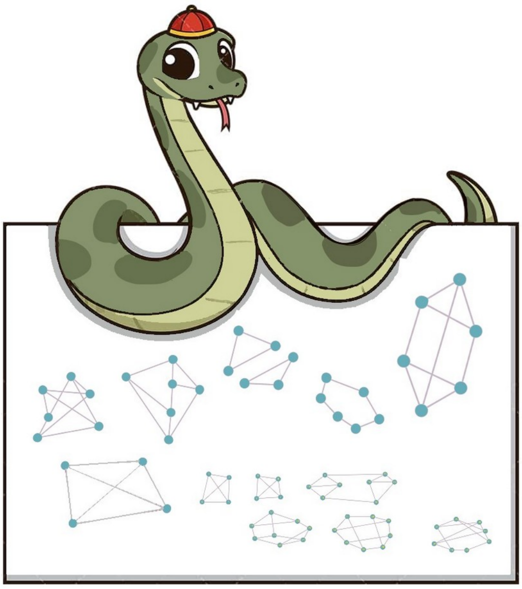
Les graphes isomorphes et k-réguliers

Année 2021-2022



Angeline MARMIESSE, Samuel MOYANO, Valentin LEVEL, Siméo MISONNE, Mathilde VIALA, Jeanne LOUGE-SOULE, Mélanie CABRIT, Lexina GONZALEZ, LESTANG Marilou, SOURNAC Inès, BRIANCON Anna, Lili-Rose MARTINS, Mélissa THOMAS, Yannis GILBERT ,Kenzo DUBOIS-MONTRELAY, Sylvestre FLAHAUX , Tiago FALIPOU, Raphaël TREMOULET

Enseignants : Arnaud BEDUER, Philippe LABIT, Laurent THOMAS, Fanny BIDART , Camille BOUSQUET, Sandrine VERNHET

Etablissements : Collège Georges Pompidou (Cajarc), Lycée Raymond Savignac (Villefranche)

Chercheur : Bertrand JOUVE, CNRS

1- Présentation du sujet :

Notre sujet de recherche est :

“Combien existe-t-il de graphes k-réguliers à n sommets non isomorphes ?”

Après nos recherches, nous avons trouvé plusieurs graphes non isomorphes entre eux pour des k et des n différents. Malheureusement, ces recherches ne sont pas entièrement complètes et il en existe sûrement d’autres.

Pour k = 1, il n'y a pas plusieurs graphes non isomorphes.

Pour k = 2, n = 3 il n'y a pas plusieurs graphes non isomorphes.

Pour k = 2, n = 4 il n'y a pas plusieurs graphes non isomorphes.

Pour k=3, n=6, on obtient deux graphes non isomorphes.

Pour k=3, n=8, on obtient trois graphes non isomorphes.

Pour k=4, n=5, on obtient un seul graphe.

Pour k=4, n=7, on obtient 2 graphes non isomorphes.

Pour k=4, n=8, on obtient 5 graphes non isomorphes.

Nous avons aussi plusieurs conjectures que nous n’avons pas prouvé :

Sur les graphes complémentaires :

- 1ère conjecture : Si deux graphes sont isomorphes alors leurs complémentaires sont isomorphes aussi.
- 2ème conjecture : Lorsque n est supérieur à k de 1 (lorsque n=k+1) alors il n’y a qu’un graphe possible et celui-ci n'a pas de complémentaire.
- 3ème conjecture : Lorsque le nombre de sommet est paire, que n est supérieur à 6 et que k=3 le nombre de graphe non - isomorphe est défini par la suite de récurrence :

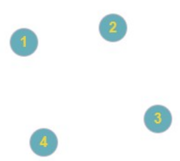
  - pour tout n pair, supérieur à 6 :

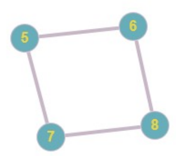
$$\begin{cases} u_6 = 2 \\ u_n = u_{n-2} + 1 \end{cases}$$

1.1- Qu’est-ce qu’un graphe ?

Un graphe est une forme composée de points appelés sommets. Ces sommets peuvent être reliés entre eux par des liaisons appelées arêtes.

Exemples :

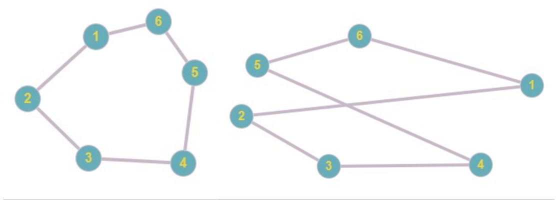




1.2- Qu’est-ce qu’un graphe isomorphe ?

Deux graphes sont isomorphes si chaque point des deux graphes a le même voisinage en les re-numérotant.

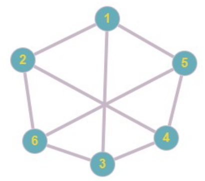
Exemples :

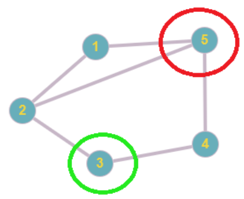


1.3- Qu’est-ce qu’un graphe k-régulier ?

Un graphe possède un degré qui est déterminé par le nombre de voisins, noté k. Un graphe est k-régulier si chaque sommet admet k arêtes qui lui sont attachées.

Exemples :





Sur le premier graphe tous les points sont reliés avec 3 autres points, le graphe est donc 3-régulier. Sur le deuxième graphe le 1°, le 3° et le 4° sommet sont reliés avec 2 autres sommets, le 2°, et le 5° sont reliés avec 3 sommets, le graphe n’est donc pas régulier.

2- Cas généraux :

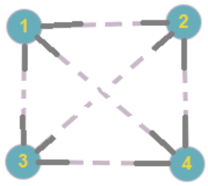
2.1- 1° cas général

Dans un graphe à n sommets, chaque sommet peut avoir au maximum n-1 voisins car les points ne doivent être reliés entre eux qu’une seule fois.
On peut définir la validité d’un graphe k-régulier avec la formule qui lie les degrés et les sommets. (voir la partie 3 : Démonstration)

2.2- 2° cas général

3 demi-arêtes partent de chaque sommet : donc pour avoir le nombre total de demi-arêtes on multiplie le nombre de sommets par le degré du graphe.
Et cela nous donne le nombre total de demi-arêtes et nous cherchons les arêtes entières donc nous divisons ce nombre par deux puisque une arête est reliée à deux points.

Exemple



3- Démonstration :

L'importance de la parité du nombre de sommets et du degré.

La parité du nombre de sommets et du degré nous permet de savoir si le graphe est réalisable.

Si le degré et le nombre de sommets sont impairs, le graphe n'est pas réalisable et nous allons voir pourquoi grâce à la formule suivante :

Nombre d'arêtes = Sommet x degré / 2

En transformant cette formule on obtient :

2 x nombre d'arêtes = nombre de sommet x degré

Quand on multiplie un nombre entier par deux, le résultat est pair donc le résultat de la multiplication du nombre de sommets par le degré doit être pair.

Donc un nombre pair peut forcément s'écrire de la forme : nombre pair = 2n

Et sachant que pour un nombre impair il existe un nombre pair inférieur de 1 on a

forcément : nombre impair = 2n+1

Maintenant on va voir que le produit de deux impair est forcément impair :

avec k un entier quelconque avec la forme 2k'+1 représentant le degré s'il est impair et n un entier quelconque avec la forme 2n'+1 représentant le nombre de sommets s'il est impair : le produit est donc de la forme :

=(2k'+1)*(2n'+1) ⇨ impair x impair

=2k'*2n' +2k'*1+1*2n4+1*1

$=4k'n'+2k'+2n'+1$

$=2(2k'n'+k'+n')+1$

➪ Le résultat est donc de la forme 2n+1, le produit de deux impairs est donc forcément impair

Comme précédemment, on va regarder le produit des deux, avec k pair donc de la forme 2k' représentant le degré et n impair donc de la forme 2n'+1 représentant le nombre de sommet : leur produit est donc de la forme :

$=(2k')*(2n'+1)$ ➪ impair * pair

$=4k'n'+2k'$

$=2(2k'n'+n')$

➪ Le résultat du produit est donc de la forme 2n, donc le produit d'un impair et d'un pair est forcément pair

pair x pair = pair ⇔ 2n

Et finalement on va regarder pour le produit de deux pairs, donc de la forme 2k' pour le degré et 2n' pour le nombre de sommet, leur produit sera de la forme :

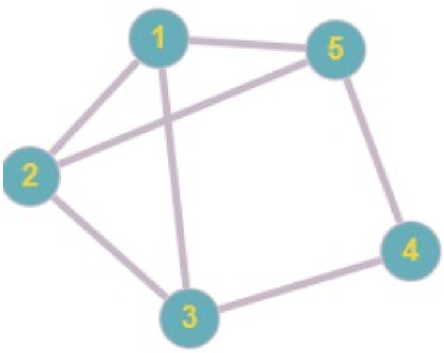
$=(2k')(2n')$

$=4k'n'$

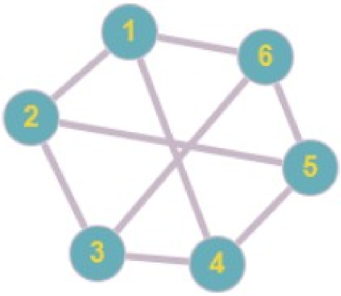
$=2(2(k'n'))$

➪ Le résultat du produit de deux pair est donc de la forme 2n donc forcément pair

Nous savons que le produit du nombre de sommets et du degré doit être pair, donc cela ne peut être le produit de deux impairs. Par conséquent le nombre de sommets et le degré ne peuvent pas être impairs en même temps.



Prenons l'exemple de ce graphe. On voit que le nombre de sommets et le degré ne sont pas pairs tous les deux donc on ne peut relier le sommet 4, car cela crée un déséquilibre dans le nombre de voisins.



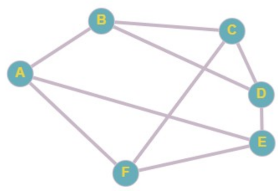
Dans ce graphe-ci, on voit que le nombre de sommets et le degré sont pairs. Donc tous les points peuvent se relier entre eux.

4 - Comment vérifier si deux graphes ne sont pas isomorphes

4.1 Répertorier les liaisons

<u>Exemple :</u>

Pour voir s'ils ne sont pas isomorphes, on nomme les sommets de l'un des graphes (graphe 1) et on répertorie les liaisons entre chaque sommet.



A → FBE

B → ADC

C → BDF

D → ECB

E → DFA

On essaie de replacer chaque sommet dans le graphe 2 afin qu'ils aient les mêmes liaisons. On ne peut pas trouver les mêmes liaisons dans ce graphe-ci, alors les graphes 1 et 2 ne sont pas isomorphes.

4.2 Théorème des triangles

Il y a une autre manière de déterminer si deux graphes sont isomorphes : le théorème des triangles. Un triangle dans un graphe est représenté par trois sommets reliés entre eux (les sommets peuvent avoir d'autres liaisons extérieures à ce triangle). La théorème des triangles dit que deux graphes avec le même nombre de sommets, le même nombre de voisins, et qui n'ont pas le même nombre de triangles ne sont pas isomorphes.

Nous avons démontré ce théorème par l'absurde :

Soient k, le nombre de voisins $\in]1 ; +\infty[$ et n, le nombre de sommets $\in]k+1 ; +\infty[$.

Soient deux graphes x et y avec le même nombre de sommets n et le même nombre de voisins k.

Soient u, le nombre de triangles dans le graphe x et v, le nombre de triangles dans le graphe y tels que $u \neq v$.

Le graphe y avec v triangles et n_y non défini. On répertorie les sommets de chaque triangle jusqu'à v triangle.

Triangle 1 : A,B,C

Triangle 2 : D,E,F

…

Triangle v : C,E,G

Quelques liaisons du graphe (avec les points des triangles) :

A → B,C…

B→ A,C…

C→ A,B,E,G…

D → E,F…

E→ D,F,C,G…

F→ D,E…

G→ C,E…

…

Le graphe x avec u triangles et $n_x=n_y$ et $k_x=k_y$ et on répertorie les sommets de chaque triangle jusqu'à u triangle.

Triangle 1 : C,F,A

...

Triangle u : G,A,E

Quelques liaisons du graphe x (avec les points des triangles) :

A→ C,F,G,E…

B→ …

C→ A,F…

D→ …

E→ A,G…

F→ A,C…

G→ E, A…

…

On remarque qu’il manque des liaisons au graphe x par rapport au graphe y pour qu’ils puissent être isomorphes.

A→ C,F,G,E,~~B,C~~…

B→ ~~A,C~~…

C→ A,F,~~B,E,G~~…

D→ ~~E,F~~…

E→ A,G,~~D,F,C~~…

F→ A,C,~~D,E~~…

G→ E, A,~~C~~…

…

~~C~~: Liaisons du graphe y qu’il manque au graphe x.

D : Liaisons du graphe x qu’il manque au graphe y.

Les deux graphes n’ont donc pas les mêmes liaisons. Donc ils ne sont pas isomorphes. Donc cette démonstration est fausse. Alors le théorème des triangles est vérifié.

Pour l’expliquer autrement :

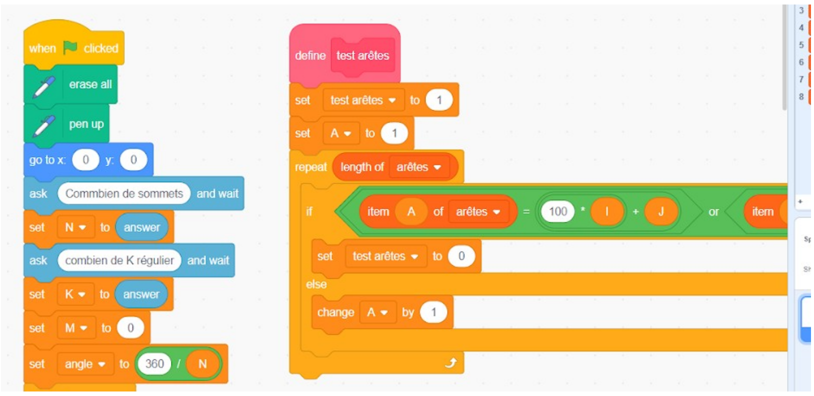
Soit deux graphes x et y qui ont le même nombre de sommets ainsi que le même nombre de liaisons pour chaque sommet et un nombre différent de triangles et qui sont isomorphes.

On peut renuméroter les sommets pour essayer d’obtenir des graphes isomorphes.

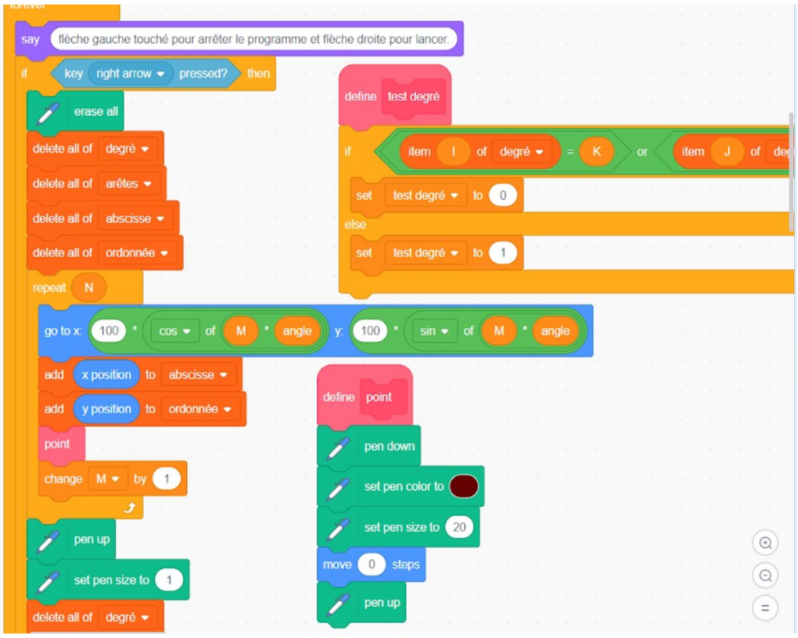
Lorsqu’on renumérote les sommets, le nombre de triangles est censé être conservé. Or vu que le nombre de triangle est différent pour les deux graphes, les deux graphes n’ont donc pas les mêmes liaisons, cela n’est donc pas possible ; il y a une incohérence donc les graphes x et y ne sont pas isomorphes.

5 - Une simulation scratch pour mieux comprendre

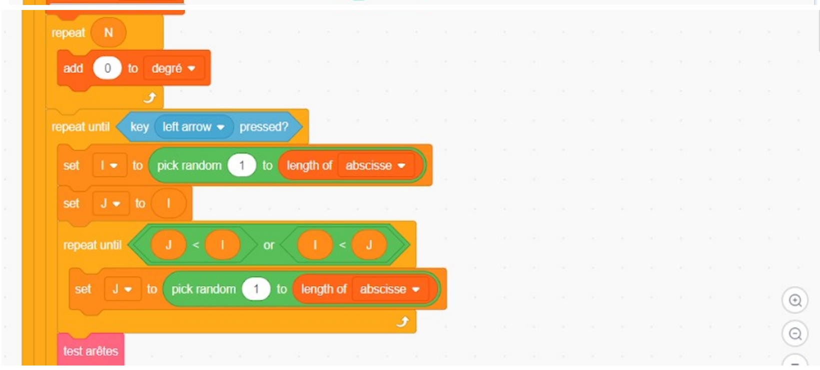
le lien ci-dessous permet d’accéder à un programme Scratch qui trace aléatoirement des graphes à n sommets, k-régulier ou pas.
https://scratch.mit.edu/projects/660111558/fullscreen/
Explication du programme

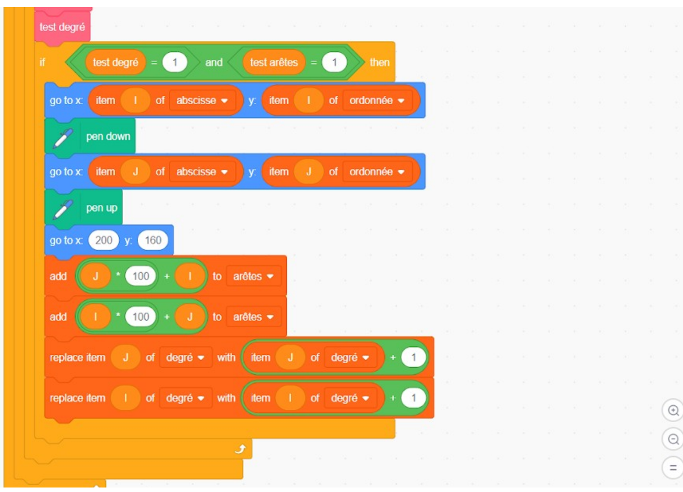


Cette partie du programme nous permet de tester les arêtes et de paramétrer les choix de l'utilisateur.



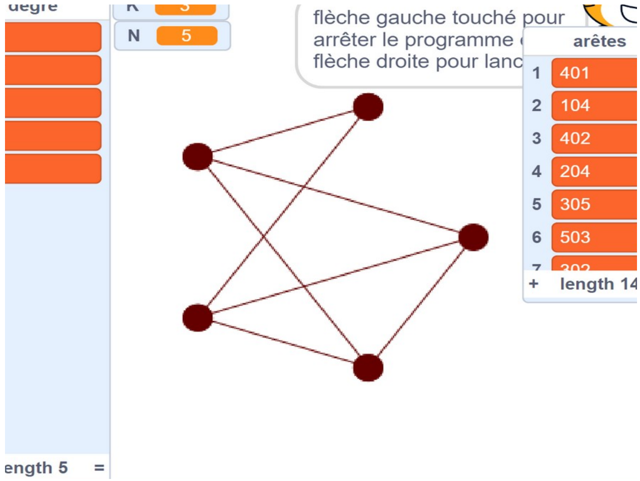
Dans cette partie, il y a la répartition des sommets sur un cercle de manière uniforme et homogène.

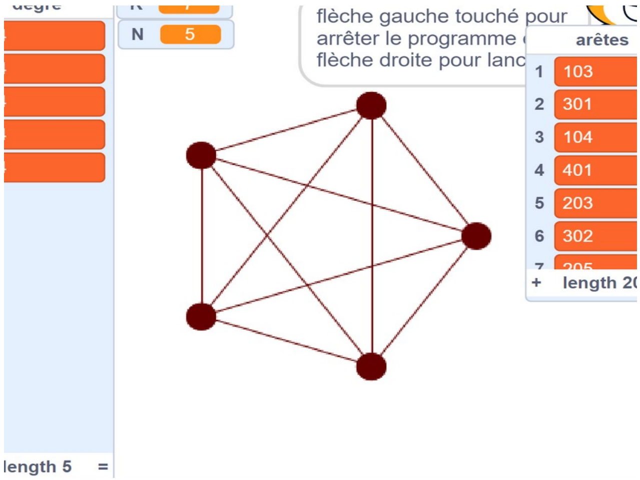




Dans cette partie on trace les arêtes de manière aléatoire.

Quelques exemples de tracés obtenus :





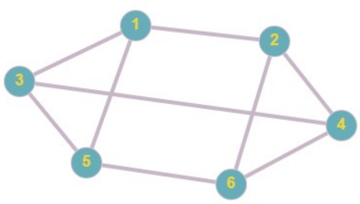
<u>6 - Les graphes complémentaires</u> :

6.1 Définition

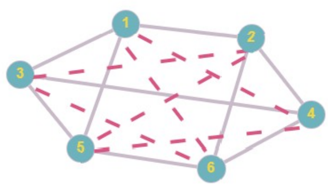
Dans un graphe quelconque on peut trouver son graphe complémentaire en reliant les sommets qui ne sont pas reliés entre eux et en supprimant les arêtes déjà existantes, les nouvelles arêtes créées forment ainsi le complémentaire.

<u>Exemple</u> :

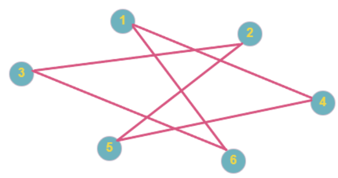
Graphe 1 Graphe complémentaire du graphe 1



—-------->



—---->



On relie les sommets qui ne
ne sont pas reliés entre eux.

On supprime les sommets qui sont reliés entre eux.

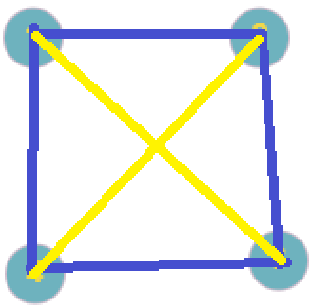
6.2 Conjectures

Nous avons ensuite observé que lorsqu'un graphe est k-régulier, son complémentaire est aussi k-régulier mais ce n'est pas obligatoirement le même k-régulier.
En effet, le nombre d'arêtes du graphe complémentaire (k') auquel chaque sommet est relié peut être supérieur ou inférieur au nombre d'arêtes du graphe k-régulier.

Pour démontrer cette hypothèse, nous avons utilisé la propriété suivante. Nous sommes partis du fait que dans un graphe à n sommet et k-régulier, chaque sommet ne peut avoir au maximum que n --1 voisins (car les arêtes ne doivent être reliées entres elles qu'une seule fois) chaque sommet possède un nombre d'arêtes existantes (k) et des arêtes non-existantes, qui sont égales à n-1-k.

Ce qui signifie que le graphe complémentaire aura n-1-k arêtes existantes et k arêtes non-existantes. Le graphe complémentaire sera donc n-1-k régulier.

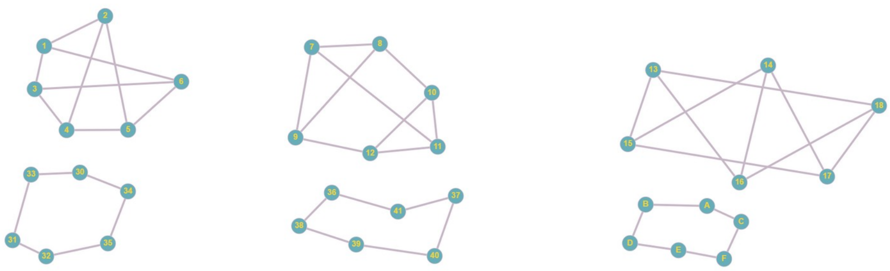
Par exemple : Pour un graphe 2-régulier à 4 sommets, c'est-à-dire que chaque sommet possède 2 voisins donc n=4. Lorsque l'on crée son graphe complémentaire, celui-ci est un 1 régulier car chacun des 4 sommets n'a qu'un seul voisin.



____ ***arêtes existantes***
____ ***arêtes non existantes***

1ère conjecture : Si deux graphes sont isomorphes alors leurs complémentaires sont isomorphes aussi.

Exemples :

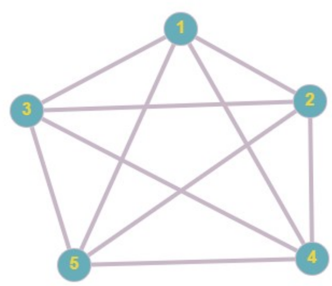


Graphes isomorphes

Leurs complémentaires

2ème conjecture : Lorsque n est supérieur à k de 1 (lorsque n=k+1) alors il n'y a qu'un graphe possible et celui-ci n'a pas de complémentaire.

Exemple : Pour k=4 et n=5



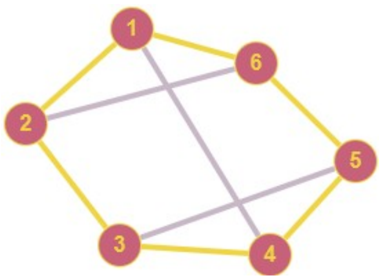
MÉTHODE UTILISÉE POUR RÉPONDRE AU SUJET :
Pour trouver des graphes non isomorphes, on construit directement le complémentaire et, à partir

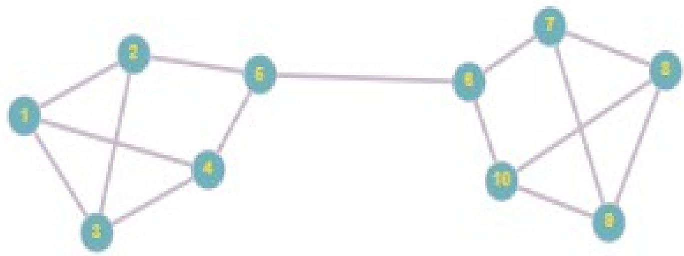
de celui-ci, le graphe initial. Cela permet de comparer plus facilement 2 graphes afin de savoir si ils sont isomorphes ou non.

Exemple : Le complémentaire des graphes K=4 et N=7 est
K=2 et N=7. C'est donc plus simple de construire un K=2 qu'un K=4.

7 - La notion de cycle HAMILTONIEN :

Un cycle hamiltonien est un chemin qui passe par chaque point du graphe et revient à son point de départ en ne passant qu'une seule fois par chaque point.



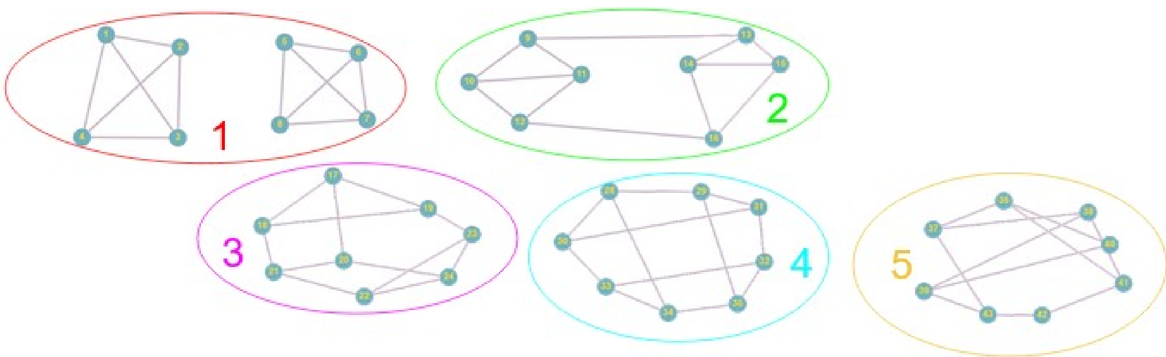


Ainsi, il existe des graphes connexes k-régulier sans cycle hamiltonien, comme nous pouvons le voir avec le graphe de droite qui est en réalité un graphe constitué de deux cycles hamiltoniens reliés par un chemin.

Pour N=8

On trouve 5 graphes complémentaires différents donc il y a 5 sortes de graphes possibles :

Les différents complémentaires :



8 - Interprétation de matrice

8. 1 - Qu'est ce qu'une matrice ?

Définition :

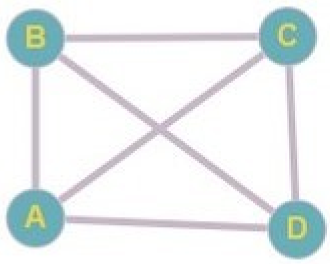
Une matrice est un tableau qui décrit quelles arêtes arrivent sur quels sommets.

Elle est de taille n*n où n représente le nombre de sommets.

1 indique qu'il y a une arête entre 2 points différents et 0 indique qu'il n'y en a pas.

Le nombre de 1 dans une colonne/ligne détermine le nombre de voisins que possède le point.

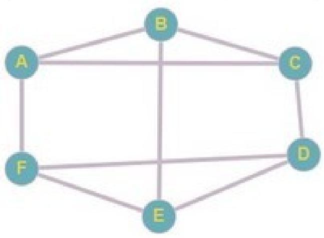
	A	B	C	D
A	X	1	1	1
B	1	X	1	1
C	1	1	X	1
D	1	1	1	X

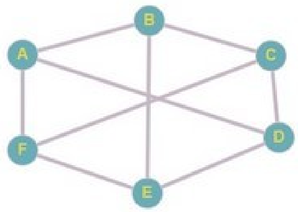


Les 2 graphes non-isomorphes 3-régulier pour n = 6 :

	A	B	C	D	E	F
A	X	1	1	0	0	1
B	1	X	1	0	1	0
C	1	1	X	1	0	0
D	0	0	1	X	1	1
E	0	1	0	1	X	1
F	1	0	0	1	1	X

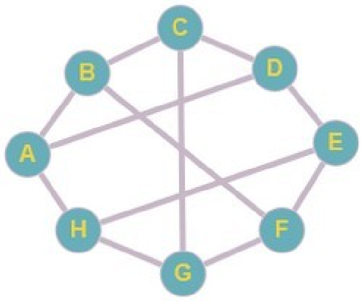
	A	B	C	D	E	F
A	X	1	0	1	0	1
B	1	X	1	0	1	0
C	0	1	X	1	0	1
D	1	0	1	X	1	0
E	0	1	0	1	X	1
F	1	0	1	0	1	X



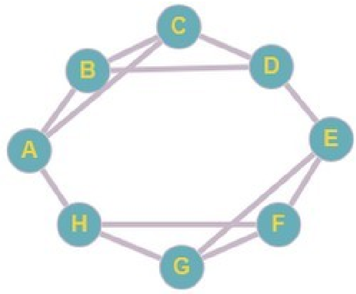


Les 3 graphes non-isomorphes 3-réguliers pour n = 8 :

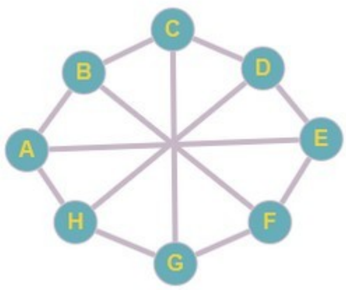
	A	B	C	D	E	F	G	H
A	X	1	0	1	0	0	0	1
B	1	X	1	0	0	1	0	0
C	0	1	X	1	0	0	1	0
D	1	0	1	X	1	0	0	0
E	0	0	0	1	X	1	0	1
F	0	1	0	0	1	X	1	0
G	0	0	1	0	0	1	X	1
H	1	0	0	0	1	0	1	X



	A	B	C	D	E	F	G	H
A	X	1	1	0	0	0	0	1
B	1	X	1	1	0	0	0	0
C	1	1	X	1	0	0	0	0
D	0	1	1	X	1	0	0	0
E	0	0	0	1	X	1	1	0
F	0	0	0	0	1	X	1	1
G	0	0	0	0	1	1	X	1
H	1	0	0	0	0	1	1	X



	A	B	C	D	E	F	G	H
A	X	1	0	0	1	0	0	1
B	1	X	1	0	0	1	0	0
C	0	1	X	1	0	0	1	0
D	0	0	1	X	1	0	0	1
E	1	0	0	1	X	1	0	0
F	0	1	0	0	1	X	1	0
G	0	0	1	0	0	1	X	1
H	1	0	0	1	0	0	1	X



8.2 - Théorie pour n = 10 et plus :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
A	X									
B		X								
C			X							
D				X						
E					X					
F						X				
G							X			
H								X		
I									X	
J										X

Comme nous nous intéressons aux graphes avec k-3 il faut donc que les points soient reliés avec leurs voisins pour que la matrice soit déjà k-2 donc dans chaque colonne on distingue deux 1 :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
A	X	1								1
B	1	X	1							
C		1	X	1						
D			1	X	1					
E				1	X	1				
F					1	X	1			
G						1	X	1		
H							1	X	1	
I								1	X	1
J	1								1	X

Et pour qu'il soit ensuite k-3 il faut rajouter un 1 à chaque colonne pour que chaque colonne/ligne possède trois 1 par la suite le tableau se remplit facilement comme un jeu de sudoku.

Cependant un problème se pose : où rajouter le premier 1 ?

Il peut être ajouté à n'importe quel endroit en sachant que le C et le I, le D et le H, le E et le G donneront le même graphe par relation de symétrie.

Les graphes où ce 1 est à un endroit différent sont tous non-isomorphes entre eux à part pour les pairs que nous avons situés au-dessus .

Donc pour un graphe k-10 il y a 4 graphes non-isomorphes et ainsi de suite.

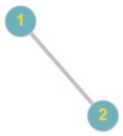
Ceci montre la relation de récurrence :

- pour tout n pair, supérieur à 6 :

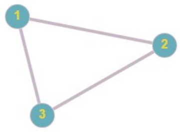
$$\begin{cases} u_6 = 2 \\ u_n = u_{n-2} + 1 \end{cases}$$

9 -Conclusion

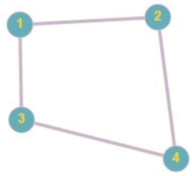
En conclusion, nous avons réussi à dénombrer 16 graphes non isomorphes entre eux. Mais si nous avions continué nos recherches, nous aurions pû en dénombrer beaucoup plus.



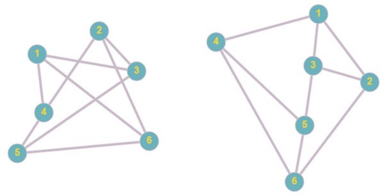
k=1 ; n=2



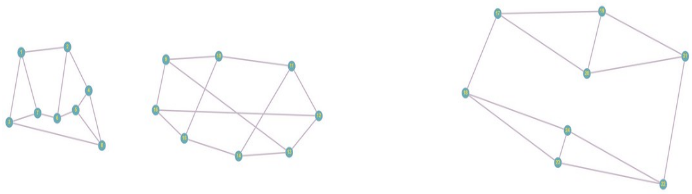
k=2 ; n=3



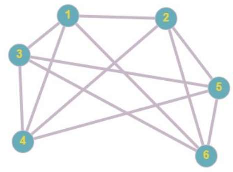
k=2 ; n=4



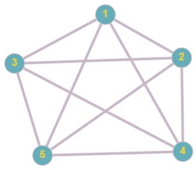
k=3 ; n=6



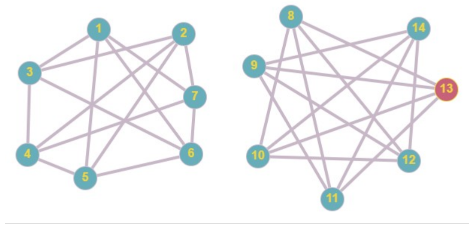
k=3, n=8



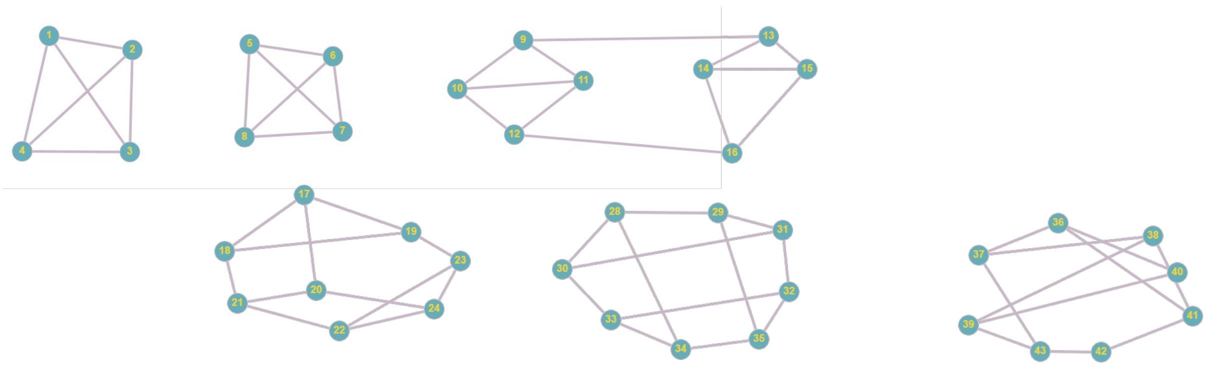
k=4, n=6



k=4 ; n=5



k=4, n=7



k=4, n=8