Spektraltheorie im Hilbertraum

Daniela Stängle

December 17, 2020

Wiederholung

Definition (Radonmaß auf $C_c^\infty(\mathbb{R})$)

Ein Radonmaß ist eine $\mathbb{C}-$lineare Abbildung $I : C_c^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ mit den Eigenschaften

- $I(\bar{f}) = \overline{I(f)}$
- $I(f) \geq 0$ für $f \geq 0$

Wiederholung

Definition (Radonmaß auf $C_c^\infty(\mathbb{R})$)

Ein Radonmaß ist eine $\mathbb{C}-$lineare Abbildung $I : C_c^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ mit den Eigenschaften

- $I(\bar{f}) = \overline{I(f)}$
- $I(f) \geq 0$ für $f \geq 0$

i) I wie oben definiert lässt sich eindeutig fortsetzen zu einem Radonmaß auf $C_c(\mathbb{R})$.

Wiederholung

Definition (Radonmaß auf $C_c^\infty(\mathbb{R})$)

Ein Radonmaß ist eine $\mathbb{C}-$lineare Abbildung $I : C_c^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ mit den Eigenschaften

- $I(\bar{f}) = \overline{I(f)}$
- $I(f) \geq 0$ für $f \geq 0$

i) I wie oben definiert lässt sich eindeutig fortsetzen zu einem Radonmaß auf $C_c(\mathbb{R})$.

Dies folgt aus der Tatsache, dass jedes $f \in C_c(\mathbb{R})$ der gleichmäßige Grenzwert einer Folge $f_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ ist, deren Träger in einer vereinigten kompakten Menge liegen.

Wiederholung

Definition (schnell-fallend)

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt schnell-fallend, wenn Pf für alle Polynome P beschränkt ist.

Definition (Schwartz-Funktion)

Eine Funktion heißt Schwartz-Funktion, wenn sie unendlich oft differenzierbar ist und alle Ableitungen schnell-fallend sind. Der Raum der Schwartz-Funktionen auf $\mathbb{R}$ wird mit $S(\mathbb{R})$ bezeichnet.

Wiederholung

Lemma

Für Schwartz-Funktionen f existiert die Fouriertransformation

$$\hat{f} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-itx} f(t) dt$$

Bemerkungen

- Für Funktionen f die messbar und schnell-fallend sind existiert das Integral
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt.$$
- $\hat{f}$ ist eine Schwartz-Funktion.
- Die Fouriertransformation einer C^{∞}-Funktion mit kompakten Träger ist eine Schwartz-Funktion.

inverse Fouriertransformation

Theorem

Die Abbildung $S(\mathbb{R}) \to S(\mathbb{R})$, $f \to \hat{f}$, ist ein Isomorphismus von Vektorräumen, der sich zu einem Isomorphismus von Hilberträumen

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}, dt) \to L^2(\mathbb{R}, dt)$$

fortsetzen lässt, wobei dt das Standard Lebesgue-Maß auf der reellen Gerade ist. Außerdem gilt

$$\mathcal{F}\mathcal{F}(f)(x) = f(-x).$$

Sei (X, dx) ein Radonmaß und $f : X \to \mathbb{C}$ eine beschränkte, messbare Funktion. Wir definieren den Operator

$$L^2(X, dx) \to L^2(X, dx), \quad g \mapsto fg.$$

- Dieser Operator ist beschränkt und linear.
- Wenn $f\bar{f} = 1$ gilt, ist der Operator unitär.

Beispiel eines Radonmaßes

Sei $X = \{1 \dots n\}$ eine endliche Menge mit diskreter Topologie und das Radonmaß dx durch das Summationsmaß gegeben. Dann ist das Integral für eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ gegeben durch:

$$\int_X f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} f(i)$$

Dann ist $L^2(X, dx) = \mathbb{R}^n$ und der Operator $L^2(X, dx) \to L^2(X, dx)$ gegeben mit $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n)$.

unitäre Darstellung

Sei $U : \mathbb{R} \to U(H)$ eine unitäre Darstellung der additiven Gruppe $\mathbb{R}$ auf einem Hilbertraum H. Dann gilt:

- $U(s+t) = U(t)U(s), \quad \text{für } s, t \in \mathbb{R}$
- $U(0) = id_H$

Das Spektraltheorem (Satz von Stone)

Theorem

Sei $U : \mathbb{R} \to U(H)$ eine unitäre Darstellung der additiven Gruppe $\mathbb{R}$ auf einem Hilbertraum. Dann existiert ein Radonmaß (X, dx) und eine reelle stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$, so dass die Darstellung U äquivalent zur Darstellung

$$\tilde{U} : \mathbb{R} \to U(L^2(X, dx)), \qquad \tilde{U}(t)(g) = \mathrm{e}^{itf} g$$

ist, wobei äquivalent im Sinne zu Verstehen ist, dass ein Hilbertraumisomorphismus $W : L^2(\mathbb{R}, dx) \xrightarrow{\sim} H$ mit der Eigenschaft $\tilde{U}(t) = W^{-1} U(t) W$ existiert.

zyklische Vektoren

Definition

Sei $\pi : G \to GL(E)$ eine Banachdarstellung. Ein Vektor a heißt zyklisch, wenn der Unterraum erzeugt durch alle $\pi(g)a$ dicht in E ist, das heißt E ist der einzige abgeschlossene invariante Unterraum der a enthält.

Definition

Eine Darstellung ist (topologisch) irreduzibel, genau dann wenn jeder Vektor ungleich Null zyklisch ist.

Wenn ein zyklischer Vektor existiert, kann das Spektraltheorem zu folgender Version verschärft werden. Im folgenden werden wir zeigen, dass aus dieser Variante schon die allgemeinere Variante folgt.

Verschärfte Version des Spektraltheorems

Sei $U : \mathbb{R} \to U(H)$ eine unitäre Darstellung der additiven Gruppe $\mathbb{R}$ auf einem Hilbertraum. Unter der Voraussetzung, dass ein zyklischer Vektor existiert, kann im Spektraltheorem $X = \mathbb{R}$ mit einem Radonmaß dx und f mit $f(t) = t$ gewählt werden.

Beweis die allgemeine Version folgt aus der verschärften Version

Behauptung: Jede unitäre Darstellung $\pi : G \to U(H)$ hat die folgende Eigenschaft. H lässt sich als direkte Hilbertsumme einer endlichen oder abzählbaren Menge von Unterhilberträumen H_i schreiben, welche invariant sind und so dass jeder dieser Unterräume einen zyklischen Vektor zulässt.

Beweis

Seien I, J endliche oder abzählbare Indexmengen. Sei $H' \subset H$ ein abgeschlossener invarianter Unterraum, der sich in zyklische Unterräume $H_i^{'}$ zerlegen lässt mit $\widehat{\bigoplus}_{i \in I} H_i^{'}$ eine solche Zerlegung. Die Ordnung bezüglich der Mengeninklusion $\subseteq$ ist gegeben durch: $H' \subseteq H''$ wenn für das Paar $(H'', \widehat{\bigoplus}_{j \in J} H_j^{''})$ jeder Unterhilbertraum $H_i^{'}$ einem Unterhilbertraum $H_j^{''}$ gleich ist. Nach Zorns Lemma existiert dann ein maximales Element H_0.
Wir betrachten das orthogonale Komplement $H_0^{\perp}$. Da H_0 ein abgeschlossener invarianter Unterraum ist, ist auch $H_0^{\perp}$ ein abgeschlossener invarianter Unterraum. Dieser Raum kann keine weiteren zyklischen Unterräume H_i enthalten, da sonst H_0 dadurch erweitert werden könnte.

Fortsetzung Beweis

Es genügt daher zu zeigen, dass mindestens ein abgeschlossener invarianter zyklischer Unterraum für jede unitäre Darstellung $\pi : G \to U(H)$ existiert. Sei $x \in H$ mit $x \neq 0$ und betrachte die Anwendung von $\pi(g)$ auf a. Die $\pi(g)a$ erzeugen einen Unterraum, dessen Abschluss in H liegt. Dieser Abschluss ist ein zyklischer Unterraum. $\square$

Das Radonmaß im Spektraltheorem ist die direkte Summe der Radonmaße der einzelnen H_i. Die direkte Summe wird hierbei folgendermaßen verstanden. Sei (X_i, dx_i) eine endliche oder abzählbare Menge von Radonmaßen. Betrachte die disjunkte Vereinigung der X_i, die gegeben wird durch

$$\sqcup X_i = \{(x, i); x \in X_i\}$$

Dann existieren natürliche Inklusionen $X_i \to X, x \mapsto (x, i)$ und X ist die disjunkte Vereinigung der Bilder. X wird versehen mit der direkten Summentopologie, das heißt, dass die Bilder der X_i offene Teilmengen sind und die induzierte Topologie die ursprüngliche Topologie ist. Das Radonmaß auf X wird derart gewählt, dass $dX \mid_{X_i} = dx_i$.

Sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine beschränkte stetige Funktion. Wir betrachten das Funktional

$$I_h : C_c^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}, \quad I_h(g) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\hat{g}(t)dt$$

Da $g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ existiert $\hat{g}$ und ist schnell-fallend. Somit ist auch das Produkt $h\hat{g}$ für eine beschränkte stetige Funktion h schnell fallend und somit existiert dieses Integral.

Betrachte dieses Funktional für folgendes h gegeben durch $h(t) = \langle U(t)a, a\rangle$ für einen fest gewählten zyklischen Vektor a. Diese Funktion hat die Eigenschaft

$$h(-t) = \langle U(-t)a, a\rangle = \langle a, U(t)a\rangle = \overline{h(t)}$$

Behauptung: für dieses Funktion ist I_h ein Radonmaß auf $C_c^\infty(\mathbb{R})$. Zunächst zeigen wir, dass I_h reell ist für reelle g. Für g reell gilt die folgende Formel:

$$\bar{\hat{g}}(t) = \hat{g}(-t)$$

$$\begin{aligned}
\overline{I_h(g)} &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{h(t)} \cdot \overline{\hat{g}(t)} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} h(-t)\hat{g}(-t) dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\hat{g}(t) dt \\
&= I_h(g)
\end{aligned}$$

Für $g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ verwenden wir daher die Notation:

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) d\mu = \int_{-\infty}^{\infty} \langle U(t)a, a\rangle \hat{g}(t) dt$$

Definiere die lineare Abbildung

$$W : C_c^\infty(\mathbb{R}) \to H, \quad g \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(t)U(t)a dt.$$

Das Integral ist ein Bochner-Integral mit Werten im Hilbertraum H. Da der Integrand stetig ist, ist er insbesondere messbar und beschränkt durch die Funktion $|\hat{g}|$, welche integrierbar ist und somit existiert das Bochner-Integral.

Faltung auf der reellen Gerade und Faltungssatz

Für $g_1, g_2 \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ ist die Faltung durch folgende Formel gegeben:

$$(g_1 * g_2)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x-t) g_2(t) dt$$

Es gilt außerdem:

$$\widehat{g_1 g_2} = \hat{g}_1 * \hat{g}_2$$

Für $g_1, g_2 \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ berechnen wir nun das Integral

$$\int_{\mathbb{R}} g_1(t)\overline{g_2(t)}d\mu$$

. Wir erhalten nun mit obigen Fakten:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} g_1(t)\overline{g_2(t)}d\mu &= \int_{-\infty}^{\infty} \langle U(t)a, a\rangle \widehat{g_1\overline{g_2}}(t)dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \langle U(t)a, a\rangle (\hat{g}_1 * \hat{\bar{g}}_2)(t)dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \langle U(t)a, a\rangle \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}_1(t-s)\hat{\bar{g}}_2(s)dsdt
\end{aligned}$$

Wir vergleichen dies mit dem inneren Produkt von $W(g_1)$ und $W(g_2)$ im Hilbertraum H.

$$\langle W(g_1), W(g_2)\rangle = \langle \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}_1(t)U(t)adt, \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}_2(s)U(s)ads\rangle$$

Da die Integrale Standardintegrale über stetige Funktionen mit kompakten Träger sind, können sie als Riemann-Integrale betrachtet werden. Diese können durch endliche Summen approximiert werden und wir erhalten:

$$\langle W(g_1), W(g_2)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \langle U(t)a, U(s)a\rangle \hat{g}_1(t)\bar{\hat{g}}_2(s)dtds$$

Mittels Integraltransformation $(s,t) \mapsto (s, t-s)$ erhalten wir:

$$\int_{\mathbb{R}} g_1(t)\overline{g_2(t)}d\mu = \langle W(g_1), W(g_2)\rangle$$

Sei nun $g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ eine reelle nicht-negative Funktion. Für $\sqrt{g}$ differenzierbar, setze $g_1 = g_2 = \sqrt{g}$, dann ist $\int_{\mathbb{R}} g d\mu$ nicht-negativ. Falls $\sqrt{g}$ nicht differenzierbar, lässt sich g mit Funktionen g_1^2 approximieren, wobei g_1 differenzierbar ist. Somit ist $d\mu$ ein Radonmaß.

Die Abbildung $W : C_c^\infty(\mathbb{R}) \to H$ ist unitär und somit injektiv. Daher lässt die Abbildung sich zu einer unitären Abbildung

$$L^2(\mathbb{R}, d\mu) \to H$$

fortsetzen. Insbesondere lässt sich W zu $S(\mathbb{R})$ fortsetzen, da das Bild vollständig ist und somit ein abgeschlossener Unterraum von H.
Noch zu zeigen ist, dass $W\tilde{U}(s) = U(s)W$. Dies folgt aus der Tatsache, dass die Fouriertransformation von $x \mapsto \mathrm{e}^{isx}g(x)$ die Funktion $x \mapsto \hat{g}(x-s)$ ist.

Als letztes zeigen wir, dass W surjektiv ist. Da a ein zyklischer Vektor ist, genügt es zu zeigen, dass a im Bild liegt oder eine Sequenz schnell-fallender Funktionen g_n mit $W(g_n) \to a$ existiert. Wähle hierfür eine differenzierbare Diracfolge h_n. Dann konvergiert $\int h_n(t)U(t)a$ gegen $U(0)a = a$. Wir können h_n schreiben als $h_n = \hat{g_n}$ für Schwartz-Funktionen g_n. $\square$