Übungen zur Differentialgeometrie — Blatt 8

Heidelberg, Sommersemester 2007 – Prof. F. Tomi

Abgabetermin: Mittwoch, 20.06.2007

---

1. Es sei $(M, \langle\, .\, ,.\rangle)$ eine pseudo-Riemannsch'e Mannigfaltigkeit und $\varphi : M \to M$ ein isometrischer Diffeomorphismus. Man zeige für den Levi-Civita-Zusammenhang:

   (a) Für Vektorfelder X, Y gilt $\nabla_{\varphi^* Y}\varphi^* X = \varphi^* \nabla_Y X$.

   (b) Ist α Geodätische, so auch $\varphi \circ \alpha$.

   (c) Es gilt $\varphi \circ \mathrm{Exp} = \mathrm{Exp} \circ \varphi_*$.

   (d) Ist M zusammenhängend und existiert ein $x_0 \in M$ mit
   $$\varphi(x_0) = x_0 \text{ und } \varphi_{*,x_0} = \mathrm{Id}\,,$$
   so folgt $\varphi = \mathrm{Id}$.

   (e) Man schließe aus (d), dass die in Aufgabe 2. (b) von Blatt 7 beschriebene Gruppe von Möbiustransformationen genau alle Isometrien des hyperbolischen Raums enthält.

   (f) Die Fixpunktmenge F von φ ($F = \{x \in M |\, \varphi(x) = x\}$) sei eine Untermannigfaltigkeit von M positiver Dimension und es sei $(x, v) \in TF$. Dann liegt die Geodätische von M mit Anfangswerten (x, v) ganz in F (F ist eine "total geodätische" Untermannigfaltigkeit).

2. Man bestimme alle Geodätischen des hyperbolischen Raums $\mathbb{H}^n$.

   Hinweis: Mit Aufgabe 1. (f) geht dies ganz ohne Rechnung.