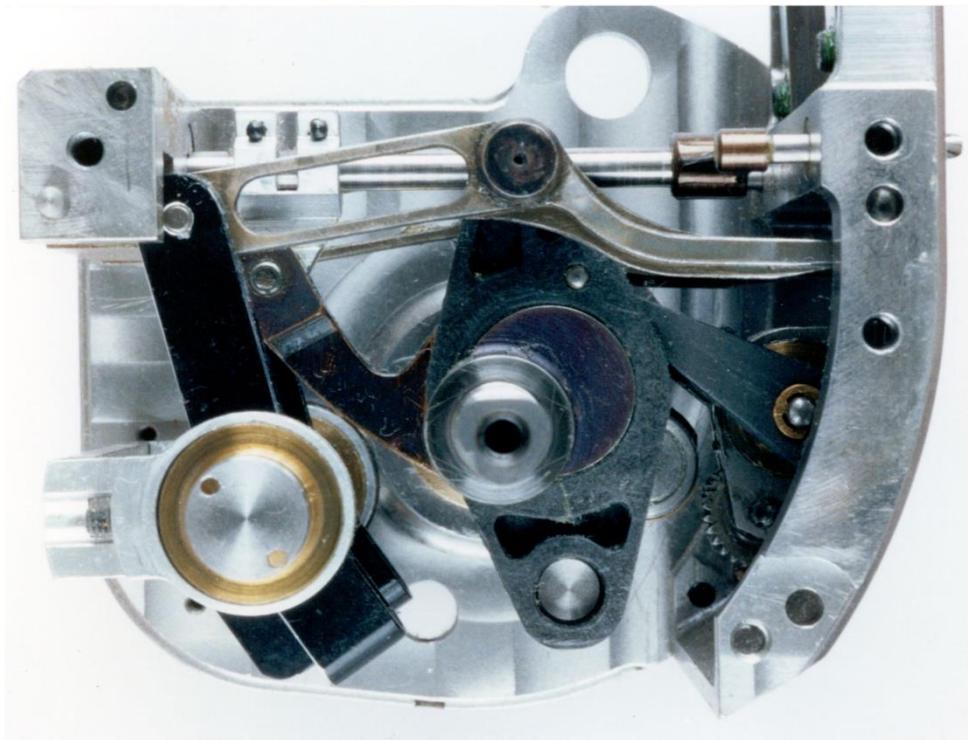


## Bewegungstechnik

Dr. Franz Irlinger, Alexandra Mercader, Markus Huber, Prof. Dr. Tim C. Lüth



Arriflex 435 ES – Filmschaltwerk

# Inhalt

<b>SYMBOLVERZEICHNIS.....</b>	<b>4</b>
<b>1. SYSTEMATIK .....</b>	<b>6</b>
<b>2. POLE .....</b>	<b>8</b>
2.1 DREHPOLE .....	8
2.2 MOMENTANPOL .....	8
2.3 POLKONFIGURATIONEN .....	9
2.4 POLKURVEN.....	9
<b>3. EINFACHE SYNTHESE VON VIERGELENK-MECHANISMEN.....</b>	<b>11</b>
<b>4. GESCHWINDIGKEITEN .....</b>	<b>12</b>
4.1 MOMENTANDREHUNG .....	12
4.2 VEKTORPLAN .....	12
4.3 DIE SÄTZE VON BURMESTER UND MEHMKE .....	13
4.4 WINKELGESCHWINDIGKEITEN .....	14
<b>5. BESCHLEUNIGUNGEN .....</b>	<b>15</b>
5.1 VEKTORGLEICHUNG .....	15
5.2 MAßSTÄBE.....	16
5.3 VEKTORPLÄNE.....	16
5.4 DIE SÄTZE VON BURMESTER UND MEHMKE .....	16
5.5 POLBESCHLEUNIGUNG UND BESCHLEUNIGUNGSPOL .....	17
5.6 WINKELBESCHLEUNIGUNGEN.....	17
<b>6. RELATIVBEWEGUNGEN .....</b>	<b>18</b>
6.1 RELATIVGESCHWINDIGKEIT.....	18
6.2 POLWECHSELGESCHWINDIGKEIT .....	18
6.3 POLBESCHLEUNIGUNG .....	19
6.4 CORIOLISBESCHLEUNIGUNG .....	19
<b>7. KRÜMMUNGSVERHÄLTNISSE .....</b>	<b>20</b>
7.1 KONSTRUKTION NACH HARTMANN .....	20
7.2 UMKEHR DES HÖHENSATZES .....	20
7.3 GLEICHUNG VON EULER-SAVARY .....	21
7.4 WENDEKREIS UND RÜCKKEHRKREIS .....	22
7.5 WENDEPOL UND RÜCKKEHRPOL.....	22
7.6 SATZ VON BOBILLIER .....	23
<b>8. HÜLLKURVE UND HÜLLBAHN.....</b>	<b>25</b>
8.1 GERADE ALS HÜLLKURVE .....	26
8.2 EVOLVENTENVERZÄHNUNG.....	27
8.3 CYCLOGETRIEBE.....	28
<b>9. KINEMATISCHE UMKEHR .....</b>	<b>29</b>
<b>10. ERSATZGETRIEBE .....</b>	<b>30</b>
<b>11. FREIHEITSGRADE.....</b>	<b>31</b>
11.1 GELENKE .....	31
11.2 GRÜBLER-TSCHEBYSCHEW-FORMEL .....	32
11.3 SONDERABMESSUNGEN.....	33

11.4	DIFFERENTIALE – GETRIEBE MIT FREIHEITSGRAD GRÖßER 1.....	33
11.5	AUTOMATIKGETRIEBE .....	34
<b>12.</b>	<b>KURVENGETRIEBE.....</b>	<b>36</b>
12.1	BEWEGUNGSGESETZE .....	36
12.2	KONSTRUKTION DER KONTUR .....	38
<b>13.</b>	<b>GELENKGETRIEBE.....</b>	<b>39</b>
13.1	UMLAUFBEDINGUNG.....	39
13.2	BAUFORMEN .....	39
13.3	KOPPELKURVEN.....	39
13.4	SATZ VON ROBERTS .....	40
13.5	MASSENREDUKTION.....	41
<b>A1.</b>	<b>HERLEITUNG DER CORIOLISBESCHLEUNIGUNG .....</b>	<b>42</b>

## Symbolverzeichnis

### Griechische Formelzeichen

	Einheit	
$\phi$	Kurvenscheibenwinkel	[rad]
$\delta$	Durchmesser des Wendekreises	[m]
$\varepsilon$	Winkelbeschleunigungsvektor	[rad / s <sup>2</sup> ]
$\varepsilon$	Winkelbeschleunigung	[rad / s <sup>2</sup> ]
$\rho$	Krümmungsradius	[m]
$\varphi$	Winkel	[rad]
$\psi$	Winkel zwischen Polstrahl und Poltangente	[rad]
$\psi$	Schwingenwinkel	[rad]
$\omega$	Winkelgeschwindigkeit	[rad / s]
$\boldsymbol{\omega}$	Winkelgeschwindigkeitsvektor	[rad / s]

### Lateinische Formelzeichen

$\mathbf{b}$	Beschleunigungsvektor	[m / s <sup>2</sup> ]
$b_i$	Freiheitsgrad des Gelenks i	
$E_{kin}$	Kinetische Energie	[J]
$F$	Freiheitsgrad	[-]
$F$	Kraft	[N]
$g$	Zahl der Gelenke	[-]
$J$	Massenträgheitsmoment	[kg m <sup>2</sup> ]
$l$	Länge	[m]
$M$	Drehmoment	[Nm]
$m$	Masse	[kg]
$M_b$	Beschleunigungsmaßstab	[cm / m s <sup>-2</sup> ]
$M_v$	Geschwindigkeitsmaßstab	[cm / m s <sup>-1</sup> ]
$M_z$	Zeichenmaßstab	[cm / m]
$N$	Zahl der Glieder	[-]
$\mathbf{r}$	Differenzvektor	[m]
$R$	Abstand zwischen Momentanpol und Krümmungsmittelpunkt der bewegten Polbahn	[m]
$r$	Abstand	[m]
$R_0$	Abstand zwischen Momentanpol und Krümmungsmittelpunkt der ruhenden Polbahn	[m]
$\mathbf{u}$	Polwechselgeschwindigkeitsvektor	[m / s]
$u$	Polwechselgeschwindigkeit	[m]
$\mathbf{v}$	Geschwindigkeitsvektor	[m / s]
$v$	Geschwindigkeit	[m / s]
$z$	Zahl der Pole	[-]

### Bezeichner

$O'$	Ursprung des Geschwindigkeitsvektorplans
$a$	Ebene/Glied
$A$	Punkt
$A'$	Endpunkt der Geschwindigkeit im Vektorplan
$A''$	Endpunkt im Beschleunigungsvektorplan
$H$	Krümmungsmittelpunkt der Hüllkurve
$h_b$	Hüllkurve
$h_d$	Hüllbahn
$k_r$	Rückkehrkreis
$k_w$	Wendekreis
$M_s$	Mittelsenkrechte

$P$	Pol
$Q$	Beschleunigungspol
$Q''$	Ursprung des Beschleunigungsvektorplans
$R_{PO}$	Rückkehrpol
$S$	Schwerpunkt
$W_p$	Wendepol

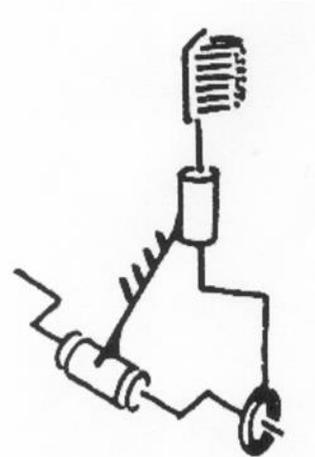
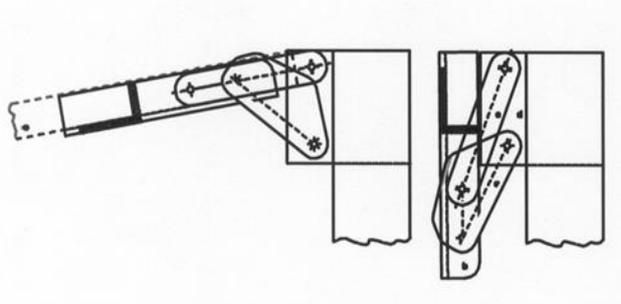
**Tiefgestellte Indizes**

$0$	Krümmungsmittelpunkt
$12$	Lagen 1 und 2
$ab$	Ebenen a und b
$A$	Punkt A
$AB$	Punkte A und B
$n$	Normalanteil
$t$	Tangentialanteil
$max$	Maximal-
$min$	Minimal-

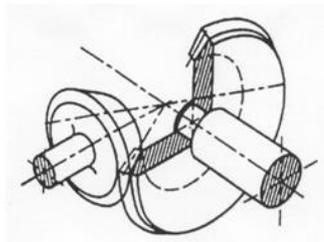
# 1. Systematik

Die Klassifizierung von Getrieben kann anhand verschiedenster Merkmale durchgeführt werden. So lassen sich Getriebe in gleichförmig und ungleichförmig übersetzende Bauformen unterteilen. Jeder dieser Typen kann entweder ein ebenes (alle Drehachsen parallel), sphärisches (alle Drehachsen schneiden sich in einem Punkt) oder ein allgemein räumliches (Drehachsen windschief) Getriebe sein.

Ebenes Getriebe (Hörsaaltisch)



Sphärisches Getriebe



Räumliches Getriebe (Zahnbürste)

Abb. 1.1: Getriebetypen klassifiziert nach Lage der Drehachsen.

Eine weitere Unterscheidung kann bezüglich des Gelenktyps erfolgen:

Merkm <sup>al</sup>	Beispiel
Form der Relativbewegung	Dreh-, Schub- oder Schraubgelenk
Bewegungsverhalten an der Berührstelle	Gleiten, Wälzen, Rollen und Kombin.
Anzahl der möglichen Einzelbewegungen	$F = 1$ oder $F = 2$ , usw.
Lage der Drehachsen am Gelenk	Ebenes oder räumliches Gelenk
Berührungsart der Gelenkelemente	Flächen-, Linien- oder Punktberührung
Art und Paarung der Gelenkelemente	Gelenk mit Kraft- oder Formpaarung

Die Art der Gelenke geben oftmals Getriebe ihre Namen wie Zahnradgetriebe, Zugmittelgetriebe, Kurvengetriebe, usw.

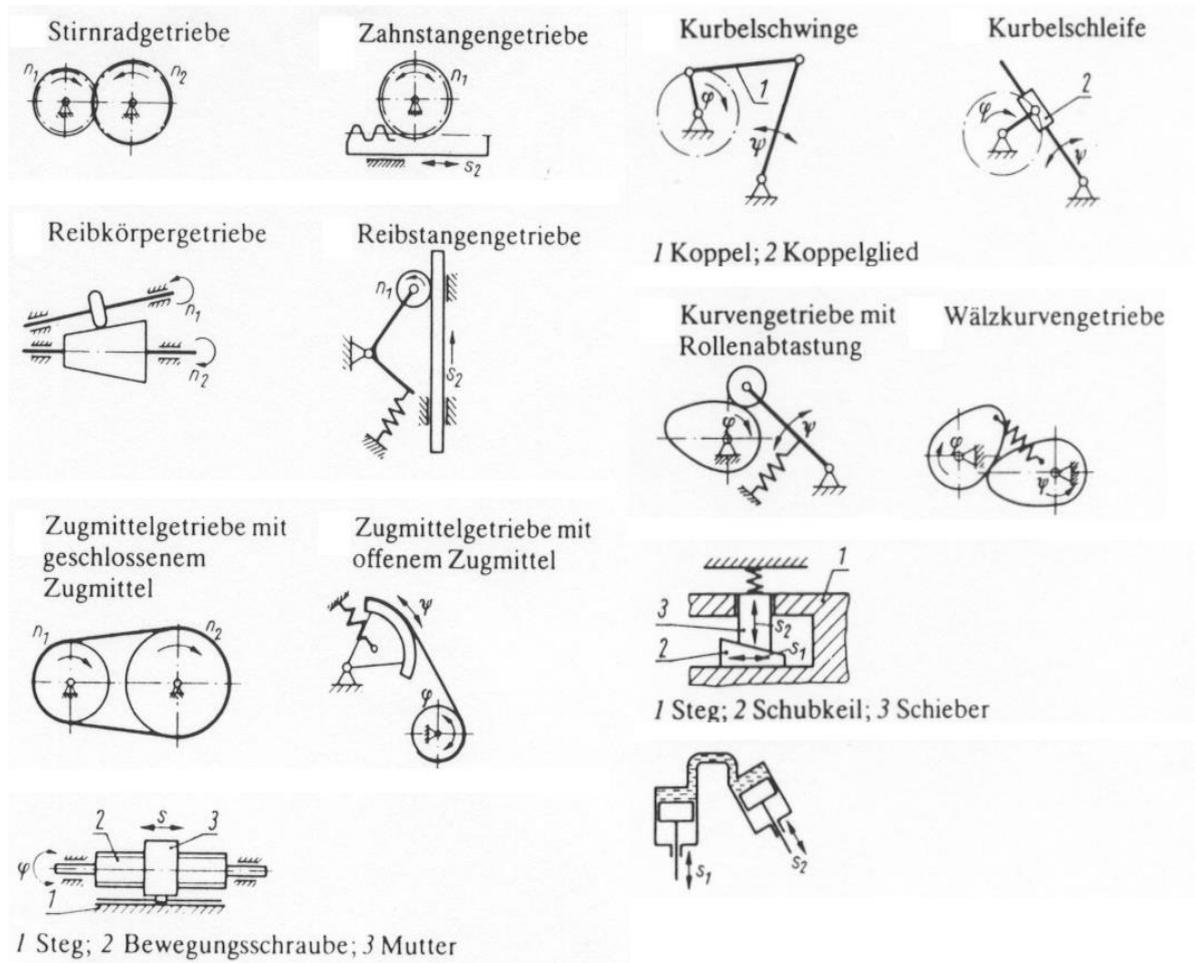


Abb. 1.2: Getriebetypen klassifiziert nach den Gelenktypen.

Die Getriebelehre beschäftigt sich mit der Systematik, Analyse, Synthese und dem dynamischen Verhalten von Getrieben. Getriebe werden zur Lösung von Bewegungsaufgaben eingesetzt.

## 2. Pole

### 2.1 Drehpole

Wird eine Ebene, repräsentiert durch zwei Punkte, von einer Lage in eine endlich benachbarte überführt, so gibt es einen Punkt in der ruhenden Ebene der als Mittelpunkt einer Drehung beide Lagen ineinander überführen kann. Dieser Punkt wird als Drehpol bezeichnet.

$$P_{12} = M_s A_1 A_2 \times M_s B_1 B_2$$

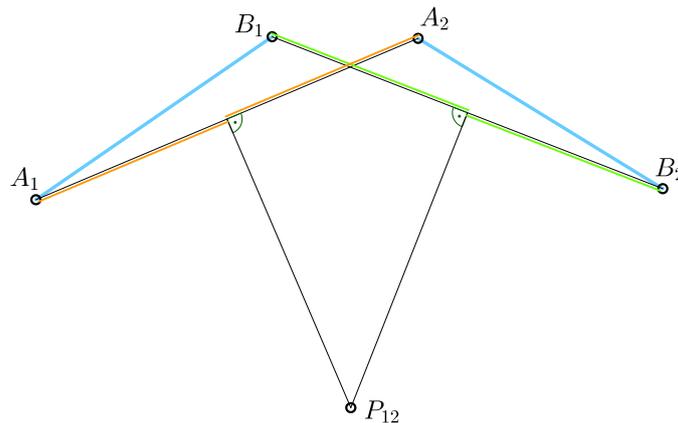


Abb. 2.1: Zwei Lagen einer Ebene und zugehöriger Drehpol.

### 2.2 Momentanpol

Rücken die beiden Lagen infinitesimal nah zusammen, wird aus dem Drehpol der Momentanpol. Er wird durch den Schnitt der beiden Mittelsenkrechten ( $M_s$ ) auf die jeweiligen Bahntangenten gefunden. Die Bahntangenten verlaufen dabei jeweils in Richtung der momentanen Geschwindigkeitsvektoren.

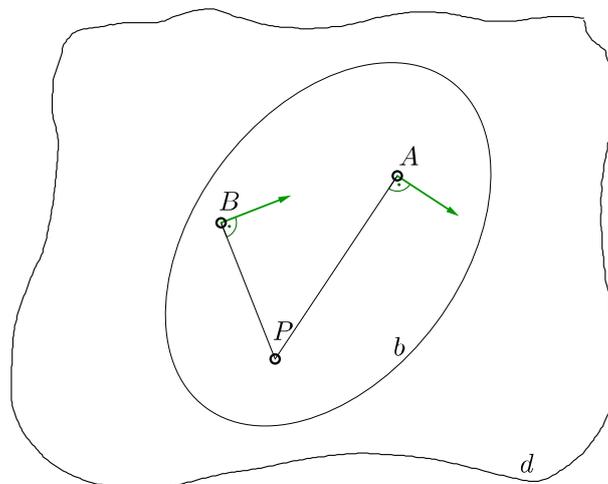


Abb. 2.2: Geschwindigkeitszustand einer Ebene und zugehöriger Momentanpol.

### 2.3 Polkonfigurationen

Bei einem  $n$ -gliedrigen Getriebe gibt es  $z = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$  Pole. Sie werden gemäß folgender Beziehung gefunden:

$$P_{bd} = P_{ab}P_{ad} \times P_{cb}P_{cd}$$

Zu der Kombination  $P_bP_d$  wird somit jeweils ein gemeinsamer Index angegeben. Diese Formel gilt sinngemäß für beliebige Gliedkombinationen im Getriebe. Betrachtet man die vier Glieder eines Viereckes als vier Ebenen, so hat jede Ebene mit jeder anderen Ebene einen Pol. Insgesamt sind es sechs Pole. Vier davon sind Gelenke oder konstante Pole, zwei weitere ergeben sich als Schnittpunkte der Geraden, auf denen die Pole mit verwandten Indizes liegen.

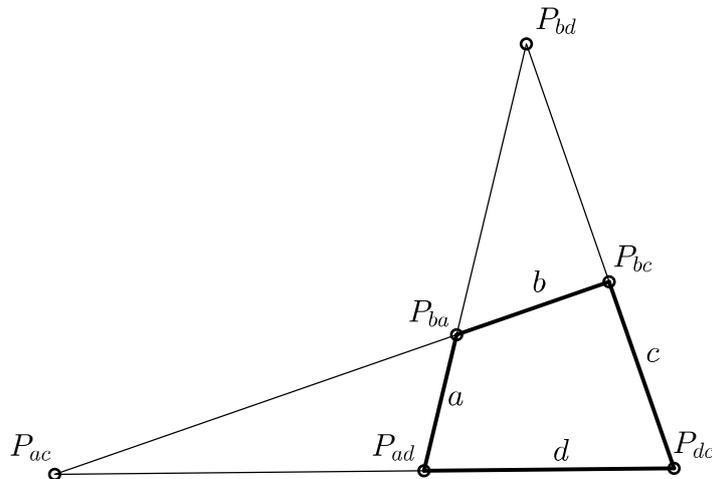


Abb. 2.3: Polkonfiguration am Viereck

### 2.4 Polkurven

Verfolgt man den Momentanpol  $P_{bd}$  während eines Umlaufs des Viereckes, so erhält man die ruhende Polkurve  $k_d$ . In der älteren Literatur heißt sie Rastpolbahn. Je nach dem Typ des Viereckes hat sie einen Doppelpunkt in einem der Gelenke im Gestell. Sie ist eine geschlossene Kurve, die aber bis ins Unendliche reichen kann. Wenn der Antrieb um Punkt  $A_0$  voll umlauffähig ist, besitzt die Polkurve einen Doppelpunkt im Punkt  $B_0$ . Markiert man den Momentanpol  $P_{bd}$  in der bewegten Ebene, so erhält man die bewegte Polkurve  $k_b$  oder Gangpolbahn. Wenn man das Viereck bewegt, so rollt die bewegte Polkurve  $k_b$  auf der ruhenden Polkurve  $k_d$  ab ohne zu gleiten. Jeweils am momentanen Berührungspunkt der beiden Kurven befindet sich der Momentanpol, an dem sich die bewegte Ebene um die ruhende dreht. Gefunden wird die bewegte Polbahn in der Lage  $i$ , indem etwa der Pol  $P_{bd,n}$  in die Lage  $i$  zurück übertragen wird. Er wird dann  $P_{bd,n,i}$  (Pol  $P_{bd,n}$  in Lage  $i$ ) genannt. Gefunden wird er, indem das  $\Delta A_n B_n P_{bd,n}$  auf  $A_i B_i$  gelegt wird.

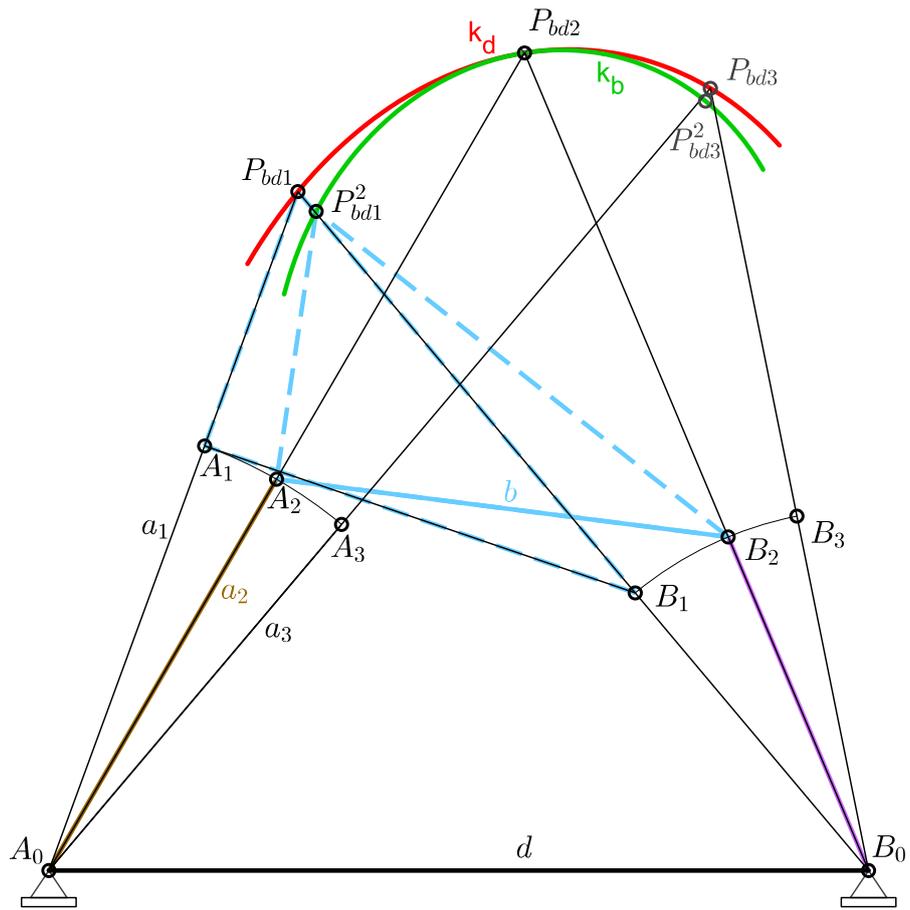


Abb. 2.4: Rast- und Gangpolbahn beim Viergelenk.

### 3. Einfache Synthese von Viergelenk-Mechanismen

Soll ein Getriebe gefunden werden, welches für die Anlenkpunkte der bewegten Ebene  $A$  und  $B$ , entweder zwei endlich oder infinitesimal benachbarte (Tangente) Lagen fordert, so existieren  $\infty^2$  Lösungen. Die gestellfesten Punkte liegen dabei entweder auf den Mittelsenkrechten  $M_S A_1 A_2$  und  $M_S B_1 B_2$  oder auf den Senkrechten zu den Tangenten. Werden die Anlenkpunkte beliebig auf der bewegten Ebene angenommen, so gibt es für die oben genannten Anforderungen  $\infty^6$  Lösungen.

Für ein Viergelenkgetriebe in zwei endlich benachbarten Lagen gilt

$$\sphericalangle A_1 P_{12} A_0 = \frac{\varphi_{12}}{2} = \sphericalangle A_0 P_{12} A_2$$

$$\sphericalangle B_1 P_{12} B_0 = \frac{\varphi_{12}}{2} = \sphericalangle B_0 P_{12} B_2$$

wobei  $\varphi_{12}$  für den Drehwinkel der Koppel steht.

Diese Beziehungen bedeuten, dass die im Gestell angelenkten Glieder (Kurbel und Schwinge) vom Pol aus in beiden Lagen unter halben Drehwinkel zu sehen sind.

Weiterhin gilt, dass vom Pol aus Gestell und Koppel in beiden Lagen unter gleichem Winkel erscheinen:

$$\sphericalangle A_1 P_{12} B_1 = \sphericalangle A_2 P_{12} B_2 = \sphericalangle A_0 P_{12} B_0$$

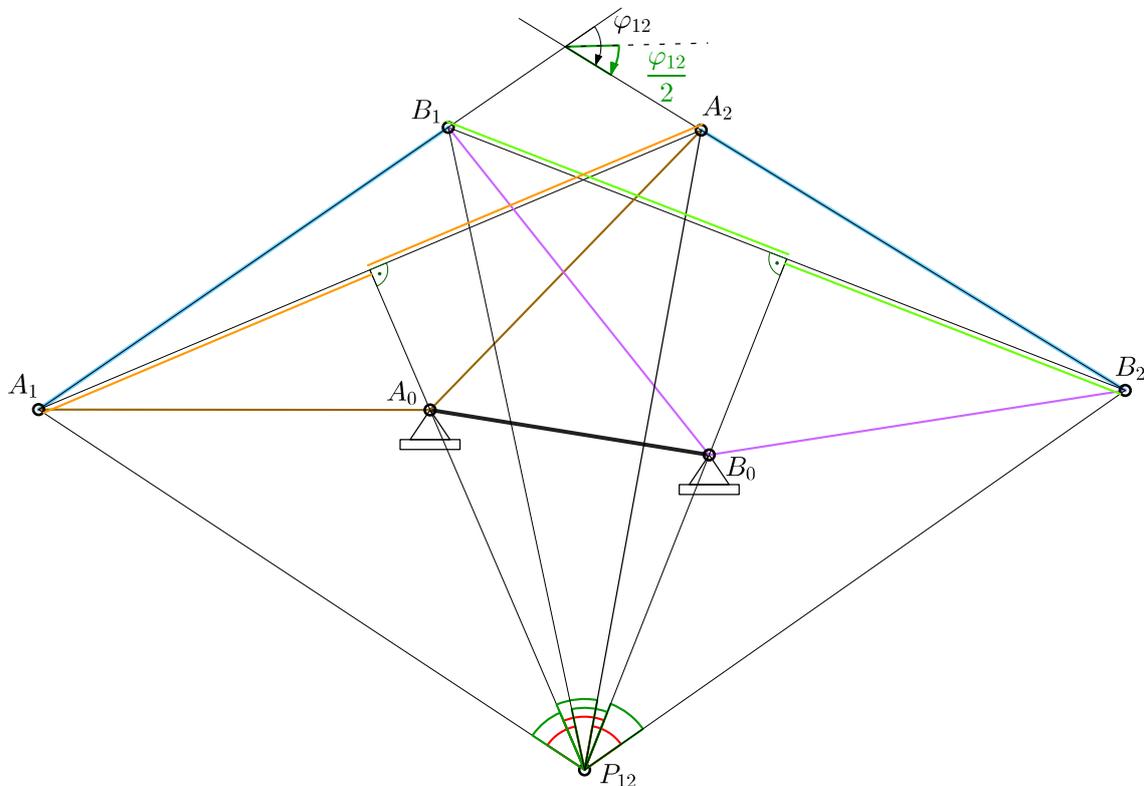


Abb. 3.1: Winkel vom Drehpol aus gesehen.

## 4. Geschwindigkeiten

Sind von einer, gegenüber der ruhenden Ebene  $d$ , bewegten Ebene  $b$  der Momentanpol  $P_{bd}$  und die Winkelgeschwindigkeit  $\omega_{bd}$  (von  $b$  gegenüber  $d$ ) bekannt, so ist der Geschwindigkeitszustand dieser Ebene vollständig beschrieben.

### 4.1 Momentandrehung

Da die Geschwindigkeitsvektoren tangential der Bahnkurve verlaufen, kann der Momentanpol durch Schnitt von Senkrechten auf zwei Geschwindigkeitsvektoren von beliebigen Punkten des betrachteten Gliedes gefunden werden.

Die Bahngeschwindigkeit eines Punktes  $A$  der Ebene  $b$  ist:

$$\mathbf{v}_A = \boldsymbol{\omega}_{bd} \times \mathbf{r}_{P_{bd}A}$$

### 4.2 Vektorplan

Da diese Beziehung für jeden Punkt dieser Ebene gilt, kann sie z.B. auch für den Punkt  $B$  aufgestellt werden. Subtrahiert man die Geschwindigkeiten von zwei Punkten eines Gliedes, so ergibt sich:

$$\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A = \boldsymbol{\omega}_{bd} \times (\mathbf{r}_{P_{bd}B} - \mathbf{r}_{P_{bd}A})$$

$$\mathbf{v}_{BA} = \boldsymbol{\omega}_{bd} \times \mathbf{r}_{AB}$$

Damit zeigt sich, dass sich die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_{BA}$  ebenfalls durch die Winkelgeschwindigkeit des gemeinsamen Gliedes ausdrücken lässt.

Weiterhin lässt sich für beliebige zwei Punkte eines Gliedes folgende Beziehung aufstellen:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{BA}$$

Die Geschwindigkeit des Punktes  $B$  ist also gleich der vektoriellen Summe der Geschwindigkeit von  $A$  und der Geschwindigkeit von  $B$  um  $A$ . Die Geschwindigkeit von  $B$  steht senkrecht auf der Strecke  $B_0B$ , die Geschwindigkeit von  $B$  um  $A$  steht senkrecht auf der Strecke  $AB$ . Damit ist ein Vektor nach Größe und Richtung vorgegeben. Von den beiden anderen ist die Richtung bekannt. Damit ist das Vektordreieck im Vektorplan bestimmt. Nachdem die Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}_{bd}$  in der bewegten Ebene überall gleich ist, kann man, wenn die Geschwindigkeit eines Punktes und der Momentanpol  $P_{bd}$  bekannt sind, die Geschwindigkeiten aller übrigen Punkte der bewegten Ebene über die Methode der gedrehten Geschwindigkeiten ermitteln. Man dreht den Vektorpfeil der Geschwindigkeit um  $90^\circ$  auf den Polstrahl, verbindet den Endpunkt am Polstrahl über eine Parallele zur Koppel mit dem Polstrahl des nächsten Punktes und dreht den Abschnitt am Polstrahl des neuen Punktes um  $90^\circ$  zurück. Verbindet man die Pfeilspitzen der Geschwindigkeiten mit dem Pol  $P_{bd}$ , so bilden sich die Winkelgeschwindigkeiten  $\boldsymbol{\omega}_{bd}$  in Form von gleichen Winkeln ab.

### 4.3 Die Sätze von Burmester und Mehmke

Überträgt man die Geschwindigkeitsvektoren der Punkte in einen Vektorplan, so werden die Endpunkte der Geschwindigkeitsvektoren mit gestrichelter Bezeichnung benannt. Die Pfeilspitze von  $v_A$  im Geschwindigkeitsplan wird zum Beispiel mit  $A'$  bezeichnet. Trägt man in der Lageskizze die Geschwindigkeitspfeile an die entsprechenden Punkte an, werden die Buchstaben an den Spitzen der Geschwindigkeitspfeile mit einem Überstrich (bspw.  $\overline{A}$  „A quer“) versehen. Betrachtet man drei Koppelpunkte, ergeben sich drei mögliche Dreiecke:

- 3 Punkte im Lageplan:  $\Delta ABC$
- 3 Vektorspitzen im Geschwindigkeitsplan:  $\Delta A'B'C'$
- 3 Vektorspitzen im Lageplan:  $\Delta \overline{A}\overline{B}\overline{C}$

Der Satz von Burmester und Mehmke, sagt nun Folgendes aus:

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \sim \Delta \overline{A}\overline{B}\overline{C}$$

Damit kann man, sobald zwei Geschwindigkeiten einer bewegten Ebene bekannt sind, die Geschwindigkeiten von weiteren Punkten einfach bestimmen.

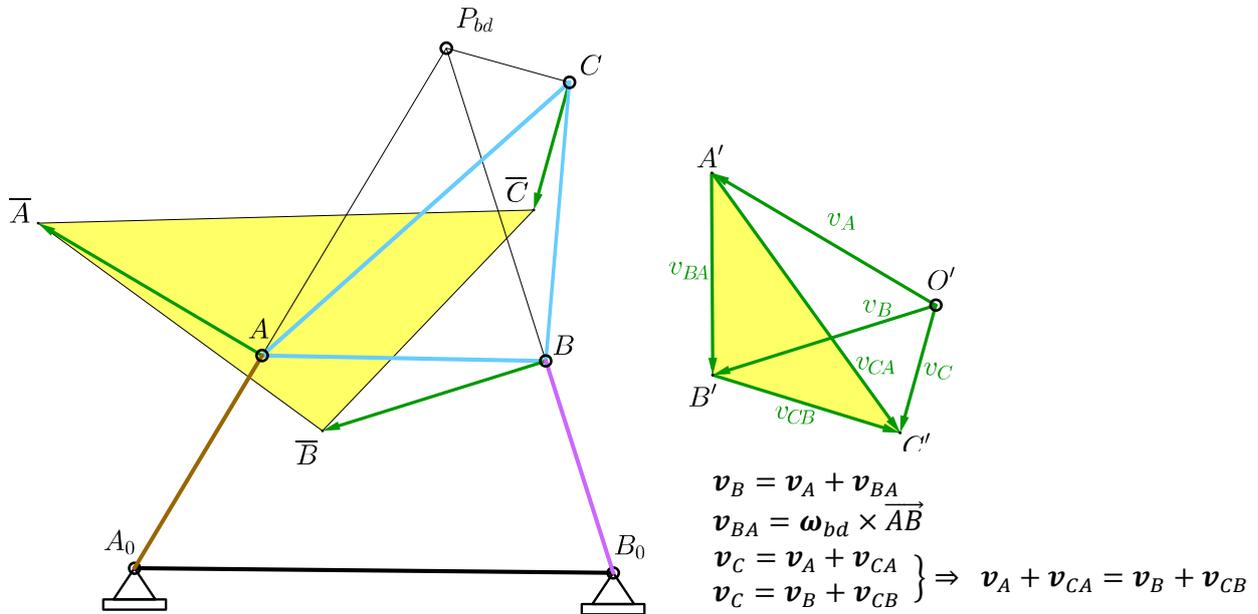


Abb. 4.1: Ähnliche Dreiecke in Lage- und Geschwindigkeitsplan.

Beweis:

$$\left. \begin{aligned} \overline{A'B'} &= v_{BA} = \omega_{bd} \times \overline{AB} \\ \overline{B'C'} &= v_{CB} = \omega_{bd} \times \overline{BC} \\ \overline{C'A'} &= v_{AC} = \omega_{bd} \times \overline{CA} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$$

$$\left. \begin{aligned} \overline{\overline{AB}} &= \overline{AB} + \overline{A'B'} \\ \overline{\overline{BC}} &= \overline{BC} + \overline{B'C'} \\ \overline{\overline{CA}} &= \overline{CA} + \overline{C'A'} \end{aligned} \right\} \Delta \overline{\overline{A}\overline{B}\overline{C}} \sim \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

#### 4.4 Winkelgeschwindigkeiten

Für die Winkelgeschwindigkeit zwischen zwei Gliedern gilt:

$$\omega_{ab} = -\omega_{ba}$$

Sind in einer kinematischen Kette die Glieder a, b und c hintereinander angeordnet, so gilt weiterhin:

$$\omega_{ca} = \omega_{cb} + \omega_{ba}$$

## 5. Beschleunigungen

### 5.1 Vektorgleichung

Um auf die Gleichungen für die Beschleunigungen zu gelangen, wird die Gleichung

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{BA}$$

nach der Zeit abgeleitet:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{v}_B = \frac{d}{dt} (\mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{BA}) = \mathbf{b}_B = \mathbf{b}_A + \mathbf{b}_{BA}$$

Wird der Ausdruck  $\mathbf{b}_{BA}$  genauer betrachtet, so ergibt sich gemäß der Produktregel:

$$\mathbf{b}_B = \mathbf{b}_A + \underbrace{\boldsymbol{\omega}_{bd}}_{\mathbf{v}_{BA}} \times \underbrace{\mathbf{r}_{AB}}_{\mathbf{v}_{BA}} + \underbrace{\dot{\boldsymbol{\omega}}_{bd}}_{\boldsymbol{\varepsilon}_{bd}} \times \mathbf{r}_{AB}$$

Die Beträge der einzelnen Komponenten von  $\mathbf{b}_{BA}$  berechnen sich zu:

$$|\mathbf{b}_{n_{BA}}| = |\boldsymbol{\omega}_{bd}^2| \cdot \overline{BA} = \frac{v_{BA}^2}{\overline{BA}}$$

$$|\mathbf{b}_{t_{BA}}| = |\boldsymbol{\varepsilon}_{bd}| \cdot \overline{BA}$$

Wird auch die Beschleunigung des Punktes A durch die Normal- und die Tangentialbeschleunigung ausgedrückt so erhält man für  $\mathbf{b}_B$ :

$$\underbrace{\mathbf{b}_{n_B}}_{\perp \mathbf{v}_B} + \underbrace{\mathbf{b}_{t_B}}_{\propto \mathbf{v}_B} = \underbrace{\mathbf{b}_{n_A}}_{\perp \mathbf{v}_A} + \underbrace{\mathbf{b}_{t_A}}_{\propto \mathbf{v}_A} + \underbrace{\mathbf{b}_{n_{BA}}}_{\perp \mathbf{v}_{BA}} + \underbrace{\mathbf{b}_{t_{BA}}}_{\propto \mathbf{v}_{BA}}$$

wobei sich die Beträge von  $\mathbf{b}_{n_A}$  und  $\mathbf{b}_{t_A}$  wiederum zu

$$|\mathbf{b}_{n_A}| = |\boldsymbol{\omega}_{ad}^2| \cdot \overline{A_0A} = \frac{v_A^2}{\overline{A_0A}}$$

$$|\mathbf{b}_{t_A}| = |\boldsymbol{\varepsilon}_{ad}| \cdot \overline{A_0A}$$

ergeben. Diese Gleichungen gelten, wie auch bei den Geschwindigkeiten, für zwei beliebige Punkte eines Gliedes.

## 5.2 Maßstäbe

Der Zeichnungsmaßstab  $M_z$  ist das Verhältnis von Längen in der Zeichnung zu wahren Längen:  $M_z = \frac{r_{Az}}{r_A} \left[ \frac{cm}{m} \right]$ . Wird der Geschwindigkeitsmaßstab  $M_v = \frac{v_{Az}}{v_A} \left[ \frac{cm}{ms^{-1}} \right]$  gemäß  $M_v = \frac{M_z}{\omega_{xd}}$  gewählt, so sind die Geschwindigkeitspfeile aller Punkte der Ebene  $x$  in der Länge gleich ihrem Abstand vom Drehpol  $P_{xd}$ .

Der Beschleunigungsmaßstab  $M_b = \frac{b_{Az}}{b_A} \left[ \frac{cm}{ms^{-2}} \right]$  wird zur Vereinfachung der Konstruktion der Normalbeschleunigung über den Höhensatz meist mit  $M_b = \frac{M_v^2}{M_z}$  angegeben.

Es kann dann die Beziehung  $h^2 = p \cdot q$  im rechtwinkligen Dreieck zur Konstruktion von  $\mathbf{b}_{nA}$  gemäß  $v_A^2 = \overline{A_0A} \cdot \mathbf{b}_{nA}$  benutzt werden.

## 5.3 Vektorpläne

Durch Verwendung der Vektorgleichungen lassen sich im Vektorplan Beschleunigungen, etwa  $\mathbf{b}_B$ , bestimmen. Die Beschleunigung des Antriebs wird durch die Tangentialbeschleunigung  $\mathbf{b}_{tA}$  beschrieben. Sie ist parallel zur Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_A$  des Punktes  $A$ . Wird der Punkt  $A$  weiter beschleunigt, so weist sie in die gleiche Richtung. Wird er verzögert, weist sie in die entgegengesetzte Richtung. Die Normalbeschleunigungen können bei bekannten Krümmungsmittelpunkten und geeigneter Wahl des Beschleunigungsmaßstabs über den Höhensatz konstruiert werden. Die Richtungen der Tangentialbeschleunigungen sind jeweils senkrecht auf den zugehörigen Normalbeschleunigungen. Damit lässt sich der Vektorzug schließen und die gesuchte Beschleunigung bestimmen.

## 5.4 Die Sätze von Burmester und Mehmke

In Analogie zu den Geschwindigkeiten gelten auch für die Beschleunigungen die Sätze von Burmester und Mehmke. So ist das Dreieck  $\Delta ABC$  in der Getriebeskizze dem  $\Delta A''B''C''$  im Beschleunigungsplan ebenso gleichsinnig ähnlich, wie dem Dreieck  $\Delta ABC$ , welches durch die Spitzen der Beschleunigungspfeile in der Getriebeskizze gebildet wird.

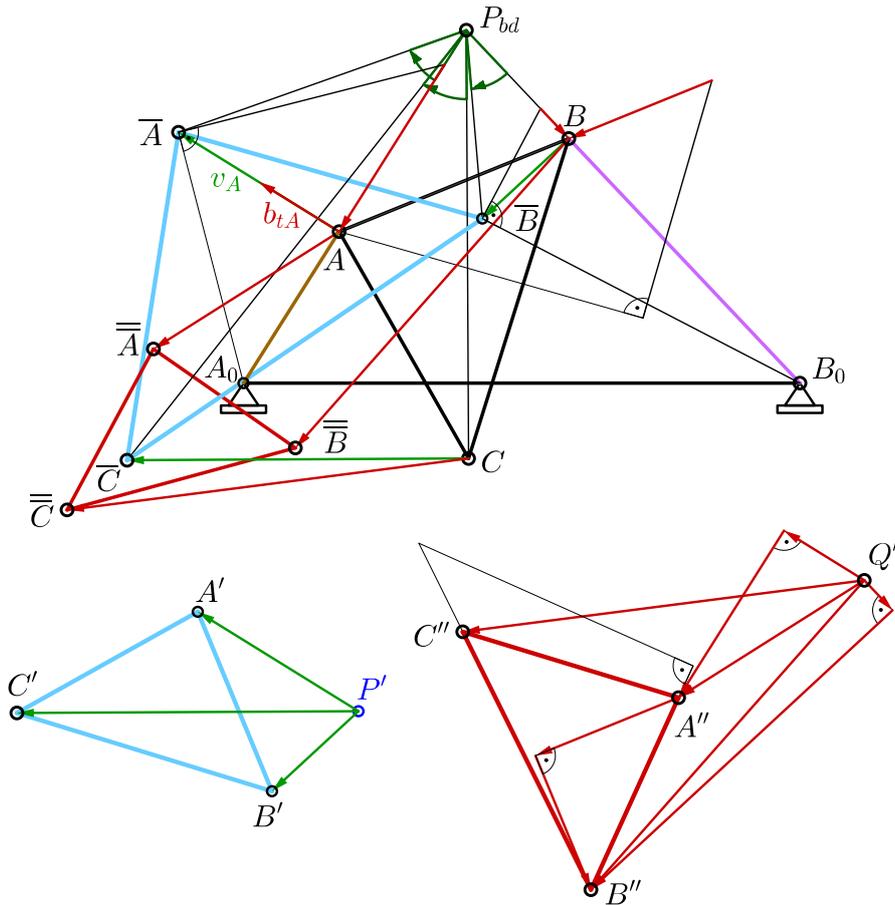


Abb. 5.1: Satz von Burmester und Mehmke.

### 5.5 Polbeschleunigung und Beschleunigungspol

Die Beschleunigung des Punktes der bewegten Ebene, etwa der Koppelebene  $b$ , der momentan Pol ist, kann über den Satz von Burmester gemäß  $\Delta P_{bd}AB \sim \Delta P''_{bd}A''B''$  leicht gefunden werden. Der Punkt  $Q$  einer Ebene der momentan keine Beschleunigung besitzt (keine Aussage über die Geschwindigkeit!) kann ebenfalls über die Beziehung  $\Delta Q''A''B'' \sim \Delta QAB$  über ähnliche Dreiecke konstruiert werden.

### 5.6 Winkelbeschleunigungen

Wie bei den Winkelgeschwindigkeiten gilt auch für die Winkelbeschleunigungen zwischen zwei Gliedern:

$$\varepsilon_{ab} = -\varepsilon_{ba}$$

Sind in einer kinematischen Kette die Glieder  $a$ ,  $b$  und  $c$  hintereinander angeordnet, so gilt weiterhin:

$$\varepsilon_{ca} = \varepsilon_{cb} + \varepsilon_{ba}$$

## 6. Relativbewegungen

### 6.1 Relativgeschwindigkeit

Ist eine Ebene  $c$  nicht über ein Drehgelenk mit einer Ebene  $b$  verbunden, sondern kann sie sich ihr gegenüber in einer Führung bewegen, so gilt:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_{(B)} + \mathbf{v}_r$$

Dabei ist  $B$  der Punkt der Ebene  $c$ , welcher in der Führung gleitet und  $(B)$  der Punkt der Führung auf  $b$ , welcher momentan vom Punkt  $B$  berührt wird.

### 6.2 Polwechselgeschwindigkeit

Wird die Konstruktion des Momentanpols getriebetechnisch nachvollzogen, indem ein als Zapfen ausgebildetes Glied  $e$  im Kreuzungspunkt zweier Gabeln, die immer in Verlängerung von  $A_0A$  (Glied  $a$ ) und  $B_0B$  (Glied  $c$ ) bewegt werden, geführt wird, so ergibt sich für die Geschwindigkeit eines Punktes  $E$  auf  $e$  und damit für die Geschwindigkeit des Momentanpols in der ruhenden Ebene:

$$\mathbf{v}_E = \mathbf{v}_{(E)_a} + \mathbf{v}_{r_a}$$

$$\mathbf{v}_E = \mathbf{v}_{(E)_c} + \mathbf{v}_{r_c}$$

Durch Gleichsetzen der beiden Beziehungen, welche jeweils die Relativgeschwindigkeit von  $E$  gegenüber einem der im Gestell angelenkten Glieder entspricht, lässt sich die Polwechselgeschwindigkeit bestimmen. Die Geschwindigkeiten  $\mathbf{v}_{(E)_a}$  und  $\mathbf{v}_{(E)_c}$  lassen sich als Geschwindigkeiten der Punkte von  $a$  und  $c$ , die momentan im Kreuzungspunkt der Gabeln liegen, über die zugehörigen Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_{ad}$  und  $\omega_{cd}$  leicht konstruieren. Außerdem sind die Richtungen von  $\mathbf{v}_{r_a}$  und  $\mathbf{v}_{r_c}$ , welche entlang den Gabeln verlaufen, bekannt.

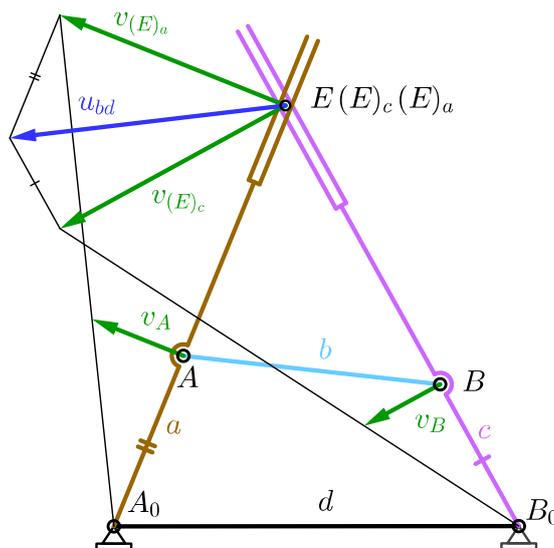


Abb. 6.1: Konstruktion der Polwechselgeschwindigkeit.

### 6.3 Polbeschleunigung

Wird der Punkt der bewegten Ebene, der zum Zeitpunkt  $t_1$  Momentanpol war, und demzufolge die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_1 = 0$  hatte, zum Zeitpunkt  $t_2$  betrachtet, so ist seine Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_{bd} \cdot dt \times \boldsymbol{\omega}_{bd}$ . Die Polbeschleunigung ergibt sich so zu

$$\mathbf{b}_{P_{bd}} = \mathbf{u}_{bd} \times \boldsymbol{\omega}_{bd}.$$

Sie steht also senkrecht zur Poltangente.

### 6.4 Coriolisbeschleunigung

Wird die Beschleunigung eines Punktes, der seinerseits gegenüber einer bewegten Ebene seine Lage ändert, betrachtet, so kann dies an einem Ersatzgetriebe für ein Viergelenk wie folgt beschrieben werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{n_B} + \mathbf{b}_{t_B} &= \mathbf{b}_{n_A} + \mathbf{b}_{t_A} + \mathbf{b}_{n_{BA}} + \mathbf{b}_{t_{BA}} = \\ &= \boldsymbol{\omega}_{ad} \times (\boldsymbol{\omega}_{ad} \times \mathbf{r}_{A_0A}) + \boldsymbol{\varepsilon}_{ad} \times \mathbf{r}_{A_0A} + \boldsymbol{\omega}_{bd} \times (\boldsymbol{\omega}_{bd} \times \mathbf{r}_{AB}) + \boldsymbol{\varepsilon}_{bd} \times \mathbf{r}_{AB}. \end{aligned}$$

Mit  $\boldsymbol{\omega}_{bd} = \boldsymbol{\omega}_{ba} + \boldsymbol{\omega}_{ad}$  und nach Ausmultiplizieren (für Details siehe Anhang A1) folgt:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_B &= -\boldsymbol{\omega}_{ad}^2 (\mathbf{r}_{A_0A} + \mathbf{r}_{AB}) + \boldsymbol{\varepsilon}_{ad} \times (\mathbf{r}_{A_0A} + \mathbf{r}_{AB}) + 2 \cdot \boldsymbol{\omega}_{ad} \times (\boldsymbol{\omega}_{ba} \times \mathbf{r}_{AB}) - \boldsymbol{\omega}_{ba}^2 \cdot \mathbf{r}_{AB} + \boldsymbol{\varepsilon}_{ba} \times \mathbf{r}_{AB} \\ &= \underbrace{-\boldsymbol{\omega}_{ad}^2 (\mathbf{r}_{A_0B})}_{\mathbf{b}_{n(B)}} + \underbrace{\boldsymbol{\varepsilon}_{ad} \times \mathbf{r}_{A_0B}}_{\mathbf{b}_{t(B)}} + \underbrace{2 \cdot \boldsymbol{\omega}_{ad} \times \mathbf{v}_r}_{\mathbf{b}_{cor}} - \underbrace{\boldsymbol{\omega}_{ba}^2 \cdot \mathbf{r}_{AB}}_{\mathbf{b}_{nr}} + \underbrace{\boldsymbol{\varepsilon}_{ba} \times \mathbf{r}_{AB}}_{\mathbf{b}_{tr}} \end{aligned}$$

bzw.

$$\mathbf{b}_B = \mathbf{b}_{(B)} + \mathbf{b}_{cor} + \mathbf{b}_r = \mathbf{b}_{n(B)} + \mathbf{b}_{t(B)} + \mathbf{b}_{cor} + \mathbf{b}_{nr} + \mathbf{b}_{tr},$$

mit

$$\mathbf{b}_{cor} = 2 \cdot \boldsymbol{\omega}_{ad} \times \mathbf{v}_r.$$

Es kommt somit zum Anteil der Führungsbeschleunigung und der Beschleunigung der Relativbewegung selbst ein weiterer Anteil hinzu, welcher Coriolisbeschleunigung genannt wird. Sie ist abhängig von der Winkelgeschwindigkeit des Führungssystems und der Relativgeschwindigkeit gegenüber diesem, und steht auf diesen beiden Vektoren senkrecht.

Die Coriolisbeschleunigung besteht ihrerseits aus zwei Anteilen. Der eine entsteht, indem die Relativbewegung in Bereiche des Führungssystems gelangt, in dem andere Umfangsgeschwindigkeiten herrschen, der betrachtete Punkt demzufolge beschleunigt werden muss. Andererseits ändert sich die Richtung der Relativbewegung im Absolutsystem durch die Drehung des Führungssystems, was ebenfalls eine Beschleunigung darstellt.



### 7.3 Gleichung von Euler-Savary

Die Gleichung von Euler-Savary stellt einen Zusammenhang zwischen Krümmungen von Bahnkurven beliebiger Punkte der bewegten Ebene mit ihrer Winkelgeschwindigkeit und der Polwechselgeschwindigkeit her. Es sei:

$r_A$  Abstand zwischen Momentanpol und Punkt  $A$

$r_{A,0}$  Abstand zwischen Momentanpol und Krümmungsmittelpunkt  $A_0$

$\rho_A$   $r_{A,0} - r_A$

$\psi_A$  Winkel zwischen Polstrahl  $A$  und Poltangente  $T$

$R$  Abstand zwischen Momentanpol und Krümmungsmittelpunkt der bewegten Polbahn

$R_0$  Abstand zwischen Momentanpol und Krümmungsmittelpunkt der ruhenden Polbahn

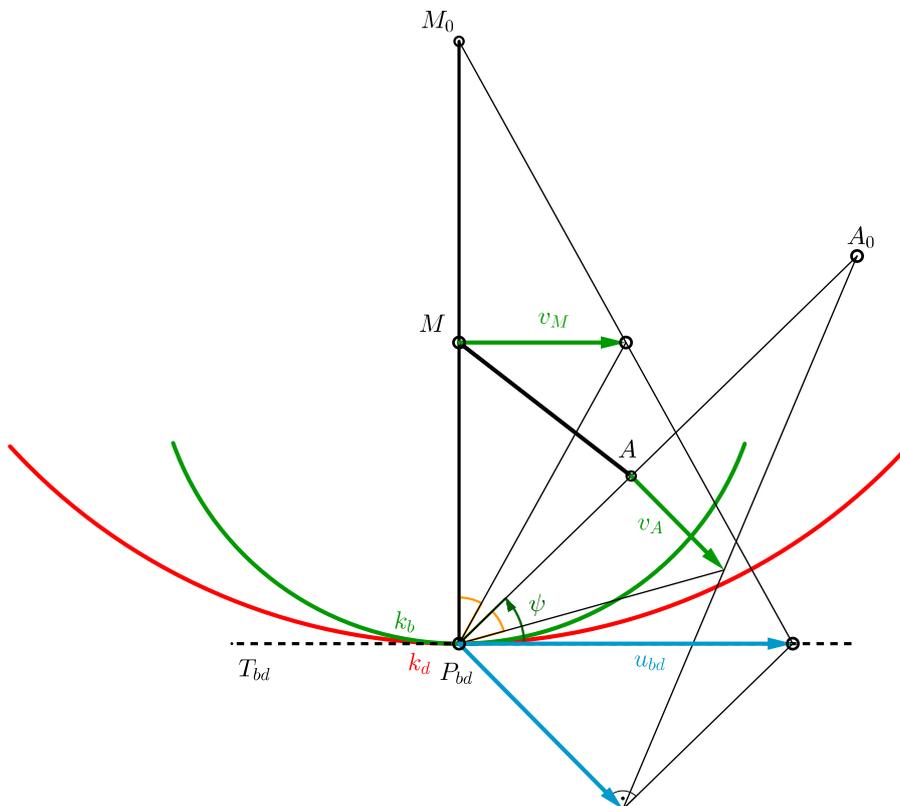


Abb. 7.2: Krümmungsverhältnisse einer bewegten Ebene.

$$\frac{u_A}{v_A} = \frac{u_{bd} \cdot \sin \psi_A}{\omega_{bd} \cdot r_A} = \frac{r_{A_0}}{r_{A_0} - r_A} \Rightarrow \frac{\omega_{bd}}{u_{bd}} = \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_{A_0}} \right) \cdot \sin \psi_A = \frac{1}{\delta}$$

Die Abstände vom Pol aus müssen vorzeichenbehaftet eingesetzt werden. Dabei kann jeder der Halbebenen, welche durch die Poltangente gebildet werden, ein beliebiges Vorzeichen zugeordnet werden.

Speziell für die Polbahnen gilt:  $\frac{\omega_{bd}}{u_{bd}} = \frac{1}{\delta} = \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right)$

## 7.4 Wendekreis und Rückkehrkreis

Lässt man die Entfernung des Krümmungsmittelpunkts gegen unendlich gehen, so ergibt sich die Gleichung des Wendekreises. Auf diesem liegen alle Koppelpunkte, deren Krümmungsmittelpunkte sich im Unendlichen befinden.

Für  $r_0 \rightarrow \infty$  gilt:

$$\frac{1}{\delta} = \frac{1}{r_A} \cdot \sin \psi_A$$

bzw.

$$r_A = \delta \cdot \sin \psi_A.$$

Mit  $r_A = \sqrt{x^2 + y^2}$  und  $\sin \psi_A = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  folgt:

$$x^2 + \left(y - \frac{\delta}{2}\right)^2 = \left(\frac{\delta}{2}\right)^2$$

Für  $r_A \rightarrow \infty$  folgt die Gleichung des Kreises, auf dem alle Krümmungsmittelpunkte liegen, deren Koppelpunkte im Unendlichen sind. Dieser wird Rückkehrkreis genannt. Er besitzt den gleichen Durchmesser wie der Wendekreis, liegt aber spiegelbildlich zur Poltangente.

Mit der Gleichung von Euler-Savary kann man den Lagenort aller Punkte bestimmen, die die gleiche Krümmung haben. Man nennt sie Rho-Kurven:

$$r_{1,2} = \frac{\rho}{2} \cdot \left( -1 \pm \sqrt{1 + \frac{4 \cdot \delta}{\rho} \cdot \sin \psi} \right)$$

Die Kurven, auf denen die zugehörigen Krümmungsmittelpunkte der Punkte mit gleicher Krümmung liegen, nennt man Rho-Null-Kurven.

$$r_{0,2} = \frac{\rho}{2} \cdot \left( 1 \pm \sqrt{1 + \frac{4 \cdot \delta}{\rho} \cdot \sin \psi} \right)$$

## 7.5 Wendepol und Rückkehrpol

Der Wendepol  $W_P$  ist Punkt des Wendekreises und liegt weiterhin auf der Polnormalen. Wendepol und Momentanpol bilden so den Durchmesser des Wendekreises. Als Punkt der bewegten Ebene unterliegt er der Winkelgeschwindigkeit  $\omega_{bd}$  und aus der Konstruktion nach Hartmann folgt, dass seine Geschwindigkeit gleich der Polwechselgeschwindigkeit ist. Das Pendant zum Wendepol ist auf dem Rückkehrkreis der Rückkehrpol  $R_{P_0}$ .

## 7.6 Satz von Bobillier

Der Satz von Bobillier stellt, ohne dass Kenntnisse von Geschwindigkeiten notwendig sind, Beziehungen zwischen Punkten und Krümmungsmittelpunkten der bewegten Ebene und deren Poltangente auf.

Dabei wird als Deviationspunkt der Schnittpunkt bezeichnet, der sich ergibt, wenn die Verbindung zweier Punkte der bewegten Ebene mit der Verbindung der zugeordneten Krümmungsmittelpunkte zum Schnitt gebracht wird. Weiterhin wird als Kollineationsachse die Gerade verstanden, auf welcher der entsprechende Deviationspunkt und der Momentanpol liegen.

Der Satz von Bobillier lautet: Der Winkel zwischen einem Polstrahl und der Kollineationsachse ist gleich groß wie, aber entgegengerichtet zu dem Winkel zwischen einem zweiten Polstrahl und der Poltangente.

Dies kann mittels des Sinussatzes in zwei Dreiecken bewiesen werden.

$\Delta P_{bd}D_{AB}A$ :

$$\frac{\overline{P_{bd}D_{AB}}}{r_A} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta} = \cos \alpha + \cot \beta \cdot \sin \alpha$$

$\Delta P_{bd}D_{AB}A_0$ :

$$\frac{\overline{P_{bd}D_{AB}}}{r_{A_0}} = \frac{\sin(\alpha + \gamma)}{\sin \gamma} = \cos \alpha + \cot \gamma \cdot \sin \alpha$$

Als Differenz ergibt sich:

$$\overline{P_{bd}D_{AB}} \cdot \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_{A_0}} \right) = \cot \beta \cdot \sin \alpha - \cot \gamma \cdot \sin \alpha$$

Mit  $\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_{A_0}} = \frac{1}{\delta \cdot \sin \psi_A}$  und dem gleichen Vorgehen mit den Punkten B und B<sub>0</sub> folgt:

$$\overline{P_{bd}D_{AB}} = \delta \cdot \sin \psi_A \cdot \sin \alpha \cdot (\cot \beta - \cot \gamma)$$

$$\overline{P_{bd}D_{AB}} = \delta \cdot \sin \psi_B \cdot \sin(\alpha + \psi_A - \psi_B) \cdot (\cot \beta - \cot \gamma)$$

Werden die rechten Seiten gleichgesetzt, sieht man, dass die entstehende Gleichung nur für  $\alpha = \psi_B$  erfüllt wird.

$$P_{bd} = A_0A \times B_0B$$

$$D_{AB} = A_0B_0 \times AB$$

$$\sphericalangle D_{AB}P_{bd}A = \sphericalangle BP_{bd}T_{bd}$$

$$\sphericalangle D_{AB}P_{bd}A = \sphericalangle D_{BC}P_{bd}C_0$$

$$C = D_{BC}B \times C_0P_{bd}$$

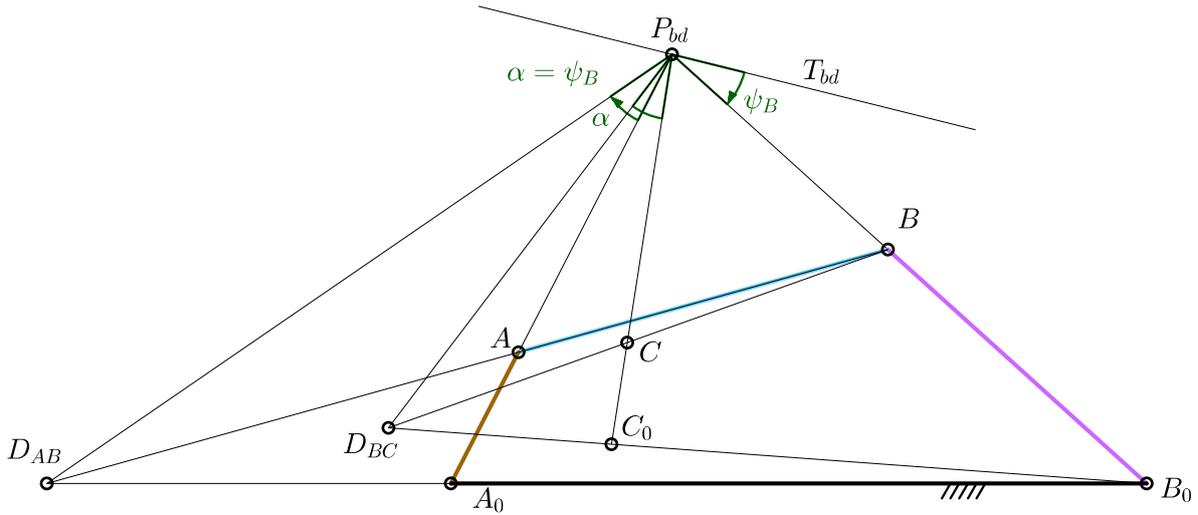


Abb. 7.3: Satz von Bobillier.

Auch wenn die im Gestell angelenkten Glieder sich in einer Stellung parallel zueinander befinden, kann der Satz von Bobillier angewendet werden. Dabei muss nur beachtet werden, dass Winkel zu Strecken werden, welche, wie die Winkel auch, in der entsprechenden Richtung angetragen werden müssen.

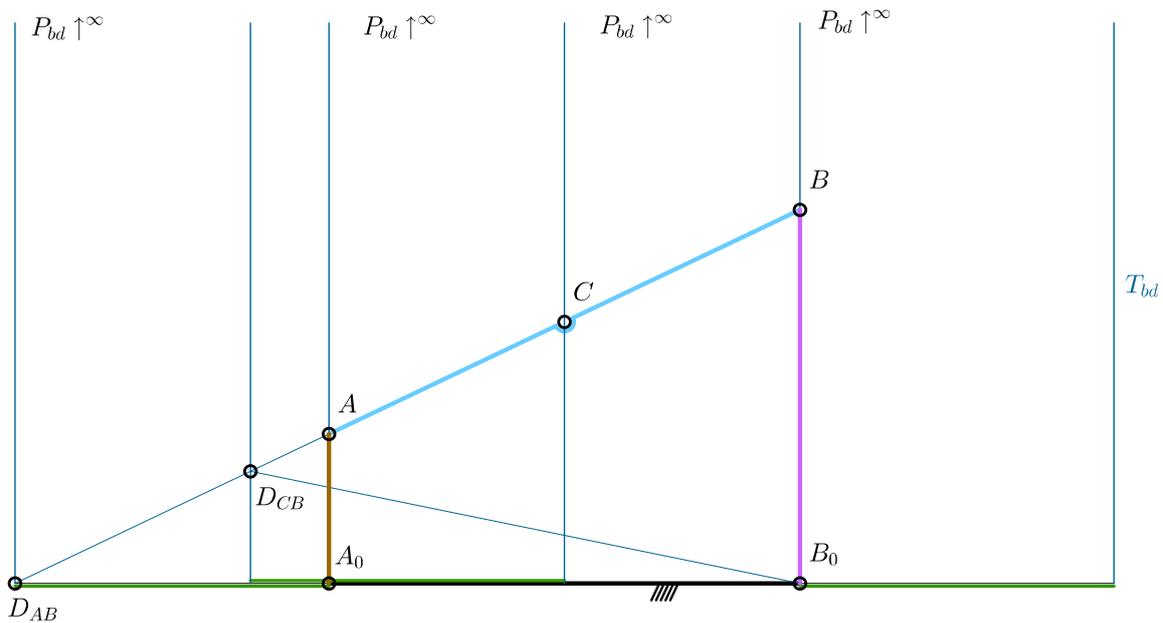


Abb. 7.4: Satz von Bobillier bei paralleler Kurbel und Schwinge.

## 8. Hüllkurve und Hüllbahn

Wird eine Kurve mit der bewegten Ebene fest verbunden und mitbewegt, so wird in der ruhenden Ebene eine Bahn dieser Kurve sichtbar, wenn sie etwa als Fräser ausgebildet in die ruhende Ebene eingreift. Die erzeugende Kurve heißt Hüllkurve  $h_b$ . Die erzeugenden Punkte auf ihr haben momentan einen Polstrahl, der gerade senkrecht auf die Tangente an die Hüllkurve in diesem Punkt ist. Für die Krümmung der entstehenden Bahn ist der Krümmungsmittelpunkt  $H$  der Hüllkurve entscheidend. Sein Krümmungsmittelpunkt  $H_0$  ist gleichzeitig Krümmungsmittelpunkt der Hüllbahn  $h_d$ .

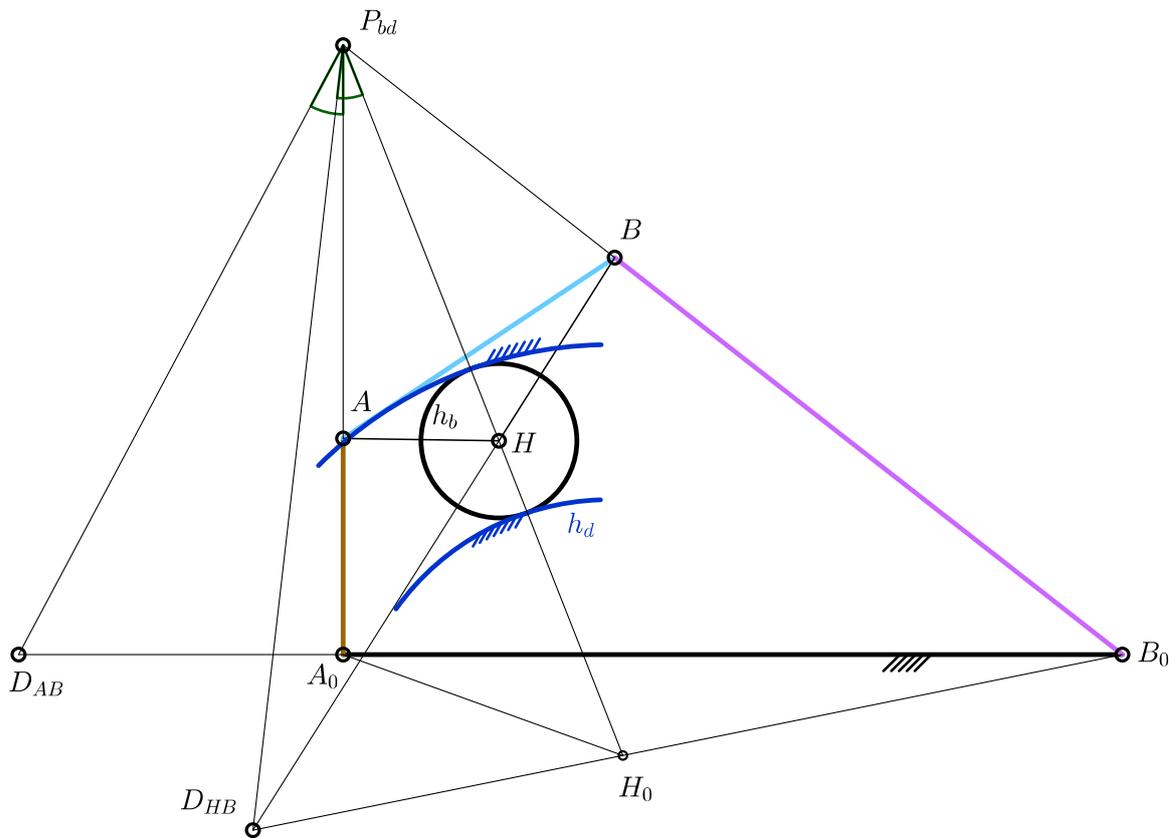


Abb. 8.1: Hüllkurve (erzeugend)  $h_b$  und Hüllbahn  $h_d$ .

### 8.1 Gerade als Hüllkurve

Wird eine Gerade als Hüllkurve betrachtet, so liegt nur ein erzeugender Punkt in der Zeichenebene (Gerade als Kreis mit dem Radius unendlich). Er ist das Lot auf die Gerade durch den Momentanpol. Da der Krümmungsmittelpunkt  $H$  der erzeugenden Geraden im Unendlichen liegt, liegt der Krümmungsmittelpunkt  $H_0$  der entstehenden Hüllbahn auf dem Rückkehrkreis der bewegten Ebene. Es ist der Punkt, in dem das Lot durch den erzeugenden Punkt den Rückkehrkreis schneidet.

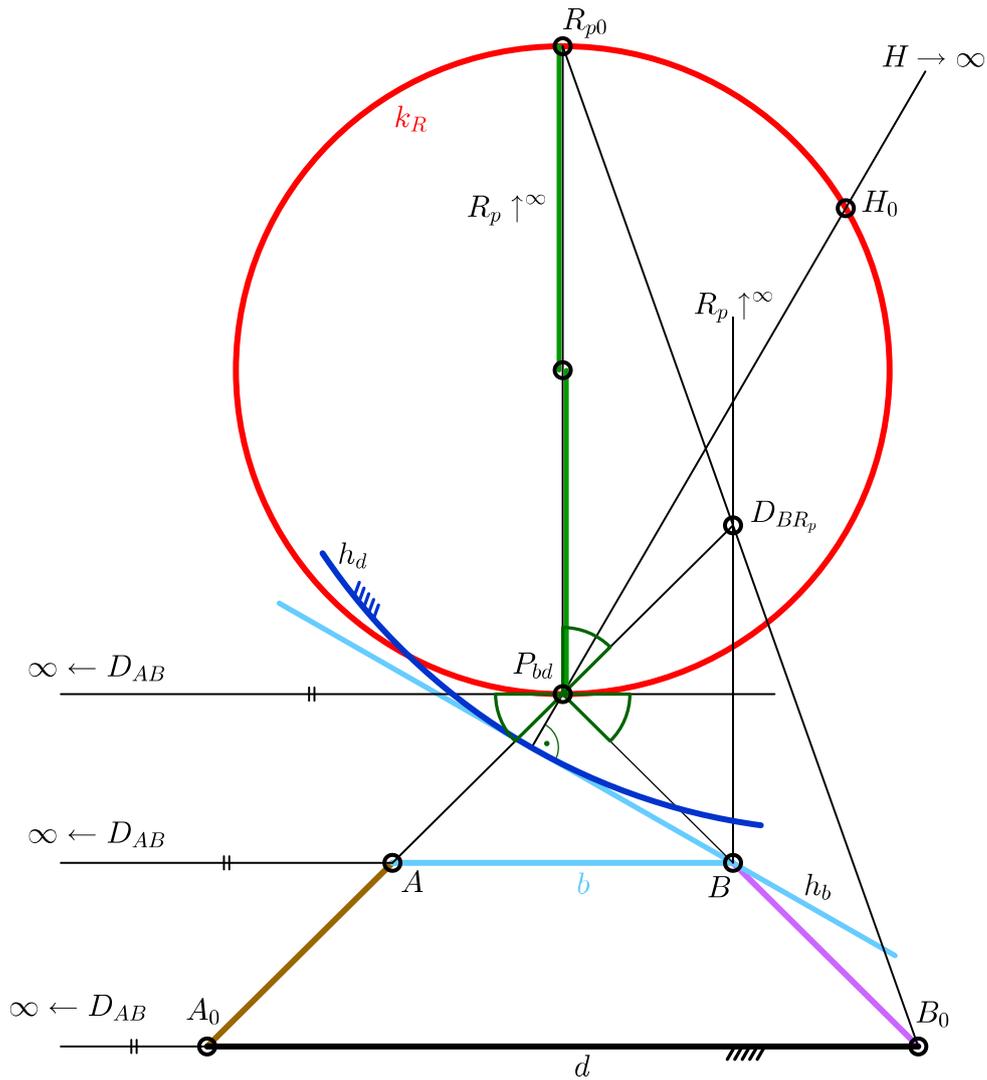


Abb. 8.2: Gerade als Hüllbahn.





## 9. Kinematische Umkehr

Wird die ruhende Ebene als Bezugspunkt mit der bewegten vertauscht, so gehen ineinander über:

$C$	$\Leftrightarrow$	$C_0$	Punkt	$\Leftrightarrow$	Krümmungsmittelpunkt
$k_b$	$\Leftrightarrow$	$k_d$	Bewegte Polbahn	$\Leftrightarrow$	ruhende Polbahn
$W_p$	$\Leftrightarrow$	$R_{p,0}$	Wendepol	$\Leftrightarrow$	Rückkehrpol
$k_w$	$\Leftrightarrow$	$k_r$	Wendekreis	$\Leftrightarrow$	Rückkehrkreis
$h_b$	$\Leftrightarrow$	$h_d$	Hüllkurve	$\Leftrightarrow$	Hüllbahn
$H$	$\Leftrightarrow$	$H_0$	Krümmungsmittelpunkt von $h_b$	$\Leftrightarrow$	Krümmungsmittelpunkt von $h_d$

## 10. Ersatzgetriebe

Für drei unendlich benachbarte Lagen lassen sich sowohl für kompliziertere Bauformen von Gelenkgetrieben, wie auch für Kurvengetriebe, Ersatzgetriebe angeben, welche eine leichtere Bestimmung von Beschleunigungen oder Krümmungen erlauben. Oftmals kann dadurch die Bestimmung von Coriolisbeschleunigungen umgangen werden. Man verwendet dabei momentane Krümmungsmittelpunkte von Kurvenflanken oder Bahnkurven.

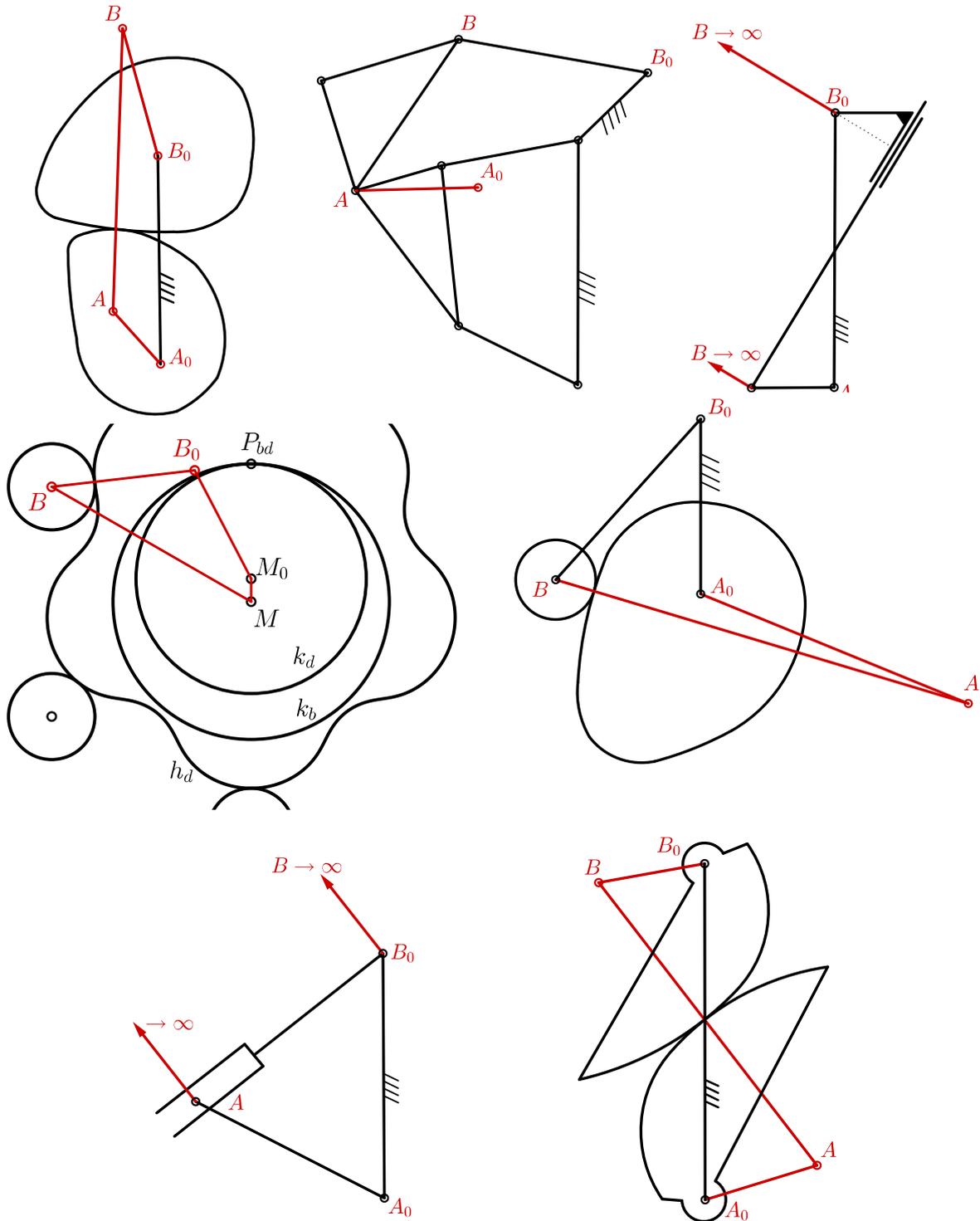


Abb. 10.1: Ersatzgetriebe.

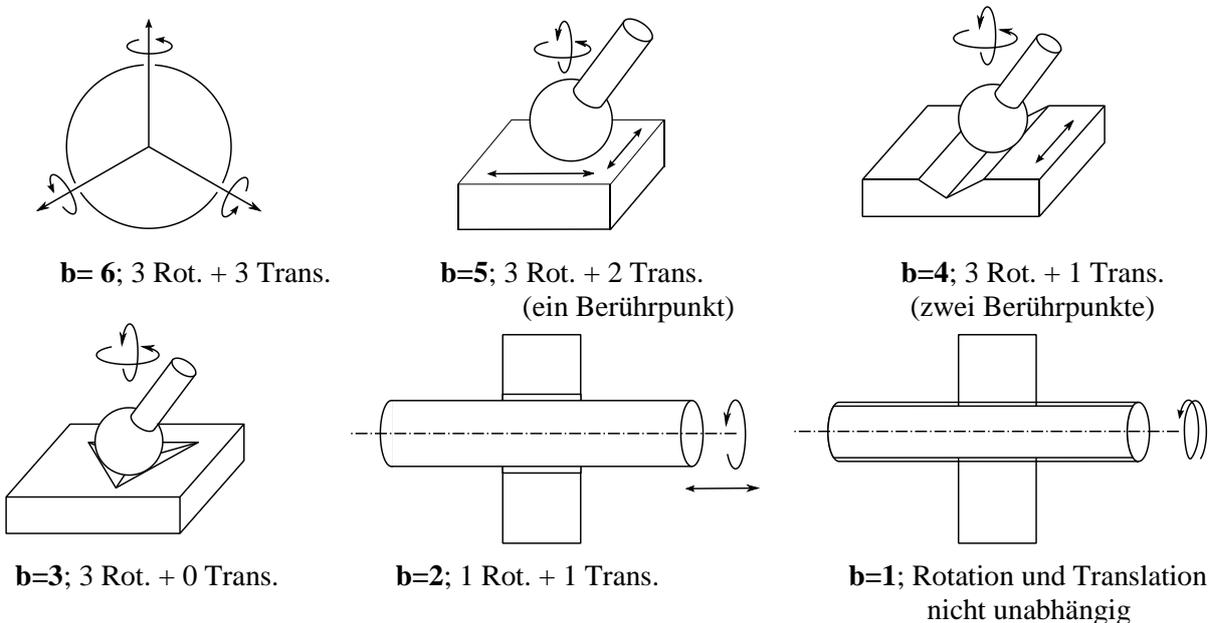
# 11. Freiheitsgrade

Der Freiheitsgrad  $F$  einer Anordnung gibt Auskunft, ob diese statisch bestimmt ( $F = 0$ ), überbestimmt ( $F < 0$ ) oder unterbestimmt ( $F > 0$ ) ist. Bei unterbestimmten Systemen können noch Bewegungen eingeleitet werden. Die Koordinaten von Systempunkten sind dann Funktionen des Antriebs. Die Zahl der Antriebe darf gleich der Größe des Freiheitsgrades sein. Beim Freiheitsgrad  $F = 1$  sind damit alle Gliedlagen oder Punktkoordinaten bestimmt, wenn der Antrieb als Funktion der Zeit bekannt ist.

## 11.1 Gelenke

Ein Körper im Raum hat 6 Freiheitsgrade. Es sind dies drei rotatorische und drei translatorische. Gelenke, über die der Körper mit einem anderen Glied (etwa dem Gestell) verbunden werden kann, unterbinden Freiheiten. Die Beweglichkeit eines Gelenks ist identisch mit der Anzahl verbleibender Freiheitsgrade des Körpers.

### Räumliche Gelenke:



### Ebene Gelenke:

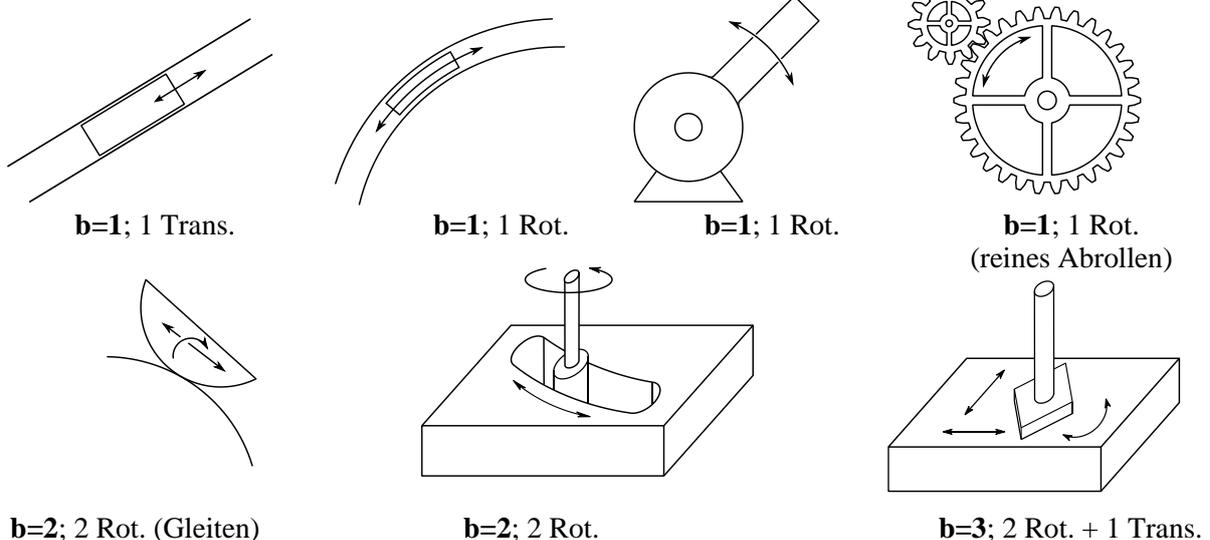


Abb. 11.1: Gelenkfreiheitsgrade.

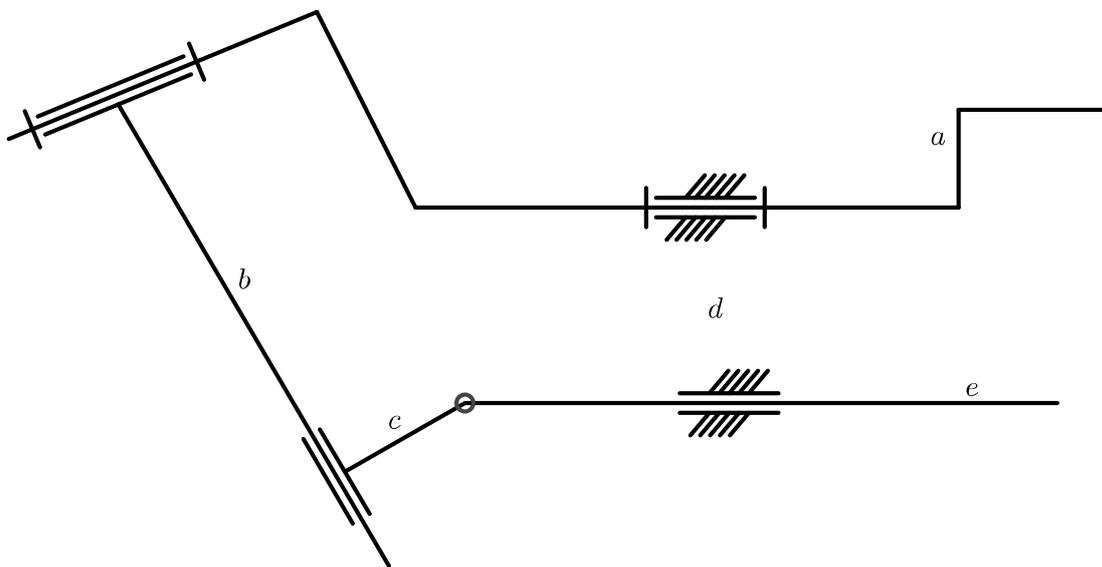
### 11.2 Grübler-Tschebyschew-Formel

Den Zusammenhang zwischen Anzahl der Glieder und Gelenke, der Summe der Gelenkfreiheitsgrade und des Freiheitsgrads der Gesamtanordnung gibt die Formel von Grübler an:

$$F = 6 \cdot (n - 1 - g) + \sum b_i$$

Anschaulich gedeutet beschreibt die Formel, dass jedes Glied (bis auf das Gestell, deshalb „-1“) sechs Freiheitsgrade besitzt, und jedes Gelenk sechs Freiheitsgrade nimmt (minus seinen Beweglichkeiten). Deshalb werden zuerst  $6 \cdot g$  Freiheitsgrade abgezogen und dann die Summe der Gelenkfreiheitsgrade dazu addiert.

Beispiel:



$n = 5$   
 $g = 5$   
 $B = 6$   
 $\sum b_i = 7$   
 $F = 6(5 - 5 - 1) + 7 = 1$

	a	b	c	d	e
a	/	X		X	
b	1	/	X		
c		2	/		X
d	1			/	X
e			1	2	/

Abb. 11.2: Beispiel einer Freiheitsgradberechnung.

Für ebene Mechanismen gilt wegen der in der Ebene vorhandenen drei Freiheitsgrade (zwei translatorische und ein rotatorischer):

$$F = 3 \cdot (n - 1 - g) + \sum b_i$$

### 11.3 Sonderabmessungen

Wenn Mechanismen aufgrund der Grübler-Formel einen Freiheitsgrad kleiner 1 besitzen - das heißt unbeweglich sein müssten - aber trotzdem eine Beweglichkeit aufweisen, dann liegen Sonderabmessungen vor. Dabei ist zu unterscheiden, ob diese während der Bewegung erhalten bleiben oder nur für zwei oder drei unendlich benachbarte Lagen erfüllt sind. Sonderabmessungen können etwa über den ganzen Umlauf parallele Gliedlagen sein, oder für drei Lagen die Fesselung eines Koppelpunkts mittels eines Lenkers in seinem Krümmungsmittelpunkt. Die Verbindung über einen Lenker, der auf dem Polstrahl des Koppelpunktes fest ist, stellt eine Sonderabmessung für zwei unendlich benachbarte Lagen dar.

Bei einer Verzahnung, die im Wälzpunkt reines Rollen gewährleistet, stellt die Bedingung, dass der Achsabstand gleich der Summe der beiden Radien sein muss, ebenfalls eine Sonderabmessung dar. Um diesen häufigeren Fall beim Arbeiten mit der Grübler-Formel zu umgehen, wird einer Verzahnung oder einer Reibradpaarung die Beweglichkeit zwei zugeordnet, was das Arbeiten mit Sonderabmessungen umgeht.

### 11.4 Differentiale – Getriebe mit Freiheitsgrad größer 1

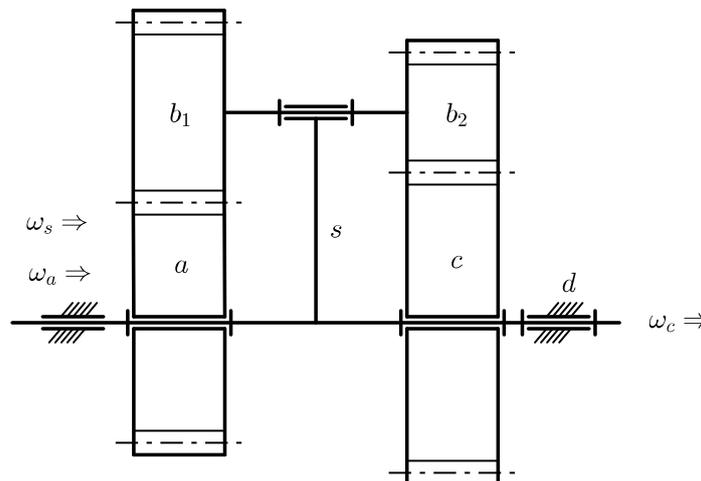


Abb. 11.3: Stirnraddifferential.

Als Differentiale werden allgemein Getriebe mit einem Freiheitsgrad größer 1 bezeichnet. Bei einem Stirnraddifferential etwa hängt die Drehzahl der Abtriebswelle  $\omega_c$  von der Drehzahl des ersten Zahnrads  $\omega_a$  und der des Stegs  $\omega_s$  ab. Durch einen mit Sicherheit zulässigen linearen Ansatz ergibt sich für das Übersetzungsverhältnis:

$$\omega_c = \frac{1}{i} \cdot \omega_a + \left(1 - \frac{1}{i}\right) \cdot \omega_s$$

Das gleiche Übersetzungsverhältnis gilt auch für ein Kegelraddifferential. Für die Momente am Differential gilt:

$$\sum M_i = 0; \quad M_s = -\left(1 - \frac{1}{i}\right) \cdot M_c; \quad M_a = -\frac{1}{i} \cdot M_c$$

Durch Hintereinanderschalten oder auch durch eine parallele Anordnung können am Ausgang verschiedenste Drehzahlen realisiert werden.

### 11.5 Automatikgetriebe

Sollen mit einem Automatikgetriebe 3 Vorwärtsgänge, Leerlauf und ein Rückwärtsgang realisiert werden, reicht ein Differential mit 2 Eingängen und einem Ausgang nicht aus. Nötig ist ein höheres Differential mit 3 Eingängen und 1 Ausgang. Es lässt sich aus 2 einfachen Differentialen entweder durch Hintereinander- oder Parallelschaltung kombinieren. Im Vordergrund steht dann die Minimierung der Zahl von Kupplungen und Bremsen.

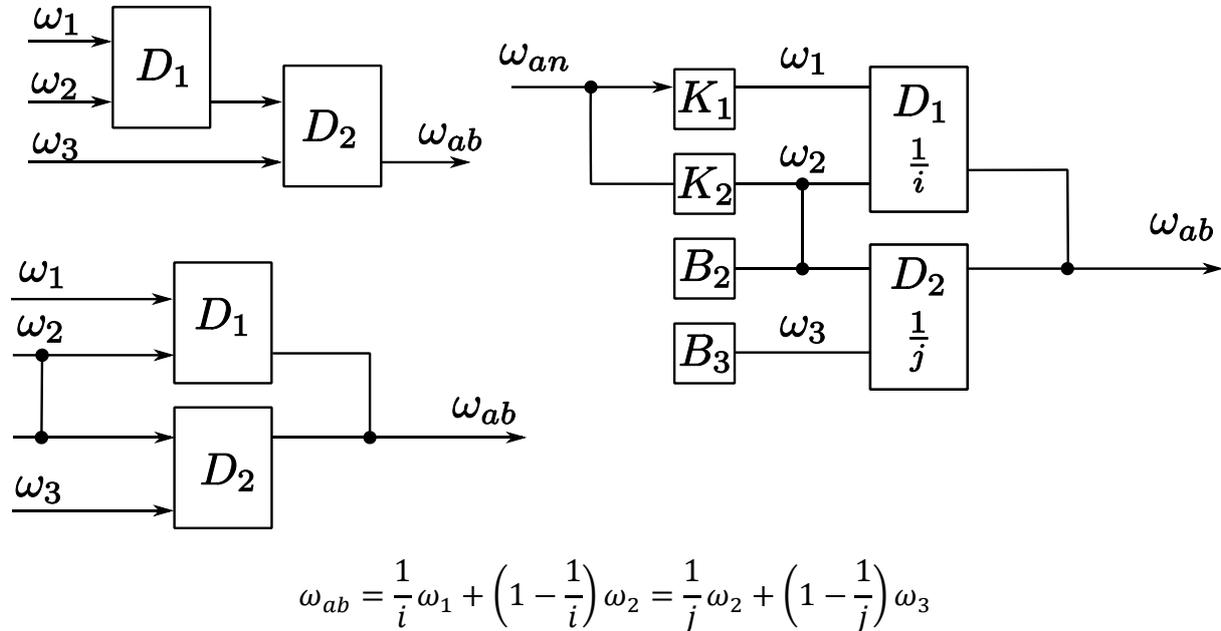


Abb. 11.4: Möglichkeiten der Kombination von Differentialen und gewählte Anordnung.

Durch geeignete Betätigung der Kupplungen und Bremsen ergeben sich die gewünschten Gesamtübersetzungen. Die Übersetzungen der beiden Differentialen  $D_1$  und  $D_2$  können dabei geeignet gewählt werden.

$K_1$	$K_2$	$B_2$	$B_3$	Gang	$\frac{\omega_1}{\omega_{an}}$	$\frac{\omega_2}{\omega_{an}}$	$\frac{\omega_3}{\omega_{an}}$	$\frac{\omega_{ab}}{\omega_{an}}$
				<b>0</b>				
1	0	0	1	<b>1</b>	1		0	$\frac{1}{(i - ij + j)}$
1	0	1	0	<b>2</b>	1	0		$\frac{1}{i}$
1	1	0	0	<b>3</b>	1	1		1
0	1	0	1	<b>R</b>		1	0	$\frac{1}{j}$

Die Gestaltung des Getriebes stellt dabei hohe Ansprüche an die konstruktive Ausführung. In der Praxis wird ein Automatikgetriebe mit einem Drehmomentwandler kombiniert, welcher das Motormoment erhöht und so die Anzahl der notwendigen Gänge verringert.

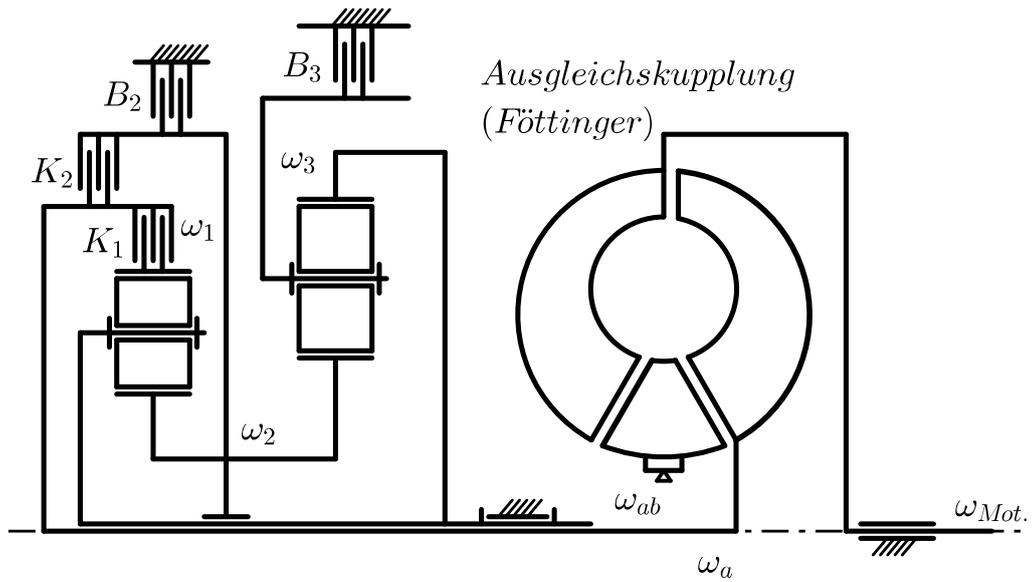


Abb. 11.5: Schema eines Automatikgetriebes.

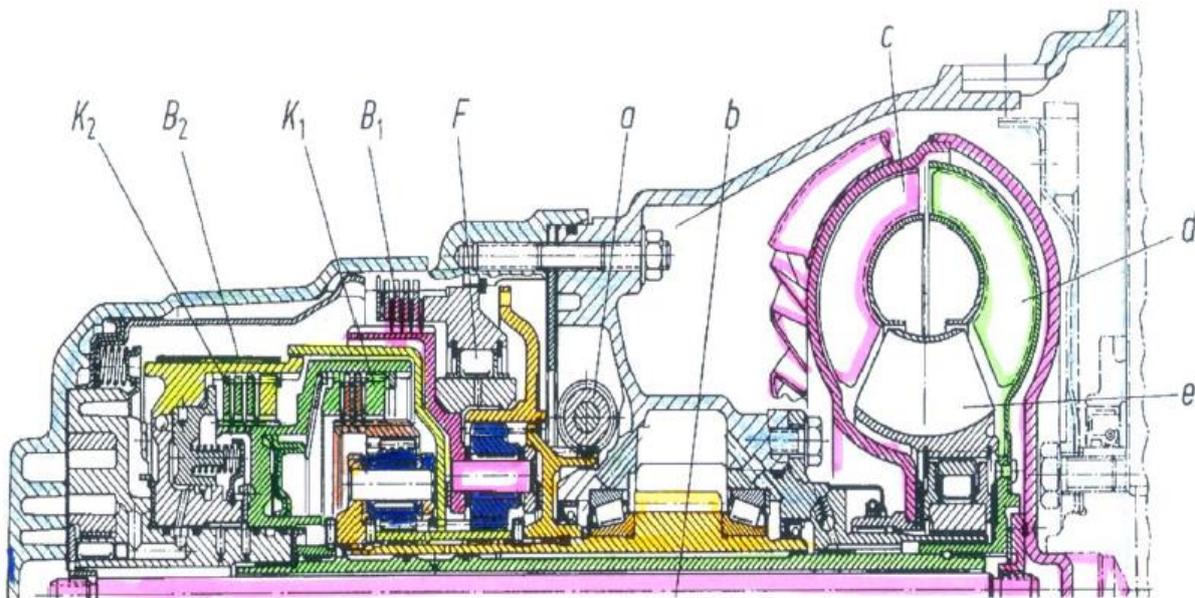


Abb. 11.6: Konstruktive Ausführung eines Automatikgetriebes.

## 12. Kurvengetriebe

Vergrößert man bei einem Gelenkgetriebe das Lager im Gelenk A zwischen den Gliedern a und b soweit, dass auch der Punkt  $A_0$  eingeschlossen wird, so gelangt man durch diese sogenannte Zapfenverweiterung zu einem Kurvengetriebe, welches durch eine Rolle mit Mittelpunkt B eine Kurvenscheibe, die sich um  $A_0$  dreht, abtastet. Der Krümmungsmittelpunkt des Berührungspunktes zwischen Rolle und Kurvenscheibe ist A.

Geht man diesen Weg rückwärts, so gewinnt man zu jedem Kurvengetriebe ein Gelenkgetriebe welches als Ersatzgetriebe für die betrachtete Stellung die gleichen Werte für Geschwindigkeiten und Beschleunigungen wie das Kurvengetriebe liefert.

Das Abtasten einer Kurvenscheibe mittels einer Rolle kann durch Kraftschluss (indem sie mittels einer Feder auf die Kontur gezogen wird) oder durch Formschluss erfolgen. Beim Formschluss über eine Nutkurve kommt es zu Toleranzproblemen und oftmaligen Drehrichtungsänderungen der Abtastrolle. Die bessere aber aufwendigere Lösung ist das gleichzeitige Abtasten einer komplementären Kurvenscheibe.

### 12.1 Bewegungsgesetze

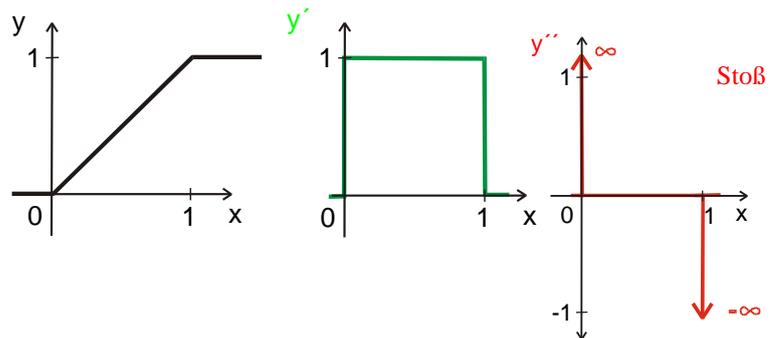
Charakteristisch für jede Kurvenscheibe ist die Übertragungsfunktion zwischen dem Drehwinkel der Kurvenscheibe und dem Hub oder Drehwinkel des Abtastgliedes. Diese Übertragungsfunktion wird auch das Bewegungsgesetz der Kurvenscheibe genannt. Im Wesentlichen gibt es dabei Übergänge zwischen Rasten oder Bereichen konstanter Geschwindigkeit und Umkehrpunkten. Wesentlich ist dabei, dass bei Übergängen weder im Geschwindigkeits- noch im Beschleunigungsverlauf Sprünge und nach Möglichkeit auch keine Knicke im Verlauf auftreten. Dies ist bei der höheren Sinoide und dem trigonometrischen Polynom der Fall, da hier auch in der zweiten Ableitung keine Sprünge vorkommen.

#### Normierte Übergänge, Rast - Rast

##### Gerade

- Funktion:  $y(x) = x$   
 1. Ableitung:  $y'(x) = 1$   
 2. Ableitung:  $y''(x) = 0$

- Maxima in:  
 1. Ableitung: 1  
 2. Ableitung: 0

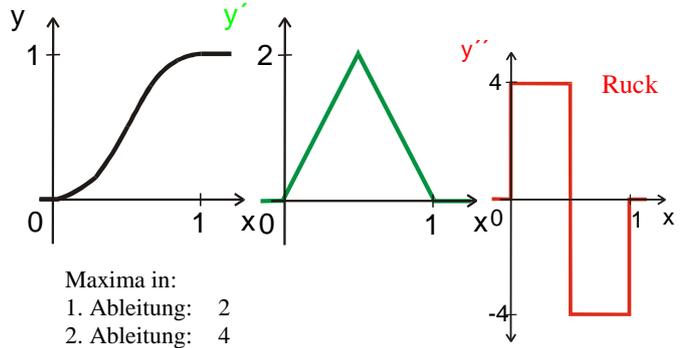


**Parabolischer Übergang**

Funktion: 
$$y(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{für } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -2(x-1)^2 + 1 & \text{für } \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$$

1. Ableitung: 
$$y'(x) = \begin{cases} 4x & \text{für } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -4(x-1) & \text{für } \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$$

2. Ableitung: 
$$y''(x) = \begin{cases} 4 & \text{für } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -4 & \text{für } \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$$

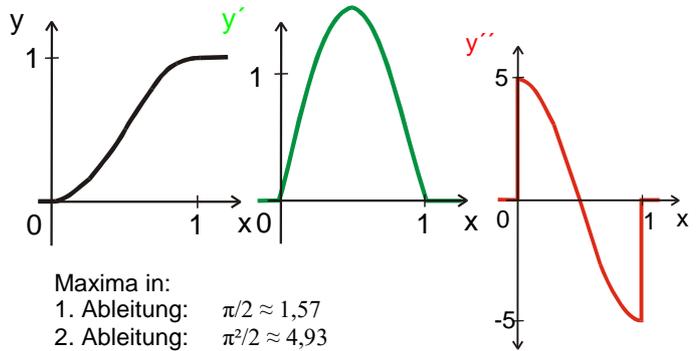


**Einfache Sinoide**

Funktion: 
$$y(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(\pi x)$$

1. Ableitung: 
$$y'(x) = \frac{\pi}{2} \sin(\pi x)$$

2. Ableitung: 
$$y''(x) = \frac{\pi^2}{2} \cos(\pi x)$$

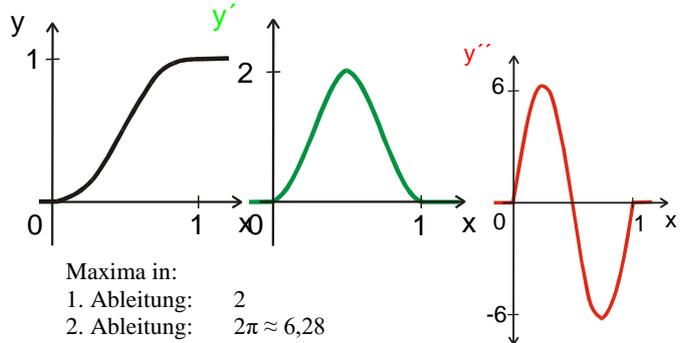


**Geneigte Sinoide**

Funktion: 
$$y(x) = x - \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi x)$$

1. Ableitung: 
$$y'(x) = 1 - \cos(2\pi x)$$

2. Ableitung: 
$$y''(x) = 2\pi \sin(2\pi x)$$

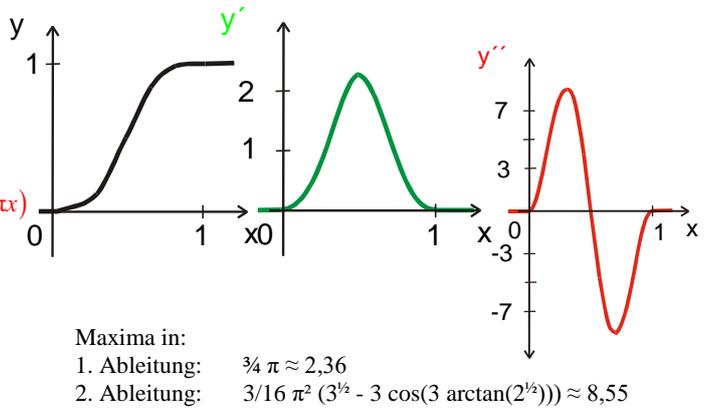


**Trigonometrisches Polynom**

Funktion: 
$$y(x) = \frac{1}{2} - \frac{9}{16} \cos(\pi x) + \frac{1}{16} \cos(3\pi x)$$

1. Ableitung: 
$$y'(x) = \frac{9}{16} \pi \sin(\pi x) - \frac{3}{16} \pi \sin(3\pi x)$$

2. Ableitung: 
$$y''(x) = \frac{9}{16} \pi^2 \cos(\pi x) - \frac{9}{16} \pi^2 \cos(3\pi x)$$



## 12.2 Konstruktion der Kontur

Ist der Abstand der beiden gestellfesten Gelenke, der Durchmesser der Abtastrolle und weiterhin die Übertragungsfunktion zwischen Kurvenscheibe und Abtastschwinge bekannt, so kann die Kontur der Kurvenscheibe konstruiert werden. Dazu wird die Kurvenscheibe als ruhendes Glied betrachtet und vom Antriebsgelenk aus die Gestelllänge unter dem vorgeschriebenen Kurvenscheibenwinkel  $\phi$  angetragen. Von diesem Anlenkpunkt aus wird unter dem Schwingenwinkel  $\psi$  die Schwingenlänge angetragen, um so zum Mittelpunkt der Abtastrolle zu gelangen. Wird dies für alle Zuordnungen, die sich von  $\phi$  und  $\psi$  ergeben, wiederholt, ergibt sich als Einhüllende für alle Stellungen die Abtastrolle.

## 13. Gelenkgetriebe

### 13.1 Umlaufbedingung

Wesentlich für die Umlauffähigkeit eines Gliedes in einem Viereckgetriebe ist das Größenverhältnis der Glieder untereinander. Dabei gilt nach der von Grashof gefundenen Beziehung:

Das kleinste Glied läuft nur um, wenn die Summe aus den Längen des größten und des kleinsten Gliedes kleiner als die Summe der beiden anderen Gliedlängen ist.

$$l_{min} + l_{max} < l_3 + l_4$$

### 13.2 Bauformen

Je nach Lage des Gestells ergeben sich damit verschiedene Bauformen, die nach den Umlaufeigenschaften der im Gestell angelenkten Glieder benannt werden.

Im Wesentlichen sind dies Kurbelschwinge (ein im Gestell angelenktes Glied läuft um, das andere nicht), Doppelkurbel (beide Glieder laufen um) und Doppelschwinge (keines der zwei Glieder im Gestell läuft um). Viereckgetriebe mit einem Glied unendlicher Länge (Schubgelenk) werden demgemäß als Schubkurbel oder Kurbelschleife bezeichnet, wobei weiterhin unterschieden wird, ob die Geradföhrung durch den gestellfesten Gelenkpunkt (zentrische Schubkurbel) geht oder nicht (exzentrische Schubkurbel).

### 13.3 Koppelkurven

Die Bahnkurven der bewegten Koppelene nennt man Koppelkurven. Die Koppelkurven sind trizirkuläre Kurven 6. Ordnung mit drei Brennpunkten.

$$\begin{aligned} f^2[(x-d)^2 + y^2] \cdot (x^2 + y^2 + e^2 - a^2)^2 - 2fe[(x^2 + y^2 - dx) \cdot \cos \gamma + dy \sin \gamma] \\ \cdot (x^2 + y^2 + e^2 - a^2) \cdot [(x-d)^2 + y^2 + f^2 - c^2] + e^2(x^2 + y^2) \\ \cdot [(x-d)^2 + y^2 + f^2 - c^2]^2 - 4f^2e^2 \cdot [(x^2 + y^2 - dx) \sin \gamma - dy \cos \gamma]^2 \\ = 0 \end{aligned}$$

Der Punkt  $X$  liegt im Koordinatenursprung, der Punkt  $Y$  auf der  $x$ -Achse. Der Winkel  $\gamma$  ist der Winkel zwischen  $e$  und  $f$  im Punkt  $C$ .

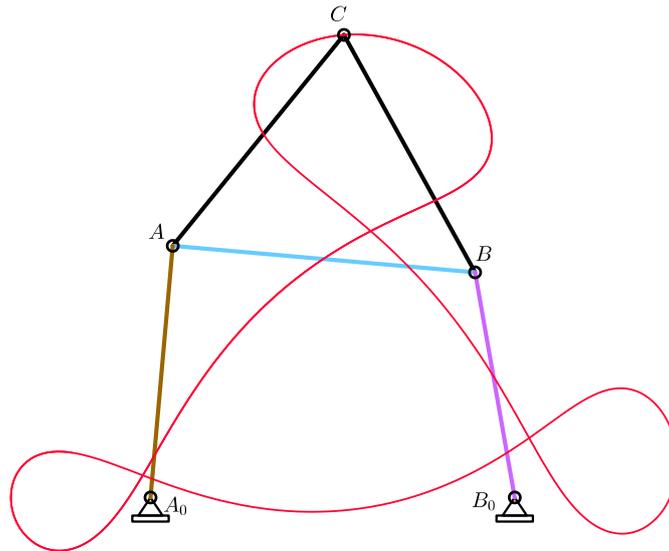


Abb. 13.1: Koppelkurve eines Vieregelinks.

### 13.4 Satz von Roberts

Nach dem Satz von Roberts kann jede Koppelkurve von drei verschiedenen Vieregelinks erzeugt werden. Wenn ein Vieregelink bekannt ist, findet man die anderen beiden durch eine einfache Konstruktion. Man dreht die Glieder a und c auf die Gerade AB und ergänzt die Figur durch Parallelen zu den Seiten des Koppeldreiecks. Damit sind die Abmessungen der beiden anderen Vieregelinke bereits bestimmt, man muss sie nur noch in die richtige Lage bringen, indem die Glieder a und c in ihre ursprüngliche Lage zurück gedreht werden (alle „Glieder“ der Figur bleiben dabei verbunden. Im Punkt C könnte man alle drei Koppel Ebenen durch ein Gelenk verbinden, ohne dass die Beweglichkeit eingeschränkt würde, obwohl das Auswerten der Grübler-Gleichung auf einen überstimmten Mechanismus schließen lassen würde (Sonderabmessungen durch Brennpunkte).

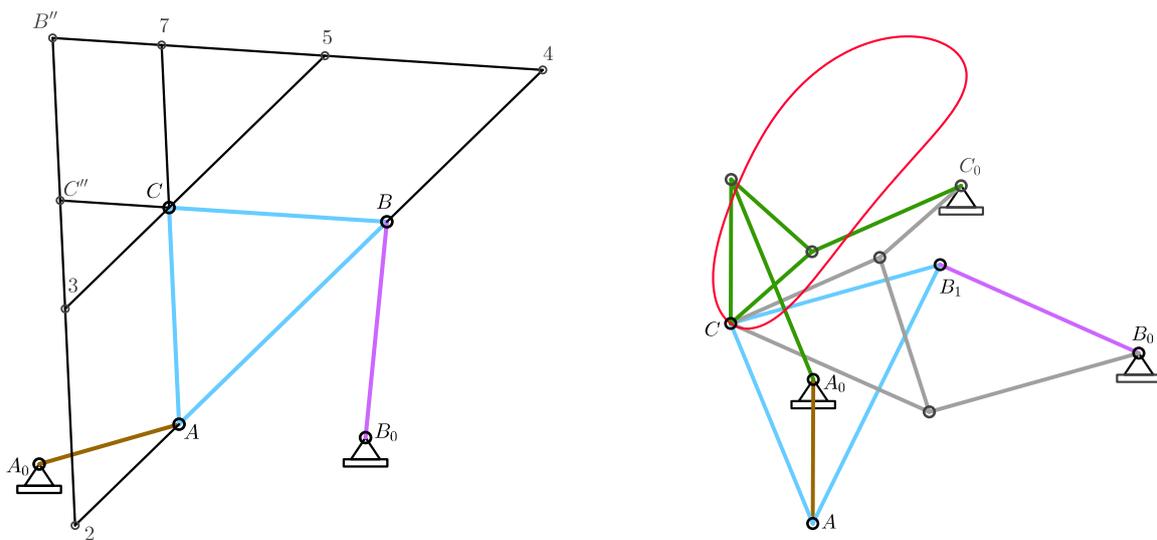


Abb. 13.2: Satz von Roberts.

### 13.5 Massenreduktion

Um die Auswirkungen von Massen und Massenträgheitsmomenten aller im Getriebe vorhandenen Glieder auf die notwendige Antriebsleistung bestimmen zu können, werden deren Einflüsse auf die Antriebskurbel reduziert. Es wird dann mit einer rotierenden Kurbel, deren Masse sich im Kurbelendpunkt konzentriert, verglichen. Für die kinetische Energie eines beliebigen Gliedes gilt (Schwerpunkt S):

$$E_{kin_i} = \frac{m_i}{2} v_{S_i}^2 + \frac{J_{S_i}}{2} \omega_{id}^2$$

Für das Ersatzsystem gilt:

$$\frac{m^*}{2} v_a^2 = \sum_{i=0}^n \left( \frac{m_i}{2} v_{S_i}^2 + \frac{J_{S_i}}{2} \omega_{id}^2 \right)$$

Betrachtet man ein Viergelenkgetriebe, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{m^*}{2} v_a^2 &= \frac{J_{aA_0}}{2} \omega_{ad}^2 + \frac{J_{cB_0}}{2} \omega_{cd}^2 + \frac{J_{bS}}{2} \omega_{bd}^2 + \frac{m_b}{2} v_s^2 \\ m^* &= \frac{J_{aA_0}}{a^2} + \frac{J_{cB_0}}{a^2} \left( \frac{\omega_{cd}}{\omega_{ad}} \right)^2 + \frac{J_{bS}}{a^2} \left( \frac{\omega_{bd}}{\omega_{ad}} \right)^2 + m_b \left( \frac{v_s}{v_A} \right)^2 \end{aligned}$$

Da sich aber die Winkelgeschwindigkeiten über den Kurbelwinkel ändern, ist die reduzierte Masse eine Funktion der Zeit:

$$\frac{m^*}{2} v_A^2 = \frac{m^* + dm^*}{2} \cdot (v_a + dv_a)^2 - F^* ds$$

Für die reduzierte Kraft, die am Hebelarm a angreift, gilt:

$$F^* = m^* b_{t_A} + \frac{dm^*}{ds} \cdot \frac{v_A^2}{2}$$

Damit kann das notwendige Motormoment berechnet werden, wenn am Viergelenk keine zusätzliche äußere Kraft angreift. Ein Massenausgleich ist mit diesen Informationen natürlich auch noch nicht realisierbar.

# A1. Herleitung der Coriolisbeschleunigung

Detaillierte formelmäßig Herleitung der Coriolisbeschleunigung:

$$\mathbf{b}_B = \mathbf{b}_{nA} + \mathbf{b}_{tA} + \mathbf{b}_{nBA} + \mathbf{b}_{tBA}$$

$$\mathbf{b}_B = \boldsymbol{\omega}_{ad} \times (\boldsymbol{\omega}_{ad} \times \mathbf{r}_{A_0A}) + \boldsymbol{\varepsilon}_{ad} \times \mathbf{r}_{A_0A} + \boldsymbol{\omega}_{bd} \times (\boldsymbol{\omega}_{bd} \times \mathbf{r}_{AB}) + \boldsymbol{\varepsilon}_{bd} \times \mathbf{r}_{AB}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\omega \cdot r_y \\ \omega \cdot r_x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega^2 \cdot r_x \\ -\omega^2 \cdot r_y \\ 0 \end{pmatrix} = -\omega^2 \cdot \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ 0 \end{pmatrix} = -\omega^2 \cdot \mathbf{r} \end{aligned}$$

$$\mathbf{b}_B = -\omega_{ad}^2 \cdot \mathbf{r}_{A_0A} + \boldsymbol{\varepsilon}_{ad} \times \mathbf{r}_{A_0A} + (\boldsymbol{\omega}_{ba} + \boldsymbol{\omega}_{ad}) \times ((\boldsymbol{\omega}_{ba} + \boldsymbol{\omega}_{ad}) \times \mathbf{r}_{AB}) + (\boldsymbol{\varepsilon}_{ba} + \boldsymbol{\varepsilon}_{ad}) \times \mathbf{r}_{AB}$$

$$\mathbf{b}_B = -\omega_{ad}^2 \cdot \mathbf{r}_{A_0A} + \boldsymbol{\varepsilon}_{ad} \times \mathbf{r}_{A_0A} - \omega_{ba}^2 \cdot \mathbf{r}_{AB} - 2 \cdot \omega_{ba} \cdot \omega_{ad} \cdot \mathbf{r}_{AB} - \omega_{ad}^2 \cdot \mathbf{r}_{AB} + \boldsymbol{\varepsilon}_{ba} \times \mathbf{r}_{AB} + \boldsymbol{\varepsilon}_{ad} \times \mathbf{r}_{AB}$$

$$\mathbf{b}_B = -\omega_{ad}^2 \cdot (\mathbf{r}_{A_0A} + \mathbf{r}_{AB}) + \boldsymbol{\varepsilon}_{ad} \times (\mathbf{r}_{A_0A} + \mathbf{r}_{AB}) - \omega_{ba}^2 \cdot \mathbf{r}_{AB} - 2 \cdot \omega_{ba} \cdot \omega_{ad} \cdot \mathbf{r}_{AB} + \boldsymbol{\varepsilon}_{ba} \times \mathbf{r}_{AB}$$

$$\mathbf{b}_B = -\omega_{ad}^2 \cdot \mathbf{r}_{A_0B} + \boldsymbol{\varepsilon}_{ad} \times \mathbf{r}_{A_0B} - \omega_{ba}^2 \cdot \mathbf{r}_{AB} - \underbrace{2 \cdot \omega_{ba} \cdot \omega_{ad} \cdot \mathbf{r}_{AB}} + \boldsymbol{\varepsilon}_{ba} \times \mathbf{r}_{AB}$$

$$\begin{aligned} -2 \cdot \omega_{ba} \cdot \omega_{ad} \cdot \mathbf{r}_{AB} &= -2 \cdot \omega_{ad} \cdot \omega_{ba} \cdot \begin{pmatrix} r_{AB,x} \\ r_{AB,y} \\ 0 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{ad} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \omega_{ba} \cdot r_{AB,y} \\ -\omega_{ba} \cdot r_{AB,x} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= -2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{ad} \end{pmatrix} \times \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{ba} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r_{AB,x} \\ -r_{AB,y} \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 2 \cdot \omega_{ad} \times (\omega_{ba} \times \mathbf{r}_{AB}) \\ &= 2 \cdot \boldsymbol{\omega}_{ad} \times \mathbf{v}_r \end{aligned}$$

$$\mathbf{b}_B = -\omega_{ad}^2 \cdot \mathbf{r}_{A_0B} + \boldsymbol{\varepsilon}_{ad} \times \mathbf{r}_{A_0B} - \omega_{ba}^2 \cdot \mathbf{r}_{AB} + 2 \cdot \boldsymbol{\omega}_{ad} \times \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\varepsilon}_{ba} \times \mathbf{r}_{AB} \quad | \text{umsortieren}$$

$$\mathbf{b}_B = \underbrace{-\omega_{ad}^2 \cdot \mathbf{r}_{A_0B}} + \underbrace{\boldsymbol{\varepsilon}_{ad} \times \mathbf{r}_{A_0B}} + \underbrace{2 \cdot \boldsymbol{\omega}_{ad} \times \mathbf{v}_r} - \underbrace{\omega_{ba}^2 \cdot \mathbf{r}_{AB}} + \underbrace{\boldsymbol{\varepsilon}_{ba} \times \mathbf{r}_{AB}}$$

$$\mathbf{b}_B = \underbrace{\mathbf{b}_{n(B)} + \mathbf{b}_{t(B)}} + \mathbf{b}_{cor} + \underbrace{\mathbf{b}_{nr} + \mathbf{b}_{tr}}$$

$$\mathbf{b}_B = \mathbf{b}_{(B)} + \mathbf{b}_{cor} + \mathbf{b}_r$$

$$\mathbf{b}_{n(B)} = -\omega_{ad}^2 \cdot \mathbf{r}_{A_0B}$$

$$\mathbf{b}_{t(B)} = \boldsymbol{\varepsilon}_{ad} \times \mathbf{r}_{A_0B}$$

$$\mathbf{b}_{cor} = 2 \cdot \boldsymbol{\omega}_{ad} \times \mathbf{v}_r$$

$$\mathbf{b}_{nr} = -\omega_{ba}^2 \cdot \mathbf{r}_{AB}$$

$$\mathbf{b}_{tr} = \boldsymbol{\varepsilon}_{ba} \times \mathbf{r}_{AB}$$