

# NORMALVERTEILUNG

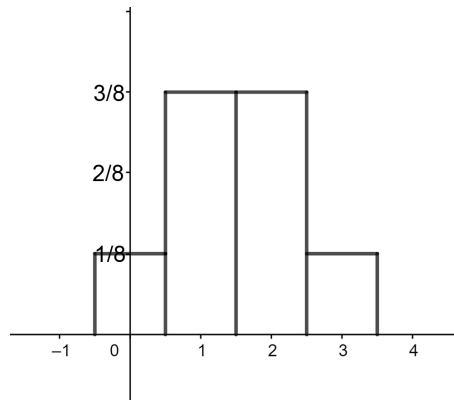
FRANZ LEMMERMEYER

## 1. DISKRETE UND STETIGE ZUFALLSVARIABLEN

Wenn man eine faire Münze drei Mal wirft, sieht die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Anzahl  $X$  von Zahl so aus:

$k$	0	1	2	3
$p(X = k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Stellt man diese Wahrscheinlichkeitsverteilung in einem Diagramm dar, sieht die Sache so aus:



Die Zufallsvariable  $X$  konnte nur drei Werte annehmen, nämlich  $X = 0, 1, 2$  oder  $3$ . Solche Zufallsvariablen nennt man diskret.

Es gibt auch nicht diskrete Zufallsvariablen; misst  $X$  etwa die Länge von bestimmten Schrauben, so sind prinzipiell alle positiven reellen Zahlen als Wert denkbar. In einem solchen Fall spricht man von stetigen Zufallsvariablen.

Man kann die Wahrscheinlichkeitsverteilung stetiger Zufallsvariablen mit Hilfe von Dichtefunktionen beschreiben. Ist  $f$  eine solche Dichtefunktion, dann kann man die Wahrscheinlichkeit, dass die Länge  $X$  der Schrauben zwischen zwei Werten  $a$  und  $b$  liegt, durch das Integral

$$p(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

beschreiben.

Welche Eigenschaften muss eine solche Dichtefunktion haben, damit man von einer Wahrscheinlichkeitsverteilung sprechen kann? Offenbar gehören die folgenden zwingend dazu.

- Die Wahrscheinlichkeit jedes Ereignisses muss  $\geq 0$  sein.
- Die Summe aller Wahrscheinlichkeiten muss 1 ergeben.

Das Schaubild von  $f$  muss also oberhalb der  $x$ -Achse sein, und die Fläche unter dem Schaubild muss 1 sein.

Wir definieren also Dichtefunktionen  $f$  über einem Intervall  $[a; b]$  als Funktionen mit den beiden obigen Eigenschaften besitzen:

- Es ist  $f(x) \geq 0$  für alle  $x$  mit  $a \leq x \leq b$ .
- Die Fläche unter dem Schaubild ist 1:

$$\int_a^b f(x) dx = 1.$$

Wenn man zeigen soll, dass eine vorgelegte Funktion eine Dichtefunktion ist, muss man also diese beiden Eigenschaften nachweisen. Beispiel:

*Zeigen Sie, dass  $f(x) = \frac{1}{x}$  auf dem Intervall  $I = [1; e]$  eine Dichtefunktion ist.*

In der Tat gilt  $f(x) \geq 0$  für alle  $x$  mit  $1 \leq x \leq e$ , und es ist

$$\int_1^e \frac{1}{x} dx = \ln(x)|_1^e = \ln(e) - \ln(1) = 1.$$

Eine Zufallsgröße  $X$  mit Werten in einem Intervall  $I$  nennt man stetig mit der Dichtefunktion  $f$ , wenn für alle  $r, s \in I$  die Wahrscheinlichkeit, dass  $X$  zwischen  $r$  und  $s$  liegt, durch das Integral

$$p(r \leq X \leq s) = \int_r^s f(x) dx$$

gegeben ist.

**Beispiel.** Die Länge von Pflastersteinen weicht nach Angaben des Herstellers vom Sollmaß um maximal  $\pm 1$  cm ab, wobei die Wahrscheinlichkeiten von Abweichungen durch die Dichtefunktion  $f(x) = k(1-x^2)$  über dem Intervall  $I = [-1; 1]$  beschrieben werden soll.

- Bestimmen Sie  $k$  so, dass  $f$  eine Dichtefunktion wird.
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit  $p(0,4 < X \leq 0,9)$  einer Abweichung zwischen 0,4 und 0,9 cm, wenn wir für  $k$  den Wert aus a) verwenden?

Der Zusatz “wenn wir für  $k$  den Wert aus a) verwenden” ist überflüssig, weil jeder andere Wert keine Dichtefunktion ergibt und es dann nichts zu rechnen gibt.

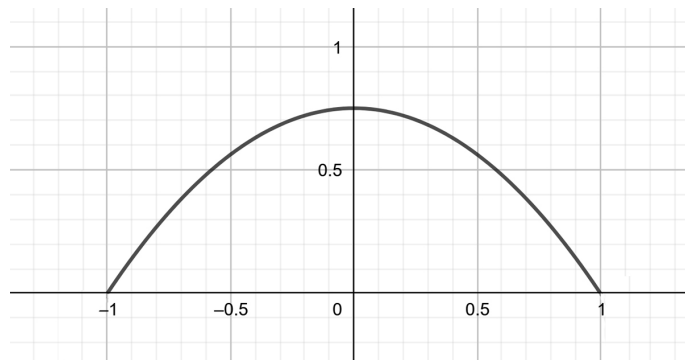
a) Damit  $f$  eine Dichtefunktion ist, muss  $f(x) \geq 0$  auf dem Intervall  $I$  sein (ist offenbar der Fall) und

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 1$$

gelten. Aus der letzten Gleichung folgt

$$1 = \int_{-1}^1 k(1 - x^2) dx = \left[ kx - \frac{kx^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{4k}{3},$$

Also muss  $k = \frac{3}{4}$  sein.



b) Gefragt ist nach der Wahrscheinlichkeit, dass die Pflastersteine zwischen 0,4 und 0,9 cm zu lang sind. Dabei ist es egal, ob die Bedingung  $0,4 < X$  oder  $0,4 \leq X$  heißt: Die Wahrscheinlichkeit, dass  $X$  einen genau vorgegebenen Wert annimmt, ist bei stetigen Zufallsverteilungen immer  $= 0$ ; der Fläche unter dem Schaubild ist es egal, ob man  $x = 0,4$  mit dazunimmt oder nicht.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist jedenfalls

$$p(0,4 \leq X \leq 0,9) = \int_{0,4}^{0,9} \frac{3}{4}(1 - x^2) dx = 0,20875.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also etwa 0,21.

## 2. DER ERWARTUNGSWERT

Der Erwartungswert einer diskreten Zufallsvariable  $X$ , welche die Werte  $x_1, \dots, x_n$  annehmen kann, ist die Summe

$$\mu = E(X) = x_1 \cdot p(X = x_1) + x_2 \cdot p(X = x_2) + \dots + x_n \cdot p(X = x_n).$$

Bei einer stetigen Zufallsvariablen mit Dichtefunktion  $f$  über dem Intervall  $I = [a; b]$  definiert man den Erwartungswert als Integral:

$$\mu = E(X) = \int_a^b x \cdot f(x) dx.$$

**Beispiel.** Zeige, dass die Funktion  $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x$  eine Dichtefunktion auf dem Intervall  $I = [0; 2]$  ist.

a) Berechne die Wahrscheinlichkeiten

$$\begin{aligned} p(X = 1) &= & p(1 \leq X \leq 2) &= \\ p(X \leq 0,5) &= & p(X \geq 1,5) &= \end{aligned}$$

b) Berechne den Erwartungswert von  $X$ .

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit weicht  $X$  um mehr als  $0,5\mu$  vom Erwartungswert ab?

Um zu zeigen, dass  $f$  eine Dichtefunktion auf  $I = [0; 2]$  ist, müssen wir zuerst zeigen, dass  $f(x) \geq 0$  für  $0 \leq x \leq 2$  ist. Das ist aber klar, denn  $f(x) = 1 - 0,5x \geq 0$  für  $x \leq 2$  (notfalls mit Skizze).

Zweitens ist zu zeigen, dass das Integral von  $f$  über dem Intervall  $I$  gleich 1 ist:

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 (1 - 0,5x) dx = x - \frac{1}{4}x^2 \Big|_0^2 = 2 - \frac{4}{4} = 1.$$

Also ist  $f$  eine Dichtefunktion auf  $I$ .

a) Die gesuchten Wahrscheinlichkeiten sind

$$\begin{aligned} p(X = 1) &= \int_1^1 (1 - 0,5x) dx = 0, \\ p(1 \leq X \leq 2) &= \int_1^2 (1 - 0,5x) dx = 0,25 \\ p(X \leq 0,5) &= \int_0^{0,5} (1 - 0,5x) dx = 0,4375 \\ p(X \geq 1,5) &= \int_{1,5}^2 (1 - 0,5x) dx = 0,0625 \end{aligned}$$

b) Die Berechnung des Erwartungswerts ist eine einfache Integration:

$$\int_0^2 xf(x) dx = \int_0^2 (x - 0,5x^2) dx = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 \Big|_0^2 = \frac{4}{2} - \frac{8}{6} = \frac{2}{3}.$$

Es ist also  $\mu = E(X) = \frac{2}{3}$ .

c) Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass  $X$  um höchstens  $0,5\mu = \frac{1}{3}$  vom Erwartungswert abweicht, also

$$p\left(\frac{1}{3} \leq X \leq 1\right) = \int_{\frac{1}{3}}^1 (1 - 0,5x) dx = \frac{4}{9}.$$

## AUFGABEN

- (1) Zeigen Sie, dass  $f(x) = 3(x - 1)^2$  eine Dichtefunktion einer stetigen Zufallsvariable  $X$  auf dem Intervall  $I = [0; 1]$  ist.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten

a)  $p(X = 0,5)$ ;   b)  $p(X \geq 0,5)$ ;   c)  $p(\frac{1}{3} < X < \frac{2}{3})$ .

Bestimmen Sie weiter den Erwartungswert von  $X$ .

- (2) Bestimmen Sie  $k$  so, dass  $f(x) = k(x - 2)^2$  eine Dichtefunktion einer stetigen Zufallsvariablen  $X$  auf dem Intervall  $[0; 2]$  ist, und bestimmen Sie  $p(X \leq 1)$ . Berechnen Sie weiter den Erwartungswert  $\mu = E(X)$ .
- (3) Zeigen Sie, dass  $f(x) = e^{-x}$  eine Dichtefunktion einer stetigen Zufallsvariablen  $X$  auf dem Intervall  $[0; \infty]$  ist, und berechnen Sie  $p(1 \leq X \leq 2)$ .
- (4) Zeigen Sie, dass  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  eine Dichtefunktion einer stetigen Zufallsvariablen  $X$  auf dem Intervall  $[1; \infty]$  ist, und berechnen Sie  $p(X \leq 2)$ . Bestimmen Sie den Erwartungswert von  $X$ .

## LÖSUNGEN

- (1) Zeigen Sie, dass  $f(x) = 3(x-1)^2$  eine Dichtefunktion einer stetigen Zufallsvariable  $X$  auf dem Intervall  $I = [0; 1]$  ist.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten

$$a) p(X = 0,5); \quad b) p(X \geq 0,5); \quad c) p\left(\frac{1}{3} < X < \frac{2}{3}\right).$$

Bestimmen Sie weiter den Erwartungswert von  $X$ .

Es gilt  $f(x) = 3(x-1)^2 \geq 0$ , weil Quadrate nicht negativ sein können. Weiter ist

$$\int_0^1 3(x-1)^2 dx = (x-1)^3 \Big|_0^1 = 1.$$

Also ist  $f$  eine Dichtefunktion auf  $I = [0; 1]$ .

Die Wahrscheinlichkeiten sind

$$p(X = 0,5) = \int_{0,5}^{0,5} 3(x-1)^2 dx = 0.$$

$$p(X \geq 0,5) = \int_{0,5}^1 3(x-1)^2 dx = (x-1)^3 \Big|_{0,5}^1 = \frac{1}{8}.$$

$$p\left(\frac{1}{3} < X < \frac{2}{3}\right) = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} 3(x-1)^2 dx = (x-1)^3 \Big|_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} = -\frac{1}{27} + \frac{8}{27} = \frac{7}{27}.$$

Der Erwartungswert von  $X$  ist

$$\begin{aligned} \mu = E(X) &= \int_0^1 3x(x-1)^2 dx = \int_0^1 (3x^3 - 6x^2 + 3x) dx \\ &= \frac{3x^4}{4} - 2x^3 + \frac{3x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{3}{4} - 2 + \frac{3}{2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

- (2) Bestimmen Sie  $k$  so, dass  $f(x) = k(x-2)^2$  eine Dichtefunktion einer stetigen Zufallsvariablen  $X$  auf dem Intervall  $[0; 2]$  ist, und bestimmen Sie  $p(X \leq 1)$ . Berechnen Sie weiter den Erwartungswert  $\mu = E(X)$ .

Damit  $f(x) \geq 0$  für  $0 \leq x \leq 2$  gilt, muss  $k \geq 0$  sein. Weiter muss gelten

$$1 = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 k(x-2)^2 dx = \frac{k}{3}(x-2)^3 \Big|_0^2 = \frac{8k}{3}.$$

Also ist  $k = \frac{3}{8}$ .

Damit folgt

$$p(X \leq 1) = \int_0^1 \frac{3}{8}(x-2)^2 dx = \frac{1}{8}(x-2)^3 \Big|_0^1 = -\frac{1}{8} + 1 = \frac{7}{8}.$$

Der Erwartungswert von  $X$  ist

$$\begin{aligned}\mu = E(X) &= \int_0^2 x f(x) dx = \int_0^2 \frac{3x(x-2)^2}{8} dx \\ &= \frac{3x^3 - 12x^2 + 12x}{8} \Big|_0^2 = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

- (3) Zeigen Sie, dass  $f(x) = e^{-x}$  eine Dichtefunktion einer stetigen Zufallsvariablen  $X$  auf dem Intervall  $[0; \infty]$  ist, und berechnen Sie  $p(1 \leq X \leq 2)$ .

Zum Einen ist  $f(x) > 0$  für alle  $x$ ; zum Anderen gilt

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{\infty} = -e^{-\infty} + e^{-0} = 1.$$

Also ist  $f$  eine Dichtefunktion auf  $I = [0; \infty]$ .

Weiter ist

$$p(1 \leq X \leq 2) = \int_1^2 e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_1^2 = -e^{-2} + e^{-1} = \frac{1}{e} - \frac{1}{e^2} \approx 0,2325.$$

- (4) Zeigen Sie, dass  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  eine Dichtefunktion einer stetigen Zufallsvariablen  $X$  auf dem Intervall  $[1; \infty]$  ist, und berechnen Sie  $p(X \leq 2)$ . Bestimmen Sie den Erwartungswert von  $X$ .

Offenbar ist  $f(x) > 0$  für alle  $x > 0$ . Weiter gilt

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_1^{\infty} = 1$$

wegen  $\frac{1}{x} \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow \infty$ . Also ist  $f$  Dichtefunktion auf  $I = [1; \infty]$ .

Jetzt folgt

$$\begin{aligned}p(X \leq 2) &= \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_1^2 = \frac{1}{2} \\ \mu &= \int_1^{\infty} x \cdot \frac{1}{x^2} dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \ln(x) \Big|_1^{\infty} = \ln(\infty) = \infty.\end{aligned}$$

Der Erwartungswert ist also unendlich groß.

## 3. EXPONENTIALVERTEILUNG

Die für die Anwendungen wichtigste Wahrscheinlichkeitsverteilung ist die Normalverteilung. Leider muss man zum Nachweis der wesentlichen Eigenschaften der Normalverteilung Techniken heranziehen, die auf der Schule nicht behandelt werden. Im Gegensatz dazu kann man die Exponentialverteilung durchaus mit den Mitteln der Schulmathematik verstehen.

Eine Zufallsgröße  $X$  heißt exponentialverteilt mit dem Parameter  $\lambda > 0$ , wenn sie die Dichtefunktion  $f$  mit

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

für  $x \geq 0$  besitzt.

**Satz 1.** Die Funktion  $f$  mit  $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$  ist für jedes  $\lambda > 0$  eine Dichtefunktion.

*Beweis.* Wir rechnen nach, dass das Integral über das Intervall  $I = [0; \infty]$  gleich 1 ist.

$$\int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x} \Big|_0^{\infty} = 0 + 1 = 1$$

wegen  $e^{-\lambda x} \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow \infty$ . □

Der Erwartungswert einer stetigen Zufallsvariablen auf dem Intervall  $I = [a; b]$  ist definiert als

$$\mu = \int_a^b x f(x) dx.$$

Im Falle einer exponentialverteilten Zufallsgröße ist daher

$$\mu = \int_0^{\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx.$$

Wir machen für die Stammfunktion  $G$  von  $g(x) = \lambda x e^{-\lambda x}$  den Ansatz  $G(x) = (ax + b)e^{-\lambda x}$  und finden

$$G'(x) = ae^{-\lambda x} - \lambda(ax + b)e^{-\lambda x} = (-\lambda ax + a - \lambda b)e^{-\lambda x}.$$

Damit  $G'(x) = g(x)$  wird, muss  $-\lambda a = \lambda$  und  $a - \lambda b = 0$  sein. Es ist also  $a = -1$  und  $b = -\frac{1}{\lambda}$ , d.h.

$$G(x) = -(x + \frac{1}{\lambda})e^{-\lambda x}.$$

Damit folgt

$$\mu = \int_0^{\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx = -(x + \frac{1}{\lambda})e^{-\lambda x} \Big|_0^{\infty}.$$

Weil  $x e^{-\lambda x}$  für große  $x$  gegen 0 geht, folgt also

$$\mu = \frac{1}{\lambda}.$$

**Satz 2.** Der Erwartungswert einer exponentialverteilten Zufallsvariable ist  $\mu = \frac{1}{\lambda}$ .



Die Wahrscheinlichkeit, dass  $X$  kleiner als der Erwartungswert ist, ist

$$p(X \leq \mu) = \int_0^{\mu} \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x} \Big|_0^{\frac{1}{\lambda}} = -e^{-1} + 1 = 1 - \frac{1}{e}.$$

Dieser Wert ist in etwa gleich 0,63; es ist also deutlich wahrscheinlicher, dass das Ergebnis einer exponentialverteilten Zufallsgröße kleiner als der Erwartungswert ist als dass es größer ist.

Die Standardabweichung einer stetigen Zufallsvariable mit Dichtefunktion  $f$  auf dem Intervall  $I = [a; b]$  ist definiert durch

$$\sigma = \sqrt{\int_a^b (x - \mu)^2 f(x) dx}.$$

**Satz 3.** Die Standardabweichung einer exponentialverteilten Zufallsvariable mit Dichtefunktion  $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$  ist gegeben durch  $\sigma = \frac{1}{\lambda}$ .

Wir brauchen eine Stammfunktion  $G$  von  $g(x) = \lambda(x - \frac{1}{\lambda})^2 e^{-\lambda x}$ . Der Ansatz  $G(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-\lambda x}$  liefert

Damit folgt

*Die Lebensdauer eines elektronischen Bauteils ist exponentialverteilt. Es hält durchschnittlich 8 Jahre. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein solches Bauteil*

- (1) höchstens 6 Jahre hält;
- (2) länger als 8 Jahre hält;
- (3) zwischen 2 und 10 Jahren hält;
- (4) noch mindestens 3 Jahre hält, wenn es bereits 5 Jahre alt ist.

Der Erwartungswert für die Lebensdauer beträgt 8 Jahre. Wegen  $\mu = \frac{1}{\lambda}$  ist also  $\lambda = \frac{1}{8}$  und die Dichtefunktion

$$f(x) = \frac{1}{8} e^{-\frac{1}{8}x}.$$

Die einzelnen Wahrscheinlichkeiten sind

$$p(X \leq 6) = \int_0^6 \frac{1}{8} e^{-\frac{1}{8}x} dx = -e^{-\frac{1}{8}x} \Big|_0^6 \approx 0,528$$

$$p(X > 8) = 1 - p(X \leq 8) = 1 - \int_0^8 \frac{1}{8} e^{-\frac{1}{8}x} dx = 1 + [e^{-\frac{1}{8}x}]_0^8 = \frac{1}{e} \approx 0,368.$$

$$p(2 \leq X \leq 10) = \int_2^{10} \frac{1}{8} e^{-\frac{1}{8}x} dx = -e^{-\frac{1}{8}x} \Big|_2^{10} \approx 0,492.$$

## 4. NORMALVERTEILUNG

Unter allen möglichen Dichtefunktionen nimmt die Normalverteilung eine zentrale Stelle ein. Der LS zaubert sie wie ein Kaninchen aus dem Hut:

*Eine stetige Zufallsgröße heißt normalverteilt mit den Parametern  $\mu$  und  $\sigma$ , wenn sie eine Gaußsche Glockenfunktion  $\phi_{\mu,\sigma}$  mit*

$$\phi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

*als Dichtefunktion über  $\mathbb{R}$  besitzt. Der zugehörige Graph heißt Gaußsche Glockenkurve.*

Was der geneigte Leser nicht erfährt, aber bei den Aufgaben wissen muss: der Parameter  $\mu$  ist der Erwartungswert,  $\sigma$  die Standardabweichung. Was diese Begriffe bei einer stetigen Wahrscheinlichkeitsverteilung bedeuten, wird nicht erklärt. Der Nachweis, dass  $\phi$  eine Dichtefunktion ist, kann man mit den Mitteln der heutigen Schulmathematik nicht erbringen; der LS zieht sich hier mit einem “Man kann zeigen” aus der Affäre. Ebenfalls zeigen kann man, dass die Normalverteilung so etwas wie die Grenzfunktion der Binomialverteilung ist und daher für große Werte von  $n$  näherungsweise anstatt der Binomialverteilung benutzt werden darf.

Dass man allerdings so tut, als wäre  $\mu$  allein deswegen der Erwartungswert der dazugehörigen Wahrscheinlichkeitsverteilung, weil man dieser Zahl den Buchstaben  $\mu$  gibt, ist schon frech. Wir halten fest:

- Wir können nicht zeigen, dass  $\phi$  eine Dichtefunktion ist.
- Wir können nicht zeigen, dass die Binomialverteilung für große  $n$  gegen die Normalverteilung konvergiert.
- Wir können nicht zeigen, dass der Parameter  $\mu$  in  $\phi_{\mu,\sigma}$  mit dem Erwartungswert von  $\phi$  übereinstimmt, und wir wissen nicht, was der Erwartungswert einer stetigen Zufallsgröße überhaupt sein soll.
- Wir können nicht zeigen, dass der Parameter  $\sigma$  in  $\phi_{\mu,\sigma}$  mit der Standardabweichung von  $\phi$  übereinstimmt, und wir wissen nicht, was die Standardabweichung einer stetigen Zufallsgröße überhaupt sein soll.

Ausgestattet mit diesem geballten Wissen machen wir uns nun an die Lösung der Aufgaben.

Das wenige, was wir beweisen können, ist folgendes.

**Satz 4.** *Die Funktion*

$$\phi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

*besitzt in  $x = \mu$  ein Maximum und in  $x = \mu \pm \sigma$  Wendepunkte.*

Zum Beweis bilden wir die ersten beiden Ableitungen.

$$\begin{aligned}\phi'_{\mu,\sigma}(x) &= -\frac{x-\mu}{\sigma^2} \cdot \phi_{\mu,\sigma}(x) \\ \phi''_{\mu,\sigma}(x) &= -\frac{1}{\sigma^2} \cdot \phi_{\mu,\sigma}(x) + \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^4} \cdot \phi_{\mu,\sigma}(x).\end{aligned}$$

Maximum:

$$\phi'_{\mu,\sigma}(x) = -\frac{x-\mu}{\sigma^2} \cdot \phi_{\mu,\sigma}(x) = 0$$

Satz vom Nullprodukt ( $e$ -Funktion  $\neq 0$ ) liefert  $x = \mu$ . Wegen

$$\phi''_{\mu,\sigma}(\mu) = -\frac{1}{\sigma^2} \cdot \phi_{\mu,\sigma}(\mu) < 0$$

liegt ein Maximum vor.

Wendepunkte: Nullsetzen von  $\phi''_{\mu,\sigma}(x)$  liefert

$$-\frac{1}{\sigma^2} + \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^4} = 0,$$

also  $(x-\mu)^2 = \sigma^2$  und damit  $x_1 = \mu - \sigma$  und  $x_2 = \mu + \sigma$ .

### Aufgaben zur Normalverteilung.

- (1) Eine stetige Zufallsvariable ist normalverteilt mit dem Erwartungswert 6 und Standardabweichung 2. Bestimmen Sie  $p(X = 4)$ ,  $p(2 \leq X \leq 5)$  und  $p(4 \leq X \leq 12)$ .
- (2) Die Füllmenge  $X$  von Essigflaschen mit einer Füllmenge von 200 ml ist normalverteilt mit  $\mu = 202$  (in ml) und  $\sigma = 3,5$ .
  - a) Bestimmen Sie den Anteil der Flaschen, die mindestens 2 % weniger Essig enthalten als auf dem Etikett angegeben.
  - b) Auf welchen Wert muss man  $\mu$  korrigieren, damit maximal 2 % aller Flaschen eine Füllmenge von 196 ml unterschreiten?

### Lösungen.

- (1) *Eine stetige Zufallsvariable ist normalverteilt mit dem Erwartungswert 6 und Standardabweichung 2. Bestimmen Sie  $p(X = 4)$ ,  $p(2 \leq X \leq 5)$  und  $p(4 \leq X \leq 12)$ .*

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein bestimmter Wert eintritt, ist bei stetigen Zufallsgrößen immer 0. Also ist  $p(X = 4) = 0$ .

Weiter ist (kumulierte Normalverteilung)

$$\begin{aligned}p(2 \leq X \leq 5) &\approx 0,2858 \\ p(4 \leq X \leq 12) &\approx 0,84.\end{aligned}$$

(2) Die Füllmenge  $X$  von Essigflaschen mit einer Füllmenge von 200 ml ist normalverteilt mit  $\mu = 202$  (in ml) und  $\sigma = 3,5$ .

a) Bestimmen Sie den Anteil der Flaschen, die mindestens 2 % weniger Essig enthalten als auf dem Etikett angegeben.

b) Auf welchen Wert muss man  $\mu$  korrigieren, damit maximal 2 % aller Flaschen eine Füllmenge von 196 ml unterschreiten?

a) 2 % von 200 ml sind 4 ml; es geht also um

$$p(X \leq 196) \approx 0,043.$$

Wir müssen  $\mu$  so festlegen, dass  $p(X \leq 196) < 0,02$  wird. Ausprobieren liefert

$\mu$	$p(X \leq 0,98\mu)$
203	0,0227
203,5	0,0161
204	0,0111

Man muss auf  $\mu = 204$  (oder  $\mu = 203,5$ ) korrigieren, falls  $\sigma$  beibehalten werden kann.

## 5. AUFGABENFUNDUS

**Aufgabe II.8.** Die Zufallsgröße  $X$  beschreibt die Körpergröße von Neugeborenen in mm. Sie wird als normalverteilt mit dem Erwartungswert  $\mu = 522$  und der Standardabweichung  $\sigma = 19$  angenommen. Ein Neugeborenes wird zufällig ausgewählt.

- (a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass seine Körpergröße kleiner als 500 mm ist.
- (b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass seine Körpergröße um höchstens 20 mm vom Erwartungswert von  $X$  abweicht.
- (c) Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass seine Körpergröße um höchstens  $a$  mm vom Erwartungswert von  $X$  abweicht, beträgt mindestens 80 %. Bestimmen Sie die kleinste natürliche Zahl  $a$ , für die diese Aussage zutrifft.

$X$  ist normalverteilt mit Erwartungswert  $\mu = 522$  und Standardabweichung  $\sigma = 19$ . Der Taschenrechner liefert

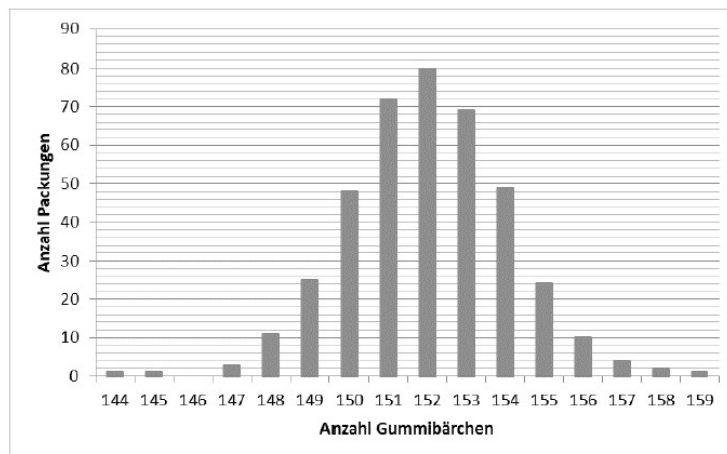
$$p(0 \leq X \leq 500) \approx 0,123$$
$$p(502 \leq X \leq 542) \approx 0,7075$$

- c) Gesucht ist die kleinste natürliche Zahl  $a$  mit  $p(522 - a \leq X \leq 522 + a) \geq 0,8$ . Hier muss man probieren:

$$p(522 - 24 \leq X \leq 522 + 24) \approx 0,793,$$
$$p(522 - 25 \leq X \leq 522 + 25) \approx 0,812.$$

Die kleinste Zahl  $a$  ist also  $a = 25$ .

**Aufgabe II.9.** Es wurden stichprobenartig 400 Standardpackungen Gummibärchen untersucht und das Ergebnis in einem Säulendiagramm festgehalten.



a) Ermitteln Sie auf der Basis der Stichprobe die Wahrscheinlichkeit, dass eine Standardpackung mindestens 150 und höchstens 152 Gummibärchen enthält.

Die Anzahl der Gummibärchen in einer Standardpackung aus der laufenden Produktion soll durch eine normalverteilte Zufallsgröße  $X$  mit den Parametern  $\mu$  und  $\sigma$  modelliert werden.

b) Beschreiben Sie, wie man mit Hilfe des Säulendiagramms einen Näherungswert für  $\mu$  bestimmen kann.

Aus den Daten des Diagramms erhält man näherungsweise  $\mu = 152$  und  $\sigma = 2$ .

c) Berechnen Sie mit Hilfe der Normalverteilung die Wahrscheinlichkeit, dass eine Standardpackung mindestens 150 und höchstens 152 Gummibärchen enthält.

d) Der laufenden Produktion werden 100 Standardpackungen zufällig entnommen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich darunter höchstens vier Standardpackungen mit weniger als 149 Gummibärchen befinden.

a) Die Anzahl der Packungen mit 150, 151 oder 152 Gummibärchen ist 48, 72 bzw. 80. Wegen  $48 + 72 + 80 = 200$  beträgt die Wahrscheinlichkeit 50 %.

b) Für jede Gummibärenanzahl bildet man das Produkt aus dieser Anzahl mit der Anzahl der Packungen, welche genau diese Gummibärenanzahl enthalten. Diese Produkte werden aufsummiert und die Summe wird durch 400 geteilt.

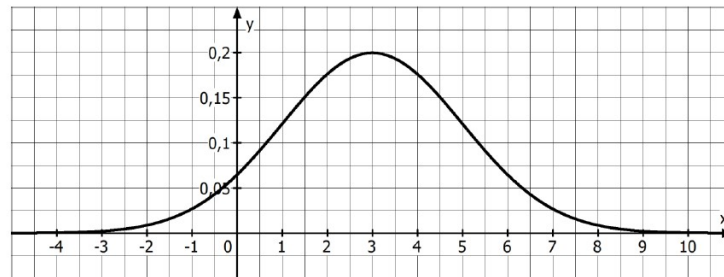
c) Weil  $X$  hier diskrete Werte annimmt, berechnet man nicht  $p(150 \leq X \leq 152)$ , denn dieses Intervall hat Länge 2 statt 3, sondern vielmehr

$$p(149,5 \leq X \leq 152,5) \approx 0,493.$$

d) Sei  $Y$  die Anzahl der Packungen, die weniger als 149 Gummibärchen enthalten.  $Y$  ist binomialverteilt mit  $n = 100$  und  $p = p(X \leq 148,5) \approx 0,040$ . Also ist

$$p(Y \leq 4) \approx 0,629.$$

**Aufgabe II.10.** Von einer normalverteilten Zufallsgröße  $X$  ist der Graph der zugehörigen Dichtefunktion gegeben.



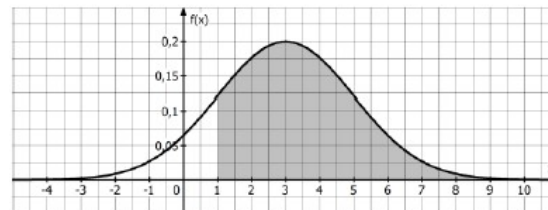
a) Ermitteln Sie näherungsweise den zugehörigen Erwartungswert und die zugehörige Standardabweichung und berechnen Sie  $p(X \geq 1)$ .

b) Veranschaulichen Sie  $p(X \geq 1)$  in der Abbildung.

a) Erwartungswert: Die Symmetrieachse (oder der Hochpunkt) des Graphen ist bei  $x = 3$ , somit gilt  $\mu = 3$ .

Standardabweichung: Die Wendestellen sind bei  $x \approx 3 \pm 2$ , also ist  $\sigma \approx 2$ .

Wahrscheinlichkeit:  $p(X \geq 1) \approx 0,841$ .



**Aufgabe II.11.**  $X$  sei eine normalverteilte Zufallsgröße, für welche gilt:

(1)  $p(X < -4) = 0,151$  und

(2)  $p(X \geq 9) = 0,151$ .

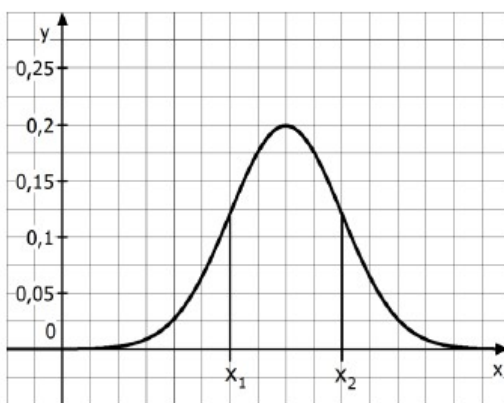
Berechnen Sie den Erwartungswert und bestimmen Sie die Standardabweichung auf eine Dezimale gerundet.

Weil beide Wahrscheinlichkeiten gleich groß sind, muss der Erwartungswert (Symmetrieachse!) in der Mitte liegen:  $\mu = \frac{-4+9}{2} = 2,5$ .

Wir suchen den Wert für  $\sigma$ , für den  $p(X < -4) = 0,151$  gilt. Probieren liefert  $p(X < -4) = 0,15109$  für  $\sigma = 6,3$  und  $p(X < -4) = 0,1492$  für  $\sigma = 6,25$  (als untere Grenze geben wir  $-10^{10}$  ein - das reicht). Also ist  $\sigma \approx 6,3$ .

**Aufgabe II.12.** Die Abbildung zeigt den Graphen der Dichtefunktion  $\phi_{\mu;\sigma}$  einer normalverteilten Zufallsvariable  $X$ . Die Stellen  $x_1$  und  $x_2$  sind die Wendestellen des Graphen.

Bestimmen Sie mit Hilfe der Abbildung je einen Näherungswert für  $\sigma$  und  $\mu$  jeweils auf eine Dezimale.



Nach der Merkhilfe ist

$$\phi_{\mu;\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Aus dem Schaubild lesen wir ab, dass  $\phi_{\mu;\sigma}(\mu) = 0,2$  ist. Einsetzen liefert

$$\phi_{\mu;\sigma}(\mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} = 0,2$$

. Damit folgt  $\sigma = \frac{1}{0,2\sqrt{2\pi}} \approx 2$ .

Also liegen die Wendepunkte  $x_2 - x_1 = 2\sigma \approx 4$  auseinander, somit hat ein Kästchen die Länge 1. Damit wird  $\mu \approx 8$ .



**Aufgabe II.13.** a) Die Funktion  $g$  ist eine Dichtefunktion über dem Intervall  $[-1; 1]$ . Geben Sie zwei Eigenschaften an, die  $g$  besitzt.

b) Für jedes  $a \in \mathbb{R}$  ist eine Funktion  $f_a$  gegeben durch  $f_a(x) = \frac{1}{8}(ax^4 - ax^2)$ .

Untersuchen Sie, ob es einen Wert für  $a$  gibt, so dass  $f_a$  eine Dichtefunktion über dem Intervall  $[-1; 1]$  ist.

a) Es muss  $g(x) \geq 0$  für alle  $x$  mit  $-1 \leq x \leq 1$  und  $\int_{-1}^1 g(x) dx = 1$  gelten.

b) Wir finden

$$f_a(x) = \frac{a}{8}x^2(x^2 - 1).$$

Für  $-1 \leq x \leq 1$  ist  $x^2 \geq 0$  und  $x^2 - 1 \leq 0$ . Also muss  $a \leq 0$  sein. In diesem Fall ist  $f_a(x) \geq 0$  für  $-1 \leq x \leq 1$ .

Weiter ist

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{8}(ax^4 - ax^2) dx = \frac{ax^5}{40} - \frac{ax^3}{24} \Big|_{-1}^1 = -\frac{a}{30}.$$

Also muss  $a = -30$  sein. In diesem Fall sind beide Bedingungen erfüllt, und  $f_{-30}$  ist eine Dichtefunktion auf  $[-1; 1]$ .