum_{l=1}^{m} w_i^l \quad (i = 1, \ldots, n)$$
.

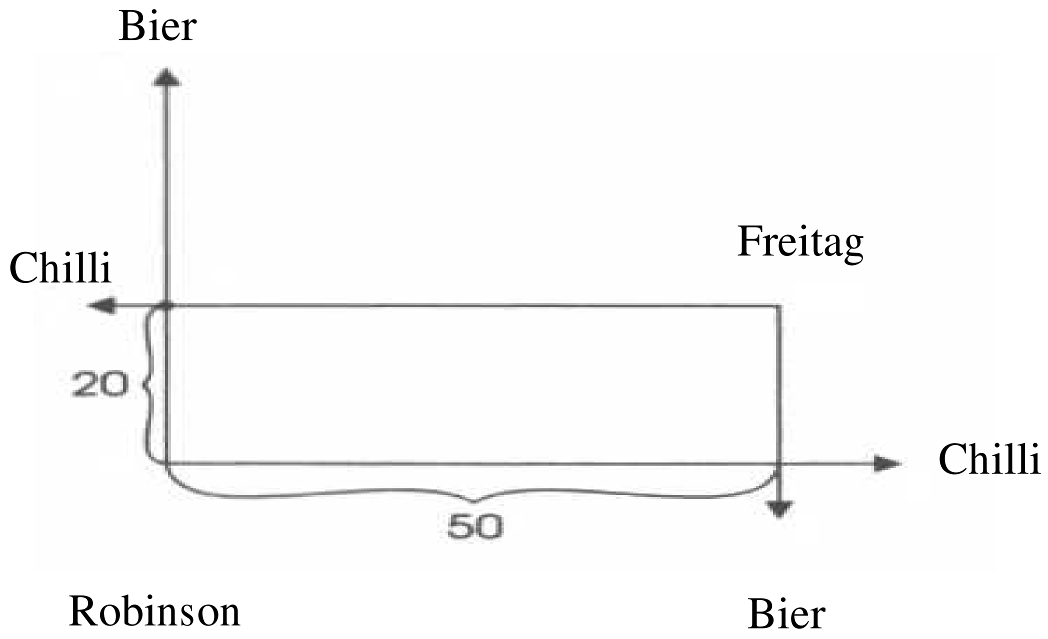
2. Bei den gegebenen Preisen $p_1, \ldots, p_n$ ist q^l das von Konsument l am meisten präferierte Güterbündel.

Im Tauschgleichgewicht hat also kein Konsument das Bedürfnis zu tauschen, da jeder das von ihm am meisten präferierte Güterbündel hat. Ein Tauschgleichgewicht kann sich natürlich nur dann einstellen, wenn die Präferenzordnungen der Konsumenten $\overset{l}{\succeq}, \quad l = 1, \ldots, m$ aggregierbar sind. Insbesondere müssen sie auch stetig, streng monoton und konvex sein. Diese Tatsachen werden in Aufgabe 21 c) und d) verdeutlicht.

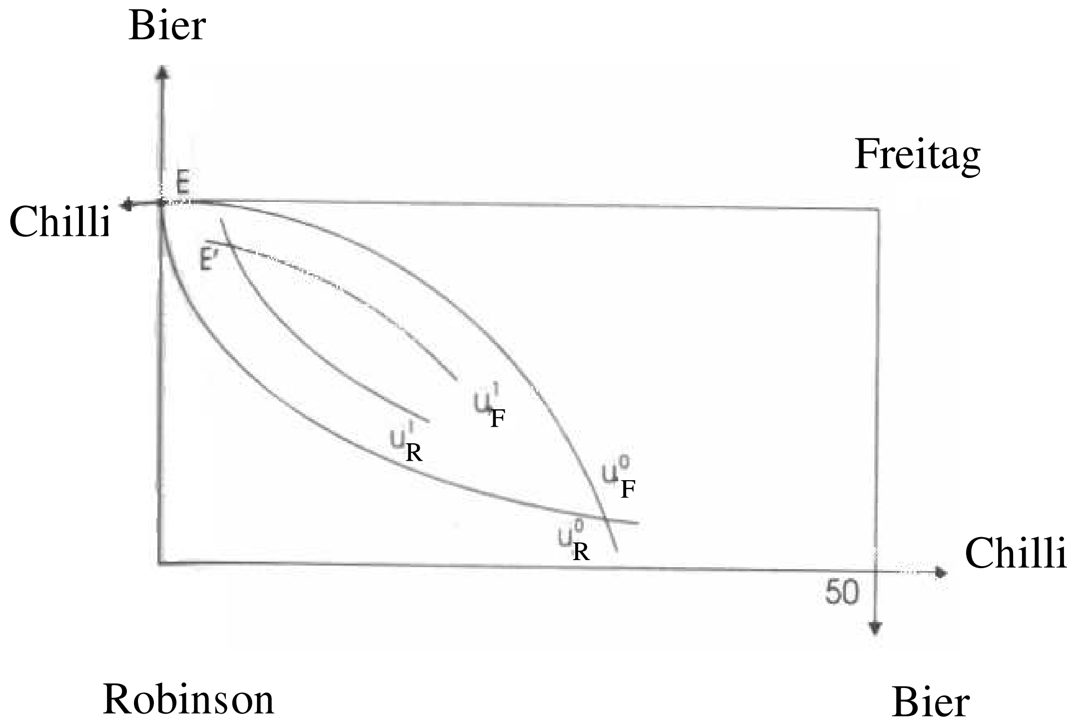
d) Natürlich mit einer Edgeworth-Box!

Aufgabe 21 (Konstruktion einer Edgeworth-Box und Analyse einer reinen Tauschwirtschaft)

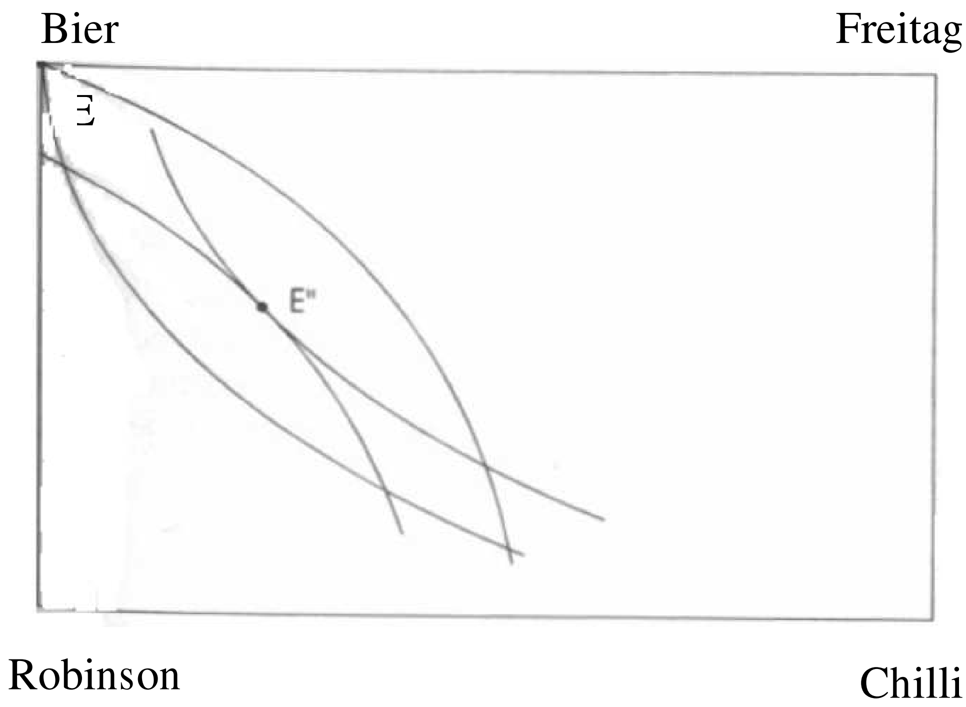
a) Die Edgeworth-Box ist ein Rechteck, dessen Seitenlängen von den insgesamt zur Verfügung stehenden Gütermengen bestimmt wird. Die Box ist so konstruiert, dass ein Diagramm "umgedreht" wird und beide Anfangsausstattungen aufeinandergelegt werden. Der Ursprung für H. Robinson liegt weiterhin links unten, während der Ursprung für H. Freitag rechts oben liegt:



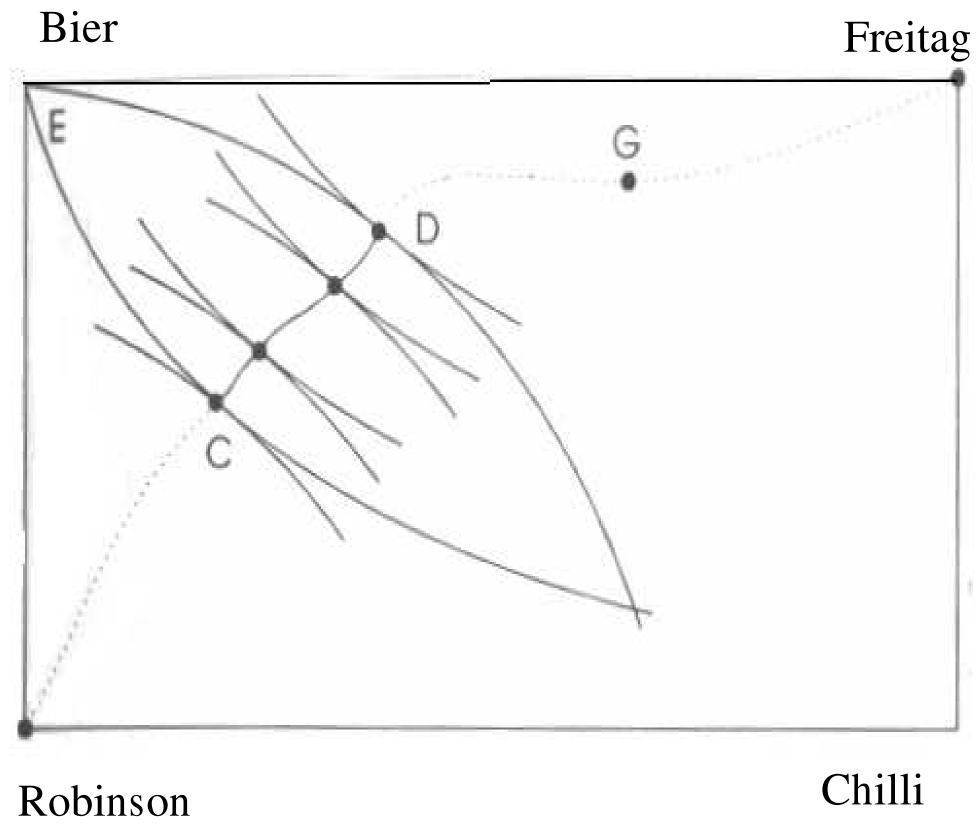
b) Um mögliche Tauschgleichgewichte zu identifizieren, werden in die Edgeworth-Box Indifferenzkurven der beiden Herren mit dem Nutzenniveau der Erstausstattung eingezeichnet:



Die Indifferenzkurven verlaufen annahmegemäß konvex zum jeweiligen Ursprung. Es zeigt sich sofort, dass eine andere Güteraufteilung für beide einen höheren Nutzen bringt. Bei der Güteraufteilung E' erreichen beide Herren einen höheren Nutzen. Beim Ausgangspunkt E liegen in der durch die Indifferenzkurven u_F^0 und u_R^0 aufgespannten Linse Verbesserungsmöglichkeiten für beide. E' ist aber z. B. noch kein mögliches Gleichgewicht, weil es dort noch weitere Verbesserungsmöglichkeiten gibt. Erst wenn bei einer Güteraufteilung und den zugehörigen Indifferenzkurven keine Linse mehr entsteht, gibt es keine beidseitigen Verbesserungmöglichkeiten mehr. Dies ist dann gegeben, wenn sich die beiden Indifferenzkurven tangieren. In einem solchen Tangentialpunkt entsprechen sich die Steigungen der Indifferenzkurven, d.h. die Grenzraten der Substitution stimmen überein.

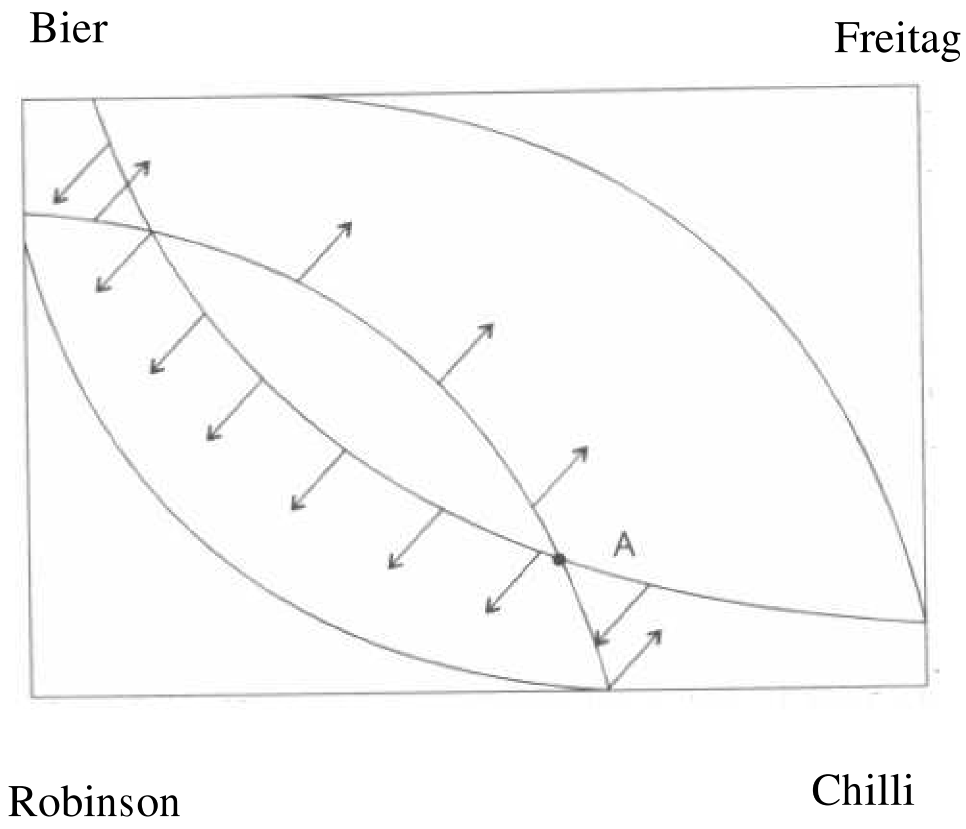


Eine solche Situation ist im Punkt E'' dargestellt. In einer bilateralen Situation ist jeder Tangentialpunkt zweier Indifferenzkurven innerhalb der Linse ein mögliches Gleichgewicht, d.h. die potentiellen Tauschgleichgewichte liegen auf der Linie CD:



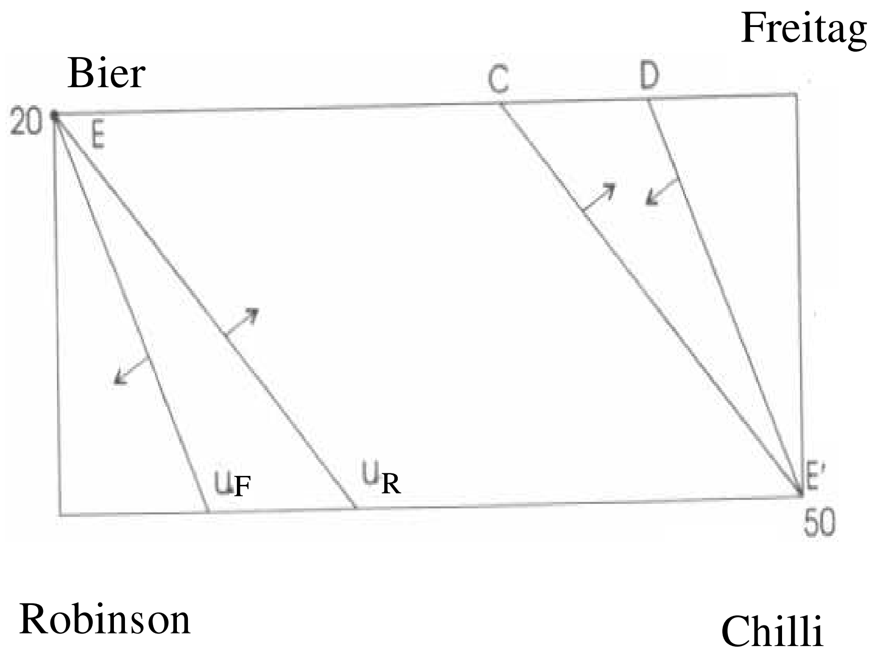
Die Linie $FCDGR$ wird Kontraktkurve genannt. Sie ist der geometrische Ort aller Tangentialpunkte der Indifferenzkurven. Zur Anfangsausstattung E ist aber z.B. G kein mögliches Gleichgewicht, da in diesem Fall H. Robinson eine Nutzeneinbuße gegenüber E hätte, die er freiwillig nicht in Kauf nehmen wird.
Wenn eine Güterverteilung realisiert wird, bei der sich zwei Indifferenzkurven tangieren, ist es nicht mehr möglich, H. Robinson besserzustellen, ohne den Nutzen von H. Freitag zu senken (oder umgekehrt). Einen solchen Zustand, bei dem keine Verbesserung des einen ohne gleichzeitige Verschlechterung des anderen möglich ist, nennt man Pareto-effizient. Jedes Marktgleichgewicht ist Pareto-effizient (1. Theorem der Wohlfahrtsökonomie).

c) Zur besseren Veranschaulichung sein als Anfangsausstattung der Punkt A betrachtet. Die Indifferenzkurven verlaufen jetzt konkav zum Ursprung. Die Voraussetzungen aus Aufgabe 20 werden also nicht erfüllt. Durch Pfeile wird angedeutet, in welche Richtungen Verbesserungsmöglichkeiten für die beiden Akteure liegen. Es wird ersichtlich, dass die Kontraktkurve am Rand der Edgeworth-Box verläuft.



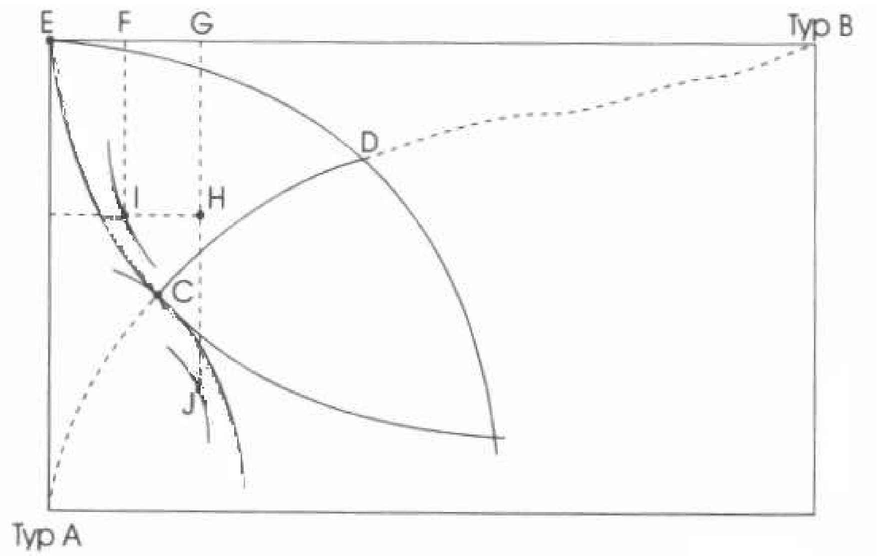
Ein Tauschgleichgewicht wird nicht erreicht.

d) Es gibt wieder eine am Rand verlaufende Kontraktkurve. Bei der Anfangsausstattung E hat H. Robinson 20 Dosen Bier, genauso lieb wären ihm 20 Dosen Chilli oder z.B. 10 von beiden Gütern. H. Freitag hat 50 Dosen Chilli, man müsste ihm schon 100 Dosen Bier bieten, damit er alle Bierdosen aufgibt. H. Robinson ist nicht bereit, für eine Dose Chilli zwei Dosen Bier aufzugeben, d.h. es gibt für beide keine Verbesserungsmöglichkeiten mehr. Hätte hingegen H. Robinson die 50 Dosen Chilli und H. Freitag 20 Dosen Bier (E'), käme es zum Tausch, die mögliche Tauschgleichgewichte dazu sind entlang der Strecke CD gegeben.



Obwohl die Voraussetzungen aus Aufgabe 20 erfüllt werden, kann nicht in allen Fällen ein Tauschgleichgewicht hergestellt werden.

e)Jetzt wird keine bilaterale Situation mehr betrachtet. Bei mehr als zwei Individuen stellt sich die Frage, ob weiterhin alle Gleichgewichte möglich sind. Dazu wird der Begriff des Kerns einer Wirtschaft benötigt. Unter dem Kern versteht man die Menge der nicht durch Koalition blockierbaren Tauschgleichgewichte (siehe Vorlesungsskript, S.74). Im konkreten Fall liegt nun eine Tauschwirtschaft mit vier Individuen vor. Die Robinsons haben identische Präferenzen und Ausstattungen. Sie sollen die Individuen vom Typ A darstellen. Analog sind die Freitags vom Typ B:



Im bilateralen Fall liegen die möglichen Tauschgleichgewichte auf der Kontraktkurve innerhalb der durch die Anfangsverteilung verlaufenden Indifferenzkurven aufgespannte Linse (Strecke CD). Betrachtet man Punkt C , so gibt es für die Robinsons in C gegenüber E zwar keine Verbesserung, im bilateralen Fall ist es aber dennoch ein mögliches Gleichgewicht. Die Frage ist, ob sie nicht durch Koalition mit einem B-Typen (z.B. Frau Freitag) ihre Situation verbessern können. Die Robinsons bieten Fr. Freitag jeweils FI Einheiten Bier an, d.h. insgesamt stehen GJ Einheiten Bier für den Tausch zur Verfügung. Dafür gibt ihnen Fr. Freitag insgesamt EG Chilli-Dosen. Die Robinsons erhalten davon jeweils die Hälfte, d.h. EF Einheiten. Frau Freitag erreicht Punkt J und erzielt damit ein höheres Nutzenniveau als in C, die Robinsons erreichen Punkt I und erzielen damit ein höheres Nutzenniveau als in C.
Die Allokation C ist somit für alle vier Individuen kein Gleichgewicht mehr, sie kann von einer Koalition zwischen zwei A-Typen und einem B-Typen blockiert werden. Analog kann D durch eine Koalition von zwei B-Typen und einem A-Typen blockiert werden. Herr Freitag hat somit recht.

Aufgabe 22 (Rechenbeispiel zur Edgeworth-Box)

a) Bestimmung der Kontraktkurve

$$\begin{aligned}
MRS_M(1,2) &= MRS_J(1,2) \\
MRS_M(1,2) = \frac{\frac{\partial u_M(x_{1M},x_{2M})}{\partial x_{1M}}}{\frac{\partial u_M(x_{1M},x_{2M})}{\partial x_{2M}}} &= \frac{\frac{1}{6}x_{1M}^{\frac{-5}{6}}x_{2M}^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}x_{1M}^{\frac{1}{6}}x_{2M}^{\frac{-1}{2}}} = \frac{1}{3}\frac{x_{2M}}{x_{1M}} \\
MRS_J(1,2) = \frac{\frac{\partial u_J(x_{1J},x_{2J})}{\partial x_{1J}}}{\frac{\partial u_J(x_{1J},x_{2J})}{\partial x_{2J}}} &= \frac{1}{3}\frac{x_{2J}}{x_{1J}} \\
\Rightarrow \frac{1}{3}\frac{x_{2M}}{x_{1M}} &= \frac{1}{3}\frac{x_{2J}}{x_{1J}} \\
\Leftrightarrow (24 - x_{1M})x_{2M} &= x_{1M}(32 - x_{2M}) \\
\Leftrightarrow x_{2M} &= \frac{4}{3}x_{1M}
\end{aligned}$$

da $x_{1M} + x_{1J} = 24$ und $x_{2M} + x_{2J} = 32$. Da die Kontraktkurve alle Pareto-optimalen Kombinationen darstellt, und Marias Anfangsaustattung obige Gleichung nicht erfüllt ($\frac{3}{4} \cdot 24 = 18 \neq 6$). Es ist somit möglich Marias Nutzen zu steigern ohne Juans zu verringern.

b) Ermittlung der Budgetgeraden für Maria:

$$\begin{aligned}
4x_1 + 9x_2 &= B \\
\Rightarrow B &= 4 \cdot 6 + 9 \cdot 24 = 240 \\
\Rightarrow x_2 &= -\frac{4}{9}x_1 + \frac{240}{9}
\end{aligned}$$

Bestimmung des Schnittpunkts mit der Kontraktkurve

$$\begin{aligned}
\frac{4}{3}x_1 &= -\frac{4}{9}x_1 + \frac{240}{9} \\
\Leftrightarrow (\frac{4}{3} + \frac{4}{9})x_1 &= \frac{240}{9} \\
\Leftrightarrow x_1 &= \frac{\frac{240}{9}}{\frac{16}{9}} = 15 \\
\Rightarrow x_2 &= 20
\end{aligned}$$

Also $x_{1M} = 15, x_{2M} = 20$ und $x_{1J} = 9, x_{2J} = 12$. Da auch

$$MRS_M(1,2) = \frac{1}{3}\frac{x_{2M}}{x_{1M}} = \frac{20}{3 \cdot 15} = \frac{4}{9} = MRS_J(1,2) = \frac{p_1}{p_2}$$

liegt somit ein Tauschgleichgewicht vor.

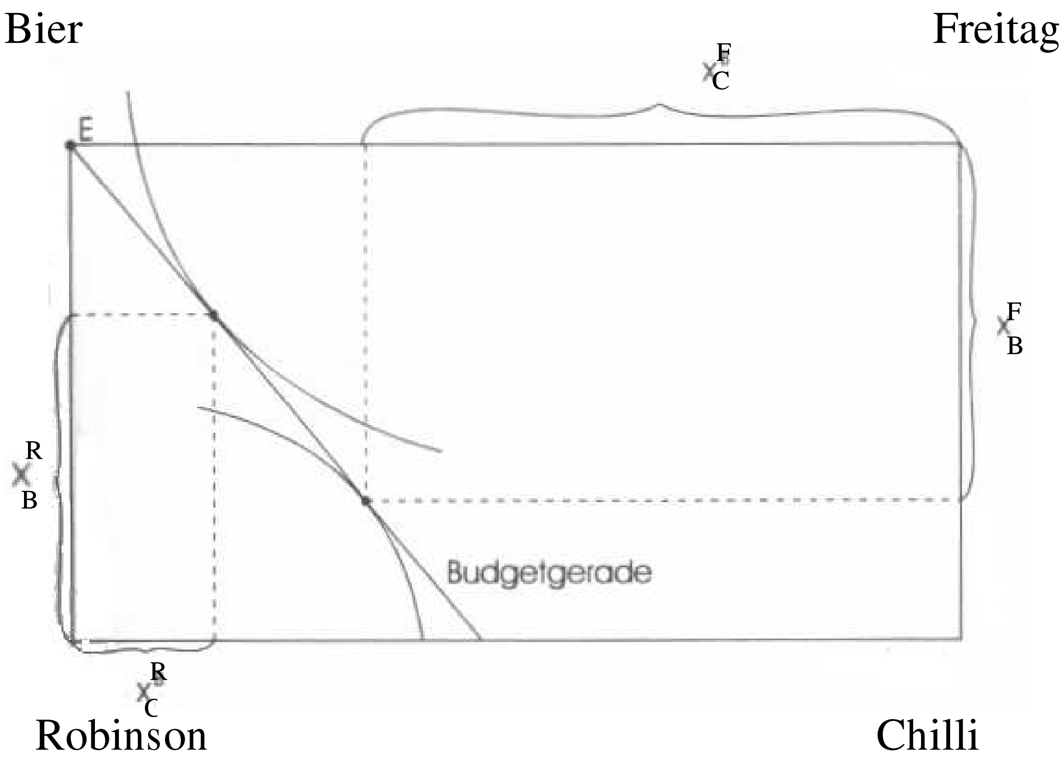
c) siehe Tafel. Die Indifferenzkurven von Maria und Juan berechnen sich natürlich durch die verschiedenen Nutzenniveaus $c > 0$:

$$x_1^{\frac{1}{6}}x_2^{\frac{1}{2}} = c \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = \frac{d}{x_1^{\frac{1}{3}}}$$

mit $d = c^2$.

Aufgabe 23 (Konzepte und Begriffe aus dem Bereich des Allgemeinen Gleichgewichts)

a) In einer großen Tauschwirtschaft orientieren sich die Haushalte in ihren Nachfrageentscheidungen an den Preisen. Dies kann im 2-Güter-2-Konsumenten-Fall in der Edgeworth-Box integriert werden, indem die Budgetgerade für die Haushalte eingetragen wird, Die Budgetgerade muss durch die Anfangsausstattung gehen, denn diese bestimmt die Höhe des Budgets. Die Steigung ist durch das Preisverhältnis gegeben. Jeder Haushalt versucht nun, sein Budget so auszuschöpfen, dass er seinen Nutzen maximiert. Dazu wählt er eine Güterkombination, bei der die Grenzrate der Substitution dem Preisverhältnis entspricht. Angenommen, in der Tauschwirtschaft ist die eingezeichnete Budgetgerade gegeben.

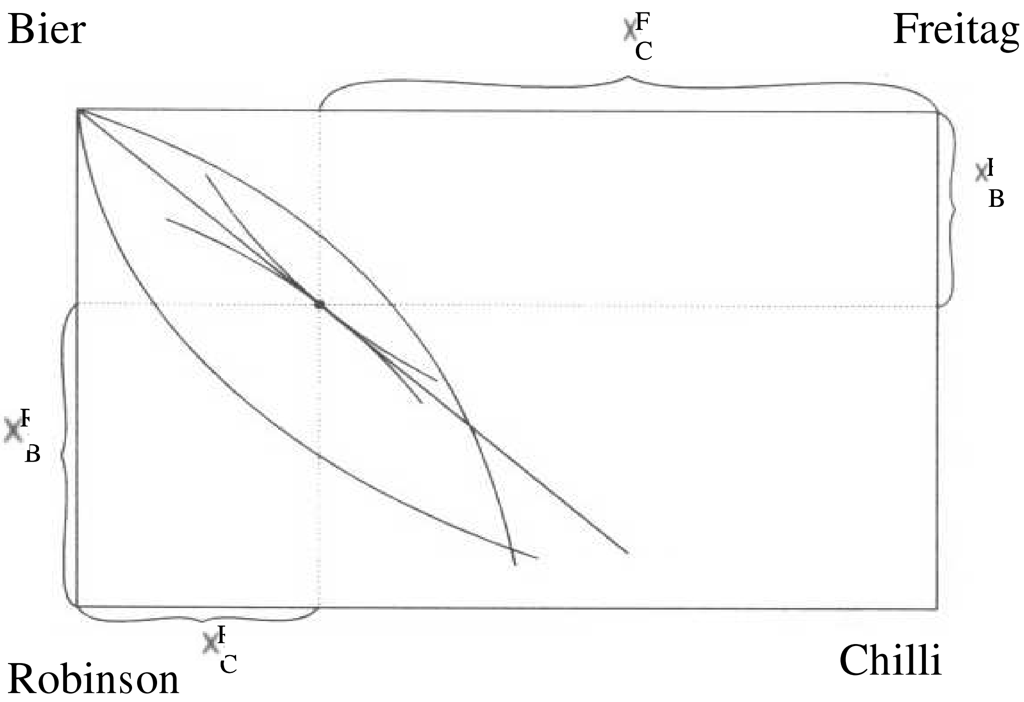


Robinsons Bruttonachfrage nach Bier-Dosen ist die Menge x_B^R, die er bei diesem Preisverhältnis konsumieren möchte. Die Nettonachfrage ist die Differenz der Bruttonachfrage und der Anfangsausstattung. Im obigen Beispiel ist Robinsons Nachfrage nach Bier negativ und nach Chilli positiv. Die Nettonachfrage wird auch als Überschussnachfrage bezeichnet. Robinsons Überschussnachfrage nach Bier sei mit z_B^R bezeichnet (analog z_C^R).

$$z_B^R = x_B^R - w_B^R$$

mit x: Bruttonachfrage und w Erstausstattung.

Im obigen Fall ist das Angebot nicht mit der Nachfrage identisch. Von Bier wird mehr als die gesamte vorhandene Menge nachgefragt ($x_B^R + x_B^F > w_B^R + w_B^F$). Bei den Chilli-Dosen gibt es ein Angebotsüberschuss. Der Marktmechanismus - so wird unterstellt- wird dazu führen, dass der Preis für Bier steigt, der Preis für Chilli fällt, bis letztlich ein Gleichgewichtspreis gegeben ist, bei dem soviel nachgefragt wie angeboten wird. Dieses Gleichgewicht wird Marktgleichgewicht, Konkurrenzgleichgewicht oder auch Walras-Gleichgewicht genannt. Das Gleichgewicht ist dadurch gekennzeichnet, dass ein Preisvektor gegeben ist, bei dem sowohl H. Robinson als H. Freitag ihre bevorzugte Güterkombination wählen können und alle Konsumentscheidungen ein Gleichgewicht zwischen Angebot und Nachfrage auf beiden Märkten bedingen.



Im Walras-Gleichgewicht gilt

$$MRS_R = MRS_F = \frac{p_C}{p_B}$$

mit $MRS =$ Grenzrate der Substitution, d.h. die Steigung der Indifferenzkurve.

Wir betrachten nun die Ausgangssituation aus Aufgabe 20. Hier wird

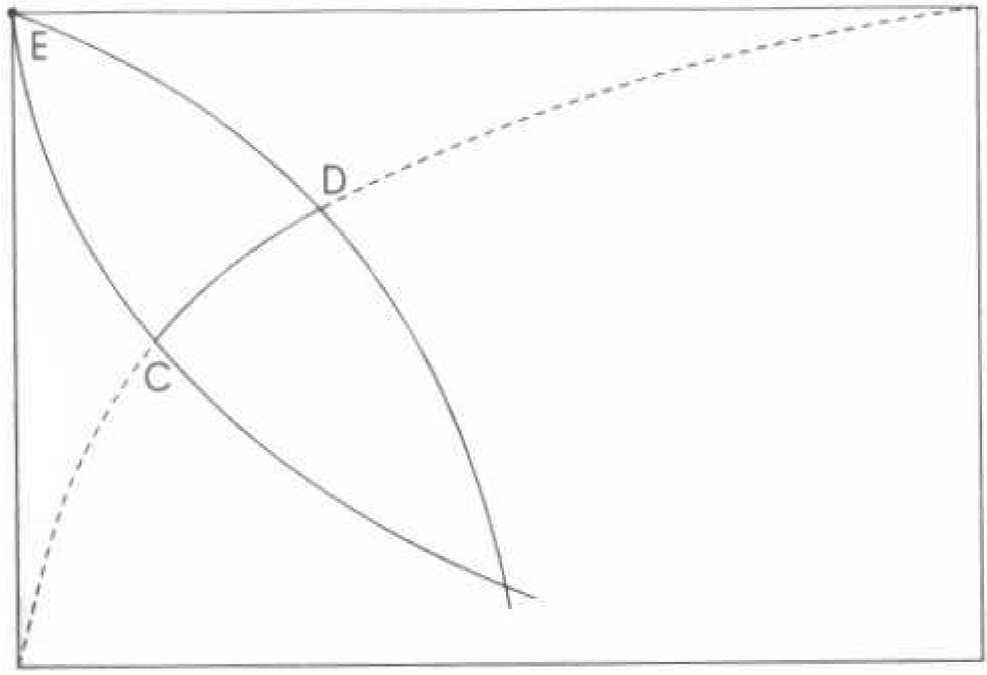
$$z_i := \sum_{l=1}^{m} q_i^l(p, w^l) - \sum_{l=1}^{m} w_i^l$$

als Überschußnachfrage nach Gut i bezeichnet. Die Überschußnachfrage ist somit die Differenz zwischen Bruttonachfrage und Anfangsbestand. Das Gesetz von Walras lautet:

Für ein Tauschgleichgewicht (q, p) gilt: Der Gesamtwert der Nachfrage ist gleich dem Gesamtwert des Angebots:

$$pz = \sum_{i=1}^{n} p_i z_i = 0.$$

b) Die Umkehrung des 1. Wohlfahrtstheorems trifft nicht zu. Eine Pareto-effiziente Allokation ist nicht immer auch ein Marktgleichgewicht. Erstens ist zu beachten, dass auf der Kontraktkurve alle Pareto-Optima liegen, zu einer gegebenen Anfangsausstattung aber nur ein Teil der Optima (hier die Strecke CD) als Marktgleichgewicht überhaupt in Betracht kommt.



Aber selbst für beliebige Anfangsausstattungen trifft die Umkehrung des ersten Wohlfahrtstheorems nicht zu. Das zweite Theorem der Wohlfahrtstheorie besagt, dass in dem Fall eine Pareto-effiziente Allokation nur bei konvexen Präferenzen stets ein Marktgleichgewicht ist.