Franz Lemmermeyer

Astronomie

Eine Einführung

Franz Lemmermeyer
hb3@ix.rzuser.uni-heidelberg.de
http://www.rzuser.uni-heidelberg.de/~hb3

Inhaltsverzeichnis

1. Erste Beobachtungen

In diesem Kapitel wollen wir auf einige Beobachtungen eingehen, die man mit dem bloßen Auge machen kann, und erklären, was es mit Kalendern, den Jahreszeiten, Sonnen- und Mondfinsternissen und Sternbildern auf sich hat.

1.1 Kalender

Die natürlichste Zeiteinheit, und eine, nach der sich das ganze höhere Leben der Erde richtet, ist der Tag. Klassisch war der Tag die Zeit zwischen Auf- und Untergang der Sonne; die andere Hälfte war die Nacht. Tag und Nacht hat man bei den Babyloniern in sechs Teile (Doppelstunden) eingeteilt, später bei Griechen und Römern in zwölf Stunden. Weil der Tag nicht immer die gleiche Länge hat (im Sommer sind die Tage bei uns auf der Nordhalbkugel länger als im Winter), waren auch die Stunden unterschiedlich lang.

Der iranische Wissenschaftler Abu Rayhan al-Biruni (973–1050) hat die Stunde in Minuten und Sekunden unterteilt; in der lateinischen Übersetzung seiner Werke wurde daraus *pars minuta prima* (der erste kleine Teil) und *pars minuta secunda* (der zweite kleine Teil), was sich im Laufe der Zeit zu Minuten und Sekunden entwickelt hat. Bedeutung hat diese Unterteilung erst mit dem Aufkommen mechanischer Uhren erhalten.

Heute gibt es zwei wesentlich verschiedene Definitionen eines Tags. Der Sonnentag ist entsprechend die Zeitspanne zwischen zwei aufeinanderfolgenden Meridiandurchgängen der Sonne; das sind die Zeitpunkte, an denen die Sonne genau im Süden steht (auf der nördlichen Halbkugel). Ein Sonnentag dauert 24 Stunden.

Der siderische Tag ist die Zeitspanne, in welcher sich die Erde einmal um ihre Achse dreht, bis also ein Stern (lat.: sidus, Genitiv sideris) am Himmel wieder an derselben Stelle steht. Der siderische Tag dauert 23 Stunden, 56 Minuten und 4,099 Sekunden. Wir werden weiter unten darauf eingehen, wie diese beiden Zeitlängen zusammenhängen.

Größere Zeitabschnitte werden in Monaten und Jahren gemessen. Ein Monat ist dabei eine etwas willkürliche Größe, die, wie der Name verrät, aus der Zeitdauer zwischen zwei Vollmonden entstanden ist. Diese Zeitspanne nennt man einen *synodischen Monat*, und dieser dauert im Schnitt 29 Tage, 12 Stunden und 43 Minuten.

Ein siderisches Jahr ist die Dauer, welche die Erde für einen Umlauf um die Sonne benötigt; dies sind 365 Tage 6 Stunden 9 Minuten und 9,54 Sekunden. Die alten Kulturen hatten Mondkalender; weil die Dauer von 12 Mondphasen etwa $12 \cdot 29{,}5 \approx 354$ Tage beträgt, fehlen jedes Jahr 11 Tage. Diese hat man in der Regel dadurch ausgeglichen, dass man alle paar Jahre einen Schaltmonat eingeführt hat.

Erst Caesar hat 45 v. Chr. im Römischen Reich die Schaltjahrregelung aus Ägypten importiert, wo man diese seit 238 v. Chr. praktiziert hat. Danach wird alle vier Jahre ein Schalttag eingeführt. Man nennt diesen Kalender nach Gaius Iulius Caesar den Julianischen Kalender. Weil das Jahr aber nicht genau 365,25 Tage hat, sondern 365,2425, summiert sich dieser Fehler im Laufe der Jahrhunderte; im Mittelalter war der Fehler spürbar auf über eine Woche angewachsen. Erst Papst Gregor[1] XIII gelang es, eine neue Regelung durchzusetzen, wonach der Schalttag in allen Jahren ausfällt, welche durch 100, aber nicht durch 400 teilbar sind; dieser Kalender heißt der gregorianische Kalender. Zur Korrektur des Fehlers ließ Papst Gregor 10 Tage ausfallen: Auf Donnerstag, den 4. Oktober 1582, folgte Freitag, der 15. Oktober. Der gregorianische Kalender hat sich zuerst in den katholisch regierten Ländern durchgesetzt. Russland hat den gregorianischen Kalender bis zur Revolution behalten: Die Oktoberrevolution fand am 25. Oktober 1917 im julianischen und am 7. November 1917 im gregorianischen Kalender statt. Lenin führte dann dann im Februar 1918 den gregorianischen Kalender ein: auf den 31. Januar 1918 folgte der 14. Februar.

Die Namen der Tage

Dass der Sonntag (sunday) und der Montag (monday) nach Sonne und Mond benannt sind, dürfte niemanden überraschen[2]. Auch die Namen der anderen Wochentage in den germanischen und romanischen Sprachen haben etwas mit Astronomie zu tun, nämlich mit Planeten.

Bei den Römern waren die sieben Tage nach den sieben beweglichen Himmelskörpern benannt, also Sonne, Mond und die fünf Planeten Merkur, Venus, Mars, Jupiter und Saturn. Im Französischen werden im wesentlichen dieselben Namen benutzt: Das Lateinische dies lunae ist im Französischen zu lundi geworden. Die einzigen Ausnahmen sind samedi (eine Verballhornung von Sabbat; im Spanischen heißt der Samstag etwa sabado) und dimanche (dies domini, der Tag des Herrn).

Als die Germanen im 4. Jahrhundert mit dem römischen Kalender in Berührung kamen, ersetzten sie die römischen Götter durch germanische; der Mars wurde durch Tyr (altenglisch Tiw) ersetzt, was auf Dienstag bzw. Tuesday führte; Merkur machte Wodan (Odin) Platz, was auf das englische Wednesday führte (der Wotanstag wurde bei der Christianisierung durch Mittwoch ersetzt). Jupiter haben die Germanen durch Donar (Thor) ersetzt, woraus Donnerstag bzw. Thursday

[1] Dieser wird uns im Zusammenhang mit der Ermordung Tausender französischer Protestanten in der Bartholomäusnacht wieder begegnen.

[2] Außer Joey in der amerikanischen Sitcom „Friends“; dort wollte er von Chandler an einen Termin am Donnerstag erinnert werden und sagte: „Thursday! Look, if you need help remembering just think of it like this: the third day. All right, Monday, one-day, Tuesday, two-day, Wednesday, when? huh? what day? Thursday! The third day, okay?“

wurde. Auch im Germanischen wurde aus der Liebesgöttin Venus eine weibliche Göttin, nämlich Frigga oder Frija, die Frau Odins (Freitag bzw. Friday).

Deutsch	Römer	Himmelskörper	Englisch	Französisch
Montag	dies Lunae	Mond	monday	lundi
Dienstag	dies Martis	Mars	tuesday	mardi
Mittwoch	dies Mercurii	Merkur	wednesday	mercredi
Donnerstag	dies Iovis	Jupiter	thursday	jeudi
Freitag	dies Veneris	Venus	friday	vendredi
Samstag	dies Saturni	Saturn	saturday	samedi
Sonntag	dies Solis	Sonne	sunday	dimanche

Auch die Schweden, Dänen und die Norweger bedienen sich der nordischen Götterwelt: mandag, tisdag, onsdag (Odins Tag), torsdag, fredag und söndag sind klar, der Samstag ist bei ihnen der lördag (Waschtag).

Die Portugiesen bennenen ihre Tage nicht nach Göttern, sie zählen einfach durch: neben sábado und domingo gibt es segunda-feira (der zweite Tag, Montag), terça-feira (dritter Tag, Dienstag) usw. bis sexta-feira (sechster Tag, Freitag). Die Griechen halten es ähnlich, zählen aber nur bis zum fünften Tag; den Freitag nennen sie den „Tag der Vorbereitung“ (auf den Sabbat), Samstag ist „Sabbato“ und Sonntag Kiriaki (Tag des Herrn).

Der islamische Kalender ist ein reiner Mondkalender; ein Jahr besteht aus 12 Mondmonaten von 29 oder 30 Tagen und ist im Schnitt etwa $354\frac{1}{3}$ Tage lang. Damit entsprechen 33 Jahre islamischer Zeitrechnung etwa 32 Jahren christlicher Zeitrechnung. Während dieser 32 Jahre wandern etwa das Datum des Beginns des Ramadans einmal durch das Jahr. Die islamische Zeitrechnung beginnt mit dem Jahr der Auswanderung des Propheten Mohammed von Mekka nach Medina, also unserem Jahr 622. Dies ist 1398 Jahre her, aber im islamischen Kalender schreiben wir 2020 das Jahr 1441.

Unsere Monatsnamen gehen ebenfalls auf die Römer zurück. Deren Jahresbeginn war, wie bei fast allen antiken Kulturen, im Frühling; der erste Monat war also der März. Die ersten vier Monate hatten Namen; der März ist nach dem Kriegsgott Mars benannt, April kommt vermutlich vom Wort aperire (öffnen), Mai und Juni sind nach den Göttinen Maia und Juno benannt. Die restlichen Monate wurden durchgezählt: Quintilis, Sextilis, September, Oktober, November, Dezember. Danach folgten Januar (benannt nach dem Gott Janus; dieser hatte zwei Gesichter, welche die Gegensätze Vergangenheit-Zukunft bzw. Anfang und Ende symbolisierten) und Februar (der Monat der Reinigung: februare heißt reinigen).

Weil die gewählten Konsuln seit 153 v. Chr. ihr Amt am 1. Januar antraten, bürgerte sich der Januar als Jahresbeginn ein. Dadurch wurde etwa der Dezember (zehnter Monat) zum zwölften.

Nach der Kalenderreform durch Gaius Iulius Caesar im Jahre 44. v. Chr. wurde dessen Geburtsmonat Iulius (Juli) genannt. Dessen Nachfolger Augustus ließ den sechsten Monat nach sich benennen. Der Nachfolger von Augustus, Tiberius, wollte den September nach sich benennen; dies hat sich aber nicht durchgesetzt.

Abb. 1.1. Kopf der Janus-Statue. Foto Fubar Obfusco, .

Das metrische System

Auch die Längeneinheit Meter hat einen astronomischen Ursprung. Die vielen verschiedenen Größen von Fuß, Elle und Meile, welche in Frankreich (ebenso wie in Deutschland) in Gebrauch waren, wollten die Franzosen um 1790 ein neues System einführen. Sie legten den Meter als den 1-Milllionsten Teil der Entfernung von Nordpol zum Äquator fest und vermaßen (über viele Jahre hinweg) dann die Strecke zwischen Dünkirchen und Barcelona. Es ist also kein Zufall, dass diese Entfernung heute 10.002 km beträgt (die 2 km sind Messfehlern geschuldet) und der Äquatorumfang wenig mehr als 40.000 km. Andere Länder haben das metrische System im Lauf der Zeit übernommen; heute ist es in allen zivilisierten Ländern in Gebrauch – lediglich die USA messen noch in inch, foot und mile.

1.2 Sonnen- und Mondfinsternisse

Bei einer Sonnenfinsternis steht der Mond genau zwischen Erde und Sonne. Dieses Schauspiel könnten wir jeden Monat erleben, wenn die Mondbahn in der Ekliptik (die Ebene, welche die Erdbahn enthält) liegen würde. Tatsächlich ist die Mondbahn gegenüber der Erbahn geneigt, und so sind Sonnenfinsternisse selten zu sehen. Sonnenfinsternisse können nur bei Neumond auftreten, weil der Mond dabei ja in der Nähe der Sonne stehen muss.

Bei einer Mondfinsternis bewegt sich der Mond durch den Schatten der Erde. Mondfinsternisse können also nur bei Vollmond auftreten.

- Video: Sonnenfinsternis von Yogeshwar
- Video Mondfinsternis von Astro-Views

Der Saros-Zyklus ist ein Zyklus von Sonnenfinsternissen, der bereits den Babyloniern bekannt war: Bestimmte Sonnenfinsternisse wiederholen sich alle 18 Jahre.

So gehört die totale Sonnenfinsternis vom 11. August 1999 in Europa zum selben Saros-Zyklus wie die totale Sonnenfinsternis in den USA vom 21. August 2017; die nächste Finsternis in diesem Zyklus wird am 2. September 2035 in China stattfinden.

Synodische und Siderische Umlaufszeiten

Ein ganz bekanntes Rätsel dreht sich um folgende Frage:

> *Wie spät ist es, wenn der große und der kleine Zeiger einer Uhr erstmals nach 12 Uhr wieder übereinander stehen?*

Eine schnelle Lösung geht so: innerhalb von 12 Stunden stehen die beiden Zeiger genau 11 Mal übereinander; also dauert es genau $\frac{12}{11}$ Stunden, was 1 h 5 min und etwas mehr als 27 s entspricht.

Ein ganz ähnliches Problem taucht in der Astronomie auf. Dort ist die Zeit, die ein Planet zum Durchlaufen seines Orbits braucht, die *siderische* Umlaufszeit; dies ist die Zeit, die er braucht, bis Sonne, Planet und ein geeigneter Stern wieder auf einer Geraden liegen.

Davon zu unterscheiden ist die *synodische* Periode (oder Umlaufszeit) zweier Planeten: das ist die Zeit, bis die Sonne und die beiden Planeten wieder auf einer Geraden liegen. Um eine Beziehung zwischen der synodischen Umlaufdauer s und den siderischen Umlaufdauern T und t der beiden Planeten zu finden, betrachten wir zuerst ein einfaches Beispiel. Wenn sich etwa Planet A alle zwei und Planet B alle drei Jahre um die Sonne dreht, dann ist bereits anschaulich klar, dass sie nach 6 Jahren wieder dieselbe Stellung gegeneinander einnehmen. Rechnerisch werden wir im allgemeinen Fall so vorgehen: Planet A dreht sich in 2 Jahren um 360°, hat also eine Winkelgeschwindigkeit[3] von 180° pro Jahr. Entsprechend hat Planet B eine Winkelgeschwindigkeit von 120° pro Jahr. Also dreht sich Planet A um 60° pro Jahr schneller, und das bedeutet, dass er Planet B nach 6 Jahren überrundet, denn dann ist der Vorsprung auf $6 \cdot 60° = 360°$ angewachsen.

Im allgemeinen Fall sieht die Sache so aus: Sei SA die Gerade, auf der sich die Sonne S und der Planet A mit der kürzeren Umlaufdauer t befindet, und SB die Gerade durch S und den Planeten B. Die Achse SA dreht sich in t Jahren um 360°, somit dreht sie sich mit der "Winkelgeschwindigkeit" $\frac{360°}{t}$. Die zweite Achse dreht sich entsprechend mit der Winkelgeschwindigkeit $\frac{360°}{T}$. Also dreht sich der schnellere Planet mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\delta = \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{T}\right) \cdot 360°$$

von der Achse des langsameren Planeten weg. Die beiden Achsen treffen sich nach s Jahren wieder, wenn also $\delta \cdot s = 360°$ gilt. Daraus erhalten wir folgende Formel für die synodische Umlaufsdauer:

[3] Die übliche Geschwindigkeit misst, welchen Weg ein Objekt pro Zeiteinheit zurücklegt: $v = \Delta s/\Delta t$. Die Winkelgeschwindigkeit (vor allem bei Kreisbewegungen gibt an, um welchen Winkel pro Zeiteinheit sich das Objekt um das Zentrum bewegt: $\omega = \Delta\alpha/\Delta t$.

Satz 1.1. *Sind $T > t$ die siderischen Umlaufszeiten zweier Planeten, dann ist deren synodische Umlaufszeit s gegeben durch*

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{t} - \frac{1}{T}. \tag{1.1}$$

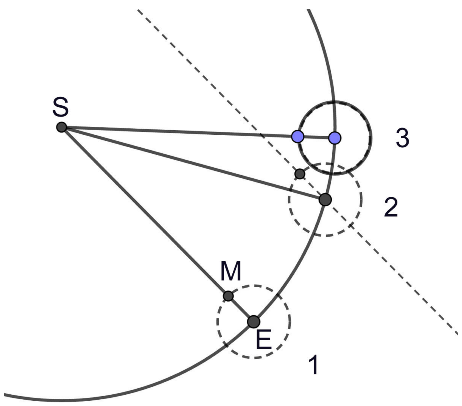


Abb. 1.2. Siderischer und Synodischer Monat

In Position 1 steht der Mond zwischen Sonne und Erde; es ist also Neumond. Nach 27,3 Tagen (Position 2) hat der Mond einen Umlauf um die Erde vollendet, steht also von der Erde aus gesehen in derselben Richtung am Himmel. Allerdings ist die Erde aber auf ihrer Bahn um die Sonne weitergewandert: Bis zum nächsten Neumond (Position 3) vergehen daher noch einmal 2,2 Tage.

Hier geht es um die Synode von Mond und Erde; unsere Formel $\frac{1}{s} = \frac{1}{t} - \frac{1}{T}$ liefert mit $T = 365{,}25$ d (Umlaufdauer der Erde um die Sonne) und $t = 27{,}32$ d (siderische Umlaufdauer des Mondes) daher

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{27{,}32} - \frac{1}{365{,}25} \approx 0{,}3386;$$

Bilden des Kehrwerts liefert eine synodische Umlaufdauer von $s = 29{,}53$ d: Dies ist also die durchschnittliche Zeit zwischen zwei Vollmonden.

1.3 Jahreszeiten

Die Ekliptik ist die Ebene, in welcher die Erdbahn liegt; diese liegt nicht fest im All, weil andere Planeten und vor allem der Mond die Bahn der Erde gravitativ beeinflussen. Die Ekliptik ist gegenüber der Äquatorebene um $23°26'11{,}76''$ geneigt ($1'$ ist eine Bogenminute, also der 60te Teil eines Grads, und der 60te Teil einer Bogenminute ist die Bogensekunde $1''$).

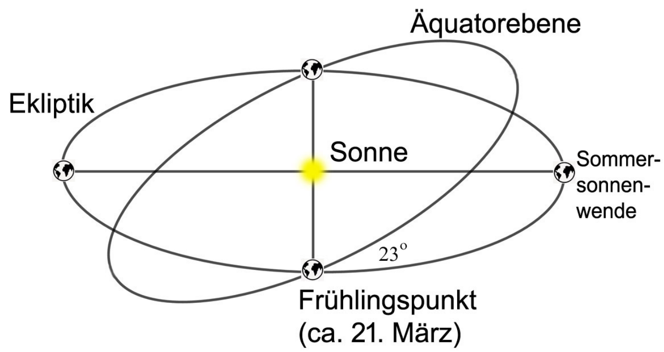


Abb. 1.3. Frühlingspunkt und Sommersonnenwende.

Die Schnittgerade von Ekliptik und Äquatorebene schneidet die Erdbahn in zwei Punkten: dem Frühlingspunkt und dem Herbstpunkt. Der Zeitpunkt, an dem die Erde im Frühlingspunkt steht, nennt man den astronomischen Frühlingsanfang; dies ist je nach Jahr der 19., 20. oder der 21. März. Entsprechend steht die Erde am 22., 23. oder 24. September im Herbstpunkt. An diesen beiden Zeitpunkten steht die Erdachse senkrecht auf die Verbindungsgerade von Erde und Sonne; dadurch dauern Tag und Nacht an diesem Tag auf der ganzen Erde genau gleich lang: man nennt dies die Tagundnachtgleiche (Äquinoktium).

Auf der Nordhalbkugel ist der längste Tag etwa am 21. Juni; am Nordpol geht dann die Sonne nicht unter. Weil die Sonne dann pro Tag länger scheint und außerdem hoch am Himmel steht, wird es wärmer als im Winter (wo die Nächte länger sind und die Sonne flach am Himmel steht). Auf der Südhalbkugel ist es genau andersherum: am Südpol geht die Sonne am 21. Juni gar nicht auf. Die Jahreszeiten verdanken wir also der Tatsache, dass die Drehachse der Erde nicht senkrecht auf die Ekliptik steht, sondern um 23° geneigt ist.

- Video: Animation Erdbahn

Das siderische Jahr, also die Umlaufdauer der Erde um die Sonne, hat 365,256363 Tage. Das anomalistische Jahr ist die Zeit, welche die Erde von einem Perihel bis zum nächsten braucht, hat 365,259636 Tage. Der Unterschied rührt daher, dass die Ellipsenbahn der Erde sich (u.A. wegen der Einflüsse der anderen Planeten) langsam dreht. Das tropische Jahr ist die Zeit zwischen zwei Durchgängen durch den Frühlingspunkt, und dauert 365,242188 Tage; auch hier wandert der Frühlingspunkt wegen der Präzession der Erdachse.

1.4 Sternbilder

Beobachtet man die Sterne am Himmel, so stellt man fest, dass sie sich, wie die Sonne tagsüber, im Laufe einer Nacht von Osten nach Westen bewegen. Im Norden steht ein Stern, der Polarstern, der sich in der Nähe der Erdachse befindet und sich daher nur unwesentlich dreht.

Die Namen unserer Sternbilder gehen zum Teil auf die Babylonier und die alten Griechen zurück. Heute gibt es insgesamt 88 Sternbilder. Tierkreiszeichen sind Sternbilder, die in der Ekliptik (der scheinbaren Bahn der Sonne) liegen; davon gibt es zwölf.

Bereits die Griechen haben die Sterne nach Leuchtstärken eingeteilt (dies wird Hipparch im zweiten Jahrhundert vor Christus zugeschrieben; Ptolemäus hat das System in seinem *Almagest* benutzt und bekannt gemacht): es gibt Sterne erster, zweiter usw. bis sechster Größe, wobei letztere mit dem bloßen Auge gerade noch sichtbar sind. Heute können wir eine solche Einteilung viel genauer vornehmen: Sind Φ_0 und Φ_1 die gemessenen Lichtströme zweier Himmelskörper, dann unterscheiden sich ihre Helligkeiten um

$$m_1 - m_0 = -5\frac{\log(\frac{\Phi_0}{\Phi_1})}{\log 100}.$$

Setzt man die Helligkeit von Wega gleich 0, ergeben sich daraus die Helligkeiten aller anderer Objekte.

Der Polarstern ist ein Stern zweiter Größe, hat also eine scheinbare Helligkeit von 2^m (zwei Magnituden). Die Venus kommt bei maximaler Helligkeit auf $-4\overset{m}{,}67$. Das Hubble-Teleskop kann noch Sterne bis zu 31^m wahrnehmen.

Die bekanntesten Sternbilder auf der Nordhalbkugel sind:

Der große Wagen ist ein Teil des Sternbilds großer Bär (ursa major). Der mittlere Stern der Deichsel heißt Mizar (offiziell zeta Ursae Majoris, ζ UMa), ein Name, der aus dem Arabischen kommt. Es ist ein (mit bloßem Auge sichtbarer) Doppelstern in einer Entfernung von etwa 83 Lichtjahren. Auf dieser Aufnahme kann man den Doppelsterncharakter erkennen.

Abb. 1.4. Großer Bär (Ursa major) `https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:UrsaMajorCC.jpg` nebst Orion und Kassiopeia

Der kleine Wagen besteht aus etwas lichtschwächeren Sternen und ist daher nicht ganz so leicht zu entdecken. Einer seiner Sterne ist der Polarstern, also ein Stern, auf den derzeit die Achse der Erde zeigt. Großer und kleiner Bär sind in unseren Breiten zirkumpolare Sternbilder, also solche, die zu jeder Jahreszeit zu sehen sind, weil sie nahe am Polarstern stehen.

Die Kassiopeia ist leicht zu finden wegen ihrer auffälligen W-Form. Die Spitze des W zeigt über Kepheus hinweg zum kleinen Wagen.

Zirkumpolare Sternbilder Weil wir etwa auf 48° nördlicher Breite liegen, sehen wir den Polarstern etwa 48° über dem Horizont. Dies bedeutet, dass alle Sternbilder, die weniger als 48° vom Polarstern entfernt sind, bei uns zirkumpolar sind. Durch die Messung der Winkelhöhe des Polarsterns kann man also herausfinden, auf welchem Breitengrad man sich befindet. Am Nordpol (Breitengrad 90°) steht der Polarstern im Zenit, in der Nähe des Äquators wird man ihn am Horizont sehen können.

Wie Sonne, Mond und Planeten gehen auch Sterne im Osten auf und im Westen unter; dies bedeutet, dass sich die zirkumpolaren Sternbilder im *Gegenuhrzeigersinn* um den Polarstern drehen.

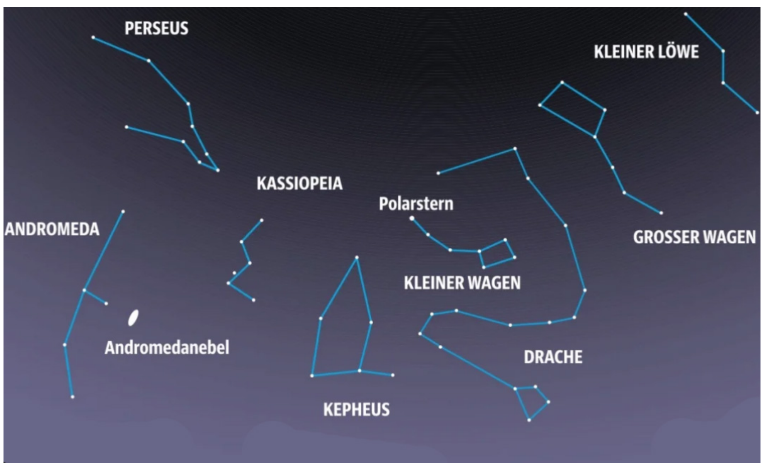


Abb. 1.5. Die bekanntesten zirkumpolaren Sternbilder

Die Bestimmung des Längengrads[4] war dagegen über Jahrhunderte hinweg ein großes Problem: alle Methoden erforderten genau Uhren, und weil die einzigen genauen Uhren Pendeluhren waren, die bei Wellengang nicht funktionierten, führte dies zur Entwicklung von Uhren, die mit Hilfe von Federn angetrieben werden; die ersten Exemplare des englischen Uhrmachers Harrison waren noch riesig, später konnte man kleine und handliche Uhren herstellen.

[4] Das Buch [17] von Dava Sobel erzählt die Geschichte der Bestimmung des Längengrads vielleicht nicht auf höchstem wissenschaftlichen Niveau, gibt aber einen ersten Einblick in die Geschichte dieser Frage.

Andere Sternbilder sind bei uns nur im Sommer oder nur im Winter zu sehen. Zu den bekanntesten Wintersternbildern gehört der Orion.

Das bekannteste Sternbild auf der Südhalbkugel ist das Kreuz des Südens (Southern Cross).

Übungen

1.1 Welche Phase hat der Mond bei einer Mondfinsternis?

Eine Mondfinsternis kann nur bei Vollmond auftreten.

1.2 Welche Phase hat der Mond, wenn er bei Sonnenuntergang aufgeht?

Dies geht nur bei Vollmond.

1.3 Wann geht der Vollmond unter?

Bei Sonnenaufgang.

1.4 Berechne die Winkelgeschwindigkeit eines Sekundenzeigers.

1.5 Berechne die Winkelgeschwindigkeit eines Objekts am Äquator.

1.6 Mit welcher Winkelgeschwindigkeit dreht sich die Erde um die Sonne?

1.7 Zeige, dass (1.1) gleichbedeutend ist mit

$$s = \frac{Tt}{T - t}.$$

1.8 Löse die Formel (1.1) nach t auf.

Antwort: $\frac{1}{t} = \frac{1}{s} + \frac{1}{T}$, also $t = \frac{Ts}{T+s}$.

1.9 Löse mit (1.1) das Problem der beiden übereinander stehenden Uhrzeiger.

1.10 Berechne die siderische Umlaufdauer des Mondes aus der synodischen.

Wir finden

$$t = \frac{Ts}{T + s} \approx \frac{365{,}25 \cdot 29{,}5}{365{,}25 - 29{,}5} \approx 27{,}3\ d.$$

1.11 Der Mond erscheint von der Erde aus unter einem Winkel von etwa $30'$ (ein halbes Grad). Bestimme den Durchmesser des Mondes aus seiner Entfernung von etwa 384.000 km.

1.12 Weil Mond und Sonne, wie man bei einer totalen Sonnenfinsternis sehen kann, von uns aus gesehen gleich groß erscheinen, kann man den Durchmesser der Sonne aus dem Durchmesser 3470 km des Monds, dem Abstand Mond-Erde von 384.000 km, und dem Abstand Erde-Sonne von $1{,}5 \cdot 10^8$ km berechnen.

Man findet $d_S/d_M \approx 395$, also

1.13 ([18, S. 3]) Die Totalitätszone einer Sonnenfinsternis am 14. Januar 484 n. Chr. verlief nach Berichten über Korfu – Rhodos – Libanon. Astronomische Rechnung (die bereits Halley um 1700 machte) liefern eine Sonnenfinsternis mit demselben Datum, aber mit Totalitätszone Lissabon – Karthago – Zypern. Diese Totalitätszonen liegen etwa 30° (also 2 Stunden) auseinander. Dies lässt sich erklären, wenn man, wie Immanuel Kant (1724–1804) 1754 vorgeschlagen hat, die Bremsung der Erdrotation durch die Gezeiten akzeptiert. Berechne die Änderungsrate der Erdrotation in μs/a, die sich daraus ergibt. Messungen mit Atomuhren liefern eine Zunahme der Tageslänge um etwa 20μs/a.

An devonischen Korallen (mit einem Alter von etwa 300 Millionen Jahren) zählt man etwa 400 Tagesringe pro Jahresring. Passt das zu den oben berechneten Zahlen? Wie viele Tage dauerte damals ein Jahr?

1.14 Der Weltrekord der Männer beim Marathon (42 km) liegt bei etwas mehr als 2 Stunden. Wie lange würde man bei dieser Geschwindigkeit bis zum Mond (384.000 km) brauchen?

1.15 Die Gezeiten werden in erster Linie durch den Mond verursacht. Würde sich der Mond nicht um die Erde drehen, gäbe es Flutberge in Mondrichtung und auf der Gegenseite, und diese wären 12 h auseinander. Weil der Mond nach 24 Stunden aber weitergewandert ist, ist auch die Zeit zwischen zwei Flutbergen etwas länger.

Berechne die Zeit zwischen zwei Flutbergen aus der siderischen Umlaufdauer $T = 27{,}3$ d des Mondes und der Rotationsdauer der Erde von $t = 1$ d.

Lösung. Aus $\frac{1}{s} = \frac{1}{t} - \frac{1}{T}$ ergibt sich $s \approx 1{,}038$ d, also 24,9 h; weil es zu jedem Zeitpunkt zwei Flutberge gibt, ist die Zeit zwischen zwei Flutbergen gleich 12,45 h.

1.16 Welcher Tatsache verdanken wir die Existenz der Jahreszeiten?

1.17 Wie ist der astronomische Frühlingspunkt definiert?

1.18 Was bedeutet Tag-und-Nacht-Gleiche, und wann findet diese statt?

1.19 Was bedeutet Winter- bzw. Sommersonnwende, und wann werden diese gefeiert?

1.20 Wie ist das Osterfest festgelegt?

1.21 Warum geht der Vollmond bei Sonnenuntergang auf, warum der Halbmond sechs Stunden früher oder später?

1.22 Erkläre den Begriff der Ekliptik.

1.23 Skizziere die bekanntesten Sternbilder (großer und kleiner Wagen, Orion, Kassiopeia) und erkläre, wie man den Polarstern findet.

1.24 Warum hat man in unserem Kalender alle vier Jahre einen Schalttag?

1.25 Warum ist Dezember nicht, wie der Name andeutet, der zehnte Monat?

1.26 Erkläre den Begriff des siderischen und des synodischen Monats. Welcher beschreibt die Zeit zwischen zwei Vollmonden?

1.27 Mit welcher Geschwindigkeit dreht sich der Mond bei Vollmond bzw. bei Neumond um die Sonne?

Die Geschwindigkeit der Erde auf ihrer Umlaufbahn um die Sonne ist

$$v = \frac{2\pi R}{T} \approx 29{,}8 \text{ km/s},$$

weil der Abstand R zur Sonne 149,6 Millionen km und die Umlaufdauer T ein Jahr beträgt.

Die Geschwindigkeit des Monds auf seiner Umlaufbahn beträgt

$$v = \frac{2\pi r}{t} \approx 1 \text{ km/s}$$

wegen $r \approx 384\,0090$ km und $t \approx 27{,}3$ d.

Die Geschwindigkeit des Monds um die Sonne ist also bei Neumond etwa 29 km/s, bei Vollmond etwa 31 km/s.

2. Unser Sonnensystem

Bevor wir uns etwas der Geschichte der Astronomie zuwenden, wollen wir unser Sonnensystem vorstellen. Neben unserem eigenen Planeten und dem Mond gehören dazu natürlich die Sonne, die anderen Planeten und Zwergplaneten, Asteroiden und Kometen, sowie der Kuipergürtel und die Oortsche Wolke.

2.1 Das System Erde-Mond

Die Erde, der blaue Planet (die Farbe verdankt er dem vielen Wasser), ist der Planet, auf dem wir leben, und der einzige, von dem wir wissen, dass er Leben hervorgebracht hat. Die Erde ist über 4 Milliarden Jahre alt und der größte der inneren Planeten. Er besitzt ein starkes Magnetfeld, das uns vor kosmischer Strahlung schützt. Der magnetische Nordpol fällt nicht mit dem geographischen Nordpol (Schnittpunkt von Drehachse und der nördlichen Halbkugel) zusammen, und tatsächlich wissen wir, dass der magnetische Nordpol wandert, und dass das Magnetfeld der Erde immer wieder komplett zusammenbricht.

Die Erde besitzt eine Atmosphäre, die zu 78% aus Stickstoff, zu 21% aus Sauerstoff, und zu fast 1% aus Argon besteht. Das riesige Vorkommen an Sauerstoff liegt am pflanzlichen Leben. Der ebenfalls erstaunlich große Anteil an Argon (das mit Abstand häufigste Edelgas im Universum ist Helium) hat Gründe: es ist beim Zerfall des radioaktiven Kaliumisotops ^{40}K entstanden, welches schon bei der Entstehung der Erde vorhanden war.

Der Erdmond ist der fünftgrößte Mond des Sonnensystems und ist im Vergleich zu seinem Zentralplaneten außergewöhnlich groß. Wir nehmen heute an, dass der Mond kurz nach der Bildung der ersten Planeten durch den Zusammenstoß der Erde mit einem marsgroßen Protoplaneten Theia entstanden ist; daher ist er vor allem aus dem Material der Erdkruste und des Erdmantels aufgebaut.

Gezeiten

Der sichtbarste gravitative Einfluss des Mondes auf die Erde sind die Gezeiten, also Ebbe und Flut. Die Schwerkraft des Mondes erzeugt auf der ihm zugewandten und der ihm abgewandten Seite einen Flutberg. Weil die Erde unter diesem Flutberg rotiert, sorgt dieser durch Reibung für eine Abbremsung der Rotation, und die Erhaltung des Drehimpulses hebt den Mond auf eine höhere Umlaufbahn:

Tatsächlich wächst der durchschnittliche Abstand von Erde und Mond derzeit um 3,8 cm pro Jahr. Vor 310 Millionen Jahren dauerte der Tag nur 22 h; kurz nach der Entstehung des Mondes in einer Höhe von 30.000 km dauerte eine Umdrehung der Erde höchstens 14 h.

Präzession

Weil die Erde am Äquator abgeplattet ist und die Erdachse nicht senkrecht auf die Mondbahn steht, zieht der Mond die Erdachse in seine Richtung und verursacht damit eine Kreiselbewegung: Die Erdachse bleibt dabei immer um den gleichen Winkel von 23,44° gegen die Ekliptik geneigt, aber sie dreht sich im Laufe von etwa 25.800 Jahren einmal um den Normalenvektor der Ekliptik; in diesen 25.800 Jahren läuft der Frühlingspunkt einmal um die Erdbahn. Dies führt dazu, dass der Polarstern nicht immer Polarstern bleiben wird (und natürlich auch nicht immer gewesen ist).

2.2 Die inneren Planeten

In der Antike waren die fünf Planeten Merkur, Venus, Mars, Jupiter und Saturn bekannt. Später hat man Uranus, Neptun und Pluto entdeckt; Pluto wird heute nicht mehr zu den Planeten gezählt, weil in der Nähe seiner Umlaufbahn weitere Objekte die Sonne umkreisen. Daneben hat man seit 1801 eine ganze Reihe von Kleinplaneten entdeckt, von denen die meisten zwischen Mars und Jupiter die Sonne umkreisen.

Merkur

Merkur ist etwas größer als der Erdmond und hat eine sehr elliptische Bahn. Die Temperatur an der Oberfläche schwankt zwischen −170° C auf der Nachtseite und 430° C auf der Tagseite. Mit bloßem Auge ist er höchstens eine Stunde lang zu sehen, weil er sich maximal 28° von der Sonne entfernt.

Venus

Obwohl die Venus weiter von der Sonne entfernt ist als der Merkur, hat sie wegen des Treibhauseffekts (96% der Atmosphäre besteht aus CO_2) eine Oberflächentemperatur von etwa 470° C. Der maximale Winkelabstand zur Sonne beträgt 48°.

Die Venus wird auch Abend- oder Morgenstern genannt, weil sie bei maximaler Helligkeit das hellste Objekt am Himmel nach Sonne und Mond ist. Bereits die Babylonier haben erkannt, dass Morgen- und Abendstern derselbe Himmelskörper ist.

Ende 2020 haben Astronomen (Jane S. Greaves, Anita M.S. Richards, William Bains et al., *Phosphine gas in the cloud decks of Venus* Nature Astronomy, 2020)

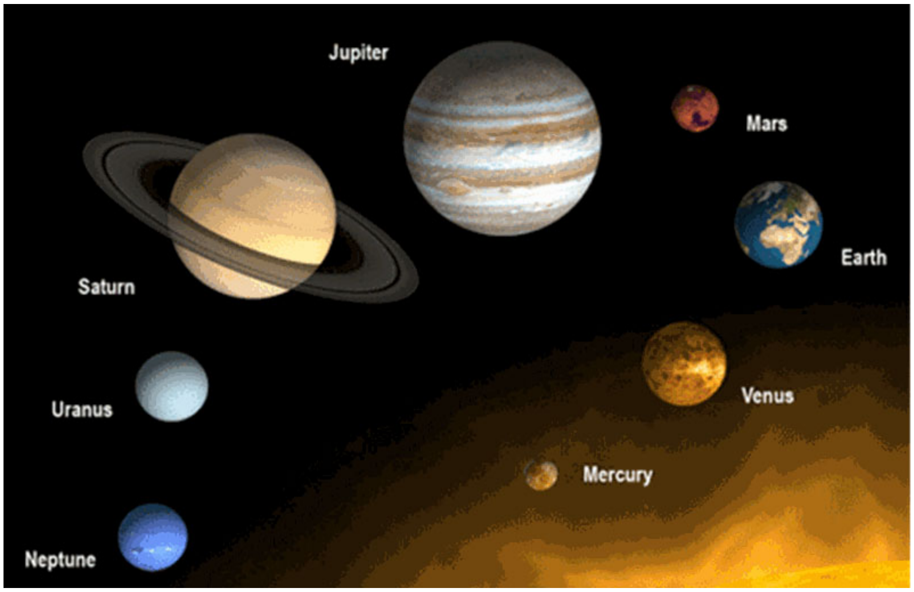


Abb. 2.1. Die Planeten unseres Sonnensystems; die Größenverhältnisse sind dabei nicht korrekt

in der Atmosphäre der Venus das hochgiftige Gas Monophosphan PH_3 nachgewiesen. Dass dieses Gas auf Jupiter und Saturn vorkommt, ist schon lange bekannt, und man versteht auch die Mechanismen, wie dieses Gas dort entsteht. Auf der Venus sind solche chemischen Vorgänge unbekannt. Eine Möglichkeit scheint die Erzeugung des Gases durch Mikroben in der Venusatmosphäre zu sein. Man sollte diese Nachricht aber mit großer Vorsicht genießen.

Mars

Mars ist neben der Venus der erdähnlichste unter den Planeten. Er ist aber nur halb so groß wie die Erde und hat zwei winzige Monde, Phobos und Deimos, die erst 1877 entdeckt wurden. Er dreht sich in 24 Stunden und 37 Minuten um seine Achse, seine Umlaufsdauer ist etwa 1,9 Jahre. Auch seine Drehachse ist gegenüber seiner Bahnebene geneigt, und zwar um etwas mehr als 25°. Die geringe Schwerkraft an der Oberfläche (etwa 3,7 m/s^2) hat dazu geführt, dass Mars nur eine sehr dünne Atmosphäre besitzt, die zu 96 % aus Kohlendioxid CO_2 besteht.

Man vermutet schon geraume Zeit, dass an den Polkappen von Mars Wasser existiert. Radaruntersuchungen von Satelliten haben Ende 2020 gezeigt, dass es unter dem Eispanzer am Südpol wohl flüssiges (aber sehr kaltes) Wasser gibt. Vor drei Milliarden Jahren hat es auf dem Mars zum letzten Mal geregnet – eine Erinnerung daran, dass Erderwärmung und Klimawandel auch auf unserem Planeten für eine Neuverteilung des Regenwassers sorgen wird.

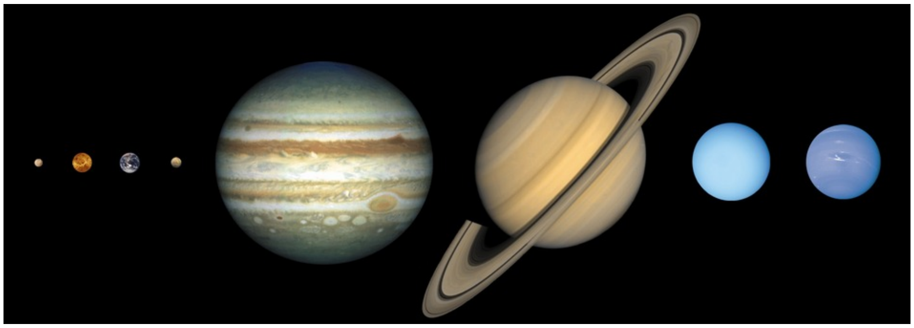


Abb. 2.2. Die Planeten unseres Sonnensystems `http://www.sun.org/de/images/sizes-of-planets`

2.3 Die äußeren Planeten

Während die inneren Planeten aus Gestein und Eisen bestehen, sind die äußeren planeten Gasplaneten und haben keine feste Oberfläche.

Jupiter

Der Jupiter ist der massereichste Planet unseres Sonnensystems. Er hat einen Durchmesser von etwa 140.000 km und eine Dichte von 1,3 g/cm^3. 2018 waren 79 Monde des Jupiter bekannt. 2020 wurden 40 weitere entdeckt[1], und man schätzt die Gesamtzahl der Monde mit einem Radius von mindestens 400 m auf etwa 600.

Der große rote Fleck ist ein Wirbelsturm, der Ende des 19. Jahrhunderts fast 40.000 km lang und 14.000 km breit war, und der schon im 17. Jahrhundert beobachtet worden ist. Heute ist er nur noch 16.500 km lang.

Saturn

Saturn ist mit einem Durchmesser von 120.000 km zwar nur leicht kleiner als Jupiter, hat aber wegen seiner geringen Dichte von 0,7 g/cm^3 eine deutlich kleinere Masse. Sein Mond Titan ist mit 5150 km Durchmesser der zweitgrößte nach dem Jupitermond Ganymed. Saturn besitzt 82 bekannte Monde; zwei davon, Janus und Epimetheus, haben fast die gleiche Umlaufbahn und tauschen alle vier Jahre ihre Umlaufbahnen.

Der Saturn besitzt ein ausgeprägtes Ringsystem; diese Ringe bestehen aus kleinen Partikeln. Alle 14,8 Jahre sieht man diese Ringe von der Seite, sodass sie nahezu unsichtbar sind.

[1] Siehe `https://arxiv.org/pdf/2009.03382.pdf`.

Uranus

Uranus wurd 1781 von Wilhelm Herschel entdeckt. Seine Rotationsachse liegt fast in der Bahnebene, was dazu führt, dass die Sonne an den Polen 42 Jahre lang scheint, bevor dann 42 Jahre Nacht ist. Auch Uranus hat ein Ringsystem, das aber nur mit sehr guten Teleskopen zu sehen ist.

Neptun

Weil der Uranus nicht ganz der Bahn folgte, die man für ihn berechnet hatte, befasste sich der Franzose Urbain Le Verrier damit und führte die Abweichungen auf einen unbekannten Planeten zurück. Im August 1846 konnte er sogar dessen ungefähre Position berechnen und teilte sie seinen Landsleuten mit, die ihm aber nicht glaubten. Im September schrieb er daher an den deutschen Astronome Johann Gottfried Galle, der sofort, nachdem er den Brief erhalten hatte, sein Teleskop auf die betreffende Stelle richtete und eine halbe Stunde später den neuen Planeten entdeckt hatte, 1 Grad neben der von Le Verrier berechneten Position.

In den 1980er wurde bei Sternverdunkelungen durch Neptun dessen Ringsystem entdeckt.

2.4 Zwergplaneten und Asteroiden

Pluto

Pluto wurde 1930 entdeckt und ist heute der massereichste bekannte Zwergplanet. Erst seit dem Vorbeiflug der Raumsonde New Horizons imJahre 2015 haben wir gute Fotos von seiner Oberfläche. Man vermutet, dass er zu 70% aus Gestein und zu 30% aus Wassereis besteht; er gehört also sicherlich nicht zu den Gasplaneten. Pluto hat einen großen Mond, Charon, und vier kleinere, die alle in etwa derselben Ebene Pluto umkreisen. Aus diesem Grund vermutet man, dass diese Monde bei einem Einschlag eines Asteroiden auf Pluto entstanden sind.

Pluto und Charon umkreisen sich in etwa 6,4 Tagen und drehen sich dabei einmal um ihre eigene Achse; sie wenden sich also immer dieselbe Seite zu. Verantwortlich dafür sind Gezeitenkräfte.

Ceres & Co.

Der erste Zwergplanet im Asteroidengürtel wurde am 1. Januar 1801 von Giuseppe Piazzi entdeckt. Dieser behielt seine Entdeckung für sich; erst als er nicht mehr beobachtbar war, hat er seine Ergebnisse publiziert. Die wenigen Beobachtungen, die er bis dahin gemacht hatte, ließen mit den damaligen Mitteln keine Bahnbestimmung zu, sodass der Planet als verloren galt. Gauß hat sich dann mit neuen Methoden an die Bahnbestimmung gemacht und konnte voraussagen, wo er im Dezember 1801 wieder zu sehen sein würde.

Ceres hat einen Durchmesser von weniger als 1000 km und ist damit deutlich kleiner als der Erdmond. In den darauffolgenden Jahren wurden mit Pallas, Juno und Vesta drei weitere Objekte im Asteroidengürtel gefunden; inzwischen kennt man 650.000 Objekte in diesem Bereich. Man nimmt heute an, dass die Schwerkraft von Jupiter die Bildung eines Planeten in dieser Zone verhindert hat.

Das Ries

Dass die Dinosaurier vor 65 Millionen Jahren wegen der Folgen einen Einschlags eines Asteroiden ausgestorben sind, ist allgemein bekannt. In unserer direkten Nachbarschaft gibt es ebenfalls zwei große Krater, die bei einem Einschlag von Asteroiden entstanden sind: das Nördlinger Ries und das Steinheimer Becken. Der Einschlag des über 1 km dicken Brockens im Ries erfolgte vor 14,6 Millionen Jahren; ein Satellit des im Ries eingeschlagenen Asteroiden schuf das 40 km entfernte Steinheimer Becken.

Vor dem Einschlag floss die Jagst in die Wörnitz und dann in die Donau, danach flossen Jagst und Kocher in die Brenz und dann in die Donau; vor 300.000 bis 150.000 Jahren hat sich die Alb so weit angehoben, dass die Jagst ihre Flussrichtung umkehrt und seither in den Neckar, den Rhein und in die Nordsee fließt.

2.5 Kometen

Kometen galten von alters her als Vorboten von Katastrophen. Nach der Lehre des Aristoteles sollten Kometen Erscheinungen in der irdischen Atmosphäre sein, aber Entfernungsbestimmungen durch Parallaxe zeigten in der Neuzeit schnell, dass dies unmöglich sein kann. Edmund Halley (1656–1742) konnte die Bahn eines großen Kometen von 1682 bestimmen und stellte fest, dass dieser Komet (heute der Halleysche Komet genannt) bereits 1607 und 1531 zu sehen gewesen war. Damit war erkannt, dass Kometen ebenso wie die Planeten die Sonne umkreisen, allerdings auf sehr elliptischen Bahnen. Der Halleysche Komet hat eine Umlaufdauer von 76,02 a, und eine Periheldistanz von 0,587 AE.

Die Erwärmung des Kometen in Sonnenähe führt zum Ausstoß von Gasen, welche durch den Sonnenwind weggetrieben werden und oft einen sichtbaren Schweif erzeugen.

Beim Auseinanderbrechen eines Kometen entstehen viele kleine Brocken, die sich im Laufe der Zeit auf dessen Bahn verteilen. Kreuzt die Erde eine solche Bahn, kann man sehr viele Sternschnuppen beobachten. Das bekannteste Beispiel sind die Perseiden, die jedes Jahr um den 12. August herum sichtbar sind. Die Perseiden entstammen dem Kometen 109P/Swift-Tuttle, der eine Umlaufdauer von 133 Jahren hat.

Trojaner

Lagrange hat berechnet, dass es auf der Umlaufbahn eines großen Planeten zwei Punkte gibt, auf denen kleinere Objekte eine stabile Umlaufbahn besitzen; diese liegen 60° vor bzw. hinter dem Planeten. Derartige Objekte nennt man Trojaner, und die ersten wurden in der Umlaufbahn des Jupiter entdeckt. Inzwischen kennt man Trojaner von allen Planeten außer Merkur, und es gibt sogar zwei Saturnmonde (Tethys und Dione), welche Trojaner besitzen.

Kuipergürtel

Der Kuipergürtel umfasst das Gebiet zwischen 30 und 50 AE außerhalb der Neptunbahn; dort umkreisen etwa 70.000 Objekte mit mehr als 100 km Durchmesser die Sonne, von denen derzeit um die 2000 bekannt sind. Neben Pluto kennt man noch acht weitere Objekte mit einem Durchmesser von 1000 km oder mehr.

Oortsche Wolke

Man vermutet heute, dass langperiodische Kometen aus einer Gegend des Sonnensystems stammen, die man Oortsche Wolke nennt. Diese reicht bis in eine Entfernung von 100.000 AE, was 1,6 Lichtjahren entspricht. Man geht davon aus, dass dort viele Milliarden von Objekten die Sonne umkreisen.

Titius-Bode Reihe

Die Entfernungen der Planeten von der Sonne in astronomischen Einheiten genügen näherungsweise einer einfachen Gleichung, welche die deutschen Astronomen Titius (1766) und Bode (1772) zuerst aufgestellt haben. Sie haben bemerkt, dass man die Halbachsen der Bahnen Merkur bis zum damals bekannten letzten Planeten Saturn bekommt, wenn man in die Formel

$$a(n) = 0{,}4 + 0{,}3 \cdot 2^n$$

nacheinander $n = -\infty$, 0, 1, 2, 4 und 5 einsetzt:

n	$-\infty$	0	1	2	3	4	5	6
$a(n)$	0,4	0,7	1	1,6	2,8	5,2	10,0	19,6

Die Tatsache, dass es für $n = 3$ keinen entsprechenden Planeten gab, sorgte für Verwunderung; die große Lücke zwischen Mars und Jupiter ist ja schon beim Betrachten der Umlaufsdauern nicht zu übersehen. Ab 1800 hat man in dieser „Lücke“ zahlreiche Kleinplaneten (Planetoiden) gefunden, die mit dem bloßen Auge nicht zu sehen sind.

2.6 Die Sonne

Die Sonne ist der erdnächste Stern; sie hat einen Radius von fast 700.000 km und eine Masse von $2 \cdot 10^{30}$ kg. Der Kern der Sonne hat eine Temperatur von 15,6

Millionen K und mit 150 g/cm^3 eine Dichte, die 13 Mal größer ist als die von Blei.
Aufbau; Sonnenflecken; Corona; Polarlichter

An der Sonnenoberfläche herrscht immer noch eine Temperatur von 6000 K. Die Korona, die bei totalen Sonnenfinsternissen sichtbar wird, hat nur eine sehr geringe Dichte. Die hohen Temperaturen ermöglichen es Teilchen in der Korona, das Schwerefeld der Sonne zu verlassen; diese bilden den Sonnenwind, der zum großen Teil aus Protonen und Elektronen besteht.

Die Sonne ist vor etwa 4,6 Milliarden Jahren entstanden. Als sich eine große Gaswolke, die zum größten Teil aus Wasserstoff bestand, unter ihrer eigenen Schwerkraft zusammenzog, wurde der Druck und die Temperatur im Innern schließlich so groß, dass die Kernfusion gezündet wurde und die Sonne zu scheinen begann.

2.7 Die Milchstraße

Die Sterne, die wir am Nachthimmel sehen, gehören alle zu unserer Milchstraße. Diese ist eine flache Scheibe mit einem Durchmesser von fast 200.000 Lichtjahren und einer Dicke von etwa 3000 Lichtjahren. Schätzungen der Gesamtmasse bewegen sich zwischen 400 und 1500 Milliarden Sonnenmassen.

Zu den Galaxien in unserer Nachbarschaft gehören neben einigen Zwerggalaxien die große und die kleine Magellansche Wolke und natürlich die Andromedagalaxie.

The Universe Song

Monty Pythons Songwriter Neil Innes hat für den Film *The Meaning of Life* ein Lied beigesteuert, in welchem die wesentlichen Größenordnungen unseres Sonnensystems und unserer Milchstraße verewigt sind.

> Whenever life gets you down, Mrs. Brown
> And things seem hard or tough
> And people are stupid, obnoxious or daft
> And you feel that you've had quite enough
>
> Just remember that you're standing on a planet that's evolving
> And revolving at nine hundred miles an hour
> That's orbiting at nineteen miles a second, so it's reckoned
> The sun that is the source of all our power.
> The sun and you and me and all the stars that we can see
> Are moving at a million miles a day
> In an outer spiral arm, at four hundred thousand miles an hour
> In the galaxy we call the Milky Way
>
> Our galaxy itself contains a hundred billion stars
> It's a hundred thousand light years side to side
> It bulges in the middle, six thousand light years thick

But out by us, it's just a thousand light years wide
We're thirty thousand light years from galactic central point
We go 'round every two hundred million years
And our galaxy is only one of millions of billions
In this amazing and expanding universe

The universe itself keeps on expanding and expanding
In all of the directions it can whizz
As fast as it can go, of the speed of light, you know
Twelve million miles a minute and that's the fastest speed there is
So remember, when you're feeling very small and insecure
How amazingly unlikely is your birth
And pray that there's intelligent life somewhere out in space
'Cause it's bugger all down here on Earth

Übungen

2.1 Mit welcher Geschwindigkeit rotiert ein Objekt am Äquator, mit welcher auf dem 50ten Breitengrad?

2.2 Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich der Mond um die Erde?

2.3 Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich der Mond bei Vollmond bzw. bei Neumond um die Sonne?

2.4 Die Erde passt in etwa 1000 Mal in den Jupiter. Was sagt das über das Verhältnis von deren Radien aus?

2.5 Ordne die folgenden Objekte nach ihrem Abstand von der Erde: Andromedagalaxie; Mond; Polarstern; Saturn; Venus.

2.6 Welche der folgenden Größen könnte den Abstand eines benachbarten Sterns zur Sonne darstellen? 100 km, 10 AE, 10 Lj, 10^6 Lj.

2.7 Ordne die folgenden Materialien nach aufsteigender Dichte. Aluminium, Blei, Holz, Styropor, Wasser.

2.8 Kontrolliere die im Universe Song angegebenen Zahlen.

   1. Wie groß ist die Rotationsgeschwindigkeit der Erde an ihrer Oberfläche? Der Erdradius beträgt 6370 km, 1 Meile ist etwa 1,61 km.
   2. Mit welcher Geschwindigkeit dreht sich die Erde um die Sonne? Der Abstand Erde-Sonne beträgt etwa 150 Millionen km.
   3. Die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum beträgt 299.792 km/s. Welche Strecke legt das Licht in einer Minute, welche in einem Jahr zurück?
   4. Unsere Sonne ist etwa 28.000 Lichtjahre vom galaktischen Zentrum entfernt und dreht sich einmal in etwa 230 Millionen. Zeige, dass die Bahngeschwindigkeit etwa 220 km/s beträgt.
   5. Die Sonne bewegt sich mit etwa 550 km/s relativ zur kosmischen Hintergrundstrahlung.

3. Antike Astronomie

Zu den ältesten religiösen Bauten neben den Pyramiden gehören Megalith-Konstruktionen wie Stonehenge und der Ring of Brodgar. Allen diesen Bauten gemein ist der Zusammenhang mit astronomischen Daten (Datierung von Sonnwendfeiern) und religiösen Zwecken, wobei wir über letztere wenig wissen, weil diese Bauten älter sind als erhaltene Schriften. Das älteste bekannte Bauwerk, das Astronomie und Religion verbindet, ist die Kreisgrabenanlage in Goseck (Sachsen-Anhalt), das vor fast 7000 Jahren errichtet wurde und manchmal als das älteste Sonnenobservatorium bezeichnet wird. Die Kreisgrabenanlage von Pömmelte (ebenfalls in Sachsen-Anhalt) ist mit etwas mehr als 4000 Jahren deutlich jünger.

Die Himmelsscheibe von Nebra ist die älteste bekannte Darstellung des Himmels mit Vollmond, Mondsichel, den Plejaden und anderen Sternen. Ihr Alter wird auf etwa 4000 Jahre geschätzt. Mond und Sterne sind aus Gold, die Scheibe selbst aus Bronze.

Wir werden die Geschichte der Astronomie hier nur streifen und verweisen für ausführliche Darstellungen auf die vielen sehr lesenswerten Bücher von Jürgen Hamel im Literaturverzeichnis.

3.1 Babylonische Astronomie

Mit Babyloniern bezeichnen wir eine ganze Reihe von Kulturen, die zwischen 4000 v. Chr. und 500 v. Chr. auf dem Gebiet des heutigen Irak (griechisch: Mesopotamien, das Land zwischen den Flüssen (Euphrat und Tigris)) aufblühten. Bereits bei den Sumerern im dritten Jahrtausend v. Chr. war die Astrologie zur Vorhersage von Ereignissen zentral. Im Laufe der Jahrhunderte lernte die Babylonier, Stellungen von Planeten aufzuzeichnen und später vorherzusagen, ebenso zeichneten sie Sonnen- und Mondfinsternisse auf.

Die Babylonier wussten, dass Morgen- und Abendstern derselbe Planet waren, dass sich gewissen Sonnen- und Mondfinsternisse alle 18,03 Jahre wiederholen (der Saroszyklus), und sie kannten die mittlere synodische Monatslänge (die Zeit zwischen zwei Vollmonden) als 29,5306 Tage – eine Genauigkeit, die man nur erreichen kann, wenn man die Mondphasen über 100 Jahre lang auswertet.

Die Babylonier waren der Überzeugung, dass wenn man die Bewegungen der Götter (wie Sonne und Mond) vorhersagen könne, das Gleiche für das Schicksal des Menschen gelten müsse. Sie suchten also überall nach Zeichen und entwickelten

Abb. 3.1. Himmelsscheibe von Nebra. Von Dbachmann, CC BY-SA 3.0, `https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=1500795`

insbesondere lange Listen mit Vorhersagen, die nach gewissen Ereignissen (etwa Finsternissen) erfolgen würden. Selbst zu Zeiten Jesu galten die Chaldäer aus Mesopotamien und die Perser als hervorragende Sterndeuter. Im Matthäusevangelium werden daher drei Magier aus dem Osten (die drei Weisen aus dem Morgenland) erwähnt, welche die Geburt des neuen Königs in den Sternen gelesen haben wollen.

3.2 Griechische Astronomie

Die griechische Kultur beginnt mit Homer, dem Autor der Ilias und der Odyssee, und mit Thales und Pythagoras. In nur wenigen Jahrhunderten erweitern die Griechen die Kenntnisse in Mathematik und anderen Wissenschaften beträchtlich. Bereits Aristoteles erkennt, dass die Erde kugelförmig ist: Dass bei Schiffen, die auf die Küste zufahren, immer erst die Masten sichtbar werden, ist ebenso ein Hinweis auf die Krümmung der Erdoberfläche wie die Tatsache, dass man in Ägypten zur gleichen Jahreszeit andere Sterne sieht wie in Griechenland. Auch der kreisförmige Schatten der Erde bei einer Mondfinsternis ist ihm bekannt.

Abb. 3.2. Offshore Windpark `https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Offshore_windpark_Thorntonbank.jpg`

Die wichtigsten Daten aus der Geschichte der griechischen Astronomie sind die folgenden.

- 28. Mai 585 v.Chr.: Eine Schlacht zwischen Medern und Lydern wird nach einer Sonnenfinsternis abgesagt; die Armeen schließen Frieden. Thales soll die Sonnenfinsternis vorhergesagt haben. Auch wenn dies eine etwas zweifelhafte Legende ist, zeigt sie doch, dass die Griechen damals bereits wussten, dass man Sonnen- und Mondfinsternisse vorhersagen kann.
- 6. Jahrhundert v.Chr.: Der Tunnelbau auf der Insel Samos belegt, dass die Griechen schon damals über ausgezeichnete Mittel der Feldmessung verfügten.
- 450 v.Chr.: Anaxagoras erklärt die Mondphasen durch die Sonne.
- 270 v. Chr.: Aristarch bestimmt die Entfernung des Monds zu etwa 20 Erdradien (richtig wären etwa 60 Erdradien).
- 240 v. Chr.: Eratosthenes bestimmt den Erdradius.
- Hipparch (128 v. Chr.) benutzt eine Sonnenfinsternis, um zu zeigen, dass der Mond ca. 90 Erdradien von uns entfernt ist.
- Claudius Ptolemäus (ca. 100–160) schrieb 13 Bücher über Mathematik und Astronomie, in denen er auch babylonische Beobachtungen benutzte.

Aristarch bestimmt die Entfernung zum Mond

Aristarch hat ein ganzes Buch über die Bestimmung der Entfernung von Erde und Mond geschrieben. Dort leitet er mit viel Geometrie aus Beobachtungen bei einer Mondfinsternis Abschätzungen für diese Entfernung her.

Der Kern der Idee ist folgender[1]: Bei einer Mondfinsternis ist der Mittelpunkt des Monds für etwa 3 h im Kernschatten. Der Kernschatten ist ein wenig kleiner als der Durchmesser der Erde. Der Mond braucht für eine Umrundung der Erde 27,3 d. Das Verhältnis von dem Umfang $2\pi R$ des Orbits zum Durchmesser $2R$ der Erde ist also in etwa dasselbe wie das zwischen einer Umlaufdauer des Monds und der Dauer der Mondfinsternis:

$$\frac{2\pi R}{2r} \approx \frac{27{,}3 \cdot 24}{3},$$

was auf $R \approx 70r$ führt.

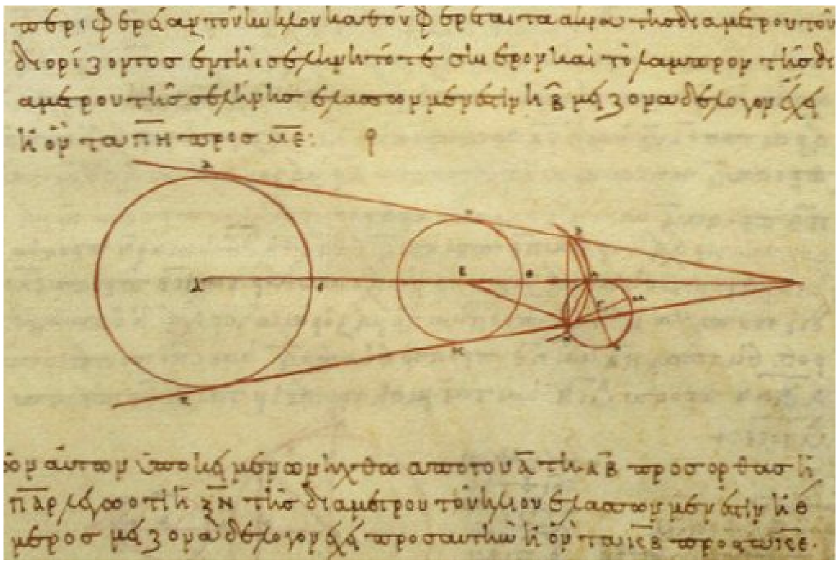


Abb. 3.3. Aus einer byzantinischen Abschrift eines Manuskripts Aristarchs

Aristarch erkannte, dass die Sonne viel größer sein musste als die Erde. Diese Tatsache legte ihm nahe, dass die Erde um die Sonne kreisen sollte: Aristarch vertrat als erster ein heliozentrisches Weltbild. Dies konnte sich aber nicht durchsetzen.

- Video von Gassner Aristarch

Eratosthenes bestimmt den Radius der Erde

Eratosthenes hatte gehört, dass sich um den 21. Juni herum in Syene (Ägypten; heute heißt die Stadt Assuan) die Sonne in einem tiefen Brunnen spiegelte, also

[1] Wie ein Blick auf Abb. 3.3 zeigt, nahm Aristarch im Gegensatz zu uns nicht an, dass die Sonnenstrahlen parallel einfallen.

direkt im Zenit stand. In Alexandria, wo Eratosthenes der Bibliothekar der größten Bibliothek des Altertums war, konnte er dagegen einen Winkel messen, der etwa dem 50. Teil des Vollwinkels entspricht; das ergibt $360°/50 \approx 7{,}2°$. Der Abstand von Syene und Alexandria war etwa 5000 Stadien (vielleicht abgeschätzt mit Hilfe der Zeit, die eine Karawane von Syene nach Alexandria unterwegs war).

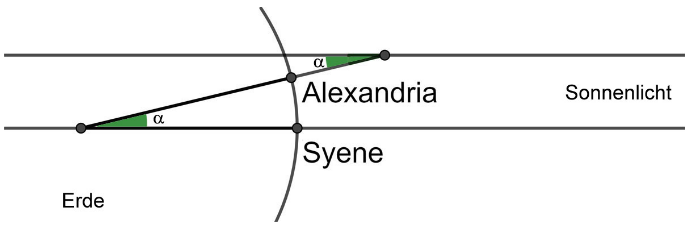


Abb. 3.4. Eratosthenes misst den Erdumfang

Eratosthenes nahm an, dass die Sonne so weit von der Erde entfernt ist, dass die Sonnenstrahlen praktisch parallel sind. Die Skizze in Abb. 3.4 zeigt, dass der Winkel zwischen Alexandria und Syene, vom Erdmittelpunkt aus gesehen, gleich dem gemessenen 50. Teil des Vollwinkels ist („Wechselwinkel"!). Da die Entfernung zwischen Syene und Alexandria daher etwa dem 50. Teil des Erdumfangs entspricht, ergibt sich dieser zu etwa 252 000 Stadien.

Nimmt man an, dass 1 Stadium etwa 164 m entspricht, kommt man auf einen Wert von 41 000 km für den Erdumfang und knapp 6 400 km für den Erdradius. Nimmt man ein Stadium als etwa 185 m an, so führt dies auf einen Erdumfang von 46 000 km. Ein ägyptisches Stadium entspricht dagegen etwa 157,5 m und liefert 39 700 km.

Archimedes

Archimedes ist einer der größten Mathematiker aller Zeiten; seine Bestimmung von Oberfläche und Volumen einer Kugel gehört auch heute noch zu den ganz großen intellektuellen Leistungen.

Zwar ist sein Werk für die Astronomie nicht von wesentlicher Bedeutung, allerdings hat er auch in der Physik bedeutende Ergebnisse erzielt. Die Kräfte beim Hebel und beim Auftrieb hat er als erster quantitativ beschrieben und damit gezeigt, dass der Mathematik bei der Erforschung der Natur eine wesentliche Rolle zukommt.

Der Auftrieb. Als Archimedes von seinem König dazu aufgefordert worden war herauszufinden, ab eine für ihn gefertigte Krone aus reinem Gold ist, fand er die Lösung des Problems der Bestimmung des Volumens beim Baden: wird ein Objekt in ein randvoll gefülltes Becken getaucht, ist dessen Volumen gleich dem des herausgelaufenen Wassers. Die Legende will wissen, dass er danach nackt durch die Straßen von Syrakus lief und „Heureka" (Ich hab's gefunden) rief.

Im Zusammenhang damit entdeckte er auch das Gesetz des Auftriebs: Der Auftrieb eines Körpers ist genau so groß wie die Gewichtskraft des von ihm verdrängten Wassers.

Das Hebelgesetz. Greifen gleichgerichtete Kräfte F_1 und F_2 senkrecht am Hebel an, und zwar im Abstand r_1 bzw. r_2 vom Drehpunkt, dann herrscht genau dann Gleichgewicht, wenn $F_1 r_1 = F_2 r_2$ ist.

Lässt man Kräfte in beliebigem Winkel am Hebel angreifen, braucht man Vektoren. Bezeichnet $\vec{r}$ den Vektor, der vom Drehpunkt auf den Angriffspunkt der Kraft $\vec{F}$ zeigt, dann erzeugt diese Kraft ein Drehmoment $\overrightarrow{M}$, das durch das Kreuzprodukt

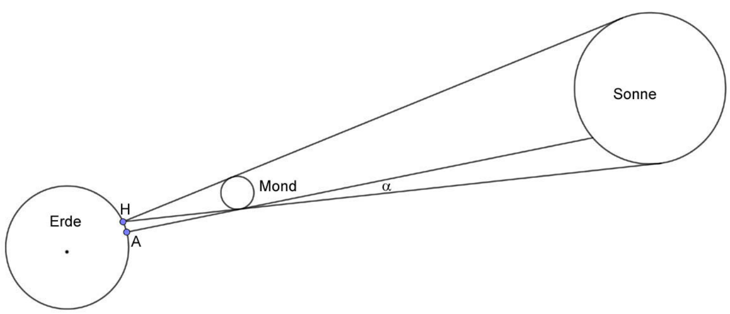
$$\overrightarrow{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

gegeben ist. Zieht die Kraft also in Richtung des Hebelarms, dann sind $\vec{r}$ und $\vec{F}$ parallel, und es ergibt sich ein Drehmoment 0. Steht die Kraft senkrecht auf den Hebelarm, ist $|\vec{r} \times \vec{F}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}|$, und es ergibt sich das Hebelgesetz von Archimedes.

Archimedes konnte mit diesem Prinzip auf eine geniale Art und Weise Flächen von Parabelsegmenten oder Volumina von Kugeln und Paraboloiden bestimmen.

Hipparch bestimmt die Entfernung zum Mond

Hipparch wusste, dass während einer totalen Sonnenfinsternis am Hellespont (Nordtürkei) die Sonne in Alexandria nur zu 80 % bedeckt war.



Weil die Sonne einen Winkeldurchmesser von 0,5° hat, ist der Winkel $\alpha \approx$ 0,1°. Für die Strecke HA zwischen Hellespont (H) und Alexandria (A) gilt also einerseits $\overline{HA} \approx 2\pi r \cdot \frac{9}{360}$ (die beiden Orte sind etwa 9 Breitengrade auseinander); andererseits ist $\overline{HA} \approx 2\pi R \cdot \frac{0{,}1}{360}$. Dies führt auf $R \approx 90r$.

Der Antikythera-Mechanismus

Im Jahre 1900 fanden Schwammtaucher vor der Küste der griechischen Insel Antikythera in einem Schiffswrack unter Anderem ein Gerät aus Bronze, an dem noch einige Zahnräder zu erkennen waren. Münzfunde auf dem Schiff legen nahe, dass das Schiff zwischen 70 und 60 v.Chr. untergegangen sein muss.

Langjährige Untersuchungen des Geräts haben ergeben, dass es Sonnen- und Mondkalender enthielt, babylonische Tierkreiszeichen, und einen Kalender zur Vorhersage von Finsternissen. Dies ist das einzige derart komplexe Gerät, das aus der Antike bekannt ist.

- Antikythera
- Lego

Ptolemäus

Ptolemäus legte in seinem Almagest die astronomischen Kenntnisse der Griechen nieder. Dieses Buch findet später seinen Weg nach Indien. Von dort bringen es die Araber wieder zurück nach Europa, wo es wieder zur Grundlage der Astronomie wird.

Im Almagest beschreibt er das geozentrische Weltbild, das man nach ihm auch das Ptolemäische Weltbild nennt. Er geht von der Annahme des Aristoteles aus, wonach sich Himmelskörper nur mit konstanter Geschwindigkeit auf Kreisbahnen bewegen können.

Abb. 3.5. Retrograde Bewegung des Mars aus dem Jahre 2003; die kleinen Punkte im Hintergrund stammen vom Uranus. Foto: `https://www.astro.com/astrowiki/de/R%C3%BCckl%C3%A4ufigkeit`

Eine Beobachtung, die sich nur schwer im geozentrischen Weltbild erklären lässt, ist die retrograde Bewegung der Planeten. Damit ist gemeint, dass Planeten zu manchen Zeiten rückläufig sind oder sich auf Schleifen bewegen (siehe etwa Abb. 3.5). Im heliozentrischen Weltbild ist das eine einfache Folge der Tatsache, dass sich innere Planeten schneller bewegen als äußere und somit gegenüber dem Fixsternhimmel an diesen vorbeiziehen (siehe Abb. 3.6).

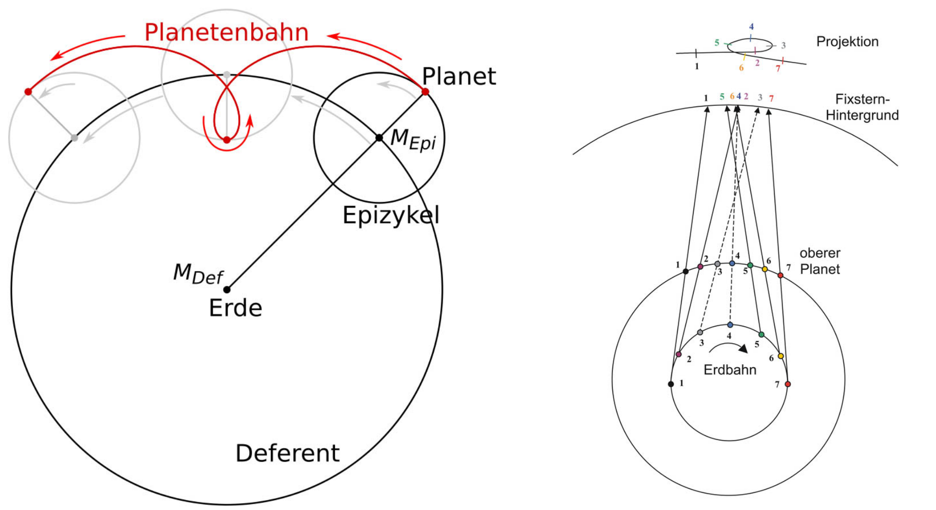


Abb. 3.6. Epizykel `https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=68445640` und Erklärung im heliozentrischen Weltbild `https://de.wikipedia.org/wiki/Planetenschleife`.

Ein ähnliches Problem ergibt sich bei der Beschreibung der Bewegung von Merkur und Venus, die sich ja immer in der Nähe der Sonne befinden. Auch das lässt sich mit Epizykeln hinbiegen, allerdings verlaufen die eigentlichen Bahnen von Merkur und Venus beide zwischen Erde und Sonne (siehe Abb. 3.7), drehen sich effektiv als weder um die Erde noch um die Sonne.

Zwar müsste man auch im geozentrischen Weltbild Phasen der Venus erkennen, allerdings wäre die Venusscheide zu jedem Zeitpunkt höchstens halb beleuchtet.

Römischer Limes

Die Römer pflegten nur sehr wenige Naturwissenschaften; im wesentlichen beschränkte sich ihr Interesse auf die Feldmessung. Dort brachten sie es allerdings, ebenso wie beim Bau von Aquädukten (Wasserstraßen zur Bewässerung von Städten) oder beim Bau von Wassermühlen, zu großen Leistungen. So verläuft der Limes zwischen Walldürn und Welzheim auf einer Strecke von 80 km vollkommen gerade, und die Wachtürme weichen maximal einige Meter von dieser Linie

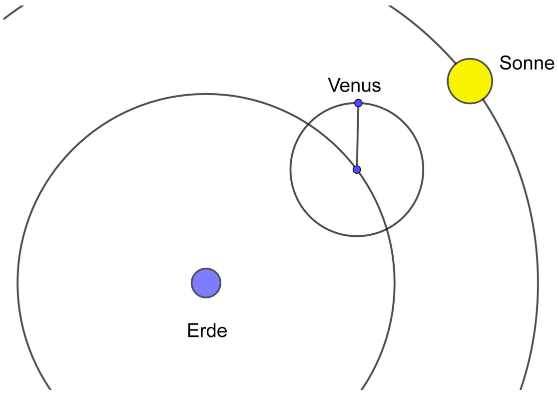


Abb. 3.7. Bahn der Venus im ptolemäischen Weltbild

ab. Man vermutet heute, dass dieser Teil des Limes am Polarstern ausgerichtet worden ist.

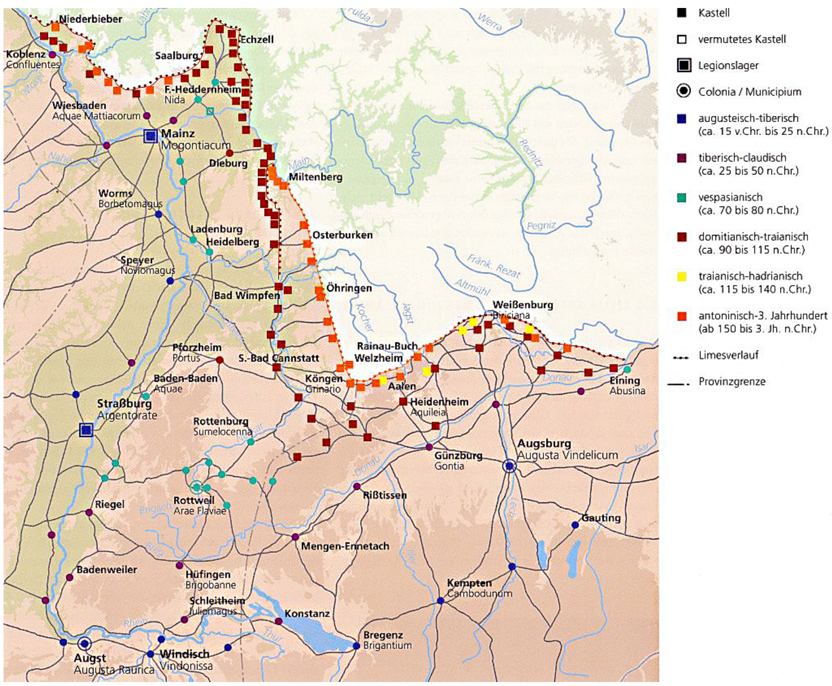


Abb. 3.8. Der $\boxed{\text{Limes}}$ zwischen Welzheim und Walldürn.

3.3 Mittelalter und Renaissance

Mit dem Siegeszug des Christentums im ehemaligen Römischen Reich und später in ganz Europa ging es mit der Wissenschaft bergab. Wissenschaftliche Erkenntnisse (Kugelgestalt der Erde, Astronomie, Mathematik) gingen ebenso verloren wie technische Errungenschaften (Verarbeitung von Erzen zu Metall). Bis zur Renaissance, der Wiederentdeckung der griechischen Kultur, fand Wissenschaft nur im islamisch beherrschten Teil von Europa, sowie in Indien und China statt. Wir wollen im Folgenden nur einen arabischen Wissenschaftler vorstellen, verweisen aber darauf, dass wir den arabischen Gelehrten die Einführung des Dezimalsystems (das sie aus Indien übernommen hatten) und die grundlegenden Techniken der Algebra verdanken.

Für die Bestimmung des Erdradius nach Eratosthenes muss man die Entfernung zweier weit entfernter Punkte auf der Erdoberfläche messen. Für einen halbwegs genauen Wert sind dazu kostspielige Expeditionen notwendig.

Der arabische Gelehrte al-Biruni (973–1048) hat sich daher eine Methode einfallen lassen, die sich mit weit weniger Aufwand durchführen lässt, weil die zu vermessenden Entfernungen deutlich kleiner sind (naturgemäß erhöht sich dadurch der Einfluss von Messfehlern).

Al-Biruni stellte sich auf einen Berg, der in einer flachen Ebene stand, und beobachtete, wie weit es bis zum Horizont ist (diese Strecke muss man dann messen).

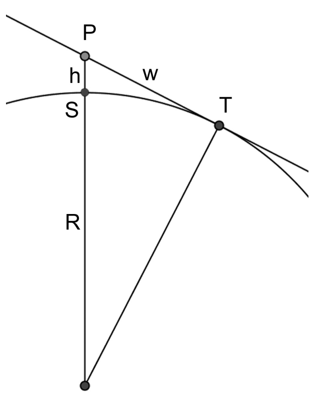


Abb. 3.9. Al-Birunis Bestimmung des Erdradius.

Setzt man den Erdradius mit R an und misst man die Weite als die Länge des Sehstrahls PT anstatt der Länge des Kreisbogens ST (der Unterschied ist winzig, wenn wir annehmen, dass die Höhe h des Turms klein gegenüber der Sichtweite $w = \overline{PT}$ ist), dann besagt der Satz des Pythagoras, dass

$$(R + h)^2 = R^2 + w^2$$

ist; Ausmultiplizieren ergibt

$$h(2R + h) = w^2.$$

Ist die Höhe klein gegenüber R, so wird $2R + h \approx 2R$ sein, folglich $2Rh \approx w^2$ und damit $R \approx \frac{w^2}{2h}$.

Sehr viele Sternennamen kommen aus dem Arabischen:

- Aldebaran ist ein Doppelstern im Sternbild Stier; der Hauptstern ist ein Roter Riese mit fast 1,2 Sonnenmassen, aber dem 145fachen Radius der Sonne. Er ist 67 Lichtjahre von uns entfernt.
- Algol ist ein veränderlicher Stern im Sternbild Perseus und etwa 90 Lichtjahre von uns entfernt. Er verändert seine Helligkeit mit einer Periode von 2,9 Tagen zwischen 2,1 und 3,4 m, was mit dem bloßen Auge beobachtet werden kann. Algol ist ein Bedeckungsveränderlicher: die Helligkeitsänderung wird dadurch verursacht, dass ein weniger heller Begleitstern sich vor den helleren Hauptstern schiebt.
- Beteigeuze ist der „oberste“ Stern im Orion. Er ist ein Roter Überriese (sein Radius beträgt etwa 1000 Sonnenradien), der in naher Zukunft zu einer Supernova werden wird. Er ist zwischen 500 und 750 Lichtjahre von uns entfernt.
- Deneb ist im Übergang von einem Blauen Riesen zu einem Roten Überriesen. Die deutsche Wikipedia-Seite gibt seine Entfernung mit 1411,96 Lj an (eine Genauigkeit mit 6 geltenden Ziffern ist schon ein Warnzeichen), die englische mit 2615 ± 215 Lj. Ein hinreichend genauer Wert scheint derzeit immer noch nicht bekannt zu sein.
- Rigel ist der hellste Stern im Orion (rechts unten). Er ist zwischen 650 und 900 Lichtjahre von uns entfernt. Der Hauptstern ist in der Übergangsphase von einem Blauen Riesen zum Roten Überriesen. Er hat die 46.000-fache Leuchtkraft der Sonne.
- Wega steht im Sternbild Leier; er ist nach Sirius und Arktur der dritthellste Stern auf der Nordhalbkugel und ist nur 25 Lichtjahre von der Erde entfernt. Vor 14.000 Jahren war die Wega der Polarstern.

Übungen

3.1 Schätze die Masse der Erde ab.

Wenn die Erde aus Stein bestehen würde, hätte sie eine Dichte von etwa 2,7 g/cm^3. Bei einem Radius von 6370 km kommt man so auf eine Masse von $3 \cdot 10^{24}$ kg. Weil die Erde ein Magnetfeld besitzt, dürfen wir annehmen, dass der Kern aus Eisen besteht, das eine Dichte von fast 8 g/cm^3 hat. Die Erdmasse wird also, je nach Größe des Kerns, um einen Faktor von etwa 2 größer sein.

3.2 Wie weit sieht eine Person mit Augenhöhe am Meeresufer auf den Horizont hinaus?

3.3 Wie weit ist ein Leuchtturm mit 80 m Höhe zu sehen?

4. Von Kopernikus bis Kepler

Der griechische Philosoph Aristoteles wurde von der Kirche schon früh zu ihrem Kronzeugen gemacht. Aristoteles hatte in seiner Physik argumentiert, es müsse eine Kraft geben, die alle Bewegung auf der Welt verursacht, und nannte sie den „unbewegten Beweger“. Thomas von Aquin (1225–1274) identifizierte diesen kurzerhand mit dem christlichen Gott. Dies führte im Laufe der Zeit dazu, dass die Lehre des Aristoteles (und deren Interpretation durch die Kirche) als unumstößliche Wahrheit galt. Gegner der aristotelischen Scholastik waren etwa Petrus Ramus (Pierre de la Ramée, 1515–1572) und Francis Bacon (1561–1626). Ramus wurde 1572 in der Bartholomäusnacht ermordet – in dieser Nacht wurden in Paris und ganz Frankreich Tausende Hugenotten (Protestanten) abgeschlachtet; Papst Gregor XIII. ließ zur Feier des Tages ein Te Deum singen und eine Gedenkmünze prägen.

Als Francis Bacon meinte, das menschliche Wissen sei kumulativ und würde im Laufe der Zeit zunehmen, stellte er sich bereits gegen die kirchliche Lehre, wonach alles, was der Mensch wissen könne, bereits in der heiligen Schrift und bei Aristoteles stehe.

Giordano Bruno erregte mit seinen 120 Thesen gegen die aristotelische Naturlehre Tumulte. 1592 wurde er von der Inquisition verhaftet und nach Rom gebracht. Nach 8 Jahren Kerkerhaft wurde er am 17. Februar 1600 wegen Ketzerei auf dem Scheiterhaufen verbrannt.

4.1 Kopernikus

- Video Gassner $\boxed{\text{Kopernikus bis Kepler}}$

Probleme des geozentrischen Weltbilds:

- Warum stehen Merkur und Venus immer in der Nähe der Sonne?
- Schleifenbewegung der Planeten, insbesondere des Mars
- Die Helligkeit der Planeten kann nur von ihrer Entfernung zur Sonne abhängen, während sie in Wirklichkeit auch von der Entfernung zur Erde abhängt.

Probleme des heliozentrischen Weltbilds:

- Die fehlende Parallaxe der Sterne.

Der Abstand von Venus und Sonne

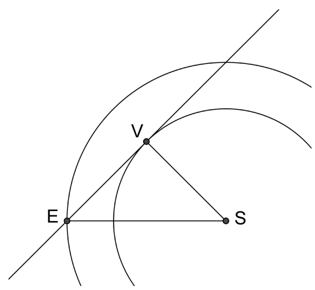
Bevor wir den Abstand von Venus und Sonne abschätzen, wollen wir uns fragen, wie lange ein Sonnenuntergang am 21. März am Äquator dauert.

Die Sonne hat (wie der Mond) einen Winkeldurchmesser von 0,5°. In 24 h dreht sie sich scheinbar um die Erde, hat also eine Winkelgeschwindigkeit von $\frac{360°}{24h} = 15°/h$. Wenn sie also im Westen senkrecht untergeht, braucht sie dafür $\frac{0{,}5°}{15°/h} = \frac{1}{30}h$, also etwa 2 Minuten.

In unseren Breitengraden dauert ein Sonnenuntergang länger, weil diese nicht senkrecht auf den Horizont zuläuft, aber auch hier ist die Sonne nach vier Minuten untergegangen. Allerdings ist der obere Rand der Sonne selbst dann noch zu sehen, wenn die Sonne bereits komplett untergegangen ist: dies liegt an der Lichtbrechung in der Atmosphäre (Refraktion).

1. Der Abstand ist in Astronomischen Einheiten anzugeben; das ist die mittlere Entfernung von der Erde zur Sonne (also 1 AE ≈ 149,6 Mio km, aber das tut hier nichts zur Sache).

2. Die Venus heißt deswegen Morgen- bzw. Abendstern, weil sie entweder morgens vor der Sonne aufgeht oder abends nach ihr untergeht, während Mars manchmal auch bei Mitternacht zu sehen ist. Das liegt daran, dass die Umlaufbahn der Venus innerhalb der Erdbahn verläuft.



Die wesentliche Information ist dann, dass die Venus maximal drei Stunden vor der Sonne auf- bzw. maximal drei Stunden nach ihr untergeht.

Aus dieser Zeitangabe kann man den Winkel der maximalen Auslenkung der Venus zu 45° ermitteln. Daher ist das rechtwinklige (Tangenten an Kreise stehen senkrecht auf den Radius) Dreieck EVS gleichschenklig, d.h. es ist $\overline{EV} = \overline{SV}$. Also ist $\overline{ES}$ die Diagonale eines Quadrats mit Seitenlänge $\overline{VS}$, d.h. $\overline{ES} = \sqrt{2} \cdot \overline{VS}$. Da $\overline{VE}$ eine Astronomische Einheit ist, folgt für die Entfernung Venus–Sonne $\overline{VS} \approx 0{,}7$ AE wegen $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}7$.

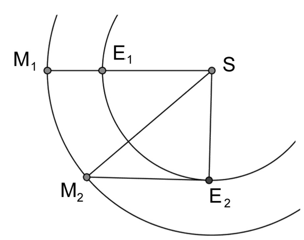
Bei dieser Abschätzung haben wir natürlich einige vereinfachende Annahmen gemacht, die allesamt das Ergebnis nicht allzu sehr verfälschen. Insbesondere haben wir angenommen, dass Erde und Venus sich auf Kreisbahnen um die Sonne bewegen, die in derselben Ebene liegen. Dass die Bahnebenen in Wirklichkeit gegeneinander geneigt sind erkennt man daran, dass die Venus, würde ihre Bahnebene mit derjenigen der Erde zusammenfallen, alle 584 Tage vor der Sonne vorbeiziehen müsste. Tatsächlich ist ein „Venustransit" äußerst selten: Der letzte war im Juni 2012, den nächsten kann man erst wieder am 11.12.2117 beobachten.

Für die Abschätzung der Entfernung von Merkur und Sonne benötigt man schon etwas Trigonometrie; natürlich kann man damit umgekehrt aus dem Abstand die maximale Zeit berechnen, um welche Merkur der Sonne voraus- bzw. hinterherläuft. Allerdings ergeben sich aus der Elliptizität der Merkurbahn und ihrer Neigung gegenüber der Ekliptik viel größere Schwankungen als bei der Venus.

Der Abstand von Mars und Sonne

Oben haben wir gesehen, wie man mit ganz einfachen Beobachtungen die Entfernung der Venus von der Sonne (in Astronomischen Einheiten – das ist die durchschnittliche Entfernung von Erde und Sonne) bestimmen kann. Beim Mars ist das ähnlich leicht.

> *An einem bestimmten Tag steht der Mars um Mitternacht an der Stelle, an der mittags die Sonne gestanden hat (man sagt, Mars sei in Opposition). Ein Viertel Jahr später geht der Mars um Mitternacht gerade am Horizont auf (man spricht von der Quadratur). Die Umlaufdauer des Mars um die Sonne beträgt etwa zwei Jahre.*
>
> *Bestimme daraus die Entfernung des Mars von der Sonne.*



Dazu betrachten wir folgende Skizze: In einem Vierteljahr dreht sich die Erde um $\sphericalangle M_1SE_2 = 90°$; im gleichen Zeitraum dreht sich der Mars, dessen Umlaufdauer etwa zwei Jahre sind, um etwa 45°. Also muss das Dreieck M_2ES ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck sein, was auf $\overline{M_2S}^2 = 2\overline{ES}^2$ führt. Also ist der Mars etwa 1,4-mal so weit von der Sonne entfernt wie die Erde.

In Wirklichkeit verstreichen zwischen Opposition und Quadratur des Mars 104 Tage, und die Umlaufdauer des Mars beträgt 687 Tage. Das führt auf $\sphericalangle M_1SE_2 = 103°$ und $\sphericalangle M_1SM_2 = \frac{104}{687} \cdot 360° \approx 55°$, was mit $\sphericalangle M_2SE_2 \approx 48°$ und etwas Trigonometrie auf eine Entfernung von 1,5 AE führt.

4.2 Galilei

Galileo Galilei (1564–1641/42) gilt als der neuzeitliche Vater der Physik: konsequent stellt er das Experiment (und nicht mehr Aristoteles) als die höchste Autorität der Wissenschaft ins Zentrum. Er findet heraus, dass die Falldauer eines Körpers nicht von seiner Masse abhängt und versucht (erfolglos), die Lichtgeschwindigkeit zu messen.

Als er von der Erfindung des Fernrohrs hört, baut er sich selbst eines und richtet es auf den Himmel, insbesondere auf den Mond und die bekannten Planeten.

Galilei entdeckt vier Monde des Jupiter. Dies sind die ersten Himmelskörper, die nachweislich nicht um die Erde kreisen. Galilei entdeckt die Phasen der Venus, die zeigen, dass die Venus um die Sonne und nicht um die Erde kreist. In der Folge übernimmt er das kopernikanische Weltbild.

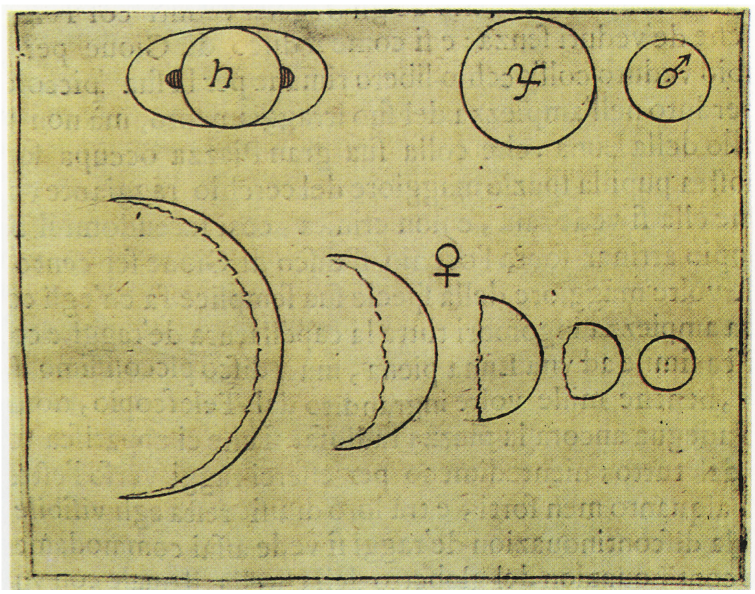


Abb. 4.1. Galileis Phasen der Venus und die „Henkel" des Saturn

1632 kommt er vor die Inquisition; er muss seine Lehren als Irrtum bezeichnen und entgeht damit dem Scheiterhaufen. Von 1633 bis zu seinem Tod wird er unter Hausarrest gestellt.

Simon Marius

Simon Marius (latinisiert für Simon Mayr) wurde 1573 in Gunzenhausen geboren, war dann fürstlicher Hofastronom in Ansbach, wo er 1624/25 gestorben ist. Mit einem Teleskop entdeckte er einen Tag nach Galilei die vier Monde des Jupiter. Galilei reagiert mit Plagiatsvorwürfen (Marius hatte den Julianischen Kalender benutzt, wonach er die Monde am 29. Dezember 1609 entdeckt hat; Galilei machte seine Entdeckung am 7. Januar 1610, einen Tag vor Marius).

Marius übernahm das Weltbild von Tycho Brahe, wonach die Erde im Zentrum steht, aber Merkur und Venus um die Sonne kreisen.

4.3 Kepler

Kepler hat die damals äußerst genauen Beobachtungen von Tycho Brahe (1546–1601) benutzt, um auf diese Weise die Entfernung von Sonne und Mars an vielen Punkten seiner Bahn zu berechnen; das hat ihn schließlich zur Erkenntnis geführt (das erste Keplersche Gesetz), dass die Marsbahn eine Ellipse ist, in deren einem Brennpunkt sich die Sonne befindet.

Tycho Brahe hat seine Beobachtungen noch ohne Fernrohr gemacht – der Erste, der das neu erfundene Teleskop auf den Himmel richtete, war Galilei (1564–1641/42), der damit 1610 die Monde des Jupiters entdeckte; schon eine Nacht später hat sie der Ansbacher Hofastronom Simon Marius (1573–1624) aus Gunzenhausen ebenfalls entdeckt. Damit war die Vorstellung *ad absurdum* geführt, die Planeten würden sich auf Kristallsphären um die Erde bewegen, und es war zweifelsfrei bewiesen, dass sich nicht alle Himmelskörper um die Erde drehen. Galilei befürwortete das heliozentrische Weltbild von Kopernikus (1473–1543) und wurde dafür 1633 von Rom unter Hausarrest gestellt; das Urteil wurde 1992 von Papst Johannes Paul II aufgehoben.

Johannes Kepler wurde am 27. Dezember 1571 in Weil der Stadt geboren. Sein Vater war Legionär und starb vermutlich in den Niederlanden; der kleine Kepler hat ihn mit fünf Jahren zuletzt gesehen. Während seines Studiums in Tübingen lernte er das damals vorherrschende geozentrische Weltbild kennen, in welchem die Sonne und alle Planeten um die Erde kreisen. Kepler wurde später Assistent Tycho Brahes in Prag, und widmete sich nach dessen Tod im Jahre 1601 der Bestimmung der Marsbahn; von seinen Berechnungen sind fast 1000 Seiten noch erhalten. Kepler starb am 15. November 1630 in Regensburg; da er Protestant war, wurde er außerhalb der Stadtmauern begraben.

Die Keplerschen Gesetze

Durch sein genaues Studium der Marsbahn wird Kepler auf drei Gesetze geführt, welche die Bewegungen der Planeten erstmals in der Geschichte der Menschheit quantitativ zufriedenstellend beschreiben.

1. Keplersches Gesetz: Die Planetenbahnen sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

2. Keplersches Gesetz: Der von der Sonne zu einem Planeten gezogene Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

3. Keplersches Gesetz: Die Quadrate der siderischen Umlaufdauern der Planeten sind proportional zu den dritten Potenzen ihrer großen Halbachsen.

Hier sind einige Begriffe aufzuklären.

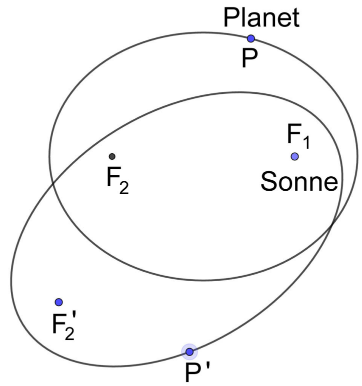


Abb. 4.2. Ellipsenbahnen zweier Planeten P und P' um die Sonne, die im Brennpunkt F_1 beider Bahnen steht.

Kegelschnitte

Ellipsen sind geometrische Kurven, die zur Familie der Kegelschnitte gehören. Kegelschnitte sind Kurven, welche entstehen, wenn man einen (doppelseitigen) Kegel mit einer Ebene schneidet. Dazu gehören Kreise, Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln.

So wie der Kreis aus allen Punkten besteht, welche von einem Punkt M (dem Mittelpunkt) denselben Abstand (den Radius) haben, ist die Ellipse die Menge aller Punkte, deren Abstände zu zwei gegebenen Punkten (den beiden Brennpunkten) die gleiche Summe haben.

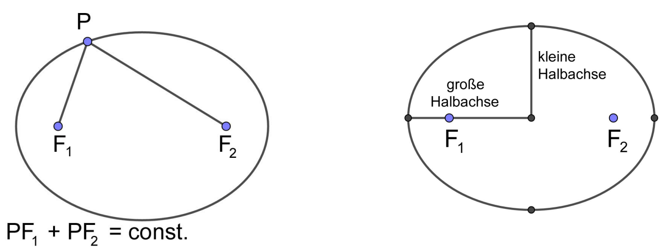


Abb. 4.3. Definition der Ellipse; große und kleine Halbachse

Bei einem Kreis gibt es nur einen Radius; bei einer Ellipse gibt es dagegen eine große Halbachse (die Hälfte des größten Durchmessers; dieser geht durch die beiden Brennpunkte) und eine kleine Halbachse. Je unterschiedlicher große und kleine Halbachse sind, um so plattgedrückter erscheint die Ellipse. Man definiert die Exzentrizität als Maß für die Abweichung von einem Kreis durch

$$e = \frac{R - r}{R + r},$$

wo R und r der größte bzw. der kleinste Abstand der Bahn zum Zentralkörper im Brennpunkt ist. Beachte, dass $R + r = 2a$ ist, wenn a die große Halbachse bezeichnet. Die Exzentrizität eines Kreises (dort ist $R = r$) ist also 0, und für $R/r \to \infty$ geht die Exzentrizität gegen 1.

Die Gerade durch die beiden Brennpunkte einer Ellipse nennt man auch die Apsidenlinie. Der Punkt der Bahn, der dem Brennpunkt, in dem die Zentralmasse steht, am nächsten ist, heißt Periapsis, der Punkt welcher der Zentralmasse am fernsten ist, Apoapsis. Ist die Zentralmasse die Sonne, spricht man von Perihel und Aphel, im Falle der Erde von Perigäum und Apogäum.

Die Einführung von Ellipsen als Bahnkurven ist eine drastische Abkehr von der Lehre des Aristoteles, wonach alles am Himmel perfekt sei; insbesondere waren die Anhänger der aristotelischen Lehre davon überzeugt, dass es am Himmel nur kugelförmige Objekte und Kreisbahnen gibt.

Rechnungen mit den Keplerschen Gesetzen

Durch Beobachtung der Planeten kann man deren synodische Umlaufdauern bestimmen und daraus die siderischen Umlaufzeiten berechnen. Mit Hilfe der Keplerschen Gesetze kann man damit die großen Halbachsen derjenigen Planetenbahnen bestimmen, die sich direkt nur schwer messen lassen.

Planet	Halbachse	Umlaufdauer
Merkur	0,39	0,241
Venus	0,72	0,616
Erde	1	1
Mars	1,52	1,9
Jupiter	5,2	11,9
Saturn	9,54	29,5
Uranus	19,18	84
Neptun	30,06	165

Hierbei sind Entfernungen in Astronomischen Einheiten (Entfernung Erde–Sonne) und Jahren (Umlaufdauer der Erde) angegeben.

Die Beziehung $a^2 = T^3$, wenn Entfernungen in Astronomischen Einheiten und T in Jahren gemessen wird, liefert für die Venus eine große Halbachse $a \approx \sqrt[3]{0{,}616}^2 \approx 0{,}72$; für Jupiter erhält man $a \approx \sqrt[3]{11{,}9}^2 \approx 5{,}2$.

4.4 Nachweise der Bewegung

Mit welchen Methoden lässt sich die Bewegung der Erde nachweisen? Am überzeugendsten gelingt der Nachweis der Rotation durch den Pendelversuch des französischen Physikers Foucault. Dieser beobachtete im Januar 1851 ein 2 m langes Pendel und stellte fest, dass sich die Schwingungsebene langsam änderte. Er erklärte dies korrekt durch die Erdrotation. Zwei Monate später führte er das Experiment öffentlich im Pantheon mit einem 67 m langen Pendel vor.

- Video Foucault

Auch Galilei konnte mit Hilfe seines Fernrohrs nachweisen, dass das geozentrische System nicht richtig sein konnte: Die Venus durchlief Phasen wie der Mond; eine volle Scheibe konnte sie im geozentrischen Weltbild nicht haben, weil die Venus darin immer zwischen Sonne und Erde steht und nie dahinter.

Rømer und die Lichtgeschwindigkeit

Ole Rømer (1644–1710) studierte Astronomie in Kopenhagen und wurde vom französischen Astronomen Giovanni Cassini bei dessen Besuch in Kopenhagen nach Paris eingeladen. Galileis Entdeckung der Monde Jupiters erlaubten die Bestimmung der Zeit durch die Beobachtung der Jupitermonde. So konnten zwei Beobachter an verschiedenen Orten ihre Uhren synchronisieren, indem sie gleichzeitig die Verfinsterung eines Jupitermonds beobachteten. Die Bahnen dieser Monde wurden daher sehr genau untersucht, und es dauerte nicht lange, bis man feststellte, dass sich die Bahnen nicht an die Berechnungen hielten. Die Abweichung, so fand man heraus, hing von der scheinbaren Größe der Jupiterscheibe ab, also von der Entfernung des Jupiter von der Erde.

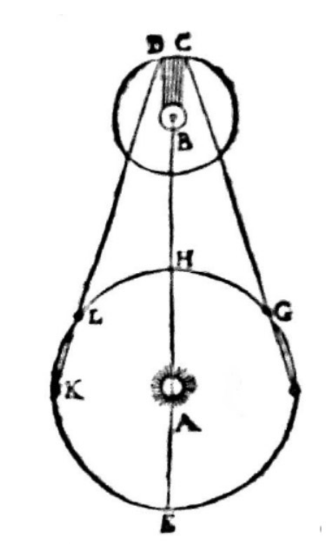


Abb. 4.4. Rømers Zeichnung aus seiner Abhandlung

Rømer vermutete, dass die etwa 10-minütige Verspätung der Monde bei Erdferne an der Endlichkeit der Lichtgeschwindigkeit liegt: Das Licht der Monde muss ja einen weiteren Weg zurücklegen, wenn die Erde weiter entfernt ist.

Cassini selbst hat sich dieser Deutung nicht angeschlossen, und zwar deshalb, weil sie nicht bei allen vier Monden zu funktionieren schien. Probleme, die mit der Exzentrizität der Bahn des Jupiters und seiner Monde zusammenhingen, wurden erst später zufriedenstellend gelöst. Huygens hat Rømers Ergebnis akzeptiert und aus astronomischen Daten die Lichtgeschwindigkeit zu etwa 230.000 km/s bestimmt (natürlich in anderen Einheiten: 48.203 französische lieues communes (eine lieue commune ist 1/25 des Erdumfangs entlang des Äquators, also 4,452 km); der korrekte Wert ist 299.792 km/s.

Aberration des Lichts

Der englische Astronoom James Bradley (1693–1762) war einer von vielen, die sich an der Bestimmung der Parallaxe von Sternen versucht haben. Er hat auch tatsächlich eine Bewegung der Sternenorte über ein Jahr hinweg gemessen, allerdings war ihm schnell klar, dass dies keine Parallaxe sein konnte: Wenn die Erde auf einer Seite der Bahn ist, sollte die Abweichung des Sterns auf der anderen Seite sein, und das war nicht der Fall; vielmehr war die Abweichungsellipse um ein Vierteljahr gedreht.

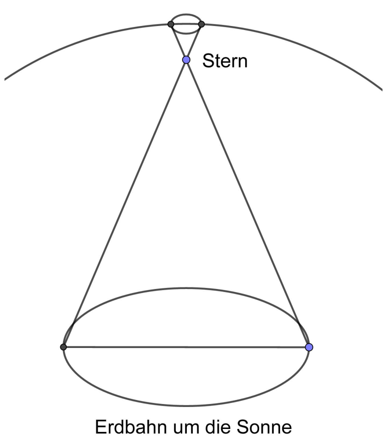


Abb. 4.5. Parallaxe eines Sterns an der Himmelskugel

Nach langem Nachdenken fand er auch den Grund seiner Beobachtung: Der von ihm gemessene Effekt liegt an der Endlichkeit der Lichtgeschwindigkeit und an der Bewegung der Erde um die Sonne. Physikalisch steckt dasselbe Prinzip dahinter wie in folgendem Beispiel: geht man im senkrecht von oben fallenden Regen zügig vorwärts, muss man den Regenschirm neigen, damit man nicht nass wird. Dasselbe passiert bei Teleskopen: Weil sich das Licht mit endlicher Geschwindigkeit durch das meterlange Teleskop bewegt, muss man das Teleskop leicht neigen. Die scheinbare Kreisbahn des Sterns hat dabei einen Winkeldurchmesser von etwa 41 Bogensekunden.

Bradley hatte damit tatsächlich einen Beweis für die Bewegung der Erde um die Sonne gefunden, und gleichzeitig gezeigt, dass die Lichtgeschwindigkeit endlich ist. Aus der Formel $\tan\alpha = \frac{v}{c}$, wo $\alpha \approx 20{,}5''$ der Winkelradius der scheinbaren Sternbahn und v die Geschwindigkeit der Erde um die Sonne ist, lässt eine Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit zu.

Die Erklärung Bradleys funktionierte übrigens nur mit dem Teilchenmodell des Lichts; auch der Äther (ein hypothetisches Medium, in welchem sich das Licht ausbreiten sollte, das aber – wie heute die dunkle Materie – niemand jemals hat messen können) machte Probleme. Eine vollkommen zufriedenstellende Erklärung hat erst Einstein mit seiner speziellen Relativitätstheorie geben können.

Übungen

4.1 Wie verändert sich die Umlaufdauer eines Planeten, wenn sich sein Abstand verdoppelt bzw. verdreifacht?

4.2 Neptun braucht 165 Jahre für einen Umlauf um die Sonne. Wie viele Astronomische Einheiten ist er von der Sonne entfernt? Wie lange braucht das Licht von der Sonne, um ihn zu erreichen?

4.3 Der Jupiter hat eine Umlaufdauer von 11,86 Jahren. Bestimme daraus seine Entfernung von der Sonne (in AE). Wie nahe kann er der Erde kommen, wie weit ist er höchstens von ihr weg?

4.4 Phobos und Deimos sind die beiden Monde des Mars; mit Durchmessern von unter 25 km sind es eher Gesteinsbrocken.

Phobos umreist den Mars in einer Entfernung von 9400 km in 7,7 Stunden, Deimos braucht für einen Umlauf 30,3 Stunden. Wie weit ist Deimos vom Mars entfernt?

4.5 Ein Asteroid kommt der Sonne bis auf 2 AE nahe und ist auf seinem sonnenfernsten Punkt bis zu 4 AE von ihr weg.

Bestimme die große Halbachse der Bahn, sowie die Umlaufdauer.

4.6 Der Halleysche Komet hat eine Umlaufdauer von 76 Jahren, und ist im fernsten Punkt seiner Bahn 35,3 AE von der Sonne entfernt.

Wie nahe kommt er der Sonne?

4.7 Sedna ist ein sehr weit entfernter Kleinplanet, der 2003 entdeckt wurde. In seinem fernsten Punkt ist er 937 AE von der Sonne entfernt, in seinem nächsten 76 AE. Berechne seine Umlaufdauer.

4.8 Der Komet Encke hat eine Umlaufdauer von nur 3,3 Jahren. Bestimme seine große Halbachse.

Die kürzeste Entfernung zur Sonne beträgt 0,34 AE. Welche Entfernung hat er in Sonnenferne?

4.9 ([16, 1.2.2]) Vom Kometen 18431 kennt man die Exzentrizität $e = 0{,}99991$ und die Periheldistanz $q = 0{,}0055$ AE. Geben Sie die Periheldistanz in Kilometern an. Berechnen Sie die große Halbachse der Bahn, die Apheldistanz und die Umlaufzeit.

4.10 ([16, 1.2.3]) Um welchen Betrag müsste sich die Masse der Sonne ändern, damit bei gleichbleibendem mittleren Abstand Sonne-Erde das Jahr um a) 1 s, b) 1 d länger oder kürzer würde?

4.11 (Abitur Bayern, 1988)

Die Bahnen von Venus und Erde seien im Folgenden als Kreise in derselben Ebene angenommen.

Zur möglichst genauen Bestimmung der Astronomischen Einheit sendet man zum Zeitpunkt der unteren Konjunktion ein Radarsignal zur Venus, welches dort reflektiert und 4 min 36,3 s nach dem Aussenden wieder auf der Erde registriert wird.

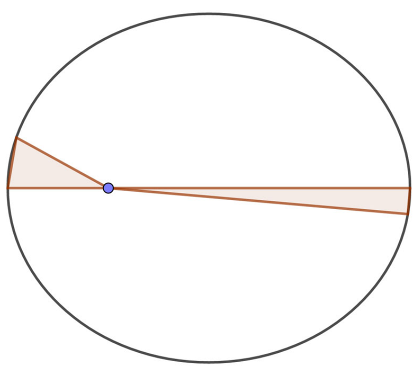
Berechnen Sie die Entfernung d Venus-Erde zu diesem Zeitpunkt. (Ergebnis: $d = 4{,}14 \cdot 10^{10}$ m).

Bestimmen Sie nun mit den gegebenen siderischen Umlaufzeiten von Erde (1 a) und Venus (0,615 a) und der Entfernung d die Größe 1 AE in Metern.

4.12 Der Merkur hat eine große Halbachse von 0,39 AE und eine Bahn mit der Exzentrizität $e = 0{,}2056$. Bestimme die Perihel- und Aphel-Distanz.

Es ist $R + r = 2a = 0{,}78$ AE und $R - r = e(R + r) = 0{,}2056 \cdot 0{,}78$ AE, also $R - r \approx 0{,}1604$ AE. Daraus erhält man $R = 0{,}47$ AE und $r = 0{,}31$ AE.

4.13 Bestimme das Verhältnis der Geschwindigkeiten eines Satelliten im Apogäum zu derjenigen im Perigäum, wenn die Entfernung im Apogäum doppelt so groß ist wie die im Perigäum.



Der Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen. Für sehr kleine Dreiecke ist die Höhe näherungsweise gleich dem Abstand zur Erde; bezeichnet also p die Entfernung des Satelliten von der Erde im Perigäum und a diejenige im Apogäum, dann haben die beiden Dreiecke die Höhen p und $a = 2p$. Die Grundseiten der Dreiecke haben die Länge $v \cdot \Delta t$. Gleichheit der Flächen ergibt also

$$1 = \frac{\frac{1}{2} p v_p \Delta t}{\frac{1}{2} a v_a \Delta t} = \frac{p v_p}{a v_a},$$

und daraus folgt $v_p : v_a = a : p = 2 : 1$.

Die Geschwindigkeit im Perigäum ist also doppelt so hoch wie im Apogäum.

5. Das Newtonsche Gravitationsgesetz

Mit Newton wird die Physik und die Astronomie endgültig mathematisiert. Die Bewegungsgesetze und die Entwicklung der Infinitesimalrechnung erlauben jetzt, die Bewegung aller Himmelskörper so genau wie nötig zu berechnen.

5.1 Newtonsche Mechanik

„Wenn ich weiter gesehen habe als andere", so wird Isaac Newton gern zitiert[1] „dann weil ich auf Schultern von Riesen gestanden habe". Einer dieser Riesen war Galileo Galilei.

Galileo Galilei

Der erste Wissenschaftler, der Phänomene wie den freien Fall mathematisch untersuchte, war Galilei. Während man vor ihm glaubte, die Bahn einer Kanonenkugel sei aus einer Geraden und dem Teil einer Kreisbahn zusammengesetzt, erkannte er die Parabelform von Wurfbahnen. Er untersuchte Bewegungen mit konstanter Beschleunigung a und erhielt die Gleichungen $v = a \cdot t$ und $s = \frac{1}{2}at^2$ für Geschwindigkeit und zurückgelegten Weg nach einer Zeit t.

Heute leiten wir diese Formeln mit Hilfe der Differentialrechnung so her. Ist die Beschleunigung eines Objekts auf einer geraden Bahn konstant gleich a, dann gilt $a(t) = a$. Weil die Beschleunigung die Ableitung der Geschwindigkeit ist, folgt $v(t) = a(t) + v_0$, wo v_0 die Anfangsgeschwindigkeit bezeichnet. Ebenso ist die Geschwindigkeitsfunktion die Ableitung der Wegfunktion, folglich gilt $s = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0$, wo s_0 die Position bei Beobachtungsbeginn bezeichnet.

Die Parabelbahn beim schiefen Wurf. Vor Galilei glaubten die meisten Wissenschaftler, dass die Bahn etwa einer Kanonenkugel sich aus einer Geraden und einem Kreisabschnitt besteht.

Wir wollen jetzt mathematisch zeigen, dass sich ein Objekt beim schiefen Wurf auf einer Parabelbahn bewegt, wenn

(a) der Luftwiderstand vernachlässigt wird und

[1] In seinem Brief an Robert Hooke vom 5. Februar 1676 hat er geschrieben „ If I have seen further it is by standing on the shoulders of giants".

(b) die erreichte Höhe so klein ist, dass der Ortsfaktor g konstant ist.

Dazu zerlegen wir die Bewegung des Körpers in einen horizontalen und einen vertikalen Teil und nehmen an, dass die Schwerkraft die horizontale Geschwindigkeit nicht beeinflusst. Ist also v_h die horizontale und v_s die vertikale Geschwindigkeit beim Abwurf, so wird $v_h(t) = v_h$ konstant, aber $v_s(t) = v_s - gt$ die vertikale Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t sein. Legt man den Abwurfspunkt in den Ursprung, so bezeichnet die y-Koordinate die Höhe des Körpers, und zwar ist $y = v_s t - \frac{1}{2}gt^2$. Wegen $x = v_h t$ ist $t = \frac{x}{v_h}$, und Einsetzen liefert

$$y = h(x) = v_s t - \frac{1}{2}gt^2 = v_s \cdot \frac{x}{v_h} - \frac{g}{2} \cdot \Big(\frac{x}{v_h}\Big)^2 = \frac{v_s}{v_h} \cdot x - \frac{g}{2v_h^2}x^2.$$

Dies ist offensichtlich die Gleichung einer nach unten geöffneten Parabel. Aus dieser lassen sich leicht die maximale Höhe und die Wurfweite bestimmen.

Die maximale Höhe erreicht der Körper, wenn $h'(x) = 0$ (die Flugbahn hat waagrechte Tangente) bzw. $v_s(t) = 0$ (die vertikale Anfangsgeschwindigkeit ist aufgebraucht) ist. Der erste Ansatz führt auf

$$x_m = \frac{v_s v_h}{g};$$

selbstverständlich hängt die x-Koordinate des Hochpunkts von der horizontalen Geschwindigkeit v_h ab; die erreichte Höhe dagegen sollte nur von v_s abhängen, und genau das werden wir jetzt durch Einsetzen von x_m in die Höhenfunktion finden:

$$h(x_m) = \frac{v_s}{v_h} \cdot \frac{v_s v_h}{g} - \frac{g}{2v_h^2}\Big(\frac{v_s v_h}{g}\Big)^2 = \frac{v_s^2}{g} - \frac{v_s^2}{2g} = \frac{v_s^2}{2g}.$$

Der zweite Ansatz liefert $t = \frac{v_s}{g}$; Einsetzen in $y(t)$ liefert

$$y = v_s t - \frac{1}{2}gt^2 = \frac{v_s^2}{g} - \frac{v_s^2}{2g} = \frac{v_s^2}{2g}$$

wie eben.

Bereits dieses einfache Beispiel zeigt die Macht der Mathematik bei der Beschreibung der Bewegung von Körpern in einem Gravitationsfeld.

Newton

Newton baute seine Mechanik auf der Grundlage folgender Gesetze auf, die sich in seinem Meisterwerk *Principia Mathematica* von 1687 wie folgt lesen[2]:

1. Gesetz. Jeder Körper beharrt in seinem Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seinen Zustand zu ändern.

[2] Wir zitieren aus [10, S. 237].

2. Gesetz. Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher jene Kraft wirkt.

3. Gesetz. Die Wirkung ist stets der Gegenwirkung gleich, oder die Wirkungen zweier Körper aufeinander sind stets gleich und von entgegengesetzter Richtung.

In heutiger Sprache sieht die Sache so aus:

- Ein Körper, auf den keine Kraft einwirkt, bewegt sich geradlining und mit konstanter Geschwindigkeit.
- Kraft ist Masse mal Beschleunigung: $F = m \cdot a$.
- actio = reactio: wenn A auf B eine Kraft ausübt, dann übt B auf A eine gleich große Kraft in entgegengesetzter Richtung aus.
- Kräfte addieren sich vektoriell (Kräfteparallelogramm)

5.2 Newtons Gravitationsgesetz

Wir wollen jetzt herausfinden, wie man vom 3. Keplerschen Gesetz zum Gravitationsgesetz Newtons gelangen kann[3]. Newtons Vorstellung von der Bewegung des Mondes um die Erde war die, dass der Mond „um die Erde fällt“. Wenn der Mond mit der Geschwindigkeit v sich nach der Zeit t (die wir uns sehr klein vorstellen, deutlich kleiner als in der Zeichnung) um vt nach rechts bewegt, fällt er die Strecke h in Richtung Erde. Dieses Spiel wiederholt sich.

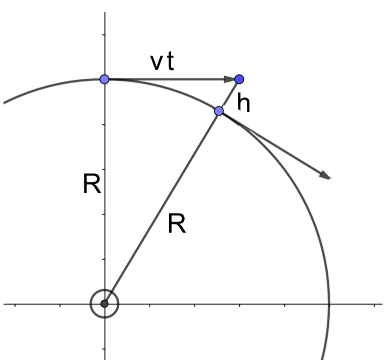


Abb. 5.1. Freier Fall des Mondes um die Erde

Anwendung des Satzes von Pythagoras (wir gehen genauso vor wie bei der Berechnung der Sichtweite auf der gekrümmten Erdoberfläche) liefert

$$R^2 + (vt)^2 = (R + h)^2 = R^2 + 2Rh + h^2.$$

[3] Die folgenden Ausführungen findet man in Gassners $\boxed{\text{Video}}$.

Weil h im Vergleich zu R winzig ist, können wir den Term h^2 gegenüber $2Rh$ vernachlässigen und finden

$$v^2t^2 = 2Rh, \quad \text{also} \quad h = \frac{1}{2}\frac{v^2}{R} \cdot t^2.$$

Nach Galilei legt ein Körper in der Zeit t bei einer Beschleunigung a den Weg $h = \frac{1}{2}at^2$ zurück; ein Vergleich mit der obigen Formel zeigt also, dass die für den Fall einer Strecke h erforderliche Beschleunigung gleich

$$a = \frac{v^2}{R}$$

ist. Die dazu notwendige Kraft ist daher gleich

$$F = ma = \frac{mv^2}{R}.$$

Nun ist die Geschwindigkeit eines Objekts auf einer Kreisbahn mit Radius R gleich $v = \frac{2\pi R}{T}$, wo T die Umlaufdauer bezeichnet. Einsetzen ergibt

$$F = \frac{4\pi^2 mR^2}{RT^2} = \frac{4\pi^2 mR}{T^2}.$$

Jetzt betrachten wir zwei Objekte, die um einen Zentralkörper mit der Masse M kreisen. Dann ist

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\frac{4\pi^2 m_1 R_1}{T_1^2}}{\frac{4\pi^2 m_2 R_2}{T_2^2}} = \frac{\frac{m_1 R_1}{T_1^2}}{\frac{m_2 R_2}{T_2^2}} = \frac{m_1 R_1 T_2^2}{m_2 R_2 T_1^2}.$$

Nun ist aber nach dem dritten Keplerschen Gesetz $\frac{T_2^2}{T_1^2} = \frac{R_2^3}{R_1^3}$. Setzt man dies ein, so folgt

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{m_1 R_1 R_2^3}{m_2 R_2 R_1^3} = \frac{m_1 R_2^2}{m_2 R_1^2}.$$

Damit wir oben nur Größen stehen haben, die zum 1. Objekt gehören, schreiben wir diese Formel etwas um:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{m_1/R_1^2}{m_2/R_2^2}.$$

Daraus können wir jetzt nicht F_1 und F_2 bestimmen, ebenso wenig wie man aus $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$ die Werte von a und b bestimmen kann (es kann ja $a = 4$ und $b = 6$ sein usw.). Was wir sehen, ist dass die Kraft F_1, mit welcher die Zentralmasse das erste Objekt anzieht, proportional zur Masse m_1 ist und umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstands. Nach der Newtonschen Philosophie (actio = reactio), dass ein Objekt, das ein anderes mit seiner Schwerkraft anzieht, umgekehrt von diesem angezogen wird, liegt es nahe anzunehmen, dass die Masse M des Zentralkörpers, um den die beiden Objekte kreisen, in die Formeln für F_1 und F_2 eingehen:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{m_1 M/R_1^2}{m_2 M/R_2^2}.$$

Dies legt nahe, dass die Kraft, welche zwei Massen m_1 und M im Abstand R aufeinander ausüben, proportional zum Ausdruck $\frac{m_1 M}{R^2}$ ist. Nennen wir den Proportionalitätsfaktor die Gravitationskonstante G, dann gilt also

$$F = G \cdot \frac{m_1 M}{R^2}.$$

Und damit haben wir Newtons Gravitationsgesetz mit Hilfe des dritten Keplerschen Gesetzes plausibel gemacht!

Variante

Newton ist es gelungen, die drei Keplerschen Gesetze durch ein einziges zu ersetzen: das Gravitationsgesetz. Darüberhinaus ist sein Gesetz universell in dem Sinne, dass es nicht nur die Bewegung eines Planeten um die Sonne beschreibt, sondern auch das Fallen eines Apfels oder die Bewegung von Doppelsternen oder gar Galaxien. Darüberhinaus ist die der Gravitation zugrundeliegende Formel von einer fast erschreckenden Einfachheit: zwei Massen m_1 und m_2 im Abstand r voneinander ziehen sich mit einer Kraft F an, die proportional zum Produkt der Massen ist und mit wachsendem Abstand abnimmt. Die einfachste Möglichkeit eines solchen Gesetzes wäre eine Formel der Bauart

$$F \sim \frac{m_1 m_2}{r^k}$$

für ein $k > 0$. Ein solches Gesetz ist nur dann mit dem dritten Keplerschen Gesetz kompatibel, wenn $k = 2$ ist, die Gravitation also mit dem Quadrat des Abstands abnimmt.

Dazu überlegen wir uns zuerst, welche Kraft auf einen Körper der Masse m wirken muss, um diesen auf eine Kreisbahn mit Radius r zu zwingen, auf der er sich mit der Geschwindigkeit v bewegt. Die Kraft $F = ma$ wird dabei von m, v und r abhängen und muss die Einheit $N = \mathrm{kg\,m/s}^2$ besitzen. Die einzige Möglichkeit ist daher $F \sim mv^2/r$.

Satz 5.1. *Die Zentripetalkraft, die notwendig ist, damit sich ein Körper der Masse m mit der Geschwindigkeit v auf einer Kreisbahn mit Radius r zu zwingen, ist*

$$F = \frac{mv^2}{r}.$$

Diese Formel geht auf Christian Huygens zurück, der sie 1659 in seiner Schrift *De vis centrifuga* (von der Zentrifugalkraft) herleitete. Wir wollen sie jetzt mit etwas Vektoranalysis erschließen, vor allem, um zu zeigen, wie mächtig die Analysis in Verbindung mit der Vektorgeometrie ist.

Wir beschreiben die Kreisbewegung eines Massenpunktes mit Hilfe von Vektoren. Der Einheitskreis besteht aus allen Punkten P, auf welche der Ortsvektor

$\overrightarrow{OP} = \binom{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ zeigt. Wenn wir den Punkt P um den Kreis laufen lassen, wird α nicht mehr konstant sein, sondern durch die Winkelgeschwindigkeit ω beschrieben; nach t Sekunden ist der Massenpunkt dann beim Winkel $\alpha = \omega t$ zu finden. Ist der Radius des Kreises nicht 1, sondern r, erhalten wir also

$$\vec{x}(t) = r\binom{\cos\omega t}{\sin\omega t}.$$

Dieser Vektor zeigt zu jedem Zeitpunkt t vom Ursprung auf den Massenpunkt. Den Geschwindigkeitsvektor $\vec{v} = \dot{\vec{x}}$ erhalten wir durch Ableiten:

$$\dot{\vec{x}}(t) = r\omega\binom{-\sin\omega t}{\cos\omega t}.$$

Nochmaliges Ableiten liefert den Beschleunigungsvektor

$$\vec{a}(t) = \ddot{\vec{x}}(t) = -r\omega^2\binom{\cos\omega t}{\sin\omega t} = -\omega^2\vec{x}.$$

Jetzt sehen wir zum einen, dass $\vec{x}(t)$ und $\vec{v}(t)$ immer senkrecht aufeinander stehen, weil ihr Skalarprodukt 0 ist. Weiter ist der Beschleunigungsvektor dem Ortsvektor entgegengerichtet, d.h. die Beschleunigung ist immer auf den Mittelpunkt gerichtet.

Nimmt man den Betrag dieser Gleichungen und beachtet, dass nach Pythagoras

$$\sin^2\omega t + \cos^2\omega t = 1$$

ist, so folgt

$$v = \omega r \quad \text{und} \quad a = \omega^2 r.$$

Wegen $\omega = \frac{2\pi}{T}$, wo T die Umlaufdauer bezeichnet, und $v = 2\pi r T$ ist also $v = \omega r$ und $a = \frac{v^2}{r}$ wie behauptet.

Abhängigkeit vom Quadrat des Abstands

Seien T_1 und T_2 die Umlaufszeiten zweier Planeten und r_1 bzw. r_2 deren Abstände zur Sonne. Dann ist die Größe

$$\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3} = k$$

nach dem dritten Keplerschen Gesetz konstant. Die Zentripetalkraft für einen Planeten der Masse m, der sich mit der Geschwindigkeit v auf einer Kreisbahn mit Radius r um die Sonne bewegt, ist $F = m\frac{v^2}{r}$. Hierbei ist $v = \frac{2\pi r}{T}$, also

$$F = \frac{m}{r}\Big(\frac{2\pi r}{T}\Big)^2.$$

Setzen wir hier $T^2 = kr^3$ ein, so erhalten wir

$$F = \frac{4\pi^2 m}{kr^2}.$$

Die Konstante k wird dabei von der Masse der Sonne abhängen, und weil sich Planet und Sonne mit derselben Kraft anziehen (actio = reactio), kann man hieraus folgern:

Satz 5.2. *Die Kraft, mit der sich zwei Massen m_1 und m_2 im Abstand r anziehen, ist gegeben durch*

$$F \sim \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Newton stellte sich nun die Frage, ob die Kraft, die einen Apfel der Masse m_A vom Baum fallen lässt, dieselbe Kraft sein kann, welche den Mond der Masse m_M auf eine Umlaufbahn zwingt. Die Schwerkraft der Erde sorgt im Abstand des Erdradius r für eine Beschleunigung des Apfels von $g = \frac{F}{m_A} \sim \frac{M}{r^2} \approx 9{,}8\ \mathrm{m/s}^2$. Der Mond wird mit

$$a = \frac{F}{m_M} = \frac{v^2}{R}$$

zur Erde hin beschleunigt, wo v seine Geschwindigkeit und R sein Abstand von der Erde ist. Weil der Mond etwa 60 Erdradien weit weg ist, und weil seine Geschwindigkeit gleich $v = \frac{2\pi R}{T}$ ist, erhalten wir die Beschleunigung des Monds zu

$$a = \frac{4\pi^2 R}{T^2}.$$

Mit $T = 27{,}3$ d und $R = 384\,000$ km folgt daraus

$$a \approx 0{,}00272\ \mathrm{m/s}^2.$$

Das ist $\frac{1}{3600} = \frac{1}{60^2}$ von g.

Das Verhältnis von a zu g ist also

$$\frac{a}{g} = \frac{4\pi^2 R}{T^2}$$

??????

gegeben ist durch

$$F = G \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2}. \tag{5.1}$$

Hierbei ist $G = 6{,}672 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m}^3/\mathrm{kg\,s}^2$ die Gravitationskonstante.

Mit Hilfe dieses Gesetzes konnte Newton im Prinzip die Bewegungen aller Planeten im Sonnensystem berechnen; natürlich ist eine ganze Menge Mathematik erforderlich, um z.B. aus dem Newtonschen Gesetz die drei Keplerschen Gesetze herzuleiten.

Dies gilt insbesondere für das erste Keplersche Gesetz. Nach Newton gibt es für die Bahnen von Massen im Sonnensystem drei Möglichkeiten: entweder sind es Ellipsenbahnen (wie bei Planeten, Asteroiden und Kometen) oder es sind Hyperbelbahnen. Solche kommen nur vor bei Objekten, die nicht zu unserem Sonnensystem gehören. Das erste solche Objekt wurde 2017 entdeckt und „Oumuamua“ getauft. Dies war ein zwischen 400 m und 800 m großer Brocken (vermutlich ein Kometenkern), der wahrscheinlich aus den Tiefen des Alls kam und wieder dorthin verschwunden ist.

Die Existenz stabiler Planetenbahnen hängt also ganz wesentlich an dem Umstand, dass die Gravitation genau mit dem Quadrat des Abstands abnimmt. Wir verdanken unsere Existenz also dem Exponenten 2 in Newtons Gravitationsgesetz.

Es sei noch bemerkt, dass die Newtonsche Mechanik zwei Begriffe der Masse kennt: Da ist zum einen die träge Masse, die sich Veränderungen der Bewegung widersetzt und die etwa in der Gleichung $F = ma$ (und den anderen Gleichungen, wie etwa der Zentripetalkraft usw.) auftritt. Und zum andern gibt es die schwere Masse, also diejenige, die im Newtonschen Gravitationsgesetz die Schwerkraft erzeugt. Es ist von vornherein nicht ausgeschlossen, dass diese Massen verschieden groß sind. In diesem Fall würden Körper mit verschiedenen Massen im Schwerefeld der Erde nicht gleich schnell fallen. Der ungarische Physiker Lorand Eötvös konnte 1890 und 1909 mit extremer Genauigkeit nachweisen, dass ein solcher Unterschied nicht messbar ist.

Das Gravitationsgesetz als kosmische Waage

Eine ganz einfache Anwendung des Newtonschen Gravitationsgesetzes erlaubt die Bestimmung der Masse der Erde. Aus dem Physikunterricht wissen wir, dass die Erde auf einen Körper der Masse m die Kraft $F = mg$ ausübt, wobei $g \approx 9\;8\ \mathrm{m/s^2}$ (in unseren Breiten – am Äquator oder am Pol weicht der Wert etwas davon ab). Vernachlässigt man die Fliehkraft, die durch die Erdrotation erzeugt wird, geht diese Kraft auf die Anziehung der Erde zurück; setzt man deren Masse mit M an, muss also

$$mg = G\frac{mM}{r^2}$$

sein, wobei r den Radius der Erde bezeichnet (da die Erde am Pol abgeplattet ist, ist dort ein anderer Radius einzusetzen, was die unterschiedlichen Werte für g erklärt). Mit $r = 6370$ km erhält man so

$$M = \frac{gr^2}{G} \approx 6 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}.$$

Newton konnte diese Rechnung allerdings noch nicht durchführen, da er keinen Wert für seine Gravitationskonstante kannte. Diese wurde erstmals von Cavendish gemessen.

Im Prinzip kann man mit derselben Idee die Masse jedes Himmelskörpers bestimmen, in dessen Schwerefeld sich ein Mond befindet; die Masse eines jeden Planeten, jedes Sterns und jeder Galaxie, die man kennt, hat man im wesentlichen mit dem Gravitationsgesetz bestimmt. Dazu braucht man die quantitative Version des dritten Keplerschen Gesetzes, die sich aus dem Newtonschen Gravitationsgesetz herleiten lässt.

Die klassische Vorstellung, wonach sich Himmelskörper auf Kreisbahnen um die Erde oder um die Sonne bewegen, weil sie an „Kristallsphären“ geheftet sind, war spätestens durch die Entdeckung der Jupitermonde durch Galilei und Marius widerlegt. Newton hat erkannt, dass die Kraft, welche den Mond auf die Bahn um die Erde zwingt, dieselbe ist wie diejenige, die einen Apfel vom Baum auf den Boden fallen lässt: die Schwerkraft.

Die Messung der Gravitationskonstante ist nicht leicht; gelungen ist das erstmals Cavendish. Heute wissen wir, dass

$$G = 6{,}672 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3/kg\,s^2}$$

ist.

Der Schwerpunkt

Die Vorstellung, dass der Mond sich um die Erde dreht, muss man im Lichte des Newtonschen Gravitationsgesetzes dahingehend präzisieren, dass sich Mond und Erde um ihren gemeinsamen Schwerpunkt drehen. Dieser liegt, wie wir sehen werden, innerhalb der Erde.

Wir nehmen nun an, zwei Massen m_1 und m_2 würden auf Kreisbahnen um ihren gemeinsamen Schwerpunkt S kreisen. Wenn die Masse m_1 eine Umdrehung vollendet hat, muss auch die Masse m_2 ihre Umdrehung vollendet haben, weil die Verbindungslinie der beiden Massen durch S geht. Beide Massen haben also die gleiche Winkelgeschwindigkeit ω.

Seien r_1 und r_2 die beiden Abstände zum Schwerpunkt; der Gesamtabstand der beiden Massen ist also $r = r_1 + r_2$. Für die Zentripetalkraft gilt daher

$$F_1 = m_1\omega^2 r_1 \quad \text{und} \quad F_2 = m_2\omega^2 r_2.$$

Da sich beide Massen mit derselben Kraft anziehen, muss $F_1 = F_2$ sein, und es folgt

$$\boxed{m_1 r_1 = m_2 r_2}.$$

Diese Formel für den Schwerpunkt hat dieselbe Form wie das Archimedische Hebelgesetz.

Setzt man hierin $r = r_1 + r_2$ ein, kann man r_1 und r_2 bestimmen:

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r \quad \text{und} \quad r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} r.$$

Beispiel. Der Schwerpunkt des Erde-Mond-Systems liegt innerhalb der Erde. Mit $r = 384\,000$ km, $m_1 = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg und $m_2 = 7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg erhalten wir

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r \approx 4700 \text{ km}.$$

Der Schwerpunkt ist also 4700 km vom Erdmittelpunkt entfernt und liegt daher 1670 km unter der Erdoberfläche.

5.3 Das Drittte Keplersche Gesetz

Das dritte Keplersche Gesetz folgt jetzt ganz einfach aus dem bisher Erreichten. Für die gegenseitige Anziehungskraft der zweier Massen m_1 und m_2, die in der Entfernung r_1 nbzw. r_2 um ihren gemeinsamen Schwerpunkt kreisen, folgt nämlich

$$F = G \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2} = m_1 \omega^2 r_1 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \omega^2 r.$$

Auf Kreisbahnen ist die Winkelgeschwindigkeit ω aber konstant, und zwar gleich $\omega = \frac{2\pi}{T}$, wobei T die Zeit ist, welche beide Massen brauchen, um sich einmal um den gemeinsamen Schwerpunkt S zu drehen. Setzt man dies ein, so folgt

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)}. \tag{5.2}$$

Also folgt aus dem Gravitationsgesetz nicht nur, dass $T^2 \sim a^3$ für alle Planeten (auf Kreisbahnen) gilt, sondern es ergibt sich auch noch die Proportionalitätskonstante.

Für die Winkelgeschwindigkeit ω der beiden Massen erhält man

$$\omega^2 = \frac{G(m_1 + m_2)}{r^3}. \tag{5.3}$$

Wendet man (5.2) auf die Erde und die Sonne an, so folgt mit $T = 365{,}25 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60\ s \approx 3{,}16 \cdot 10^7$ s und $r = 149{,}6 \cdot 10^6$ km $= 1{,}496 \cdot 10^{11}$ m

$$m_1 + m_2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} \approx 1{,}99 \cdot 10^{30} \text{ kg}.$$

Da die Masse der Erde gegenüber der der Sonne nicht ins Gewicht fällt, ergibt sich so die Sonnenmasse zu etwa $2 \cdot 10^{30}$ kg.

Auf ähnliche Weise kann man die Massen der Planeten, die Monde besitzen, bestimmen. Für die Venus ist diese Methode nicht möglich; man kann aber aus der Annahme, dass sie ähnlich aufgebaut ist wie die Erde, die Masse über den Radius der Venus abschätzen, und man kann sie durch mühsme Störungsrechnung aus dem Einfluss der Venus etwa auf die Erdbahn bestimmen. Inzwischen hat sich die Lage grundlegend geändert: durch die Bahnbestimmung von künstlichen Satelliten lässt sich heute auch die Masse der Venus sehr genau bestimmen.

Die kosmischen Geschwindigkeiten

Um einen Körper der Masse m vom Erdboden aus in eine Umlaufbahn um die Erde zu bringen, benötigt man Energie, und zwar nicht zu knapp. Im Physikunterricht lernt man die Formel "Energie ist Kraft mal Weg", also $E = F \cdot s$, aber zum einen muss, damit die Formel gilt, die Kraft konstant sein, zum andern ist das nur die halbe Wahrheit: verläuft der Weg nämlich senkrecht zur Kraft (beispielsweise indem man 50 kg durch ein Zimmer schleppt, ohne die Masse dabei vertikal zu bewegen), so wird überhaupt keine Arbeit verrichtet (in der Praxis muss man die Masse etwas anheben oder gegen die Reibung ankämpfen; beides kostet Energie). Die ganze Wahrheit ist die, dass Kraft und Weg Vektoren sind, und das Produkt $F \cdot s$ in Wirklichkeit ein Skalarprodukt ist, welches nur die Komponente der Kraft in Richtung des Wegs berücksichtigt.

Wenn wir eine Masse m um eine kleine Strecke Δh nach oben heben, und zwar ausgehend von einer Entfernung h vom Gravitationszentrum, dem Mittelpunkt der Erde, dann wird diese Masse von der Erde mit der Gravitationskraft

$$F = G\frac{Mm}{h^2}$$

angezogen (und zwar näherungsweise sowohl in Höhe h, also auch in Höhe $h+\Delta h$, jedenfalls wenn Δh hinreichend klein ist); hierbei bezeichnet M die Masse der Erde. Die verrichtete Arbeit ist dann

$$\Delta E = F \cdot \Delta h \approx G\frac{Mm}{h^2} \cdot \Delta h.$$

Diese kleinen Energiemengen müssen wir jetzt aufsummieren; wenn wir die Masse von $h = R$ (Erdradius) bis in eine Umlaufbahn in Höhe von $h = R+50$ km bringen wollen, ist die dazu notwendige Energie

$$E = \int_R^{R+50} G \cdot \frac{Mm}{h^2}\, dh.$$

Das Integral ist schnell berechnet:

$$E = -\frac{GMm}{h}\Big|_R^{R+50} = \frac{GMm}{R} - \frac{GMm}{R+50}.$$

Setzt man hier die Werte

$$\begin{aligned} G &= 6{,}67 \cdot 10^{-11}, \\ M &= 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}, \quad \text{und} \\ R &= 6370 \text{ km} \ = 6\,370\,000 \text{ m} \end{aligned}$$

ein, so erhält man bei einer Masse $m = 1$ kg

$$E = 490\,000 J$$

Um einen Körper der Masse m komplett aus dem Schwerefeld der Erde herauszubringen, müssen wir ihn von $h = R$ bis $h = \infty$ heben, was eine Energie von

$$E = \int_R^{\infty} G \cdot \frac{Mm}{h^2}\, dh = \frac{GMm}{R}$$

erfordert.

Wie groß muss die Geschwindigkeit sein, die wir einem Körper der Masse m an der Erdoberfläche geben müssen, damit dieser das Schwerefeld der Erde verlassen kann? Dazu muss seine kinetische Energie $\frac{1}{2}mv^2$ mindestens so groß sein wie die Energie $\frac{GMm}{R}$, die man zum Herausheben des Körpers aus dem Gravitationsfeld der Erde benötigt; dies führt auf

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \approx 7{,}9 \text{ km/s}.$$

Lagrange-Punkte

Die Bewegung zweier Massen lässt sich mit Newtons Gravitationsgesetz sher gut beschreiben: Die Massen bewegen sich auf Ellipsenbahnen um den gemeinsamen Schwerpunkt. Kommt eine dritte Masse hinzu, werden die Bahnen chaotisch, und es gibt keine einfache Methode, diese Bahnen mathematisch zu beschreiben.

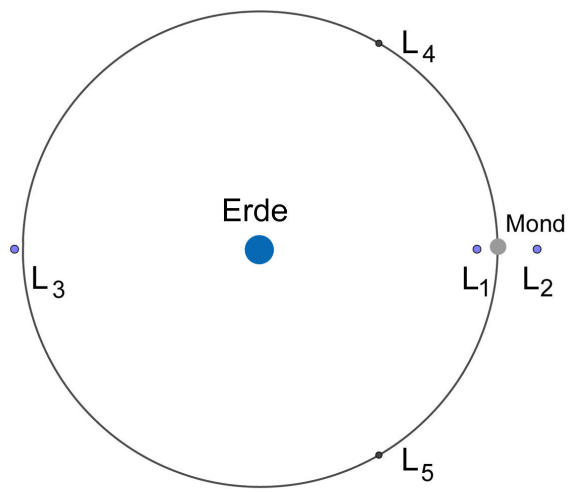


Abb. 5.2. Die fünf Lagrangepunkte L_1 bis L_5 im Erde-Mond-System

Joseph-Louis Lagrange (1736–1813; Giuseppe Lodovico Lagrangia wurde in Italien geboren) hat entdeckt, dass es fünf Punkte gibt, in welchen eine solche Beschreibung dennoch möglich ist. Bereits Leonhard Euler, der wohl produktivste Mathematiker aller Zeiten, hatte zuvor die drei Lagrangepunkte L_1, L_2 und L_3 entdeckt[4].

Wir wollen jetzt zeigen, dass man die Existenz dieser Punkte mit einfachen mathematischen Hilfsmitteln verstehen und sogar beschreiben kann. Dazu brauchen wir einige Näherungen, die so einfach wie lehrreich sind.

Ist h eine kleine Zahl, so gilt nämlich

$$(1+h)^2 = 1 + 2h + h^2 \approx 1 + 2h,$$

weil h^2 sehr viel kleiner ist als h oder gar 1; diese Idee haben wir schon bei Birunis Bestimmung des Erdumfangs benutzt. Man kann diese Näherung auch dadurch

[4] Siehe Euler, *De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentium*, Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae **11** (1767), 144–151 und Lagrange, *Essai sur le problème des trois corps*, Académie royale des sciences de Paris **9** (1772), 229–331.

gewinnen, dass man die Funktion $f(x) = (1+x)^2$ durch ihre Tangente in $x = 0$ ersetzt; diese ist

$$y = f'(0)x + f(0) = 2x + 1.$$

Entsprechend kann man aus der dritten binomischen Formel

$$(1-h)(1+h) = 1 - h^2$$

für kleine Werte von h die Näherung $(1+h)(1-h) \approx 1$, also

$$\frac{1}{1-h} \approx 1 + h \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{1+h} \approx 1 - h$$

gewinnen; dieselben Näherungen erhält man, wenn man die Funktion $f(x) = \frac{1}{1-x}$ in der Nähe von $x = 0$ durch ihre Tangente

$$y = f'(0)x + f(0) = x + 1$$

ersetzt. Solche Näherungen benutzen Mathematiker wie Physiker, um komplizierte Gleichungen in solche zu verwandeln, mit denen man hantieren kann.

Jetzt nehmen wir an, dass sich im Schwerefeld von Erde und Sonne eine weitere kleine Masse befindet. Diese soll im Abstand $r + a$ um die Sonne kreisen, wo r der Abstand Sonne-Erde ist. Ist a groß, so wird sich die kleine Masse bei geeignet gewählter Geschwindigkeit (notwendig kleiner als die der Erde) in erster Näherung auf einer Kreisbahn um die Sonne bewegen. Wenn man a nun hinreichend klein macht, kommt die kleine Masse in die Nähe des Gravitationsfeldes der Erde. Um diese zusätzliche Kraft auszugleichen, muss seine Geschwindigkeit größer werden. Lagrange hat nun herausgefunden, dass es einen Abstand a gibt, in welchem sich der kleine Körper mit derselben Winkelgeschwindigkeit um die Sonne bewegt wie die Erde: In diesem Fall bleiben Sonne, Erde und der kleine Körper auf einer Linie.

Seien m und M die Massen von Mond und Erde und μ die Masse des kleinen Körpers; wir nehmen an, dass m klein gegenüber M ist, sodass der Schwerpunkt des Systems mit dem Mittelpunkt der Erde zusammenfällt. Weiter nehmen wir an, dass μ klein gegenüber m (und erst recht gegen M) ist: dies erlaubt uns, die Schwerkraft der kleinen Masse zu vernachlässigen. Wir bezeichnen mit r den Abstand von Erde und Mond und mit d den Abstand des Lagrange-Punkts L_1 zum Mond.

Abb. 5.3. Der Lagrangepunkt L_1

Auf der Strecke SM gibt es einen Punkt P, in welchem sich die Schwerkraft der beiden Massen M und m aufhebt. Bezeichnet x die Entfernung der Probemasse μ von der Masse M, in welcher dies der Fall ist, so muss die folgende Gleichung gelten:

$$G\frac{M\mu}{x^2} = G\frac{m\mu}{(r-x)^2}.$$

Daraus folgt $M(r-x)^2 = mx^2$, mit $k^2 = \frac{M}{m}$ also

$$x = \frac{k}{1+k} \cdot r.$$

Im Falle des Erde-Mond-Systems erhalten wir $k \approx 9$ und damit $x \approx 0{,}9r \approx$ 345 000 km.

Würden Erde und Mond stillstehen, wäre der Lagrangepunkt in dieser Entfernung von der Erde. Weil sich Mond und Erde aber mit einer Winkelgeschwindigkeit ω um ihren gemeinsamen Schwerpunkt drehen, wird der Lagrangepunkt L_1 etwas näher an der Erde liegen müssen, weil dort die zusätzliche Anziehungskraft der Erde die Zentripetalkraft $\omega^2 x$ ausmacht. Wenn man etas genauer darüber nachdenkt, so erkennt man, dass der Lagrangepunkt L_1 bei Neumond näher zur Erde wandern muss, während er bei Vollmond etwas weiter von ihr weg ist: schließlich spielt auch die Anziehungskraft der Sonne eine wesentliche Rolle.

Wir betrachten nun die Beschleunigungen, die auf die kleine Masse μ im Lagrangepunkt L_1 wirken. Die Schwerkraft der Massen M und m bewirken Beschleunigungen a_1 und a_2 der Masse μ im Lagrangepunkt L_1, die gegeben sind durch

$$a_1 = G\frac{M}{(r-d)^2} \quad \text{und} \quad a_2 = G\frac{m}{d^2}.$$

Die Zentripetalbeschleunigung der Masse μ ist gleich

$$a_Z = \frac{v^2}{r-d} = \frac{4\pi^2(r-d)}{T^2}.$$

Die Beschleunigung durch M muss also die Beschleunigung durch m und die Zentripetalbeschleunigung aufheben:

$$a_1 - a_2 = a_Z,$$

also

$$G\frac{M}{(r-d)^2} - G\frac{m}{d^2} = \frac{4\pi^2(r-d)}{T^2}.$$

Das Auflösen dieser Gleichung nach d ist nicht ohne weiteres möglich. Wir benutzen daher weitere Näherungen. Dazu dividieren wir Zähler und Nenner des ersten Terms durch r^2 und die des Terms auf der rechten Seite durch r und erhalten

$$G\frac{M}{r^2}\frac{1}{(1-\frac{d}{r})^2} - G\frac{m}{d^2} = \frac{4\pi^2 r}{T^2} \cdot \big(1 - \tfrac{d}{r}\big).$$

Nach dem dritten Keplerschen Gesetz ist

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{GM}{r^3};$$

also haben wir

$$G\frac{M}{r^2}\frac{1}{(1-\frac{d}{r})^2} - G\frac{m}{d^2} = \frac{GM}{r^2}\cdot\big(1-\tfrac{d}{r}\big),$$

nach Kürzen von G also

$$\frac{M}{r^2}\frac{1}{(1-\frac{d}{r})^2} - \frac{m}{d^2} = \frac{M}{r^2}\cdot\big(1-\tfrac{d}{r}\big).$$

Weil d gegenüber r klein ist, können wir die Approximationen

$$(1-h)^2 \approx 1-2h, \qquad \frac{1}{1-2h} \approx 1+2h$$

benutzen. Dann folgt

$$\frac{M}{r^2}\big(1+2\tfrac{d}{r}\big) - \frac{m}{d^2} \approx \frac{M}{r^2}\cdot\big(1-\tfrac{d}{r}\big).$$

Umformen liefert

$$\begin{aligned}
\frac{M}{r^2}\big(1+2\tfrac{d}{r}\big) - \frac{m}{d^2} &\approx \frac{M}{r^2}\cdot\big(1-\tfrac{d}{r}\big) && \Big|\; -\frac{M}{r^2}\cdot\big(1-\tfrac{d}{r}\big) + \frac{m}{d^2} \\
\frac{M}{r^2}\big(1+2\tfrac{d}{r}\big) - \frac{M}{r^2}\cdot\big(1-\tfrac{d}{r}\big) &\approx \frac{m}{d^2} \\
\frac{M}{r^2}\cdot\frac{3d}{r} &\approx \frac{m}{d^2} && \Big|\; \cdot\frac{3d^2r^2}{M} \\
d^3 &\approx \frac{m}{3M}\cdot r^3
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich endlich

$$d = \sqrt[3]{\frac{m}{3M}}\cdot r.$$

Im Falle des Systems Erde Mond erhalten wir damit,

$$d \approx 61\,500 \text{ km}, \quad \text{also} \quad r-d \approx 322\,000 \text{ km},$$

während wir im Falle des Systems Sonne-Erde

$$d \approx 1{,}5\cdot 10^6 \text{ km}$$

finden.

Die Masse im Lagrangepunkt L_1 bewegt sich nicht auf einer stabilen Bahn: leichte Störungen lassen ihn abwandern. Dies ist vergleichbar mit einem Ball, der auf einem Hügel liegt: sobald ihn der Wind etwas bewegt, wird der Ball vom

Hügel herabrollen. Entsprechendes gilt für die Bewegung in den Lagrangepunkten L_2 und L_3; die Massen in den Punkten L_4 und L_5 dagegen bewegen sich auf stabilen Bahnen (um im Bild des Balls zu bleiben: liegt ein Ball im Tal, wird er wieder dorthin zurückrollen, wenn der Wind ihn etwas hochbläst): Störungen anderer Planeten bewirken lediglich, dass sich die Masse um L_4 und L_5 (teilweise auf langgestreckten hufeisenförmigen Bahnen) herumbewegen.

Will man also Satelliten im Lagrangepunkt L_2 parken (das macht man etwa mit Satelliten, die Instrumente an Bord haben, welche man gern im Erdschatten parkt, um der Strahlung der Sonne zu entgehen. Der erste Satellit ISEE-3 wurde 1978 dort geparkt; der bekannteste ist Gaia, ein Satellit, der seit 2013 die Positionen von Sternen vermisst, der allerdings nicht im Erdschatten steht, weil er Sonnenenergie für seinen Betrieb braucht), muss man regelmäßig die Bahn korrigieren.

Analoge Rechnungen für die beiden andern von Euler entdeckten Lagrangepunkte ergeben, wenn wir $\alpha = \frac{m}{M}$ setzen:

Punkt	Entfernung von M
L_1	$(1 - \sqrt[3]{\frac{\alpha}{3}}) \cdot r$
L_2	$(1 + \sqrt[3]{\frac{\alpha}{3}}) \cdot r$
L_3	$(1 + \frac{5}{12\alpha}) \cdot r$

Geschwindigkeiten

Die Geschwindigkeit eines Körpers, der auf einer Kreisbahn mit Radius r um eine Zentralmasse M läuft, genügt der Gleichung

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GMm}{r^2}$$

und ist damit gegeben durch

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}.$$

5.4 Gezeiten und Resonanz

Die Gezeiten, also der Wechsel von Ebbe und Flut an den Küsten der Weltmeere, werden hauptsächlich vom Mond verursacht. Die Schwerkraft der Erde zieht das Wasser der Meere mit der gleichen Kraft an; sie ist für die Flutberge also nicht verantwortlich. Die Anziehungskraft des Mondes auf der dem Mond zugewandten Seite der Erde ist nun größer als auf der anderen Seite, und es ist diese Differenz, welche Ebbe und Flut erzeugt.

Würde man den Mond und die Erde festhalten, würde die Anziehungskraft des Mondes auf der ihm zugewandten Seite der Erde einen Flutberg erzeugen, auf der abgewandten wäre Ebbe. Weil aber beide Körper „frei fallen“, zieht der Mond die

Erde stärker an als das Wasser auf der vom Mond abgewandten Seite, was dazu führt, dass es auf beiden Seiten einen Flutberg gibt. Anders ausgedrückt: Weil die Erde sich um den gemeinsamen Schwerpunkt S des Erde-Mond-Systems dreht, entstehen Zentrifugalkräfte, die auf der mondabgewandten Seite größer sind als auf der Seite, die dem Mond zugewandt ist.

Auf dem freien Meer sorgt der Mond für eine Anhebung des Wassers um etwa 30 cm; die Erdkruste selbst wird um bis zu 50 cm angehoben. Dass die Flut an der Küste deutlich höher ausfällt, liegt daran, dass sich das viele Wasser bei niedriger Wasserhöhe aufstauen muss; an der Nordsee liegt der Tidenhub bei zwei bis drei Meter, direkt an den Meeren bei sechs Metern, und geographische Besonderheiten können an manchen Orten dazu führen, dass die Flut bis zu 20 Meter hoch sein kann.

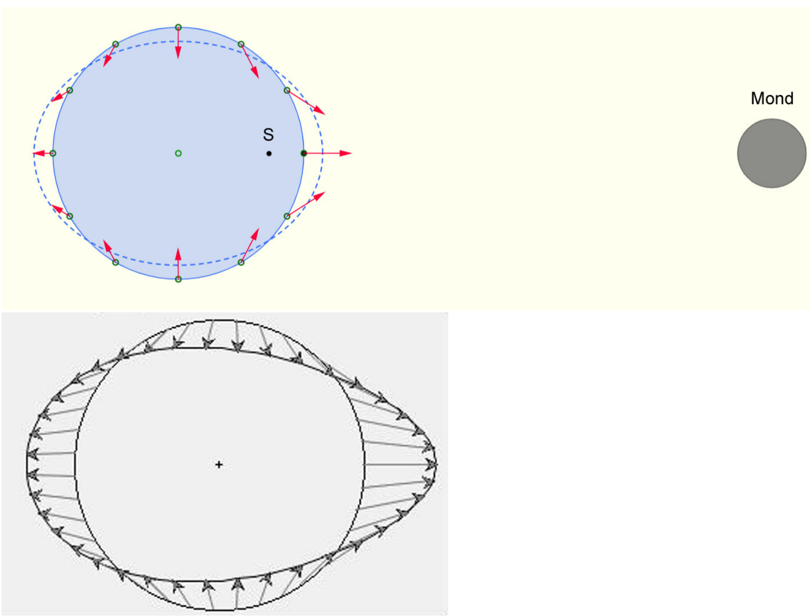


Abb. 5.4. Gezeitenkräfte; Geogebra (Wolfseher) und Bild von Nick `https://physics.stackexchange.com/questions/46792/tidal-force-on-far-side`

Dass die Flut am höchsten ist, wenn der Mond im Zenit steht, hört sich plausibel an, ist aber falsch: Weil die Erde sich dreht, schiebt sie den Flutberg vom Mond weg. Mit anderen Worten: wenn der Mond im Zenit steht, ist die Flut bereits vorbei. Dies führt dazu, dass der Mond, der den Flutberg ja anzieht, die Rotation der Erde bremst. Die Erde dreht sich also jedes Jahr langsamer, und zwar messbar; vor Millionen von Jahren war ein Tag also deutlich kürzer. Wegen der Erhaltung des Drehimpulses muss sich der Mond dafür jedes Jahr etwas weiter von der Erde entfernen, nämlich im Schnitt etwa 4 cm.

Auch die Erde übt auf den Mond Gezeitenkräfte aus; diese haben dafür gesorgt, dass die Rotation des Monds vollständig abgebremst wurde und uns der Mond immer die gleiche Seite zuwendet. Weil die Mondbahn elliptisch ist, gilt das nur in erster Näherung; tatsächlich können wir von der Erde aus deutlich mehr als 50 % der Mondoberfläche beobachten.

Ein ähnliches Phänomen gibt es beim Merkur: die Gezeitenkräfte der Sonne haben zwar (noch) nicht dafür gesorgt, dass der Merkur der Sonne immer die gleiche Seite zuwendet. Allerdings ist die siderische Umlaufdauer des Merkur, nämlich $T = 87{,}969$ d, ziemlich genau gleich dem 1,5-fachen der Rotationsdauer von $t = 58{,}646$ d. Während zweier Umläufe dreht sich Merkur also genau dreimal um seine Achse.

Resonanz

Derartige Phänomene (man spricht hier von Resonanz) tauchen in der Himmelsmechanik unseres Planetensystems sehr oft auf. Am sichtbarsten sind diese Resonanzen am Ringsystem des Saturns: die großen Lücken in den Ringen lassen sich alle durch Monde erklären. Entdeckt wurden Resonanzen zuerst am Beispiel der Galileischen Monde des Jupiter durch Pierre-Simon Laplace (1749–1827): die Umlaufdauern der Monde Europa, Io und Ganymed stehen im Verhältnis 1:2:4.

Mond	Umlaufdauer
Io	1,7691 d
Europa	3,5512 d
Ganymed	7,1546 d

Auch die Umlaufdauern der Monde des Saturn Mimas und Tethys, bzw. Enceladus und Dione stehen in einem Verhältnis von je 1:2.

Die größte Lücke im Ring des Saturn ist auf einer Umlaufbahn, auf welcher die Umlaufdauer genau halb so lang ist wie die des innersten Mondes Mimas. Kleinere Gesteinsbrocken werden also jedesmal an derselben Stelle von Mimas nach außen gezogen und verlassen deswegen den Ring. Auch die anderen Lücken lassen sich alle zwanglose durch derartige Resonanzen erklären.

5.5 Dunkle Materie

Dunkle Materie wurde postuliert, als man feststellte, dass die Rotationskurve in Galaxien nicht so aussah, als könne man sie mit dem Newtonschen Gravitationsgesetz erklären.

Nach Newton, so Stewart in seinem Buch *Calculating the cosmos*, erwartet man eine Rotationskurve wie die in der linken Figur in Abb. 5.5. Misst man dagegen die Geschwindigkeit, mit der Sonnen um das Zentrum einer Galaxie kreisen (diese kann man durch Untersuchungen des Spektrums aus dem Dopplereffekt ablesen), dann ergeben sich Kurven wie die rechte in Abb. 5.5.

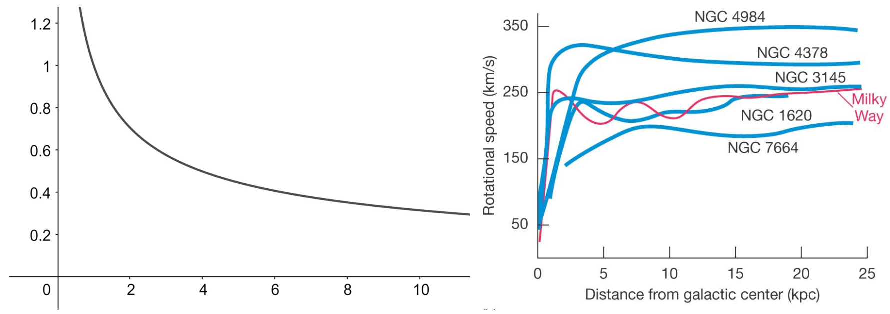


Abb. 5.5. Links: Rotationskurve nach Newton. Rechts: Rotationskurven einiger Galaxien. Pearson Education, `https://saoastronews.wordpress.com/2012/04/20/no-dm-in-solarneighbourhood/`

Ganz offenbar liegt Newton nach Stewart total daneben. Damit Stewarts Leser dieselbe Schlussfolgerung ziehen, hat der Autor allerdings etwas nachgeholfen. Zum einen ist die Skalierung in den beiden Figuren eine andere. Links ist das Schaubild von $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ in einem kartesischen Koordinatensystem abgebildet, die Einheiten rechts sind kiloparsec (ein kiloparsec sind 3260 Lichtjahre) auf der x-Achse und km/s auf der y-Achse. Bereits das ist sträflich.

Noch schlimmer ist aber die Tatsache, dass man eine Kurve wie die linke nur erhält, wenn es um die Rotationsgeschwindigkeit um eine Zentralmasse geht[5]. Betrachten wir dazu die Sonne: Die Anziehungskraft zwischen Sonne und Planet ist nach Newton $F = G\frac{mM}{r^2}$; diese muss gleich der Zentripetalkraft $F = \frac{mv^2}{r}$ sein, damit sich der Planet auf einer Kreisbahn bewegt. Gleichsetzen und auflösen nach v ergibt $v^2 = \frac{GM}{r}$, d.h. die Geschwindigkeit ist proportional zu $\frac{1}{\sqrt{r}}$ wie von Stewart behauptet.

Eine solche Abhängigkeit ergibt sich nicht einmal dann, wenn man Kugelsternhaufen betrachtet; die Galaxien, die im rechten Schaubild vermessen worden sind, sind die folgenden:

- NGC 4984 ist eine linsenförmige Galaxis vom Typ SB0-a;
- NGC 4378 ist eine Spiralgalaxis vom Typ Sa;
- NGC 3145 ist eine Balken-Spiralgalaxis vom Typ SBbc;
- unsere Milchstraße ist eine Spiralgalaxis, vermutlich ebenfalls eine Balkenspiralgalaxis vom Typ SBbc;
- NGC 1620 ist eine Spiralgalaxis vom Typ Sa;
- NGC 7664 ist eine Spiralgalaxis vom Typ Sc.

[5] Auch wikipedia macht diesen Fehler: auf `https://de.wikipedia.org/wiki/Milchstra%C3%9Fe` wird behauptet, man könne die Masse der Milchstraße aus dem dritten Keplerschen Gesetz berechnen. Das ginge nur, wenn die Milchstraße kugelförmig wäre.

Auf keine einzige dieser Galaxien kann man also die obigen Überlegungen auch nur näherungsweise anwenden.

Wir wollen uns jetzt eine grobe Näherung überlegen, welche die beobachteten Kurven ein wenig besser beschreibt. Der Kern einer Spiralgalaxie ist näherungsweise kugelförmig; wenn wir die Scheibe außerhalb vernachlässigen (das entspricht zwei Drittel der Masse der Galaxis) und annehmen, dass die Dichte dort nahezu konstant ist, dann wird die Masse innerhalb einer Kugel mit Radius proportional zu r^3 sein. Aus $v^2 = \frac{GM}{r}$ erhält man mit $M \sim r^3$ also $v^2 \sim r$: Die Geschwindigkeit nimmt also im Innern in etwa linear zu – das deckt sich ganz gut mit den beobachteten Rotationskurven. Weiter außen ist die Galaxis scheibenförmig; dort wird die Masse in etwa wie r^2 zunehmen, was auf $v \sim \sqrt{r}$ hinausläuft. Berücksichtigt man noch, dass die Dichte an Sternen abnimmt, wenn r zunimmt, wird die Rotationsgeschwindigkeit in großem Abstand weniger stark steigen als $\sqrt{r}$. Dies ist von den beobachteten Kurven nicht mehr weit weg.

Modellierungen durch Feng und Gallo[6] ergeben die beobachtete Rotationskurve bei einer Gesamtmasse der Milchstraße von etwas mehr als 10^{11} Sonnenmassen; weil die Zahl der Sterne in der Milchstraße auf 100 bis 300 Milliarden geschätzt wird, ist dies plausibel. Dem Glauben der Mehrzahl der Astronomen an die dunkle Materie hat diese ebensowenig geschadet wie die Messungen von Moni Bidin, Carraro, Méndez und Smith[7], die in der Umgebung des Sonnensystems keine Anzeichen von gravitativem Einfluss dunkler Materie gefunden haben.

Der Grund für die Annahme, dass es dunkle Materie geben müsse, ist jedenfalls nicht der Verlauf der Rotationskurven (die kann man mit Newton sehr gut erklären), sondern dass man durch Zählen der Sterne (als Abschätzen der Helligkeit) auf eine zu kleine Dichte der Galaxis kommt. Es scheint also mehr gravitative Masse zu geben als diejenige, die man leuchten sieht. Man hat daher erst einmal drei Möglichkeiten, diese Diskrepanz zu erklären:

- Das Gravitationsgesetz muss modifiziert werden.
- Es gibt dunkle Materie, die aus ganz unbekannten Teilchen besteht, die noch niemand gesehen hat.
- Die Technik des Zählens der Sterne über Helligkeitsmessungen lässt zu wünschen übrig.

Übungen

5.1 Zeige, dass der Schwerpunkt des Systems Erde-Mond innerhalb der Erde liegt.

[6] *Modeling the Newtonian dynamics for rotation curve analysis of thin-disk galaxies*; Research in Astron. Astrophys. 2011 Vol. 11 No. 12, 1429–1448; ähnliche Rechnungen stammen von Sipols und Pavlovich (*A Newtonian explanation of galaxy rotation curves based on distribution of baryonic matter* `https://arxiv.org/abs/1406.2401` und *Dark Matter Dogma: A Study of 214 Galaxies*).

[7] *Kinematical and chemical vertical structure of the Galactic thick disk. II. A lack of dark matter in the solar neighborhood*, `https://arxiv.org/abs/1204.3924` .

5.2 Untersuche, ob der Schwerpunkt der Systeme Erde-Sonne bzw. Jupiter-Sonne innerhalb oder außerhalb der Sonne liegen.

Wie sieht es mit dem Schwerpunkt des Systems Sonne-Jupiter-Saturn aus, wenn alle drei Körper in einer Geraden liegen und Jupiter und Saturn auf derselben Seite der Sonne stehen.

5.3 ([15, A16.1]) Man nimmt heute an, dass das Nördlinger Ries und das Steinheimer Becken durch ein und denselben Einschlag eines Asteroidenpaars erzeugt wurde. Weil ein Auseinanderbrechen innerhalb der Erdatmosphäre nicht für einen Kraterabstand von 40 km reicht, nimmt man an, dass es sich um einen Doppelasteroiden gehandelt hat, von denen der größere (der im Nördlinger Ries aufgeprallt ist) einen Durchmesser von etwa 1 km besessen hat.

Damit ein solches Asteroidenpaar bis zur Erbahn stabil sein kann, darf die Gezeitenkraft der Sonne nicht größer als die Anziehungskraft durch den Ries-Meteor sein. Die Gezeitenkraft F_g ist dabei die Abnahme der Gravitationskraft auf einer kleinen Distanz Δr. Leitet man $F = G \cdot \frac{mM}{r^2}$ nach r ab, erhält man $\frac{\Delta F_g}{\Delta r} \approx \frac{2GmM}{r^3}$.

Schätze damit ab, ob das Paar stabil sein konnte, wenn der Rieskörper eine Dichte von etwa 3 g/cm^3 besessen hat.

5.4 (Abitur Bayern 1998) Der Planet Pluto bewegt sich auf einer elliptischen Bahn um die Sonne, wobei sein Abstand zur Sonne zwischen 29,0 AE und 50,0 AE schwankt.

a) Berechnen Sie aus diesen Daten die Länge der großen Halbachse a (in AE) der Bahnellipse und die Umlaufdauer T des Planeten Pluto. (Zur Kontrolle: $a =$ 39,5 AE)

c) Pluto, dessen Bahnebene um 17° gegen die Ekliptik geneigt ist, erreicht seinen größten Abstand von der Ekliptikebene in der Nähe seines Aphels.

Berechnen Sie damit einen ungefähren Wert für Plutos größten Ekliptikabstand in AE.

g) Die siderische Umlaufzeit des Plutomondes Charon beträgt 6,4 d, für den Bahnradius hat man $2{,}0 \cdot 10^4$ km ermittelt.

Berechnen Sie damit die Gesamtmasse des Pluto-Charon-Systems und geben Sie diese in Erdmassen an.

h) In Oberflächennähe von Pluto wurden Methangasmoleküle mit einer mittleren Geschwindigkeit $v = 2{,}6 \cdot 10^2$ m/s nachgewiesen. Nach neueren Messungen hat Pluto eine Masse von $1{,}4 \cdot 10^{22}$ kg. Zeigen Sie, dass Pluto diese Moleküle gravitativ halten kann.

5.5 (Abitur Bayern 2000) Jupitermond Europa. Zur Entfernungsbestimmung wurde von der Erde aus ein Radarsignal zum Jupitermond Europa geschickt. Dort wurde es reflektiert und traf nach einer Gesamtlaufzeit von 69,9 Minuten wieder auf der Erde ein.

a) Begründen Sie rechnerisch, dass sich Jupiter mit seinen Monden zu diesem Zeitpunkt in Opposition befand.

b) Aus dem empfangenen Radarsignal kann man die Bahngeschwindigkeit von Europa zu $v = 13{,}8$ km/s bestimmen.

Berechnen Sie aus dieser Angabe und der Annahme, dass sich Europa auf einer kreisförmigen Bahn mit Radius $r = 6{,}7 \cdot 10^8$ m um Jupiter bewegt, die Jupitermasse in Vielfachen der Erdmasse.

5.6 (Abitur Bayern 2001)

1. William Herschel entdeckte 1781 im Sternbild Stier ein Objekt, das in seinem Teleskop deutlich größer erschien als ein Fixstern. Weitere Beobachtungen zeigten, dass sich das Objekt näherungsweise auf einer Kreisbahn um die Sonne bewegt. Herschel hatte damit am 13.3.1781 den Planeten Uranus entdeckt.

a) Danach konnte man die synodische Umlaufzeit von Uranus zu 369,6 d bestimmen. Berechnen Sie damit die siderische Umlaufzeit und die große Halbachse des Planeten Uranus.

d) In Oppositionsstellung erschien Uranus in Herschels Teleskop mit einem Winkeldurchmesser von etwa $3{,}9''$. Welchen Radius konnte man damit für Uranus abschätzen? (Ergebnis in Vielfachen des Erdradius)

2. a) 1986 entdeckte die Raumsonde Voyager 2 den kleinen Uranusmond Ophelia. Dieser hat eine annähernd kreisförmige Bahn, deren Abstand vom Zentrum des Uranus 2,1 Uranusradien beträgt. Die Umlaufdauer von Ophelia beträgt 9,0 Stunden. Berechnen Sie die Masse und die mittlere Dichte des Uranus. Welchen Schluss ziehen Sie aus dem Wert für die mittlere Dichte über die grundsätzliche Beschaffenheit von Uranus?

5.7 (Abitur Bayern 2005) Zwischen Erde und Mond gibt es einen Punkt, in dem sich die Gravitationskräfte von Erde und Mond aufheben. Berechnen Sie den Abstand r_0 dieses Punktes vom Erdmittelpunkt. Verwenden Sie für den Abstand von der Erde zum Mond $3{,}84 \cdot 10^5$ km. (Zur Kontrolle: $r_0 = 3{,}46 \cdot 10^5$ km)

b) Berechnen Sie die Geschwindigkeit v^*, auf die ein Satellit von der Parkbahn (190 km über der Erdoberfläche) beschleunigt werden müsste, um anschließend antriebslos den Abstand r_0 zu erreichen. Der Einfluss des Mondes soll dabei nicht berücksichtigt werden.

5.8 (Abitur Bayern 2006)

Titan hat einen Radius von 2575 km und eine Masse von $1{,}35 \cdot 10^{23}$ kg. Damit ist er der zweitgrößte Mond unseres Sonnensystems. Er bewegt sich in 15,9 Tagen in gebundener Rotation auf einer nahezu kreisförmigen Bahn mit Radius $1{,}22 \cdot 10^6$ km um den Saturn.

f) Berechnen Sie die Masse des Saturn.

g) Erläutern Sie den Begriff „gebundene Rotation“.

h) Bestimmen Sie die Fallbeschleunigung auf Titan.

5.9 Berechne die Anziehungskraft einer 60 kg schweren Person, die 50 cm von Dir entfernt sitzt, und vergleiche sie mit der Anziehungskraft von Jupiter. Dieser ist etwa 5 AE von der Erde entfernt und hat eine Masse von $1{,}9 \cdot 10^{27}$ kg.

5.10 Ein Masse von 1 kg wird auf der Erdoberfläche von der Erde mit einer Kraft von etwa 9,8 N angezogen. Berechne daraus die Masse der Erde.

5.11 Zeige, dass eine Person auf dem Mars etwa die Hälfte wiegt wie auf der Erde.

5.12 Der Jupitermond Europa umläuft den Jupiter in 3,55 Tagen in einer Entfernung von 671.000 km. Berechne daraus die Masse des Jupiter.

Der Jupitermond Io hat ziemlich genau die halbe Umlaufdauer von Europa. Bestimme seine Entfernung von Jupiter.

5.13 Der Mond Triton des Neptun hat eine Entfernung von 355 000 km vom Neptun und umkreist diesen in 5,877 Tagen. Bestimme daraus die ungefähre Masse des Neptun.

5.14 Titan ist der größte Mond des Saturn. Er umkreist Saturn im Abstand von etwa 1.200.000 km in knapp 16 Tagen. Bestimme daraus die Masse des Saturn.

5.15 Der Erdmond ist im Durchschnitt 384 000 km von der Erde entfernt.

1. Berechne die Gravitationskräfte, die Erde bzw. Sonne auf den Mond ausüben.
2. Warum ist das Ergebnis überraschend?
3. Warum bleibt der Mond trotzdem auf seiner Umlaufbahn?

5.16 Wie dick müsste ein Stahlseil sein, das zwischen Sonne und Erde gespannt wird, um die Erde auf ihrer Bahn zu halten?

Die Zugfestigkeit von Stahl beträgt etwa 1000 N/mm^2.

Die Kraft zwischen Erde und Sonne erhät man aus $F = m_E v^2$ mit $v = 2\pi$ AE/a zu $4 \cdot 10^{22}$ N. Daraus erhält man den Querschnitt des Stahlseils zu $A \approx 4 \cdot 10^7$ km^2. Daraus ergibt sich ein Radius von etwa 2500 km.

5.17 Mit welcher Kraft wird eine Masse von 1 kg auf der Erde von der Sonne, bzw. vom Mond angezogen?

([13, 11, S. 53]) Warum werden die Gezeitenkräfte vor allem durch den Mond erzeugt?

Die Gezeitenkräfte werden von der Differenz der Anziehungskraft auf einen Punkt N der Erde, der dem Mond am nächsten ist, und dem fernsten Punkt F erzeugt. Diese Kräfte sind für eine Masse von 1 kg gleich

$$F_N = G\frac{m}{r^2} \quad \text{bzw.} \quad F_F = G\frac{m}{(r+R)^2},$$

wenn m die Masse des Monds, r den Abstand Erde-Mond und R den Erdradius bezeichnet. Die Differenz dieser beiden Kräfte ist für die Gezeiten verantwortlich:

$$\begin{aligned} F_M = F_N - F_F = Gm\Big(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{(r+d)^2}\Big) &= Gm\frac{r^2 + 2rd + d^2 - r^2}{r^2(r+d)^2} \\ = Gm\frac{2rR + R^2}{r^2(r+R)^2} \approx Gm\frac{2rd}{r^4} &= \frac{2Gmd}{r^3}, \end{aligned}$$

weil d sehr viel kleiner ist als r.

Dieselbe Formel gilt für die von der Sonne erzeugten Gezeitenkraft F_S, wenn man die Masse m des Monds durch die Masse M der Sonne und den Abstand r von Erde-Mond durch den Abstand R zwischen Erde und Sonne ersetzt.

Das Verhältnis beider Kräfte ist damit

$$\frac{F_M}{F_S} = \frac{\frac{2Gmd}{r^3}}{\frac{2GMd}{R^3}} = \frac{mR^3}{Mr^3}.$$

Einsetzen der Werte liefert, dass $F_M/F_S \approx 2{,}2$ ist, d.h. der Einfluss des Monds auf die Gezeiten ist mehr als doppelt so groß wie derjenige der Sonne.

5.18 Fernsehsatelliten werden in der Regel in geostationäre Umlaufbahnen versetzt; das sind solche, bei denen die Umlaufdauer genau 24 h sind. Dadurch ist garantiert, dass der Satellit von der Erde aus gesehen immer in derselben Richtung am Himmel steht.

In welcher Höhe umkreisen geostationäre Satelliten die Erde?

Bei einer Umlaufdauer von $T = 24$ h in einer Höhe von h km über dem Erdmittelpunkt ist die Geschwindigkeiten des Satelliten $v = \frac{2\pi h}{T}$. Die Zentripetalkraft $F = \frac{mv^2}{h}$ muss von der Schwerkraft $F = G\frac{mM}{h^2}$ geliefert werden, wo m die Masse des Satelliten und M die Masse der Erde bezeichnet. Aus

$$G\frac{mM}{h^2} = \frac{mv^2}{h} = \frac{4\pi^2 mh^2}{hT^2} = \frac{4\pi^2 mh}{T^2}$$

folgt dann

$$h^3 = \frac{GMT^2}{4\pi^2},$$

was nach Einsetzen der Werte auf $h = 42\,300$ km führt. Zieht man den Erdradius 6370 km ab, erhält man eine Höhe von etwa 35.900 km über der Erdoberfläche.

Für eine genauere Rechnung muss man den siderischen Tag von 23 h 56 min verwenden.

5.19 Wie weit ist der Punkt zwischen Mond und Erde, in welchem sich die Gravitationskräfte gegenseitig aufheben, von der Erde entfernt?

Sei r der Abstand zur Erde; der Abstand zum Mond ist dann $d - r$, wobei $d = 384\,000$ km die durchschnittliche Entfernung von Erde und Mond ist. Gleichsetzen der Gravitationskräfte auf eine Probemasse von 1 km ergibt, wenn m und M die Massen von Mond und Erde bezeichnen,

$$G\frac{M}{r^2} = G\frac{m}{(d-r)^2}.$$

Daraus folgt

$$(d-r)^2 M = r^2 m, \quad \text{also} \quad (d-r)\sqrt{M} = r\sqrt{m}.$$

Dies liefert $d\sqrt{M} = r(\sqrt{M} + \sqrt{m})$ und endlich

$$r = d \cdot \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{M} + \sqrt{m})}.$$

Weil der Mond eine Masse von etwa $\frac{1}{81}$ Erdmassen besitzt, ist der Faktor

$$\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{M} + \sqrt{m})} = \frac{1}{1 + \frac{1}{9}} = \frac{9}{10}.$$

Also ist der fragliche Punkt 90% der Mondentfernung von der Erde weg, das sind etwa 350.000 km.

A. Klausuraufgaben

Zur Vorbereitung auf die Klassenarbeit sind hier Beispiele von Aufgaben aus früheren Jahren.

1. Wie heißen die 8 Planeten unseres Sonnensystems? Welcher Planet wurde in den letzten Jahren zu einem Kleinplaneten herabgestuft?

2. Welche beiden Planeten in unserem Sonnensystem besitzen keinen Mond?

3. Welches sind die vier inneren Planeten, geordnet mit aufsteigendem Abstand von der Sonne?

4. Welche Planeten sind gemeint?

Der rote Planet	
Der blaue Planet	
Planet mit Ringsystem	
massereichster Planet	
"Abendstern"	

5. Wer hat als erster den Umfang der Erde gemessen?

   Wer hat in der Neuzeit als erster das heliozentrische Weltbild vertreten?

   Welcher Astronom hat als erstes mit einem Fernrohr den Himmel beobachtet?

6. Erkläre den Unterschied zwischen geozentrischem und heliozentrischem Weltbild.

7. Erkläre den Begriff „zirkumpolares Sternbild“ und gib ein Beispiel.

   Ist der Polarstern auch von Australien aus zu sehen?

8. Was stimmt an folgenden Aussagen nicht?

   a) Nach Mitternacht ging der Vollmond hinter dem Schönenberg auf.

   b) Beim Verkehrsunfall in der Karfreitagnacht war Neumond.

   c) Wenn in Europa der Vollmond zu sehen ist, ist in Australien Neumond.

9. Zu den folgenden Namen schreibe man ein Stichwort, das eine wichtige wissenschaftliche Leistung des betreffenden Wissenschaftlers beschreibt.

Eratosthenes	
Aristarch	
Kopernikus	
Galilei	
Newton	

10. Welche Wissenschaftler waren für die Entdeckung der folgenden Resultate verantwortlich?

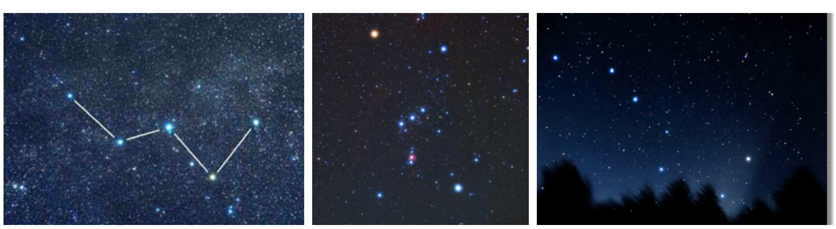
Entdeckung	Name
Bestimmung des Erdradius	
heliozentrisches Weltbild (Neuzeit)	
Entdeckung der Jupitermonde	
Gravitationsgesetz	

11. Wie lauten die drei Keplerschen Gesetze?

12. Erkläre die Begriffe synodische und siderische Umlaufszeit zweier Planeten um die Sonne.

13. Erkläre die Begriffe
   (a) Astronomische Einheit
   (b) Lichtjahr
   (c) parsec

14. Wie heißen diese drei Sternbilder? In welcher Richtung muss man den Polarstern suchen?



15. Gib zwei Beispiele für zirkumpolare Sternbilder und ein Beispiel für ein typisches Wintersternbild.

16. Gib die Bezeichnungen von drei der Sternbilder im untenstehenden Diagramm an und markiere den Polarstern.

17. Der Jupiter hat eine Umlaufsdauer von 11,86 Jahren. Bestimme daraus seine Entfernung von der Sonne (in AE). Wie nahe kann er der Erde kommen, wie weit ist er höchstens von ihr weg?

18. Der Erdmond ist im Durchschnitt 384 000 km von der Erde entfernt.

    (a) Berechne die Gravitationskräfte, die Erde bzw. Sonne auf den Mond ausüben.

    (b) Warum ist das Ergebnis überraschend?

    (c) Warum bleibt der Mond trotzdem auf seiner Umlaufbahn?

19. Der Mond Triton des Neptun hat eine Entfernung von 355 000 km vom Neptun und umkreist diesen in 5,877 Tagen. Bestimme daraus die ungefähre Masse des Neptun.

20. Der Marsmond Phobos umkreist den Mars in einem Abstand von etwa 9400 km und braucht dafür 0,319 Tage. Berechne daraus die Masse des Mars.

    Die Umlaufdauer des Mondes Deimos ist recht genau 4 mal so groß wie die von Phobos. Was folgt daraus mit dem 3. Keplerschen Gesetz für dessen Umlaufdauer?

21. Mit welcher Kraft wird ein Astronaut mit einer Masse von 80 kg an der Mondoberfläche vom Mond angezogen?

    Welches Gewicht hätte er auf der Erde? Welchen Bruchteil dieses Gewichts spürt er auf dem Mond?

22. Die Gezeiten auf der Erde gehen im Wesentlichen auf den Einfluss des Mondes zurück.

    a) Wie viel Zeit würde zwischen zwei aufeinanderfolgenden Flutbergen vergehen, wenn die Erde sich nicht drehen würde?

    b) In welchem zeitlichen Abstand folgen zwei Flutberge wirklich aufeinander?

23. Berechne die Anziehungskraft, welche die Sonne bzw. der Mond auf einen Liter Wasser (Masse 1 kg) an der Erdoberfläche ausübt.

    Warum ist das Ergebnis überraschend, was Ebbe und Flut angeht?

24. Der Komet Encke hat eine Umlaufdauer von nur 3,3 Jahren. Bestimme seine große Halbachse.

    Die kürzeste Entfernung zur Sonne beträgt 0,34 AE. Welche Entfernung hat er in Sonnenferne?

25. Der Jupitermond Europa umläuft den Jupiter in 3,55 Tagen in einer Entfernung von 671.000 km. Berechne daraus die Masse des Jupiter.

    Der Jupitermond Io hat ziemlich genau die halbe Umlaufdauer von Europa. Bestimme seine Entfernung von Jupiter.

26. Neptun braucht 165 Jahre für einen Umlauf um die Sonne. Wie viele Astronomische Einheiten ist er von der Sonne entfernt? Wie lange braucht das Licht von der Sonne, um ihn zu erreichen?

27. Berechne die Anziehungskraft einer 60 kg schweren Person, die 50 cm von Dir entfernt sitzt, und vergleiche sie mit der Anziehungskraft von Jupiter. Dieser ist etwa 5 AE von der Erde entfernt und hat eine Masse von $1{,}9 \cdot 10^{27}$ kg.

28. Titan ist der größte Mond des Saturn. Er umkreist Saturn im Abstand von etwa 1.200.000 km in knapp 16 Tagen. Bestimme daraus die Masse des Saturn.

29. Der nach Halley benannte Komet hat eine Umlaufsdauer von ca. 75 Jahren. Berechne daraus die große Halbachse seiner Bahn.

    Im sonnennächsten Punkt ist er 0,6 Astronomische Einheiten von der Sonne entfernt; wie groß ist die Entfernung im sonnenfernsten Punkt?

Angegebene Formeln und Daten

$F = G \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2}$	Gravitationsgesetz
$\frac{1}{s} = \frac{1}{T} - \frac{1}{t}$	siderische (s) und synodische (t) Umlaufszeiten
$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)}$	Quantitative Version des 3. Keplerschen Gesetzes

Konstanten

$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3/kg\,s^2}$	Gravitationskonstante
$c = 299\,792\ \mathrm{km/s}$	Lichtgeschwindigkeit
$1AE = 1{,}496 \cdot 10^8\ \mathrm{km}$	Astronomische Einheit
$d(E, M) \approx 384{,}000\ \mathrm{km}$	Abstand Erde-Mond
$r_E = 6400\ \mathrm{km}$	Erdradius
$m_E = 5{,}974 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$	Erdmasse
$m_M = 7{,}35 \cdot 10^{22}\ \mathrm{kg}$	Mondmasse
$m_S = 1{,}99 \cdot 10^{30}\ \mathrm{kg}$	Sonnenmasse

Literatur

1. D. Beckmann, B. Epperlein, *Astronomie. Grundkurs*, Manz-Verlag München 1989
2. L Bobis, J. Lequeux, *Cassini, Rømer and the velocity of light*, Journal of Astronomical History and Heritage **11** (2008), 97-105
3. F. Gondolatsch, G. Groschopf, O. Zimmermann, *Astronomie I. Die Sonne und ihre Planeten*, Klett 1977
4. F. Gondolatsch, G. Groschopf, O. Zimmermann, *Astronomie II. ?*, Klett 1979
5. J. Hamel, *Astronomie in alter Zeit*, Berlin 1985
6. J. Hamel, *Astrologie – Tochter der Astronomie?*, Urania Verlag 1987
7. J. Hamel, *Friedrich Wilhelm Bessel*, Leipzig 1984
8. J. Hamel, *Meilensteine der Astronomie. Von Aristoteles bis Hawking*, Kosmos 2006
9. J. Hamel, *Geschichte der Astronomie*, Birkhäuser 1998; 2. Aufl. Kosmos 2002
10. J. Hamel, *Geschichte der Astronomie in Texten von Hesiod bis Hubble*, Essen 2004
11. D. Herrmann, *Biographien bedeutender Astronomen*, Volk un Wissen Verlag, Berlin 1991
12. G. Johnson, *Miss Leavitt's Stars. The untold story of the woman who discovered how to measure the universe*, Atlas Books 2005
13. B. Kastner, S. Fraser, *Raumfahrt und Mathematik*, Klett 1993
14. J. Krauss, *Vom Messen der Zeit im Wandel der Zeiten*, Westphal Verlag 1950
15. A. Quetz, S. Völker, *Zum Nachdenken: Unser Sonnensystem. Astronomische Aufgaben aus 35 Jahren Sterne und Weltraum*, Springer Spektrum 2017
16. H. Schäfer, *Astronomische Probleme und ihre physikalischen Grundlagen*, Vieweg, 3. Aufl. 1988

17. D. Sobel, *Längengrad*, 2005

18. H. Vogel, *Probleme aus der Physik*, Springer-Verlag 1977

19. H. Zimmermann (Hrsg.), *Astronomie für Lehrer. Band 1, Teil 1. Grundlagen der Astronomie*, DDR 1984

Namensverzeichnis

Sachverzeichnis