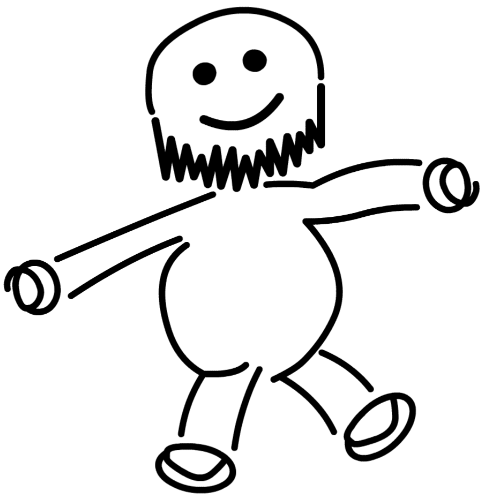
Multikriterielle Optimierung



Daniel Scholz im Sommer 2006

Überarbeitete Version vom 26. September 2007.

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

1.1 Einleitung und Grundbegriffe

Die multikriterielle oder Vektoroptimierung beschäftigt sich mit der Optimierung von Problemen unter berücksichtigung mehrerer Zielfunktionsfunktionen, die sich teilweise widersprechen können. Dies soll in den folgenden Beispielen verdeutlicht werden:

(1) In der Medizin möchte man eine maximale Wirkung, aber minimale Nebenwirkungen erzielen. Die beiden Zielfunktionen Wirkung und Nebenwirkungen widersprechen sich, sie können nicht gleichzeitig beide optimal erfüllt werden. Gesucht wird also eine multikriterielle Lösung zum Beispiel in der Medikamentendosierung oder in der Krebsbestrahlung.

(2) Bei Finanzanlagen soll ein maximaler Ertrag mit minimalem Risiko erzielt werden. Hier wählt man als multikriterielle Lösung ein Portfolio von Aktien.

(3) Auch im Standardbeispiel der Produktionsplanung stößt man auf multikriterielle Probleme, wenn man einen maximalen Erlös mit minimalen Kosten erreichen will.

In der Literatur widersprechen sich neben dem Titel auch sehr viele Begriffe, daher werden wir öfters auch englische Bezeichnungen angeben.

Zunächst soll das Thema nochmals an einigen Beispielen ausführlicher beschrieben werden.

Beispiel 1.1.1

Eine Firma produziert zwei Sorten Stoffe S_1 und S_2 aus Wolle in den drei Farben rot, grün und blau. Die benötigte Menge Wolle pro Mengeneinheit Stoff ist dem folgenden Schema zu entnehmen:

	S_1	S_2	verfügbar
rot	4	5	10
grün	5	2	10
blau	3	8	12
Erlös	1	2	

Wie wollen nun zwei Ziele erreichen:

(1) Der Erlös soll maximiert werden: max $S_1 + 2S_2$.

(2) Der Ausstoß soll maximiert werden: max $S_1 + S_2$.

Die Nebenbedingungen und der zulässige Bereich ist in Abbildung 1.1 verdeutlicht.

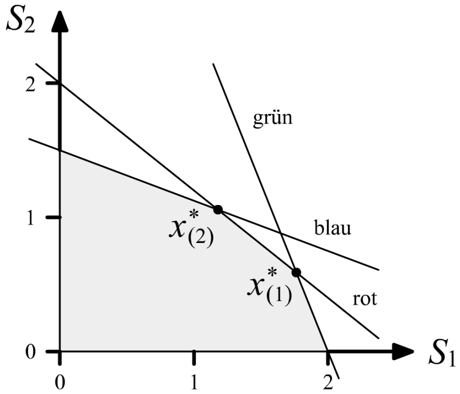


Abbildung 1.1: Zulässiger Bereich zum Beispiel.

Zu den beiden Zielen erhalten wir unterschiedliche Niveaulinien und in diesem Beispiel auch unterschiedliche optimale Lösungen.

Beispiel 1.1.2

Drei Schulen mit 800, 1000 und 1200 Schülern an den Stardorten a_1, a_2 und a_3 wollen eine gemeinsame Kantine am Standort x errichten. Als Fermat-Weber-Problem erhalten wir den Ansatz

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} w_1 \|x - a_1\|_2 + w_2 \|x - a_2\|_2 + w_3 \|x - a_3\|_2$$

mit den Gewichten $w_1 = 800$, $w_2 = 1000$ und $w_3 = 1200$.

Dieses Problem kann man aber auch als multikriterielles Problem betrachten, indem man den *Zielfunktionsvektor*

$$\min \left(\|x - a_1\|_2,\ \|x - a_2\|_2,\ \|x - a_3\|_2 \right)$$

minimiert. Was dies genau heißt werden wir später besprechen.

Beispiel 1.1.3

Vier Autotypen A_1 bis A_4 werden hinsichtlich Benzinverbrauch und PS Stärke untersucht. Die Daten sind dem folgenden Schema zu entnehmen:

	A_1	A_2	A_3	A_4
Verbrauch	8.5	7.5	7.0	8.0
PS Stärke	55	108	90	102

Da wir stets Minimierungsprobleme betrachten wollen, wird es hier das Ziel sein den Verbrauch sowie die negative PS Stärke zu minimieren:

$$\min\left(\text{Verbrauch},\ -\text{PS}\right).$$

Dieses Beispiel werden wir gleich nocheinmal aufgreifen.

Bevor wir zur Definition einiger Grundbegriffe kommen, wollen wir kurz den Grundgedanken von Pareto vorstellen, der stets Lösungsgrundlage von Optimierungsproblemen ist.

Optimierung im Sinne von Pareto

Eine Gesellschaft ist in einem optimalen Zustand, wenn keines ihrer Mitglieder besser gestellt werden kann, ohne das mindestens ein anderes schlechter gestellt würde.

Definition 1.1.4 (Grundbegriffe)

Ein ***multikriterielles Optimierungsproblem***, kurz MOP, ist gekennzeichnet durch folgende Begriffe:

(1) Eine ***zulässige Menge*** X von ***Entscheidungsvariablen*** $x \in X$.

(2) Einem ***Entscheidungsraum***, welcher X enthält. Dies wird meistens $\mathbb{R}^n$ sein.

(3) Einem ***Zielraum*** $\mathbb{R}^p$ mit zugehöriger Halbordnung $\prec$.

(4) Einen ***Zielfunktionsvektor*** $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_p(x))$, der X in den Raum $\mathbb{R}^p$ abbildet. Der Zielfunktionsvektor wird oft auch mit $y = f(x)$ bezeichnet.

Weiterhin vereinbaren wir, dass stets Minimierungsprobleme betrachtet werden. Um zu verdeutlichen, dass wir ein multikriterielles Problem betrachten, schreiben wir auch $\operatorname{vecmin}(f_1(x), \ldots, f_p(x))$. Das Bild der zulässigen Menge sei $Y = f(X)$.

Beispiel 1.1.5

Im Beispiel 1.1.1 mit den Stoffen wird die zulässige Menge gegeben durch

$$X \; = \; \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1, x_2 \geq 0,\; Ax \leq b\}$$

mit $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 12 \end{pmatrix}$.

Entscheidungs- und Zielraum ist der $\mathbb{R}^2$ und der Zielfunktionsvektor ist

$$f(x) \; = \; (-(x_1 + 2x_2),\; -(x_1, x_2)).$$

Mögliche Lösungsansätze für multikriterielle Probleme

An dieser Stellen werden schon einmal Lösungsansätze für multikriterielle Optimierungsprobleme vorgestellt, die wir dann ausführlich behandelt werden. Alle Ansätze sollen am Beispiel 1.1.3 mit der zulässigen Menge $X = \{A_1, \ldots, A_4\}$ verdeutlicht werden.

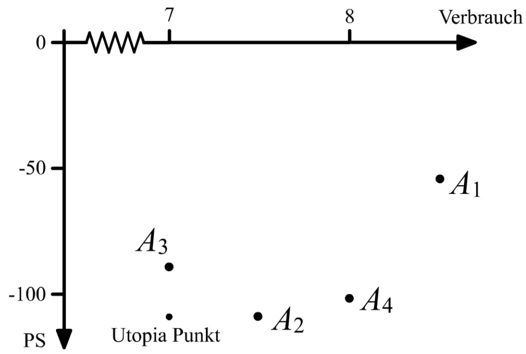


Abbildung 1.2: Verdeutlichung von Beispiel 1.1.3.

(1) Rangordnung der Ziele.

Wir können zum Beispiel erst die negative PS Stärke minimieren und von den optimalen Lösungen minimieren wir dann den Benzinverbrauch. Die Lösung hierbei wäre A_2.

(2) Schranken für $p - 1$ Zielfunktionen, die nicht überschritten werden sollen.

Mit $-\text{PS} \leq -90$ optimieren wir nur die übrig geblieben Autos nach ihrem Verbrauch. Die Lösung hierbei wäre A_3.

(3) Kompromisszielfunktion mit einer geeigneten Gewichtung der einzelnen Ziele $f_1(x), \ldots, f_p(x)$.

Wir können die Gewichte 1/10 und 1 wählen und

$$\overline{f}(x) = \frac{1}{10}(-\mathrm{PS}(x)) + \mathrm{Verbrauch}(x)$$

optimieren. Die Lösung hierbei wäre A_2.

(4) Wir bestimmen das Minimum aller Zielfunktionen, dies ist der ***Utopiapunkt*** $U \in \mathbb{R}^p$. Dann suchen wir einen Punkt $x \in X \subset \mathbb{R}^p$, der *so nahe wie möglich* am Utopiapunkt liegt.

Im Beispiel ist $U = (7, -108)$ und wir erhalten je nach Abstandsmessung A_2 oder A_3 als Lösung.

(5) Gleichmäßige Minimierung. Zu einem x betrachten wir $\max_{i=1,..,p} f_i(x)$ und minimieren dieses Problem. Insgesamt haben wir also

$$\min_{x \in X} \max_{i=1,..,p} f_i(x).$$

Dieser Ansatz heißt spieltheoretischer Kompromiss, da die neue Zielfunktion an Probleme in der Spieltheorie erinnert. In unserem Beispiel erhalten wir hier als Lösung A_3.

Bemerkung

In allen Ansätzen war die Lösung entweder A_2 oder A_3. Die anderen beiden Autos spielten keine Rolle, sie sind auch tatsächlich nach Pareto nicht interessant.

Bevor wir weitere wichtige Begriffe in der multikriteriellen Optimierung einführen können, müssen wir uns mit Halbordnungen auf dem $\mathbb{R}^p$ beschäftigen.

Definition 1.1.6

Eine ***binäre Relation*** auf einer Menge S ist gegeben durch eine Teilmenge $R \subset S \times S$.

Eine binäre Relation R heißt ***Halbordnung***, wenn gilt:

(1) R ist ***reflexiv***, das heißt für alle $s \in S$ gilt $(s, s) \in R$.

(2) R ist ***transitiv***, das heißt für $(s^1, s^2), (s^2, s^3) \in R$ folgt $(s^1, s^3) \in R$.

(3) R ist ***antisymmetrisch***, das heißt für alle $(s^1, s^2), (s^2, s^1) \in R$ folgt $s^1 = s^2$.

Eine binäre Relation R heißt ***strenge Halbordnung***, wenn gilt:

(1) R ist ***transitiv***, das heißt für $(s^1, s^2), (s^2, s^3) \in R$ folgt $(s^1, s^3) \in R$.

(2) R ist ***asymmetrisch***, das heißt für alle $(s^1, s^2) \in R$ folgt $(s^2, s^1) \notin R$.

Halbordnungen auf dem $\mathbb{R}^p$

Bei unseren Problemen benötigen wir stets eine Halbordnung auf dem Zielraum $\mathbb{R}^p$. Mit y^1, y^2 werden wir fast immer eine der folgenden Ordnungen verwenden:

(1) ***Schwache komponentenweise Ordnung*** $\leqq$:

Es gilt $y^1 \leqq y^2$, wenn für alle $k = 1, \ldots, p$ gerade $y_k^1 \leq y_k^2$ gilt.

(2) ***Komponentenweise Ordnung*** $\leq$:

Es gilt $y^1 \leq y^2$, wenn für alle $k = 1, \ldots, p$ gerade $y_k^1 \leq y_k^2$ gilt und es ein $\overline{k}$ gibt mit $y_{\overline{k}}^1 < y_{\overline{k}}^2$.

(3) ***Strenge komponentenweise Ordnung*** $<$:

Es gilt $y^1 < y^2$, wenn für alle $k = 1, \ldots, p$ gerade $y_k^1 < y_k^2$ gilt.

(4) ***Lexikographische Ordnung*** $\leq_{\text{lex}}$:

Es gilt $y^1 \leq_{\text{lex}} y^2$, wenn $y^1 = y^2$ oder $y_k^1 < y_k^2$ mit $k = \min\{k \mid y_k^1 \neq y_k^2\}$ gilt.

(5) ***Maximale Ordnung*** $\leq_{\text{MO}}$:

Es gilt $y^1 \leq_{\text{MO}} y^2$, wenn $\max_{k=1,..,p} y_k^1 \leq \max_{k=1,..,p} y_k^2$ gilt.

Siehe hierzu auch Aufgabe 1.5.1.

Definition 1.1.8

Eine Teilmenge $C \subset \mathbb{R}^p$ heißt ***Kegel***, wenn für alle $d \in C$ und alle $\alpha > 0$ auch

$$\alpha \cdot d \;\in\; C$$

gilt.

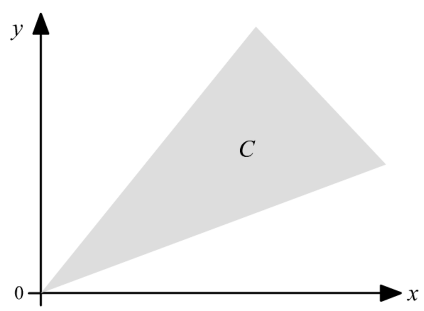


Abbildung 1.3: Beispiel eines Kegels im $\mathbb{R}^2$.

Spezialfälle

Auch hier werden wir vor allem drei Spezialfälle verwenden, siehe auch Abbildung 1.4:

$$\mathbb{R}^p_{\geqq} = \{y \in \mathbb{R}^p \mid y \geqq 0\}, \quad \mathbb{R}^p_{\geq} = \{y \in \mathbb{R}^p \mid y \geq 0\}, \quad \mathbb{R}^p_{>} = \{y \in \mathbb{R}^p \mid y > 0\}.$$

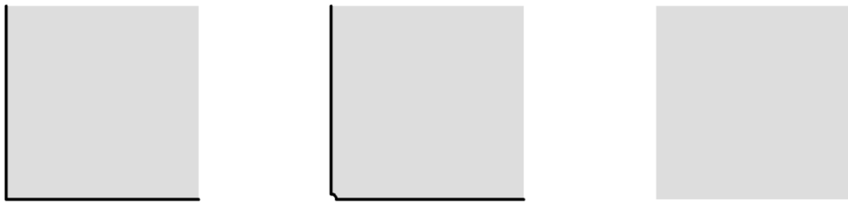


Abbildung 1.4: Spezialfälle von Kegeln.

Die unterschieder dieser Mengen besteht jeweils darin, ob die Achsen und der Nullpunkt mit zur Menge zählt oder nicht.

Im Folgenden betrachten wir stets ein multikriterielles Optimierungsproblem $\text{vecmin}(f_1(x), \ldots, f_p(x))$ unter der Nebenbedingung $x \in X$ bezüglich der Halbnorm $\leq$.

Definition 1.1.9

Sei $Y = f(X)$ das Bild der zulässigen Menge X bezüglich der zu optimierenden Abbildung $f(x)$.

Eine zulässige Lösung $\hat{x} \in X$ heißt ***effizient*** oder ***Pareto optimal***, wenn es kein $x \in X$ gibt, so dass $f(x) \leq f(\hat{x})$. Der Punkt $f(\hat{x})$ im Zielraum $\mathbb{R}^p$ heißt dann ***nichtdominiert***.

Wir sagen x^1 dominiert x^2 und $f(x^1)$ dominiert $f(x^2)$, wenn $f(x^1) \leq f(x^2)$ gilt.

Die ***Effizienzmenge*** X_E ist die Menge aller effizienten Lösungen $\hat{x} \in X$. Die ***nichtdominierende Menge*** wird gegeben durch

$$Y_N \ := \ \{\hat{y} = f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in X_E\}.$$

Alternative Definitionen

Effiziente Lösungen lassen sich auch alternativ definieren:

(1) $\hat{x} \in X$ ist effizient, wenn es kein $x \in X$ gibt, so dass

$$f(x) - f(\hat{x}) \ \in \ -\mathbb{R}^p_{\geq}$$

gilt.

(2) $\hat{x} \in X$ ist effizient, wenn

$$f(X) \cap (f(\hat{x}) - \mathbb{R}^p_{\geqq}) \ = \ \{f(\hat{x})\}$$

gilt. Dabei versehen wir als Addition zweier Mengen A und B die Menge $A + B = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}$.

(3) $\hat{x} \in X$ ist effizient, wenn aus $f(x) \leqq f(\hat{x})$ für $x \in X$ gerade

$$f(x) \ = \ f(\hat{x})$$

folgt.

Gerade die alternative Definition **(2)** lässt sich gut veranschaulichen. In Abbildung 1.5 wurde ein nicht effizienter Punkt $\hat{x}$ gewählt.

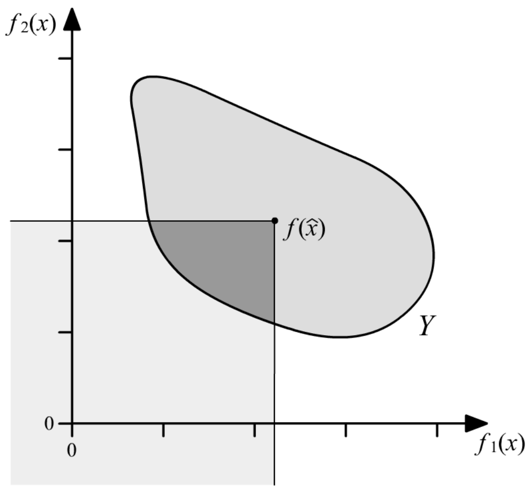


Abbildung 1.5: Zur alternativen Definition von effizienten Punkten.

1.2 Existenz von nichtdominierenden Mengen

Im Allgemeinen ist die Existens effizienter Lösungen nicht gegeben:

Beispiel 1.2.1

Wir definieren die Menge $X \subset \mathbb{R}^2$ wie in der folgenden Abbildung 1.6. Es ist darauf zu achten, dass die Punkte $(-1, 0)$ und $(0, -1)$ zunächst nicht zu X gehören. Weiter sei $f(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$, also auch $X = Y$.

Bei diesem Beispiel gilt $X_N = Y_N = \emptyset$ und das obwohl X und Y konvex sind und f stetig ist.

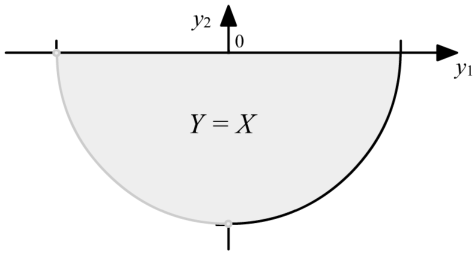


Abbildung 1.6: Zur Definition der Menge X.

Sei nun $X' = X \cup \{(-1,0),(0,-1)\}$, wir nehmen also die beiden zuvor ausgeschlossenen Punkte mit auf. Hier gilt $X'_N = Y'_N = \{(-1,0),(0,-1)\}$.

Wenn effiziente Lösungen existieren, so muss die nichtdominierende Menge nicht notwendig zusammenhängend sein.

Wir erkennen also das Problem, dass Effizienzmengen X_E im Allgemeinen schwer zu bestimmen sind. Daher benötigen wir einige Hilfsmittel, um X_E berechnen zu können.

Lemma 1.2.2

Es gilt

$$Y_N = (Y + \mathbb{R}^p_{\geqq})_N =: \overline{Y_N}.$$

Dabei versehen wir als Addition zweier Mengen A und B wieder die ***Minkowski Summe***

$$A + B = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

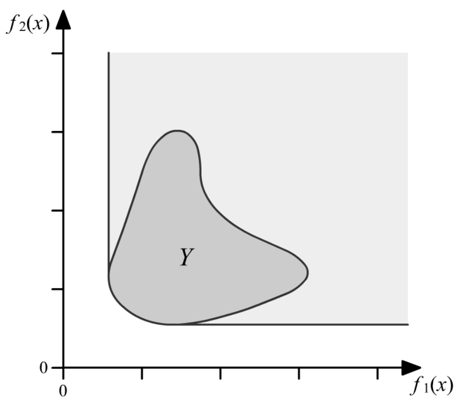


Abbildung 1.7: Verdeutlichung der Menge $Y + \mathbb{R}^p_{\geqq}$.

Lemma 1.2.3

Sei $\mathrm{bd}(Y)$ der Rand von Y. Dann gilt

$$Y_N \subset \mathrm{bd}(Y),$$

die nichtdominierende Menge Y_N ist also eine Teilmenge des Randes $\mathrm{bd}(Y)$.

Damit erhalten wir auch sofort das folgende Korrolar:

Korrolar 1.2.4

Sei Y oder sei $Y + \mathbb{R}^p_>$ offen. Dann gilt

$$Y_N = \emptyset.$$

Eine weitere wichtige Existenzaussage erhalten wir aus dem Zornschen Lemma.

Lemma 1.2.5 (Zornsches Lemma)

Sei S eine nicht leere halbgeordnete Menge mit zugehöriger Halbordnung $\prec$.

Eine ***Kette*** K in S sei eine vollständig geordnete Untermenge von S, das heißt für alle $s^1, s^2 \in K$ mit $s^1 \neq s^2$ gilt $s^1 \prec s^2$ oder $s^2 \prec s^1$. Weiter habe jede nicht leere Kette eine untere Schranke.

Dann existieren in S minimale Elemente, das heißt es gibt mindestens ein $\hat{s} \in S$, so dass für alle $s \in S$ mit $s \prec \hat{s}$ gerade $\hat{s} \prec s$ folgt.

Satz 1.2.6

Sei Y nicht leer und sei $y^0 \in Y$ so gegeben, dass

$$Y^0 := \{y \in Y \mid y \leqq y^0\} = (y^0 - \mathbb{R}^p_{\geqq}) \cap Y$$

kompakt ist.

Dann ist Y_N nicht leer.

Die Bestimmung aller nichtdominierenden Punkte und damit der Nachweis der Existens ist stets auch durch ein Ersatzoptimierungsproblem möglich. Allerdings ist dieses eine eher theoretische Aussage, die in der Praxis nicht besonders gut zu handhaben ist. Den Grund dafür werden wir später angeben.

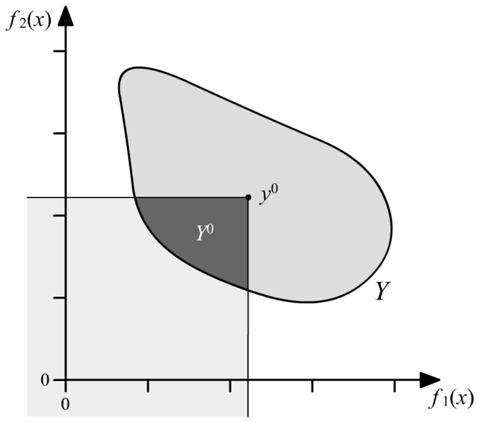


Abbildung 1.8: Veranschaulichung von Satz 1.2.6.

Satz 1.2.7

Der Punkt $\hat{y} \in Y$ mit $\hat{y} = f(\hat{x})$ für $\hat{x} \in X$ ist genau dann nichtdominiert, wenn es ein $\overline{y} \in Y$ und ein $\lambda \in \mathbb{R}^p$ mit $\lambda > 0$ gibt, so dass $\hat{x}$ eine Optimallösung des folgenden skalaren Ersatzproblems ist:

$$\min \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i(x), \qquad \text{so dass} \qquad x \in X \quad \text{und} \quad f(x) \leqq \overline{y}.$$

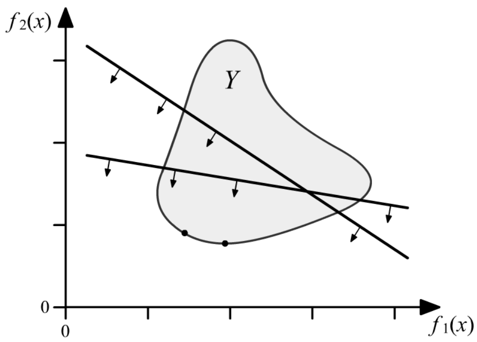


Abbildung 1.9: Bestimmung von Y_N als Optimierungsproblem.

Das Problem bei diesem Satz ist es, dass das $\overline{y}$ benötigt wird, um effiziente Punkte zu bestimmen. Dies ist im Allgemeinen sehr ungünstig, denn somit müssen wir die nichtdominierende Menge bereits kennen, bevor wir die Effizienzmenge nach diesem Satz berechnen können. Trotzdem ist die Aussage für einige theoretische Herleitungen nützlich.

1.3 Schwache und strenge Effizienz

In diesem Abschnitt wollen wir noch weiter Begriffe der Effizienz betrachten.

Definition 1.3.1

Eine Lösung $\hat{x} \in X$ heißt ***schwach effizient***, wenn es kein $x \in X$ gibt, so dass

$$f(x) \; < \; f(\hat{x})$$

gilt. Der Punkt $\hat{y} = f(\hat{x})$ heißt dann ***schwach nichtdominiert***. Die zugehörige schwache Effizienzmenge sei X_{wE} und die schwache nichtdominierende Menge sei Y_{wN}.

Eine Lösung $\hat{x} \in X$ heißt ***streng effizient***, wenn es kein $x \in X$ mit $x \neq \hat{x}$ gibt, so dass

$$f(x) \; \leqq \; f(\hat{x})$$

gilt. Der Punkt $\hat{y} = f(\hat{x})$ heißt dann ***streng nichtdominiert***. Die zugehörige strenge Effizienzmenge sei X_{sE} und die strenge nichtdominierende Menge sei Y_{sN}.

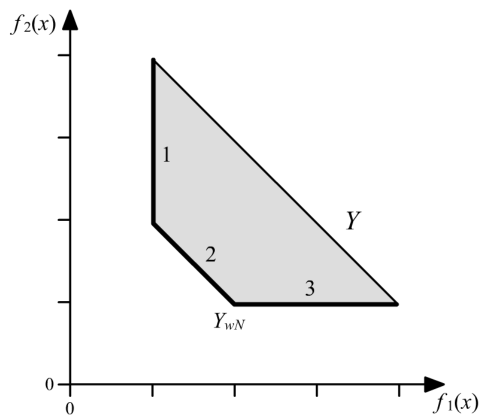


Abbildung 1.10: Beispiel einer schwachen nichtdominierenden Menge: Y_{wN} besteht aus den Strecken 1, 2 und 3, Y_N hingegen nur aus der Strecke 2.

Alternative Definitionen für schwache Effizienz

Analog zu den effizienten Lösungen lassen sich auch hier alternative Definitionen angeben:

(1) $\hat{x} \in X$ ist schwach effizient, wenn es kein $x \in X$ gibt, so dass

$$f(x) - f(\hat{x}) \; \in \; -\mathbb{R}^p_>$$

gilt.

(2) $\hat{x} \in X$ ist schwach effizient, wenn

$$(f(\hat{x}) - \mathbb{R}^p_>) \cap Y \;=\; \emptyset$$

gilt.

Alternative Definition für strenge Effizienz

Für die strenge Effizienz gibt es nur eine alternative Definition:

(1) $\hat{x} \in X$ ist streng effizient, wenn es kein $x \in X$ mit $x \neq \hat{x}$ gibt, so dass

$$f(x) - f(\hat{x}) \;\in\; \mathbb{R}^p_{\geqq}$$

gilt.

Strenge Effizienz heißt, dass ein $y \in Y_{sN}$ ein eindeutiges Urbild besitzt. Dies kann man sich anhand der Menge Y anders als bei den anderen Definitionen von Effizienz natürlich nicht anschaulich klar machen.

Nach den bislang drei bekannten Definitionen von Effizienz gilt also

$$Y_{sN} \;\subset\; Y_N \;\subset\; Y_{wN} \qquad \text{und} \qquad X_{sE} \;\subset\; X_E \;\subset\; X_{wE}.$$

Die Existenz nichtdominierender Punkte impliziert also die Existenz schwach nichtdominierender Punkte.

Schwach nichtdominierende Punkte können aber auch für $Y_N = \emptyset$ existieren:

Beispiel 1.3.2

Sei $Y = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 < y_1 < 2,\, 1 \leq y_2 \leq 2\}$.

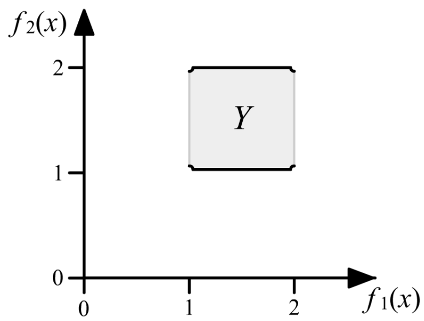


Abbildung 1.11: Verdeutlichung der Menge Y von Beispiel 1.3.2.

In diesem Beispiel gilt

$$Y_N \;=\; \emptyset, \qquad \text{aber} \qquad Y_{wN} \;=\; \{(y_1, 1) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 < y_1 < 2\}.$$

Somit lohnen sich Existenzaussagen für schwach nichtdominierende Mengen.

Satz 1.3.3

Sei $Y \subset \mathbb{R}^p$ nicht leer und kompakt. Dann gilt

$$Y_{wN} \neq \emptyset.$$

Dieser Satz folgt eigentlich aus Satz 1.2.6, wir wollen aber trotzdem einen alternativen Beweis liefern.

Beweis

Wir nehmen an es gelte $Y_{wN} = \emptyset$. Dann existiert für jedes $y \in Y$ ein $y' \in Y$ mit $y \in y' + \mathbb{R}^p_>$. Aus der Vereinigung aller $y \in Y$ ergibt sich

$$Y \subset \bigcup_{y'} (y' + \mathbb{R}^p_>).$$

Da $\mathbb{R}^p_>$ offen ist, folgt auch, dass $y' + \mathbb{R}^p_>$ offen ist. Somit haben wir mit der Vereinigung eine offene Überdeckung von Y. Da Y aber kompakt ist, gibt es zu dieser offenen Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung:

$$Y \subset \bigcup_{j=1}^{k} (y^j + \mathbb{R}^p_>).$$

Weil aber für alle $i = 1, \ldots, k$ auch $y^i \in Y$ ist, folgt

$$y^i \in \bigcup_{j=1}^{k} (y^j + \mathbb{R}^p_>).$$

Für alle $i = 1, \ldots, k$ gibt es somit ein $y \in \{1, \ldots, k\}$ mit $y^i \in y^j + \mathbb{R}^p_>$. Somit gibt es für alle $i = 1, \ldots, k$ ein $y \in \{1, \ldots, k\}$ mit $y^j < y^i$. Eine derartige totale Ordnung ist aber für Elemente aus Y_{wN} nicht möglich, somit muss die Annahme falsch gewesen sein. □

Korollar 1.3.4

Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ nicht leer und kompakt und sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ stetig.

Dann folgt

$$X_{wE} \neq \emptyset.$$

Beweis

Da X nicht leer und kompakt ist, folgt aus der Stetigkeit von f, dass auch $Y = f(X)$ kompakt ist. Somit können wir den vorherigen Satz anwenden und erhalten, dass Y_{wN} nicht leer ist. □

An dieser Stelle soll nun noch eine vierte Definition von Effizienz eingeführt werden.

Definition 1.3.5

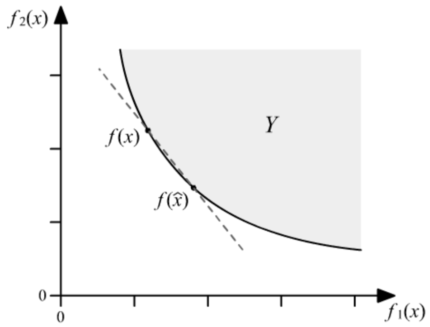
Eine Lösung $\hat{x} \in X$ heißt ***eigentlich effizient***, wenn sie effizient ist und wenn es ein $M > 0$ gibt, so dass für alle $i \in \{1, \ldots, p\}$ und für alle $x \in X$ mit $f_i(x) < f_i(\hat{x})$ es einen Index $j \in \{1, \ldots, p\}$ gibt mit $f_j(\hat{x}) < f_j(x)$, so dass

$$\frac{f_i(\hat{x}) - f_i(x)}{f_j(x) - f_j(\hat{x})} \leq M$$

gilt. Der Punkt $\hat{y} = f(\hat{x})$ heißt dann ***eigentlich nichtdominiert***. Die zugehörige eigentliche Effizienzmenge sei X_{pE} und die eigentliche nichtdominierende Menge sei Y_{pN}.

Nach dieser Definition sind gerade die Punkte $\hat{x} \in X_E$ eigentlich effizient, die sich in keiner Zielfunktion relativ zu den anderen Zielfunktionen *sehr stark* verbessern können.

Würde sich eine Zielfunktion stark verbessern können ohne dass eine andere Zeilfunktion deutlich verschlechtert wird, dann wäre dieser Punkt auch nicht so *interessant* und damit nicht eigentlich effizient. Die Situation sollte auch durch Abbildung 1.12 klarer werden.



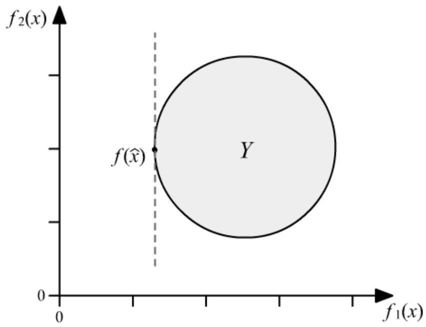


Abbildung 1.12: Beispiel eines eigentlich nichtdominierenden Punktes (links) und eines nicht eigentlich nichtdominierenden Punktes (rechts).

Im linken Teil der Abbildung gilt

$$f_1(x) \; < \; f_1(\hat{x}) \qquad \text{und} \qquad f_2(\hat{x}) \; < \; f_2(x).$$

Somit finden wir eine Gerade durch die Punkte $f(x)$ und $f(\hat{x})$, deren negativen Steigung gerade

$$\frac{f_2(\hat{x}) - f_2(x)}{f_1(x) - f_1(\hat{x})}$$

entspricht. Im rechten Teil finden wir keine derartige Gerade, die Steigung wäre unendlich.

1.4 Effizienzmengen im Entscheidungsraum

In diesem Abschnitt wollen wir noch kurz eine Möglichkeit vorstellen, mit welcher Effizienzmengen im Entscheidungsraum grafisch interpretiert werden können.

Definition 1.4.1

Sei $X \subset \mathbb{R}^n$, sei $f : X \to \mathbb{R}$ und sei $\hat{x} \in X$.

Die ***Niveaumenge*** von f am Punkt $\hat{x}$ wird gegeben durch

$$L_{\leq}(f(\hat{x})) \;=\; \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq f(\hat{x})\}.$$

Die ***Niveaulinie*** von f am Punkt $\hat{x}$ wird gegeben durch

$$L_{=}(f(\hat{x})) \;=\; \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = f(\hat{x})\}.$$

Die ***strenge Niveaumenge*** von f am Punkt $\hat{x}$ wird gegeben durch

$$L_{<}(f(\hat{x})) \;=\; \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < f(\hat{x})\}.$$

Mit diesen Mengen ist es uns möglich direkt im Entscheidungsraum über die Effizienz von Punkten $x \in X$ Aussagen zu treffen.

Satz 1.4.2

Sei $f : X \to \mathbb{R}^p$ mit $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_p(x))$ und sei $\hat{x} \in X$ eine zulässige Lösung.

Dann gilt:

(1) $\hat{x}$ ist genau dann streng efizient, wenn

$$X \cap \bigcap_{k=1}^{p} L_{\leq}(f_k(\hat{x})) \;=\; \{\hat{x}\}$$

gilt.

(2) $\hat{x}$ ist genau dann efizient, wenn

$$X \cap \bigcap_{k=1}^{p} L_{\leq}(f_k(\hat{x})) \;=\; \bigcap_{k=1}^{p} L_{=}(f(\hat{x}))$$

gilt.

(3) $\hat{x}$ ist genau dann schwach efizient, wenn

$$X \cap \bigcap_{k=1}^{p} L_{<}(f_k(\hat{x})) \;=\; \emptyset$$

gilt.

Beispiel 1.4.3

Wir betrachtes wieder das Problem aus Beispiel 1.1.1 mit der geänderten Zielfunktion

$$f(x) \;=\; (f_1(x), f_2(x)) \;=\; (-2x_1 - x_2,\, -x_1 - 2x_2)$$

und ergänzen die Nebenbedingung $2x_1 + x_2 \leq 58/17$. Weiter seien

$$x^1 \;=\; \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \qquad x^2 \;=\; \left(\frac{20}{17}, \frac{18}{17}\right) \qquad \text{und} \qquad x^3 \;=\; \left(\frac{29}{17}, 0\right).$$

In Abbildung 1.13 wurden die Niveaulinien der Punkte x^1, x^2 und x^3 eingetragen und der Durchschnitt der Niveaumengen verdeutlicht.

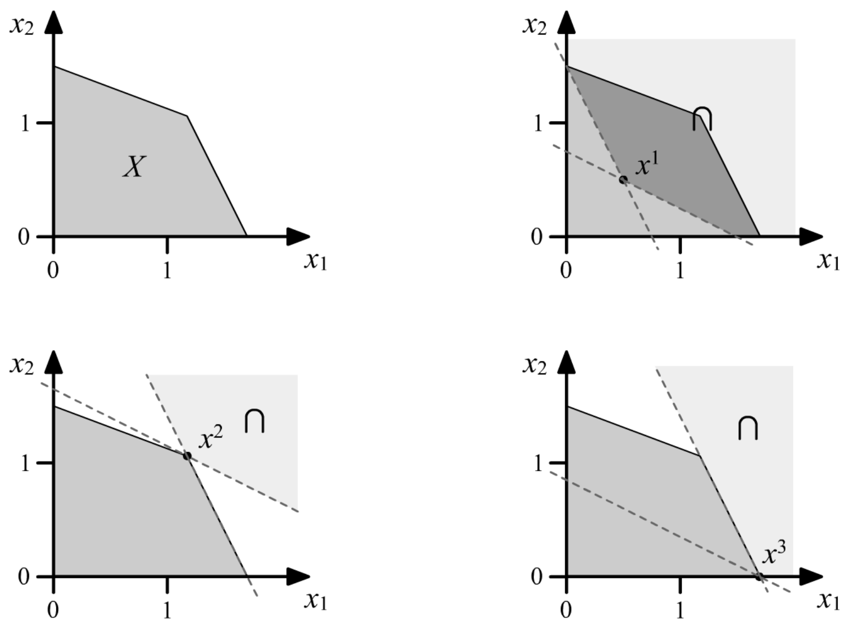


Abbildung 1.13: Niveaulinien zu Beispiel 1.4.3. Der Durchschnitt der Niveaumengen wurde mit $\bigcap$ gekennzeichnet.

Wir erhalten damit folgendes Ergebnis: Der Punkt x^1 ist nach keiner der drei Definitionen effizient, x^2 ist streng effizient und x^3 ist schwach effizient.

1.5 Aufgaben

Aufgabe 1.5.1

Prüfe, welche der Ordnungen

$$\leqq, \qquad \leq, \qquad <, \qquad \leq_{\text{lex}}, \qquad \leq_{\text{MO}}$$

die Voraussetzungen einer Halbordnung oder einer strengen Halbordnung erfüllt.

Lösung

Wir haben die Bedingungen aus Definition 1.1.6 zu überprüfen und erhalten:

(1) Die schwach komponentenweise Ordnung $\leqq$ ist reflexiv, transitiv und antisymmetrisch. Somit ist $\leqq$ eine Halbordnung.

(2) Die komponentenweise Ordnung $\leq$ ist transitiv, asymmetrisch, aber weder reflexiv noch antisymmetrisch. Somit ist $\leq$ eine strenge Halbordnung.

(3) Die streng komponentenweise Ordnung $<$ ist transitiv, asymmetrisch, aber weder reflexiv noch antisymmetrisch. Somit ist $<$ eine strenge Halbordnung.

(4) Die lexikographische Ordnung $\leq_{\text{lex}}$ $\leq_{\text{lex}}$ ist reflexiv, transitiv und antisymmetrisch. Somit ist $\leq_{\text{lex}}$ eine Halbordnung.

(5) Die maximale Ordnung $\leq_{\text{MO}}$ ist weder asymmetrisch noch antisymmetrisch, denn für $x = (1, 0, 0)$ und $y = (0, 1, 0)$ gilt

$$x \ \leq_{\text{MO}} \ y \qquad \text{und} \qquad y \ \leq_{\text{MO}} \ x,$$

obwohl $x \neq y$ gilt. Somit ist $\leq_{\text{MO}}$ weder eine Halbordnung noch eine strenge Halbordnung.

Aufgabe 1.5.2

Betrachte das Problem

$$\text{vecmin} f(x) = (x^2, (x-1)^2)$$

unter der Nebenbedingung $x \in [0, 2]$. Veranschauliche das Problem im Zielraum und bestimme damit die nichtdominierende Menge X_N und die Effizienzmenge X_E.

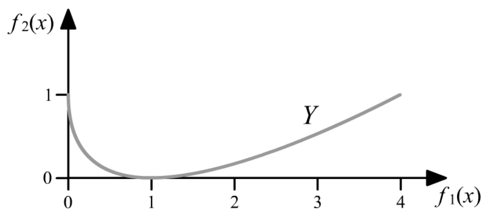


Abbildung 1.14: Verdeutlichung von $Y = f(X)$.

Lösung

Das Bild der zulässigen Menge $X = [0, 2]$ entspricht einer Kurve im $\mathbb{R}^2$ und wurde in Abbildung 1.14 verdeutlicht.
Nach der Definition der nichtdominierenden Menge Y_N erhalten wir

$$Y_N \; = \; \{(y^2, (y-1)^2) \mid y \in [0,1]\} \; \subset \; \mathbb{R}^2$$

und dazu die Effizienzmenge

$$X_E \; = \; [0,1] \; \subset \; \mathbb{R}.$$

Aufgabe 1.5.3

Wir betrachtes das Problem aus Beispiel 1.1.1 mit der geänderten Zielfunktion

$$f(x) \; = \; (f_1(x), f_2(x)) \; = \; (-2x_1 - x_2, \, -x_1 - 2x_2).$$

Stelle das Bild $Y = f(X)$ der zulässigen Menge X grafisch dar und bestimme die nichtdominierende Menge X_N und die Effizienzmenge X_E.

Dazu kann verwendet werden, dass das Bild eines kompakten Polyeders unter einer linearen Abbildung wieder ein kompakter Polyeder ist. Ist weiter f sogar injektiv, so werden jeweils Extremalpunkte aufeinander abgebildet.

Lösung

Die zulässige Menge ist das Polyeder X mit den Extremalpunkten

$$\left\{(0,\,0)\,,\;\; (2,\,0)\,,\;\; \left(0,\,\frac{3}{2}\right),\;\; \left(\frac{30}{17},\,\frac{10}{17}\right),\;\; \left(\frac{20}{17},\,\frac{18}{17}\right)\right\}.$$

Da f injektiv ist, können wir den Hinweis verwenden um $Y = f(X)$ zu bestimmen. Wir erhalten für Y ein Polyeder mit den Extremalpunkten

$$\left\{(0,\,0)\,,\;\; (-4,\,-2)\,,\;\; \left(-\frac{3}{2},\,-3\right),\;\; \left(-\frac{70}{17},\,-\frac{50}{17}\right),\;\; \left(-\frac{58}{17},\,-\frac{56}{17}\right)\right\}.$$

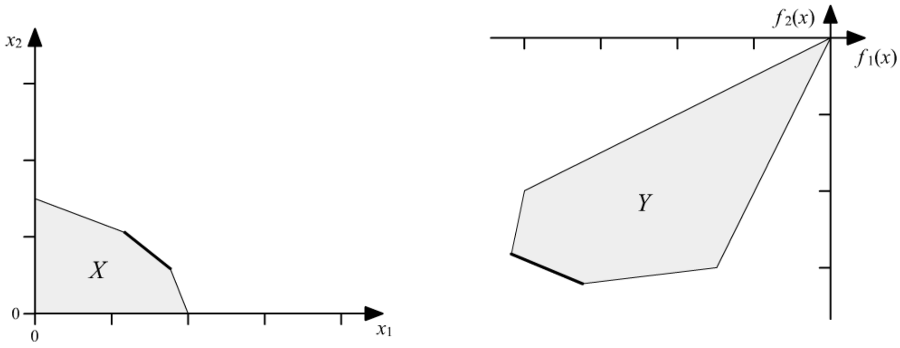


Abbildung 1.15: Zulässige Menge X und $Y = f(X)$ zu Aufgabe 1.5.3.

Damit ergibt sich die nichtdominierende Menge

$$Y_N \;=\; \left\{\lambda\left(-\frac{70}{17}, -\frac{50}{17}\right) + (1-\lambda)\left(-\frac{58}{17}, -\frac{56}{17}\right) \;\Big|\; 0 \le \lambda \le 1\right\}$$

und die zugehörige Effizienzmenge

$$X_E \;=\; \left\{\lambda\left(\frac{30}{17}, \frac{10}{17}\right) + (1-\lambda)\left(\frac{20}{17}, \frac{18}{17}\right) \;\Big|\; 0 \le \lambda \le 1\right\}.$$

Aufgabe 1.5.4

Gib ein Beispiel eines multikriteriellen Optimierungsproblem mit $X \subset \mathbb{R}$ an, für dass

$$X_{sE} \;\neq\; X_E \;\neq\; X_{wE}$$

gilt.

Lösung

Wir betrachten die zulässige Menge

$$X \;=\; [-\pi/2,\, 15\pi/2) \;\subset\; \mathbb{R}$$

mit dem Zielfunktionsvektor

$$f(x) \;=\; \begin{cases} (\pi/2 + \cos x,\, \sin x) & \text{für} \quad -\pi/2 \le x < \pi/2 \\ (\pi - x,\, 1) & \text{für} \quad \pi/2 \le x < 3\pi/2 \\ (\cos(x-\pi) - \pi/2,\, \sin(x-\pi)) & \text{für} \quad 3\pi/2 \le x < 5\pi/2 \\ (x - 3\pi,\, -1) & \text{für} \quad 5\pi/2 \le x < 7\pi/2 \\ (\pi/2 + \cos x,\, \sin x) & \text{für} \quad 7\pi/2 \le x < 9\pi/2 \\ (5\pi - x,\, 1) & \text{für} \quad 9\pi/2 \le x < 11\pi/2 \\ (\cos(x-\pi) - \pi/2,\, \sin(x-\pi)) & \text{für} \quad 11\pi/2 \le x < 13\pi/2 \\ (x - 7\pi,\, -1) & \text{für} \quad 13\pi/2 \le x < 15\pi/2 \end{cases}.$$

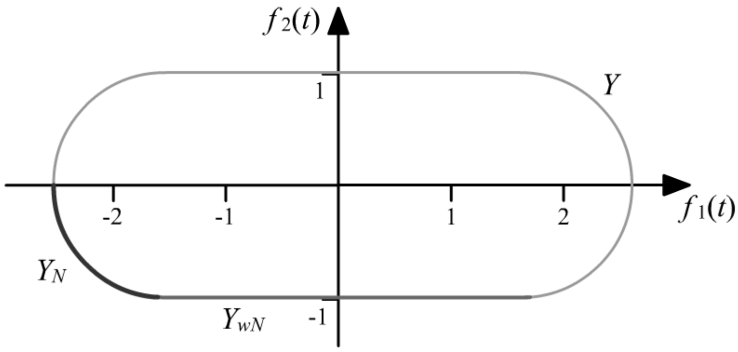


Abbildung 1.16: Bild der Menge X aus Aufgabe 1.5.4.

Das Bild $Y = f(X)$ ist Abbildung 1.16 zu entnehmen. Die geschlossene Kurve wird dabei genau zweimal durchlaufen.
In diesem Beispiel gilt $X_{sE} = \emptyset$, da jeder Punkt aus Y genau zwei Urbilder hat und somit auch $Y_{sN} = \emptyset$ ist. Weiter besteht Y_N aus einem Teil des Kreisbogens, das Urbild davon ist

$$X_N = [4\pi/2, 5\pi/2] \cup [12\pi/2, 13\pi/2].$$

Zu der Menge Y_{wN} gehört zusätzlich auch noch die untere Strecke, als Urbild erhalten wir

$$X_{wN} = [4\pi/2, 7\pi/2] \cup [12\pi/2, 15\pi/2].$$

In diesem Beispiel gilt also

$$X_{sE} \subset X_E \subset X_{wE},$$

aber trotzdem

$$X_{sE} \neq X_E \neq X_{wE}.$$

Aufgabe 1.5.5

Gegeben sei ein multikriterielles Optimierungsproblem mit p Zielfunktionen. Nun wird bei gleichem Entscheidungsraum eine weitere Zielfunktion hinzugefügt.

Untersuche, ob die Effizienzmenge des ursprünglichen Problems dadurch größer, kleiner oder unverändert bleiben kann. Gib jeweils ein Beispiel an oder widerlege die Aussage.

Lösung

Zunächst geben wir ein Beispiel an, in welchem die Effizienzmenge größer wird. Sei $X = [0, 1]$ und $f(x) = (f_1(x)) = (x)$. Dabei besteht die Effizienzmenge X'_E des ursprünglichen Problem nur aus $X'_E = \{0\}$. Nun fügen wir eine weitere Zielfunktion hinzu: $f(x) = (f_1(x), f_2(x)) = (x, -x)$. Hierbei ist die Effizienzmenge $X_E = [0,1]$ und damit echt größer als X'_E.

Nun betrachten wir wieder $X = [0,1]$ und $f(x) = (f_1(x)) = (x)$ mit $X'_E = \{0\}$ und modifizieren diesmal zu $f(x) = (f_1(x), f_2(x)) = (x, x)$. Hier gilt auch $X_E = \{0\}$, also bleibt die Effizienzmenge unverändert.

Die Effizienzmenge kann aber auch kleiner werden: Sei $X = [0,1]$ und $f(x) = (f_1(x)) = (0)$, hier ist $X'_E = [0,1]$. Weiter betrachten wir $f(x) = (f_1(x), f_2(x)) = (0, x)$ und erhalten nun $X_E = \{0\}$, die Effizienzmenge wurde also kleiner.

Aufgabe 1.5.6

Wir betrachten das multikriteriellen Optimierungsproblem mit

$$X \;=\; \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^1 \mid (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 1,\ 0 \leq x_1, x_2 \leq 1\}$$

mit

$$f(x) \;=\; f(x_1, x_2) \;=\; (f_1(x), f_2(x)) \;=\; (x_1, x_2) \;=\; \mathrm{id}(x).$$

Zeichne $Y = f(X)$ und zeige mit Hilfe der Definition von eigentlich effizienten Punkten, dass die Punkte $x^1 = (1,0)$ und $x^2 = (0,1)$ nicht eigentlich effizient sind.

Lösung

Das Bild $Y = f(X)$ ist Abbildung 1.17 zu entnehmen.

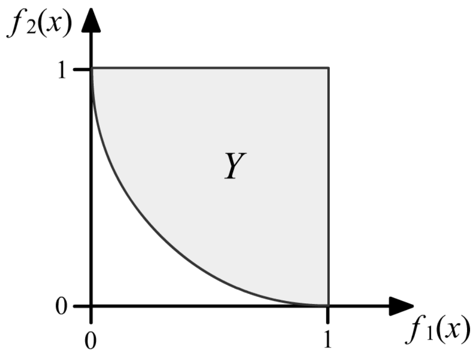


Abbildung 1.17: Bild der Menge X aus Aufgabe 1.5.6.

Zunächst betrachten wir $x^1 = (1,0)$. Hier kann sich nur die erste Variable verbessern und die zweite verschlechtern. Wir haben dann

$$\frac{f_1(x^1) - f_1(x)}{f_2(x) - f_2(x^1)} \;=\; \frac{1 - x_1}{x_2} \quad \overset{(x_1,x_2)\to(1,0)}{\longrightarrow} \quad \infty,$$

somit kann keine obere Schranke M gefunden werden. Bei $x^2 = (0,1)$ haben wir analog

$$\frac{f_2(x^2) - f_2(x)}{f_1(x) - f_1(x^1)} = \frac{1 - x_2}{x_1} \quad \overset{(x_1,x_2)\to(0,1)}{\longrightarrow} \quad \infty,$$

somit sind x^1 und x^2 nicht eigentlich effizient. Beide Grenzwerte können nach der Regel von L'Hospital bestimmt werden.

Aufgabe 1.5.7

Sei $f(x) = x$ und damit

$$X = Y = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid y_1 < 0,\ y_2 = 1/y_1\}.$$

Zeichne Y im Zielbereich und zeige, dass $Y_N = Y$, aber $Y_{pN} = \emptyset$ gilt.

Lösung

Das Bild $Y = f(X)$ ist Abbildung 1.18 zu entnehmen.

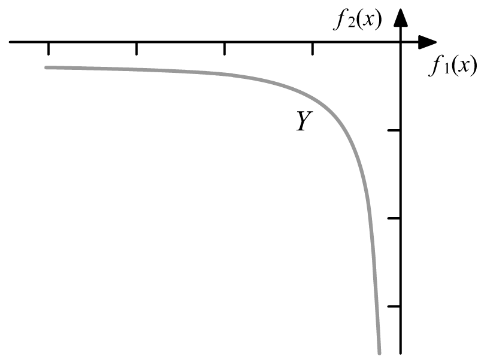


Abbildung 1.18: Bild der Menge X aus Aufgabe 1.5.7.

Nach der alternativen Definition von Effizienz ist sofort klar, dass $Y_N = Y$ gilt.

Betrachten wir ein nun ein beliebiges $a = (a_1, a_2) \in Y$, dann gilt

$$\frac{f_1(a) - f_1(x)}{f_2(x) - f_2(a)} = \frac{a_1 - x_1}{x_2 - a_2} = \frac{a_1 - x_1}{1/x_1 - 1/a_1} = x_1 a_1 \quad \overset{(x_1,x_2)\to(-\infty,0)}{\longrightarrow} \quad \infty,$$

somit kann keine obere Schranke M gefunden werden und kein $a \in Y$ ist eigentlich effizient. Es gilt also $Y_{pN} = \emptyset$.

2 Skalierungsverfahren

In diesem Kapitel wollen wir uns mit einer bestimmten Klasse von Lösungsverfahren für multikriterielle Optimierungsproblemen beschäftigen.

2.1 Methode der gewichteten Summe

Ähnlich zum skalaren Ersatzproblem aus Satz 1.2.7 definieren wir nun ein Optimierungsproblem, das kein $\overline{y}$ benötigt.

Definition 2.1.1

Für ein multikriterielle Optimierungsproblem $\text{vecmin}(f_1(x), \ldots, f_p(x))$ mit $x \in X$ ist das ***parametrische Problem*** (PP) gegeben durch

$$\min \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k(x) \qquad \text{mit} \qquad x \in X.$$

Es gelte $y_k = f(x_k)$ und es sei

$$S(\lambda, Y) \;:=\; \left\{ \hat{y} \in Y \;\middle|\; \hat{y} = \min_{x \in X} \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k(x) \right\}$$

die Menge der optimalen Punkte bezüglich λ. Weiter definieren wir

$$S(Y) \;=\; \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}^p_>} S(\lambda, Y) \qquad \text{und} \qquad S_0(Y) \;=\; \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}^p_\geq} S(\lambda, Y).$$

Beispiel

Für $p = 2$ und $\lambda = (1, 2)$ ist das parametrische Problem (PP) also

$$\min(f_1(x) + 2 f_2(x)) \qquad \text{mit} \qquad x \in X.$$

Aus der Definition folgt direkt

$$S(Y) \;\subset\; S_0(Y).$$

Der Fall $\lambda = 0$ wird nie betrachtet, da hier $S(0, Y) = Y$ folgt, das heißt jeder Punkt wäre optimal.

Im Folgenden werden wir die Beziehung von $S(Y)$ und effizienten Lösungen sowie von $S_0(Y)$ und schwach effizienten Lösungen untersuchen.

Satz 2.1.2

Sei $Y \subset \mathbb{R}^p$ beliebig.

Jede optimale Lösung des parametrischen Problems (PP) für $\lambda \in \mathbb{R}^p_{\geq}$ ist schwach effizient, es gilt also

$$S_0(Y) \ \subset \ Y_{wN}.$$

Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht, siehe Aufgabe 2.7.1. Mit zusätzliche Bedinungen erhalten wir jedoch trotzdem Gleichheit, dazu die folgenden Definitionen.

Lemma 2.1.3

Sei $\lambda \in \mathbb{R}^p_{\geq}$.

(1) Enthält die Menge $S(\lambda, Y)$ nur ein Element, also $S(\lambda, Y) = \{\hat{y}\}$, dann gilt $\hat{y} \in Y_N$.

(2) Ist $\hat{x} \in X$ eine eindeutige optimale Lösung eines parametrischen Problems (PP), dann ist $\hat{x} \in X_{sE}$.

Definition 2.1.4

Eine Menge $Y \subset \mathbb{R}^p$ heißt $\mathbb{R}^p_{\geqq}$***-konvex***, wenn $Y + \mathbb{R}^p_{\geqq}$ konvex ist.

Nach dieser Definition ist jede konvexe Menge auch $\mathbb{R}^p_{\geqq}$-konvex. In Abbildung 1.7 auf Seite 12 ist jedoch eine nicht konvexe Menge Y gegeben, die trotzdem $\mathbb{R}^p_{\geqq}$-konvex ist.

Definition 2.1.5

Die Menge der ***relativen inneren Punkte*** $\mathrm{ri}(Y)$ von Y wird gegeben als die Menge der inneren Punkte $\mathrm{int}(Y)$ von Y im kleinsten affinen Unterraum von Y betrachtet.

Nach dieser Definition sind die relativen inneren Punkte einer kompakten Kreisscheibe im Raum alle Punkte ausser dem Rand der Kreisscheibe. Eine Strecke im Raum hat als relative innere Punkte alle Punkte ausser ihren beiden Endpunkten.

Lemma 2.1.6

Seien $Y_1, Y_2 \subset \mathbb{R}^p$ nicht leer und konvex.

Dann gilt genau dann

$$\mathrm{ri}(Y_1) \cap \mathrm{ri}(Y_2) \;=\; \emptyset,$$

wenn es ein $\lambda \in \mathbb{R}^p - \{0\}$ gibt mit

$$\inf_{y^1 \in Y_1} \sum_{k=1}^{p} \lambda_k y_k^1 \;\geq\; \sup_{y^2 \in Y_2} \sum_{k=1}^{p} \lambda_k y_k^2 \quad \text{und} \quad \sup_{y^1 \in Y_1} \sum_{k=1}^{p} \lambda_k y_k^1 \;>\; \inf_{y^2 \in Y_2} \sum_{k=1}^{p} \lambda_k y_k^2.$$

Wir erhalten also eine *eigentliche* Trennung der beiden Mengen durch eine Hyperebene mit Normalenvektor λ, wie Abbildung 2.1 verdeutlicht.

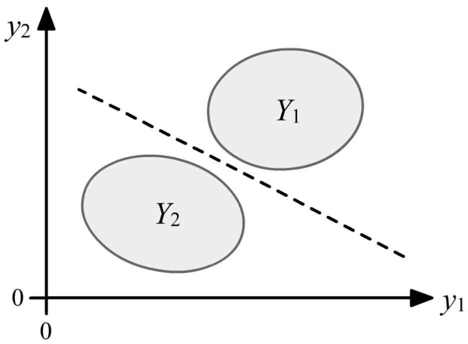


Abbildung 2.1: Eigentliche Trennung zweier konvexer Mengen.

Damit erhalten wir das nächste wichtige Ergebnis:

Satz 2.1.7

Sei $Y \subset \mathbb{R}^p$ eine $\mathbb{R}^p_{\geqq}$-konvexe Menge. Dann gilt

$$S_0(Y) \;=\; Y_{wN}.$$

Damit haben wir schwach effiziente Lösungen untersucht, nun gehen wir zu effizienten Lösungen über.

Satz 2.1.8

Sei $Y \subset \mathbb{R}^p$ eine $\mathbb{R}^p_{\geqq}$-konvexe Menge. Dann gilt

$$S(Y) \;\subset\; Y_N.$$

Lemma 2.1.9

Sei $Y \subset \mathbb{R}^p$ eine $\mathbb{R}^p_{\geqq}$-konvexe Menge. Dann gilt

$$Y_N \ \subset \ S_0(Y).$$

Auch hier ist die Umkehrung im Allgemeinen falsch, siehe Aufgabe 2.7.1.

Zusammenfassung

Für jede beliebige Menge $Y \subset \mathbb{R}^p$ gilt

$$S(Y) \ \subset \ Y_N \qquad \text{und} \qquad S_0(Y) \ \subset \ Y_{wN},$$

das Lösen des parametrischen Problemes (PP) liefert also effiziente bzw. schwach effiziente Lösungen.

Ist Y zusätzlich $\mathbb{R}^p_{\geqq}$-konvex, dann gilt sogar

$$S(Y) \ \subset \ Y_N \ \subset \ S_0(Y) \ = \ Y_{wN}.$$

Alle anderen Inklusionen gelten im Allgemeinen nicht.

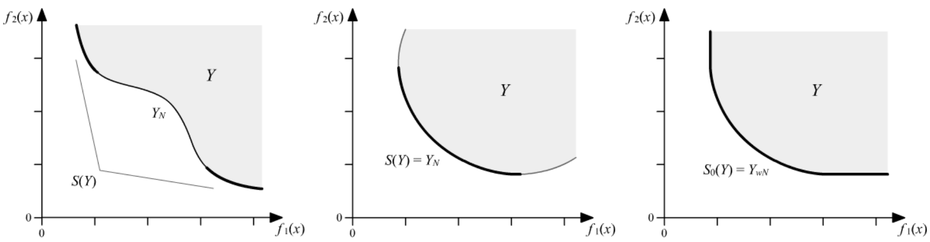


Abbildung 2.2: Vergleich von $S(Y)$ mit Y_N und $S_0(Y)$ mit Y_{wN}.

Satz 2.1.10

Sei $\lambda \in \mathbb{R}^p_{>}$ mit $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k = 1$.

Dann ist ein Punkt $\hat{x} \in X$ eigentlich effizient, wenn er eine optimale Lösung des parametrichen Problems (PP) bezüglich λ ist.

Die Normierung des Vektors λ ist hierbei rein formal, damit weniger λ untersucht werden müssen.

Korollar 2.1.11

Sei $Y \subset \mathbb{R}^p$. Dann gilt $S(Y) \subset Y_{pN}$.

Unter zusätzlichen Konvexitätsbedingungen erhalten wir auch hier wieder Gleichheit:

Satz 2.1.12

Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ konvex und sei $f_k : X \to \mathbb{R}$ konvex für $k = 1, \dots, p$.

Dann ist ein $\hat{x} \in X$ genau dann eigentlich effizient, wenn $\hat{x}$ eine optimale Lösung des parametrischen Problems (PP) mit $\lambda \in \mathbb{R}^p_>$ ist.

Für nicht $\mathbb{R}^p_{\geqq}$-konvexe Mengen erhalten wir mit einem parametrischen Ersatzproblem sehr schlechte Ergebnisse:

Beispiel 2.1.13

Sei $X = \{x \in \mathbb{R}^p_{\geqq} \mid x_1^2 + x_2^2 \geq 1\}$ und sei $f(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$.

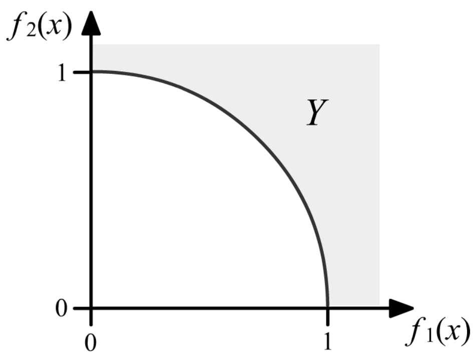


Abbildung 2.3: Zulässige Menge zu Beispiel 2.1.13.

Hier gilt $X_E = \{x \in X \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$, aber alle optimalen Lösungen des parametrischen Problems (PP) für alle $\lambda \in \mathbb{R}^p_{\geq}$ sind nur die beiden Lösungen $x^1 = (1, 0)$ und $x^2 = (0, 1)$.

Daher wollen wir ein neues Ersatzproblem einführen, welches mehr optimale Punkte liefert.

2.2 Die ε-Constraint Methode

Wie bereits erwähnt ist es nun das Ziel eine Methode zu entwickeln, welche auch für nicht $\mathbb{R}^p_{\geqq}$-konvexe Mengen Y zufriedenstellende Ergebnisse liefert. Die Idee ist dabei, dass nur eine Zielfunktion $f_j(x)$ minimiert wird. Alle anderen Zielfunktionen $f_k(x)$ werden zu Nebenbedingungen überführt. Dies geschieht durch festlegen einer oberen Schranke ε_k, die durch $f_k(x)$ nicht überschritten werden darf. Ein Beispiel für einen derartigen Lösungsansatz haben wir bereits in der Einleitung unter 1.1.5 Punkt **(2)** kennengelernt.

Definition 2.2.1

Für ein multikriterielles Optimierungsproblem vecmin$(f_1(x), \ldots, f_p(x))$ mit $x \in X$ und ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^p$ ist das ***ε-Constraint Problem*** (εCP) für ein $j \in \{1, \ldots, p\}$ gegeben durch

$$\min f_j(x) \qquad \text{mit} \qquad x \in X$$

unter der Nebendbedingung, dass

$$f_k(x) \;\leq\; \varepsilon_k$$

gilt für $k = 1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, p$.

Beispiel 2.2.2

Abbildung 2.4 zeigt ein ε-Constraint Problem mit $j = 2$ und zwei möglichen Werten für ε.

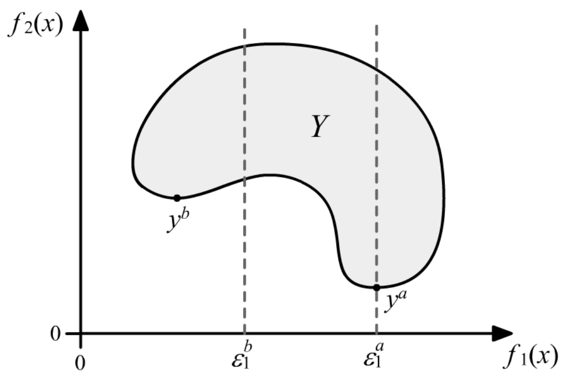


Abbildung 2.4: Beispiel eines ε-Constraint Problems.

Satz 2.2.3

Sei $\hat{x}$ eine optimale Lösung eines ε-Constraint Problems (εCP) für ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^p$ und ein $j \in \{1, \ldots, p\}$.

Dann ist $\hat{x}$ schwach effizient.

Beweis

Wir nehmen an, dass $\hat{x} \notin X_{wE}$ gilt. Dann gibt es ein $x \in X$ mit $f(x) < f(\hat{x})$. Insbesondere gilt dann

$$f_j(x) \;<\; f_j(\hat{x}).$$

Der Punkt x ist auch zulässig für (εCP), da

$$f_k(x) \ < \ f_k(\hat{x}) \ \leq \ \varepsilon_k$$

für alle $k \neq j$ gilt. Damit haben wir einen Widerspruch zur Optimalität von $\hat{x}$ für (εCP). □

Beispiel 2.2.4

Wir untersuchen nun die Eindeutigkeit einer optimalen Lösung eines ε-Constraint Problems.

Abbildung 2.5 zeigt, dass eine optimale Lösung von (εCP) keineswegs eindeutig sein muss.

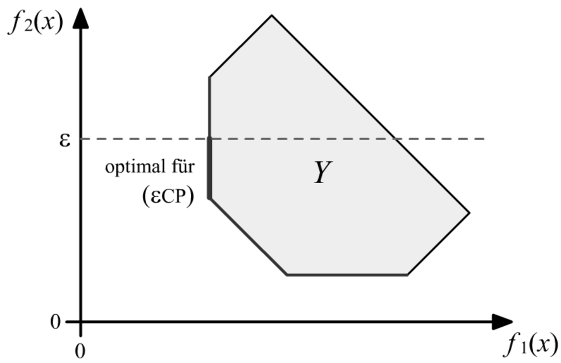


Abbildung 2.5: Keine eindeutige optimale Lösung von (εCP).

Es gilt aber der folgende Satz:

Satz 2.2.5

Sei $\hat{x}$ eine eindeutige optimale Lösung eines ε-Constraint Problems (εCP) für ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^p$ und ein $j \in \{1, \ldots, p\}$.

Dann ist $\hat{x}$ stark effizient und damit auch effizient.

Satz 2.2.6

Eine zulässige Lösung $\hat{x}$ eines ε-Constraint Problems ist genau dann effizient, wenn es ein $\hat{\varepsilon} \in \mathbb{R}^p$ gibt, so dass $\hat{x}$ das Problem $(\hat{\varepsilon} CP)$ optimal löst für alle $j = 1, \ldots, p$.

Bei der Bestimmung der Effizienz eines Punktes $\hat{x}$ ist die Wahl von $\hat{\varepsilon}$ jedoch wieder sehr problematisch, da Kenntnisse von $f(\hat{x})$ benötigt werden. Der Satz ist daher wieder ein eher theoretisches Ergebnis.

2.3 Die Hybrid Methode

Die Hybrid Methode kombiniert die gewichtete Summe und die ε-Constraint Methode.

Definition 2.3.1

Für ein multikriterielles Optimierungsproblem vecmin$(f_1(x), \ldots, f_p(x))$ mit $x \in X$ und ein $\lambda \in \mathbb{R}^p_\geq$ ist das ***Hybrid Problem*** (HP) für ein $x^0 \in X$ gegeben durch

$$\min \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k(x) \qquad \text{mit} \qquad x \in X$$

unter der Nebendbedingung, dass

$$f_k(x) \ \leq \ f_k(x^0)$$

gilt für $k = 1, \ldots, p$.

Das folgende Beispiel soll verdeutlichen, dass mit der Hybrid Methode auch effiziente Punkte gefunden werden können, die mit der gewichteten Summe nicht erreicht werden.

Beispiel 2.3.2

Sei $X = \{x \in \mathbb{R}^p_\geqq \mid x_1^2 + x_2^2 \geq 1\}$ und sei $f(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$.

Der in Abbildung 2.6 gezeigte Punkt $\hat{x}$ ist effizient, wird aber von der gewichteten Summe für kein $\lambda \in \mathbb{R}^p_\geq$ gefunden. Es gilt also $\hat{x} \in X_E$ und $\hat{x} \notin S_0(Y)$.
Trotzdem gibt es geeignete Punkte $x^0 \in X$ mit $x^0 \neq \hat{x}$ und geeignete $\lambda \in \mathbb{R}^p_\geq$, so dass $\hat{x}$ mit der Hybrid Methode (HP) gefunden wird. Hierbei sind nur Punkte aus der dunkler dargestellten Fläche zulässig.

Satz 2.3.3

Eine zulässige Lösung $x^0 \in X$ ist genau dann eine optimale Lösung des Hybrid Problems zu jedem $\lambda \in \mathbb{R}^p_>$, wenn $x^0 \in X_E$ gilt.

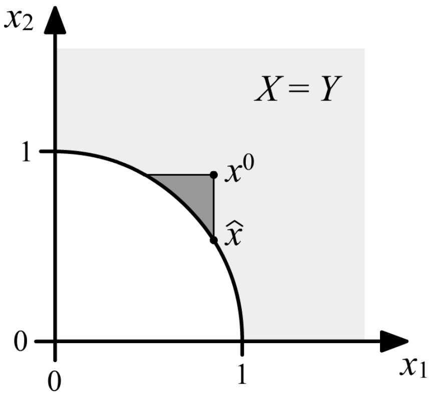


Abbildung 2.6: Zulässige Menge X zu Beispiel 2.3.2.

Beweis

Zunächst sei $x^0 \in X$ optimal für das Hybrid Problem (HP). Angenommen x^0 ist nicht effizient, dann gibt es ein $x \in X$, so dass

$$f_k(x) \;\leq\; f_k(x^0)$$

gilt für $k = 1, \ldots, p$ und $f_j(x) < f_j(x^0)$ für ein $j \in \{1, \ldots, p\}$. Da x^0 optimal ist für (HP), folgt mit der vorherigen Erkenntnis

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k(x^0) \;\leq\; \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k(x) \;<\; \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k(x^0).$$

Dies kann aber nicht sein, also war die Annahme falsch.

Nun sei $x^0 \in X_E$. Dann gilt

$$f_k(x) \;\leq\; f_k(x^0)$$

für $k = 1, \ldots, p$ nur für die $x \in X$, für die $f(x) = f(x^0)$ gilt. Somit ist das zugehörige Hybrid Problem für alle zulässigen Punkte $x \in X$ optimal, da für alle zulässigen x gerade

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k(x) \;=\; \text{konstant}$$

gilt. Insbesondere ist also auch x^0 eine optimale Lösung von (HP). □

2.4 Die Elastic-Constraint Methode

Diese Methode ist ähnlich zu ε-Constraint Problemen, nur dürfen hier die Nebenbedingungen auch verletzt werden, wenn sie dafür bestraft werden.

Definition 2.4.1

Für ein multikriterielles Optimierungsproblem $\operatorname{vecmin}(f_1(x), \ldots, f_p(x))$ mit $x \in X$ und einem $\varepsilon \in \mathbb{R}^p$ sowie $\mu \in \mathbb{R}^p_{\geqq}$ ist das ***Elastic-Constraint Problem*** (ECP) für ein $j \in \{1, \ldots, p\}$ gegeben durch

$$\min f_j(x) + \sum_{k \neq j} \mu_k s_k \qquad \text{mit} \qquad x \in X$$

unter den Nebendbedingungen, dass

$$f_k(x) - s_k \ \leq \ \varepsilon_k \qquad \text{und} \qquad s_k \ \geq \ 0$$

gilt für $k = 1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, p$.

Der Wert s_k gibt an, wie stark die Zielfunktion $f_k(x)$ verletzt werden darf und μ_k gibt den Faktor der Bestrafung an. Für eine Wahl von $\mu_k = 0$ wird die Zielfunktion $f_k(x)$ also nicht betrachtet. Eine optimale Lösung dieses Problems werden wir mit $(\hat{x}, \hat{s})$ bezeichnen.

Beispiel 2.4.2

Sei $X = \{x \in \mathbb{R}^p_{\geqq} \mid x_1^2 + x_2^2 \geq 1\}$ und sei $f(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$. Wir betrachten $j = 2$ und $\varepsilon_1 = 1/2$ sowie $\mu_1 = 2$.

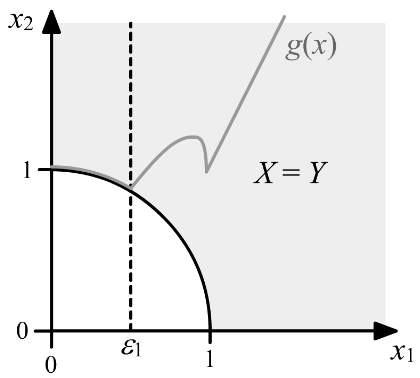


Abbildung 2.7: Zulässige Menge X und die Funktion g aus Beispiel 2.4.2.

Die Zielfunktion des Elastic-Constraint Problems (ECP) ist also

$$\min_{x \in X,\ s_1 \geq 0} f_2(x) + 2 s_1 \ = \ \min_{x \in X} f_2(x) + 2 \max\{0,\, x_1 - 1/2\}.$$

Dies können wir auch als Funktion von x_1 schreiben:

$$g(x_1) \ = \ \min_{x \in X} x_2 + 2 \max\{0,\, x_1 - 1/2\}.$$

Der Graph dieser Funktion wurde in Abbildung 2.7 dargestellt. Die optimale Lösung für das Elastic-Constraint Problems ist in diesem Fall die gleiche Lösung wie sie es auch für das ε-Constraint Problem wäre. Durch ausreichend hohes Bestrafen der Verletzung von $f_1(x)$ wird jedoch ein Minimum erzielt, für das diese Nebendbedingung aktiv ist.

Lemma 2.4.3

Sei $(\hat{x}, \hat{s})$ eine optimale Lösung für ein Elastic-Constraint Problem (ECP) mit $\mu \geq 0$.

Dann gilt $\hat{x} \in X_{wE}$.

Beweis

Wir nehmen an, dass $\hat{x} \notin X_{wE}$ gilt, es gibt also ein $x \in X$ mit

$$f_k(x) \ < \ f_k(\hat{x})$$

für alle $k = 1, \ldots, p$. Dann ist auch $(x, \hat{s})$ zulässig für (ECP) und es gilt

$$f_j(x) + \sum_{k \neq j} \mu_k \hat{s}_k \ < \ f_j(\hat{x}) + \sum_{k \neq j} \mu_k \hat{s}_k.$$

Dies ist ein Widerspruch zur Optimalität von $(\hat{x}, \hat{s})$. □

Lemma 2.4.4

Sei $(\hat{x}, \hat{s})$ eine eindeutige optimale Lösung für ein Elastic-Constraint Problem (ECP) mit $\mu \geq 0$.

Dann gilt $\hat{x} \in X_{sE}$.

Beweis

Wir nehmen an, dass $\hat{x} \notin X_{sE}$ gilt, es gibt also ein $\hat{x} \neq x \in X$ mit

$$f_k(x) \ \leq \ f_k(\hat{x})$$

für alle $k = 1, \ldots, p$. Dann ist auch $(x, \hat{s})$ zulässig für (ECP) und da $\hat{x}$ eine optimale Lösung für (ECP) ist, folgt

$$f_j(x) + \sum_{k \neq j} \mu_k \hat{s}_k \ \geq \ f_j(\hat{x}) + \sum_{k \neq j} \mu_k \hat{s}_k.$$

Somit muss auch $f_j(x) \geq f_j(\hat{x})$ gelten, also $f_j(x) = f_j(\hat{x})$. Dies ist ein Widerspruch zur Eindeutigkeit der Lösung. □

Beispiel 2.4.5

Sei

$$X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^p_{\geqq} \mid (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \geq 1\} + \mathbb{R}^2_{\geqq}$$

und sei $f(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$. Wir betrachten $j = 2$ und ein $\varepsilon_1 \geq 1$.

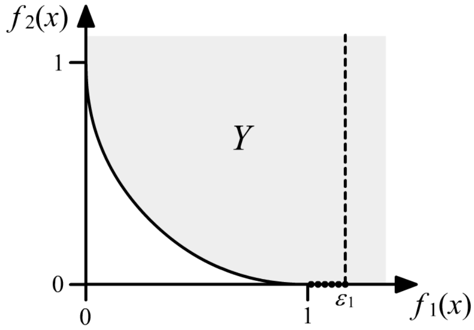


Abbildung 2.8: Zulässige Menge X aus Beispiel 2.4.5.

Die optimalen Lösungen für das Elastic-Constraint Problem werden gegeben durch $(\hat{x}_1, 0)$ mit $1 \leq \hat{x}_1 \leq \varepsilon_1$. Für $\hat{x}_1 > 1$ ist die Lösung schwach effizient, aber nicht effizient.

Wir stehen hier jedoch vor dem Problem, dass es schwach effiziente Punkte gibt, die alle $f_k(x) \leq \varepsilon_k$ erfüllen. Die Wahl von ε hat also wieder Einfluss auf das Ergebnis:

Satz 2.4.6

Sei $\hat{x} \in X_E$ eine effiziente Lösung eines multikriteriellen Optimierungsproblems.

Dann gibt es für alle $j = 1, \ldots, k$ ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^p$, ein $\mu \geqq 0$ und ein $\hat{s} \geq 0$, so dass $(\hat{x}, \hat{s})$ eine optimale Lösung des zugehörigen Elastic-Constraint Problems (ECP) ist.

2.5 Die Benson Methode

Die Idee bei diesem Verfahren ist es mit einem beliebigen Punkt $x^0 \in X$ zu starten. Ist x^0 nicht effizient, dann erzeugen wir eine Lösung $x \in X$, die x^0 dominiert. Dazu nutzen wir die Abweichung

$$l_k = f_k(x^0) - f_k(x) > 0$$

und wählen x so, dass $l_k \geq 0$ gilt für $k = 1, \ldots, p$. Die Maximierung von $\sum_{k=1}^{p} l_k$ erzeugt dann eine effiziente Lösung $x \leq x^0$.

Definition 2.5.1

Sei $x^0 \in X$ eine beliebige zulässige Lösung eines multikriteriellen Optimierungsproblems $\text{vecmin}(f_1(x), \ldots, f_p(x))$.

Das ***Benson Problem*** (BP) ist dann gegeben durch

$$\max \sum_{k=1}^{p} l_k$$

unter den Nebendbedingungen, dass

$$f_k(x) \;=\; f_k(x^0) - l_k \qquad \text{und} \qquad l_k \;\geq\; 0$$

gilt für $k = 1, \ldots, p$ und $x \in X$.

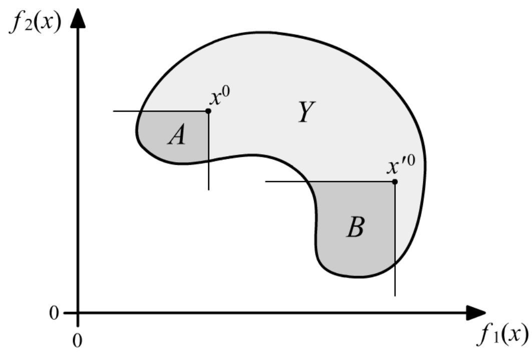


Abbildung 2.9: Verdeutlichung der Benson Methode.

Für unterschiedliche Startwerte x^0 und x'^0 suchen wir also in unterschiedlichen Kegeln A und B nach einer effizienten Lösung. Somit ist die Lösung auch vom Startwert abhängig.

Die Benson Methode ist geeignet, um die Effizienz von Punkten zu testen:

Satz 2.5.2

Eine zulässige Lösung $x^0 \in X$ eines multikriteriellen Optimierungsproblems ist genau dann effizient, wenn der optimale Zielfunktionswert des zugehörigen Benson Problems (BP) gleich Null ist.

Dies bedeutet, dass wir keine der p Zielfunktionen verbessern können, ohne eine andere zu verschlechtern.

Satz 2.5.3

Das Benson Problem (BP) eines multikriteriellen Optimierungsproblems habe eine optimale Lösung $(\hat{x}, \hat{l})$, das heißt der Zielfunktionswert sei endlich.

Dann ist $\hat{x}$ effizient, es gilt also $\hat{x} \in X_E$.

Ist das Benson Problem unbeschränkt, so kann mittels zusätzlicher Konvexitätsbedingung eine Aussage zu eigentlich effizienten Punkten getroffen werden:

Satz 2.5.4

Seien $f_k(x)$ für $k = 1, \ldots, p$ konvex und sei $X \subset \mathbb{R}^n$ konvex.

Hat dann das zugehörige Benson Problem (BP) keinen endlichen optimalen Zielfunktionwert, dann gilt $X_{pE} = \emptyset$.

2.6 Die Kompromissmethode

Bevor wir die Idee der Kompromissmethode vorstellen können, benötigen wir eine Definition.

Definition 2.6.1

Der Punkt $y^I = (y_1^I, \ldots, y_p^I)$ gegeben durch

$$y_k^I \;=\; \min_{x \in X} f_k(x) \;=\; \min_{y \in Y} y_k$$

heißt ***Idealpunkt*** des multikrietriellen Optimierungsproblems

$$\text{vecmin}(f_1(x), \ldots, f_p(x)) \qquad \text{mit} \qquad x \in X.$$

Der Punkt $y^N = (y_1^N, \ldots, y_p^N)$ gegeben durch

$$y_k^N \;=\; \max_{x \in X_E} f_k(x) \;=\; \max_{y \in Y_N} y_k$$

heißt ***Nadirpunkt***.

Bemerkung

Idealpunkt und Nadirpunkt müssen nicht zulässig sein für das gegene Problem, es muss also nicht notwendig $y^I \in X$ oder $y^N \in X$ gelten.
Betrachten wir obere und untere Schranke der y_k, also

$$\underline{y}_k \;=\; \min_{y \in Y} y_k \qquad \text{und} \qquad \overline{y}_k \;=\; \max_{y \in Y} y_k,$$

dann gilt $y^I = \underline{y}$ und $\overline{y} \geqq y^N$. Die Berechnung von y^I ist also recht einfach, da nur einkriterielle Optimierungsprobleme gelöst werden müssen. Die Berechnung von y^N ist weitaus schwieriger, da im Allgemeinen Y^N bestimmt

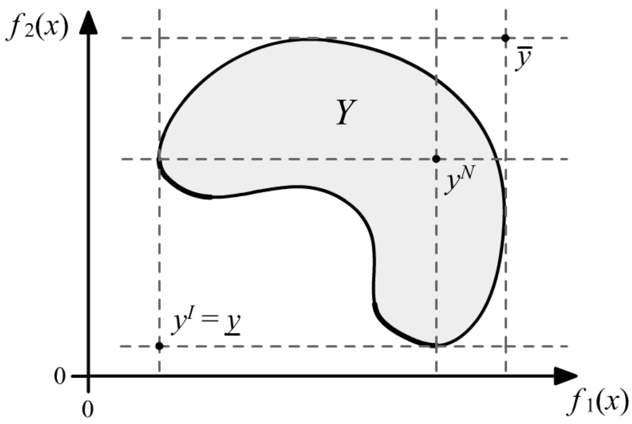


Abbildung 2.10: Zur Definition von Idealpunkt und Nadirpunkt.

werden muss. Hierfür gibt es aber heuristische Ansätze, die wir aber nicht weiter betrachten wollen.

Die Idee der Kompromissmethode ist es nun eine Lösung zu finden, die so nahe wie möglich bei y^I liegt.

Definition 2.6.2

Gegeben sein ein Abstandsmaß $d : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$.

Das ***Kompromissproblem*** (KP) zu einem multikrietriellen Optimierungsproblem

$$\text{vecmin}(f_1(x), \ldots, f_p(x)) \qquad \text{mit} \qquad x \in X.$$

wird dann gegeben durch

$$\min_{x \in X} d(f(x), y^I).$$

Es muss also noch ein Abstandsmaß definiert werden. Dazu beschränken wir uns auf Normen:

Definition 2.6.3

Sei B eine kompakte und konvexe Menge in $\mathbb{R}^p$ mit $\text{int}(B) \neq \emptyset$, die symmetrisch zum Ursprung ist. Weiter sei $x \in \mathbb{R}^p$.

Eine ***Norm*** $\gamma : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ wird gegeben durch

$$\gamma(x) \ := \ \inf\{\lambda \geq 0 \mid x \in \lambda B\}.$$

B heißt die ***Einheitskugel*** der Norm γ. Wir schreiben $\|x\| := \gamma(x)$.

Lemma 2.6.4

Sei $\gamma : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ eine Norm. Dann gilt für alle $x^1, x^2 \in \mathbb{R}^p$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$:

(1) $\gamma(x^1) \geq 0$.

(2) $\gamma(x^1) = 0$ genau dann, wenn $x^1 = 0$.

(3) $\gamma(\lambda x^1) = |\lambda|\gamma(x^1)$.

(4) $\gamma(x^1 + x^2) \leq \gamma(x^1) + \gamma(x^2)$.

Für eine Norm werden wir im Folgenden $\| \; \|$ schreiben.

Bemerkung

Aus jeder Norm $\| \; \|$ können wir durch

$$d(y^1, y^2) \;=\; \|y^1 - y^2\|$$

eine Metrik erzeugen. Wir werden im Folgenden vor allem mit drei Normen arbeiten:

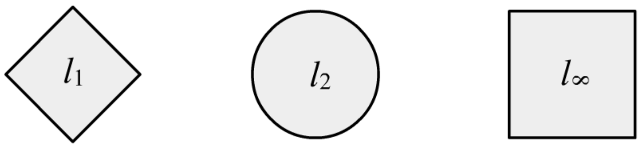


Abbildung 2.11: Die Nomen l_1, l_2 und l_∞.

$$l_1(x) \;:=\; \sum_{k=1}^{p} |x_n|, \quad l_2(x) \;:=\; \left(\sum_{k=1}^{p} |x_k|^2\right)^{1/2} \quad \text{und} \quad l_\infty(x) \;:=\; \max_{k=1,\ldots,p} |x_k|.$$

Die Einheitskreise dieser Normen sind in Abbildung 2.11 veranschaulicht.

Beispiel 2.6.5

In Abbildung 2.12 wird ein Kompromissproblem (KP) mit unterschiedlichen Normen veranschaulicht.
Wir erkennen, dass unterschiedliche Normen auch unterschiedliche optimale Lösungen des Kompromissproblems liefern.

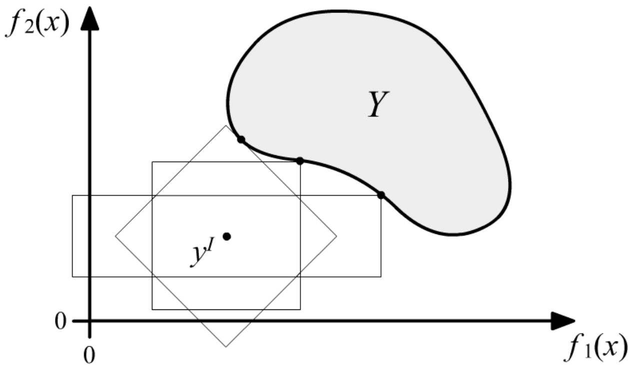


Abbildung 2.12: Kompromissproblem mit unterschiedlichen Normen.

Definition 2.6.6

Seien $y^1, y^2 \in \mathbb{R}^p$ und sei $\| \; \| : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ eine Norm.

$\| \; \|$ heißt ***monoton***, wenn aus $|y_k^1| \leq |y_k^2|$ für $k = 1, \ldots, p$ gerade $\|y^1\| \leq \|y^2\|$ folgt und wenn weiterhin aus $|y_k^1| < |y_k^2|$ für $k = 1, \ldots, p$ gerade $\|y^1\| < \|y^2\|$ folgt.

$\| \; \|$ heißt ***streng monoton***, wenn aus $|y_k^1| \leq |y_k^2|$ für $k = 1, \ldots, p$ und aus $|y_j^1| < |y_j^2|$ für ein $j \in \{1, \ldots, p\}$ gerade $\|y^1\| < \|y^2\|$ folgt.

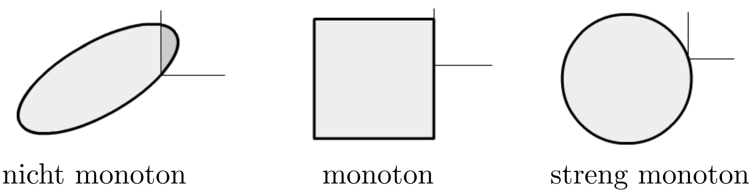


Abbildung 2.13: Einheitskreise zu nicht monotonen und monotonen Normen.

Satz 2.6.7

Sei $\| \; \|$ eine monotone Norm und sei $\hat{x}$ eine optimale Lösung des Kompromissproblems (KP).

Dann ist $\hat{x}$ schwach effizient.

Beweis

Wir nehmen an es gilt $\hat{x} \notin X_{wE}$. Dann gibt es ein $x' \in X$ mit $f(x') < f(\hat{x})$. Für alle $k = 1, \ldots, p$ gilt also

$$0 \;\leq\; f_k(x') - y_k^I \;<\; f_k(\hat{x}) - y_k^I.$$

Da $\| \ \|$ aber monoton ist, folgt $\|f(x') - y^I\| < \|f(\hat{x}) - y^I\|$, was ein Widerspruch zur Optimalität von $\hat{x}$ ist. □

Satz 2.6.8

Sei $\| \ \|$ eine monotone Norm und sei $\hat{x}$ eine eindeutige optimale Lösung des Kompromissproblems (KP).

Dann ist $\hat{x}$ effizient.

Beweis

Wir nehmen an es gilt $\hat{x} \notin X_E$. Dann gibt es ein $x' \in X$ mit $f(x') \leq f(\hat{x})$. Für alle $k = 1, \ldots, p$ gilt also

$$0 \ \leq \ f_k(x') - y_k^I \ \leq \ f_k(\hat{x}) - y_k^I.$$

Da $\| \ \|$ aber monoton ist, folgt $\|f(x') - y^I\| \leq \|f(\hat{x}) - y^I\|$, was ein Widerspruch zur Eindeutigkeit von $\hat{x}$ ist. □

Satz 2.6.9

Sei $\| \ \|$ eine streng monotone Norm und sei $\hat{x}$ eine optimale Lösung des Kompromissproblems (KP).

Dann ist $\hat{x}$ effizient.

Die Klasse der p-Normen (hier q-Normen) wird gegeben durch

$$\|y\|_q \ = \ \left(\sum_{k=1}^{p} |y_k|^q \right)^{1/q}$$

für $1 \leq q \leq \infty$. Diese Klasse ist für Kompromissprobleme geeignet, da diese Normen für $1 \leq q < \infty$ streng monoton sind und für $q = \infty$ monoton ist. Durch das Lösen eines Kompromissproblems finden wir im Allgemeinen nur eine Lösung. Die Idee ist nun die Betrachtung einer Norm unter der Hinzunahme von Gewichten:

Definition 2.6.10

Sei $\lambda \in \mathbb{R}^p_>$. Dann ist das ***gewichtete Kompromissproblem*** (GKP_∞) zu einem multikrietriellen Optimierungsproblem

$$\text{vecmin}(f_1(x), \ldots, f_p(x)) \qquad \text{mit} \qquad x \in X$$

bezüglich der l_∞-Norm gegeben durch

$$\min_{x \in X} \max_{k=1,\ldots,p} \lambda_k (f_k(x) - y_k^I).$$

Bezüglich des gewichtete Kompromissproblems (GKP_∞) lässt sich zeigen, dass alle effizienten Punkte gefunden werden können, wenn statt y^I ein Punkt approximiert wird, der Nahe genug an y^I liegt, diesen jedoch dominiert.

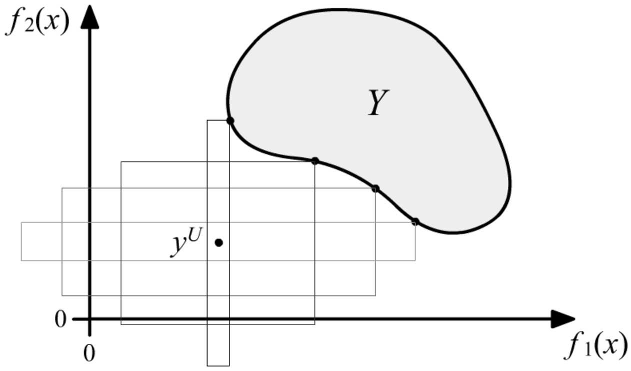


Abbildung 2.14: Veranschaulichung des gewichteten Kompromissproblems.

Definition 2.6.11

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^p_>$. Dann wird der ***Utopiapunkt*** y^U gegeben durch

$$y^U \;=\; y^I - \varepsilon,$$

dabei sei ε_k klein für $k = 1, \ldots, p$.

Satz 2.6.12

Eine zulässige Lösung $\hat{x} \in X$ ist genau dann schwach effizient, wenn es Gewichte $\lambda_k > 0$ gibt, so dass $\hat{x}$ optimal ist für das gewichtete Kompromissprolbem (GKP_∞) bezüglich des Utopiapunktes, also

$$\min_{x \in X} \max_{k=1,\ldots,p} \lambda_k (f_k(x) - y_k^U).$$

Dieser Satz liefert damit eine vollständige Charakterisierung von X_{wE}. Nutzen wir hier den Punkt y^I statt y^U, so erreichen wir im Allgemeinen nicht alle schwach effizienten Punkte.

2.7 Aufgaben

Aufgabe 2.7.1

Gib jeweils ein Beispiel für die folgenden Beziehungen (mit jeweils echten Teilmengen) an:

(1) $S_0(Y) \subset Y_{wN}$.

(2) $S(Y) \subset Y_N \subset S_0(Y)$.

(3) $S(Y) \cup S_0'(Y) = Y_N = S_0(Y)$, dabei gilt

$$S_0'(Y) \;=\; \{y' \in Y \mid y' \text{ ist einziges Element von } S(\lambda, Y) \text{ mit } \lambda \in \mathbb{R}^p_{\geq}\}.$$

Lösung

Mögliche Beispiele für die gegebenen Beziehungen sind Abbildung 2.15 zu entnehmen.

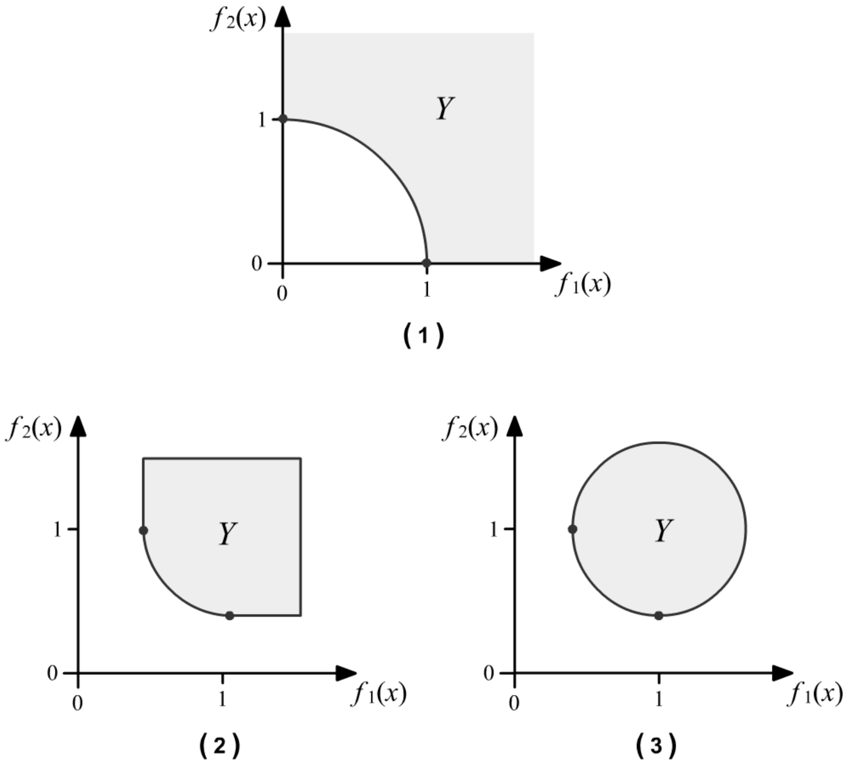


Abbildung 2.15: Mögliche Beispiele zu den Mengen aus Aufgabe 2.7.1.

In Beispiel **(1)** gehört der Kreisbogen mit zu Y_{wN}, nicht aber zu $S_0(Y)$, somit ist $S_0(Y)$ eine echte Teilmenge von Y_{wN}.

Die Menge $S(Y)$ in Beispiel **(2)** besteht aus dem Kreisbogen ohne die hervorgehobenen beiden Randpunkte, Y_N besteht aus dem Kreisbogen mit den beiden Randpunkte und zu $S_0(Y)$ gehören zusätzlich auch noch die beiden kurzen Seiten an der abgerundeten Ecke.

Im letzten Beispiel **(3)** gehört jeweils der viertel Kreisbogen mit den beiden hervorgehobenen Punkten zu $S(Y) \cup S_0'(Y)$, zu Y_N und zu $S_0(Y)$.

Aufgabe 2.7.2

Wir betrachten das multikriterielle Optimierungsproblem

$$\mathrm{vecmin} f(x) \;=\; \mathrm{vecmin}(f_1(x), f_2(x))$$

mit

$$f_1(x) \;=\; -6x_1 - 4x_2 \qquad \text{und} \qquad f_2(x) \;=\; -x_1$$

unter den Nebenbedingungen $x_1, x_2 \geq 0$ und

$$x_1 + x_2 \;\leq\; 100 \qquad \text{sowie} \qquad 2x_1 + x_2 \;\leq\; 150.$$

Stelle das zugehörige ε-Constraint Problem für $j = 1$ auf und Löse (εCP) jeweils für $\varepsilon_2^1 = -25$ und $\varepsilon_2^2 = -65$.

Lösung

Das gegebene Problem wurde in Abbildung 2.16 veranschaulicht.

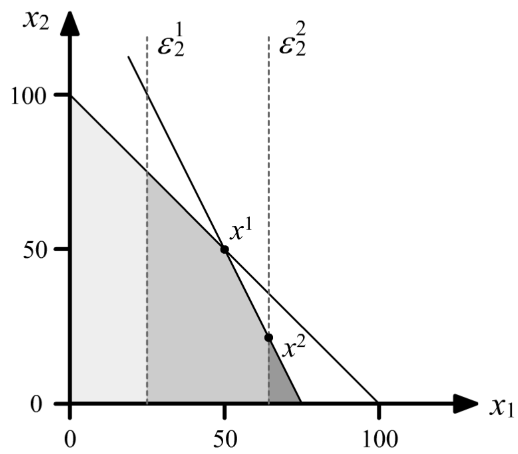


Abbildung 2.16: Das ε-Constraint Problem aus Aufgabe 2.7.2.

Zunächst erhalten wir für $\varepsilon_2^1 = -25$ das folgende ε-Constraint Problem:

$$\min -6x_1 - 4x_2$$

unter den Nebenbedingungen $x_1, x_2 \geq 0$ und

$$x_1 + x_2 \;\leq\; 100, \qquad 2x_1 + x_2 \;\leq\; 150 \qquad \text{sowie} \qquad -x_1 \;\leq\; -25.$$

Als Lösung für dieses Problem erhalten wir $x^1 = (50, 50)$ mit dem Zielfunktionswert $f(x^1) = (-500, -50)$.

Für $\varepsilon_2^2 = -65$ erhalten wird das folgende Problem:

$$\min -6x_1 - 4x_2$$

unter den Nebenbedingungen $x_1, x_2 \geq 0$ und

$$x_1 + x_2 \;\leq\; 100, \qquad 2x_1 + x_2 \;\leq\; 150 \qquad \text{sowie} \qquad -x_1 \;\leq\; -65.$$

Als Lösung für dieses Problem erhalten wir $x^2 = (65, 20)$ mit dem Zielfunktionswert $f(x^2) = (-470, -65)$.

Aufgabe 2.7.3

Betrachte das multikriterielle Optimierungsproblem aus Aufgabe 2.7.2 und stelle die zugehörigen Benson Probleme (BP) bezüglich

$$x^1 \;=\; (50, 50), \qquad x^2 \;=\; (65, 20) \qquad \text{und} \qquad x^3 \;=\; (0, 100)$$

auf. Prüfe mittels Benson Methode die Effizienz dieser Punkte.

Lösung

Das Problem wurde gegeben durch

$$\text{vecmin} f(x) \;=\; \text{vecmin}(f_1(x), f_2(x))$$

mit

$$f_1(x) \;=\; -6x_1 - 4x_2 \qquad \text{und} \qquad f_2(x) \;=\; -x_1$$

unter den Nebenbedingungen $x_1, x_2 \geq 0$ und

$$x_1 + x_2 \;\leq\; 100 \qquad \text{sowie} \qquad 2x_1 + x_2 \;\leq\; 150.$$

Das zu x^1 gehörige Benson Problem ist damit

$$\max\,(l_1 + l_2)$$

unter den Nebenbedingungen

$$l_1 \;=\; -500 + 6x_1 + 4x_2, \qquad l_2 \;=\; -50 + x_1, \qquad l_1, l_2 \;\geq\; 0$$

und weiterhin unter $x_1, x_2 \geq 0$ mit

$$x_1 + x_2 \;\leq\; 100 \qquad \text{und} \qquad 2x_1 + x_2 \;\leq\; 150.$$

Mit den gegebenen Nebenbedingungen ist dieses Problem nur für $x_1 = 50$ und $x_2 = 50$ zulässig. Die Zielfunktionswert des Benson Problems ist damit gleich Null und somit ist der Punkt x^1 nach Satz 2.5.2 effizient.

Zu x^2 erhalten wir das Benson Problem

$$\max\,(l_1 + l_2)$$

unter den Nebenbedingungen

$$l_1 \;=\; -470 + 6x_1 + 4x_2, \qquad l_2 \;=\; -65 + x_1, \qquad l_1, l_2 \;\geq\; 0$$

und weiterhin unter $x_1, x_2 \geq 0$ mit

$$x_1 + x_2 \;\leq\; 100 \qquad \text{und} \qquad 2x_1 + x_2 \;\leq\; 150.$$

Auch dieses Problem ist nur für $x_1 = 65$ und $x_2 = 20$ zulässig, die Zielfunktionswert ist gleich Null und somit ist der Punkt x^2 effizient.

Zum Punkt x^3 ergibt sich

$$\max\,(l_1 + l_2)$$

unter den Nebenbedingungen

$$l_1 \;=\; -400 + 6x_1 + 4x_2, \qquad l_2 \;=\; x_1, \qquad l_1, l_2 \;\geq\; 0$$

und weiterhin unter $x_1, x_2 \geq 0$ mit

$$x_1 + x_2 \;\leq\; 100 \qquad \text{und} \qquad 2x_1 + x_2 \;\leq\; 150.$$

Für zum Beispiel $x_1 = 2$ und $x_2 = 98$ werden alle Nebenbedingungen erfüllt und der Zielfunktionswert des Benson Problems ist damit ≥ 6. Somit ist der Punkt x^3 nicht effizient.

Aufgabe 2.7.4

Wir betrachten noch einmal das multikriterielle Optimierungsproblem aus Aufgabe 2.7.2.

Bestimme Idealpunkt und Nadirpunkt und löse das Problem mittels Kompromissmethode bezüglich der Normen l_1, l_2 und l_∞.

Lösung

Die Menge Y im Zielbereich ist in Abbildung 2.17 (links) dargestellt. Hier lassen sich Idealpunkt und Nadirpunkt einfach bestimmen.
Wir erhalten $y^I = (-500, -75)$ und $y^N = (-450, -50)$.

Zur Lösung des Problems mittels Kompromissmethode wurden in Abbildung 2.17 (rechts) die Einheitskreise der Normen um den Idealpunkt gezeichnet. Durch geometrische Überlegungen lassen sich nun die Zielfunktionsvektoren und damit auch die Lösungen des Problems berechnen.

Wir erhalten für die l_1 Norm den Zielfunktionsvektor $(-500, 50)$ und damit $\hat{x}_1 = (50, 50)$. Für l_2 ergibt sich der Zielfunktionsvektor $(-490, -55)$ und $\hat{x}_2 = (55, 40)$, für l_∞ erhalten wir $(-483.3, -58.3)$ und $\hat{x}_\infty = (58.3, 33.3)$.

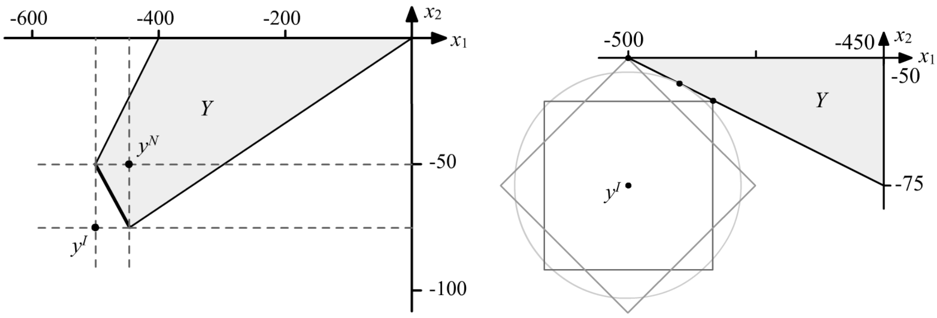


Abbildung 2.17: Zielbereich zur Bestimmung von y^I und y^N (links) und Veranschaulichung der Kompromissmethode bezüglich der gegebenen Normen.

Aufgabe 2.7.5

Wir untersuchen eine weitere Methode, um Kompromisslösungen zu finden.

Sei $\| \ \|$ eine monotone Norm. Zeige, dass eine optimale Lösung $\hat{x}$ des folgenden Problems schwach effizient ist:

$$\max \|f(x) - y^N\| \qquad \text{mit} \qquad x \in X$$

unter den Nebenbedingungen

$$f_k(x) \ \leq \ y_k^N \qquad \text{für} \qquad k = 1, \dots, p.$$

Lösung

Sei $\hat{x}$ eine optimale Lösung des Problems, also

$$\|f(\hat{x}) - y^N\| \ \geq \ \|f(x) - y^N\| \qquad \text{für alle} \qquad x \in X.$$

Wir nehmen an es gilt $\hat{x} \notin X_{wE}$. Dann gibt es ein $x' \in X$ mit

$$f_k(x') \ < \ f_k(\hat{x})$$

für $k = 1, \dots, p$. Aus

$$f_k(x') - y_k^N \ < \ f_k(\hat{x}) - y_k^N \ \leq \ 0$$

folgt direkt

$$\|f(x') - y^N\| \ > \ \|f(\hat{x}) - y^N\|.$$

Da $\| \ \|$ aber monoton ist, haben wir ein Widerspruch zur Optimalität von $\hat{x}$.

Ist die Norm sogar streng monoton, dass ist die optimale Lösung $\hat{x}$ effizient.

3 Weitere Optimalitätsbegriffe

Bevor wir uns im letzen Kapitel mit linearen Programmen beschäftigen, werden wir in diesem Kapitel noch weitere Definitionen der Optimalität kennenlernen.

3.1 Lexikographische Optimalität

Definition 3.1.1

Das ***lexikographische Optimierungsproblem*** $(LexOP)$ ist

$$\operatorname{lexmin}(f_1(x), \ldots, f_p(x)) \qquad \text{mit} \qquad x \in X.$$

Eine zulässige Lösung $\hat{x} \in X$ heißt ***lexikographisch optimal*** oder ***lexikographische Lösung***, wenn

$$f(\hat{x}) \ \leq_{\text{lex}} \ f(x)$$

gilt für alle $x \in X$. Dies können wir in dieser Form schreiben, da wir in Aufgabe 1.5.1 gezeigt haben, dass $\leq_{\text{lex}}$ eine Halbordnung bildet.

Das Lösen eines lexikographischen Optimierungsproblems $(LexOP)$ erfolgt in der Regel sequentiell, das heißt wir minimieren eine Zielfunktion f_k nach der anderen und nutzen die optimalen Zielfunktionswerte von f_j für $j < k$ als Nebenbedingungen bei der Minimierung von f_k.

Beispiel 3.1.2

Sei $X = [0, 1]$ und seien

$$f_1(x) \ = \ x \qquad \text{und} \qquad f_2(x) \ = \ 1 - x.$$

Dann erhalten wir für das lexikographische Optimierungsproblem

$$\operatorname{lexmin}(f_1(x), f_2(x))$$

die lexikographische Lösung $\hat{x}_{12} = 0$, da nur 0 für $f_1(x)$ optimal ist. Für

$$\text{lexmin}(f_2(x), f_1(x))$$

ergibt sich die lexikographische Lösung $\hat{x}_{21} = 1$, da nur 1 für $f_2(x)$ optimal ist und wir somit für $f_1(x)$ nur noch diese eine zulässige Lösung haben.

Wir bemerken an dieser Stelle, dass die Menge aller effizienten Punkte $X_E = [0, 1]$ *zwischen* $\hat{x}_{12}$ und $\hat{x}_{21}$ liegt.

Satz 3.1.3

Sei $\hat{x}$ eine optimale Lösung eines lexikographischen Optimierungsproblems.

Dann ist $\hat{x}$ effizient.

3.2 MaxOrder Optimalität

Die Idee bei diesem Optimalitätsbegriff besteht darin, dass wir nur eine Zielfunktion betrachten, nämlich die *schlechteste*.

Definition 3.2.1

Das ***MaxOrder Optimierungsproblem*** $(MaxOP)$ ist

$$\min_{x \in X} \max_{k=1,\dots,p} f_k(x).$$

Eine zulässige Lösung $\hat{x} \in X$ heißt ***maxorder optimal*** oder ***maxorder Lösung***, wenn es kein $x \in X$ gibt, so dass

$$\max_{k=1,\dots,p} f_k(x) \ < \ \max_{k=1,\dots,p} f_k(\hat{x})$$

gilt. Die Menger der maxorder optimalen Lösungen sei X_{MO} und weiter sei $Y_{MO} = f(X_{MO})$.

Bemerkung

Ein MaxOrder Problem $(MaxOP)$ ist damit ein Spezialfall von der gewichteten Kompromissmethode (GKP_∞), wenn wir y^I durch 0 ersetzen und $\lambda_k = 1$ wählen.

Proposition 3.2.2

Eine optimale Lösung eines MaxOrder Problems $(MaxOP)$ ist schwach effizient, aber nicht notwendigerweise effizient.

Wir haben zuvor bereits kennengelernt, dass eine zulässige Lösung $\hat{x} \in X$ genau dann schwach effizient ist, wenn es ein $\lambda \in \mathbb{R}^p_>$ gibt, so dass $\hat{x}$ optimal ist für

$$\min_{x \in X} \max_{k=1,\ldots,p} \lambda_k (f_k(x) - y^U_k).$$

Die Menge der effizienten Lösungen X_E ist für die beiden multikriteriellen Optimierungsprobleme mit den Zielfunktionen

$$(f_1, \ldots, f_p) \qquad \text{und} \qquad (f_1 - y^U_1, \ldots, f_p - y^U_p)$$

identisch, da die Subtraktion nur Y und Y_N verschiebt, nicht aber X. Auch für Y (und nicht nur für $Y - y^U$) finden wir daher durch geeignete Gewichte alle schwach effiziente Lösungen.

Definition 3.2.3

Die nichtdominierende Menge Y_N heißt ***extern stabil***, wenn es für alle $y \in Y - Y_N$ ein $\hat{y} \in Y_N$ mit $y \in \hat{y} + \mathbb{R}^p_{\geqq}$ gibt.

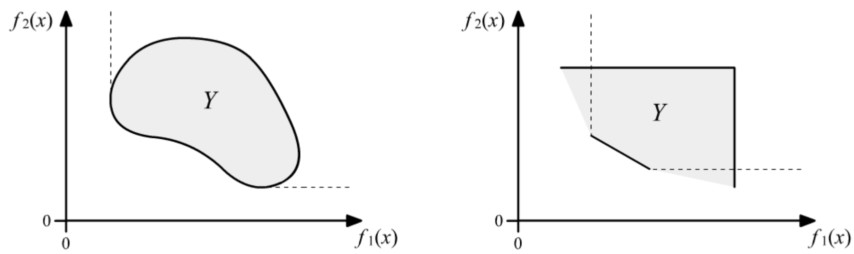


Abbildung 3.1: Beispiel einer extern stabilen Menge (links) und einer nicht extern stabilen Menge (rechts).

Es muss also $Y \subset Y_N + \mathbb{R}^p_{\geqq}$ gelten, damit Y extern stabil ist.

Ein Kriterium für externe Stabilität ist die $\mathbb{R}^p_{\geqq}$-Kompaktkeit:

Eine Menge $Y \subset \mathbb{R}^p$ heißt $\mathbb{R}^p_{\geqq}$***-kompakt***, wenn für alle $y \in Y$ gerade

$$(y - \mathbb{R}^p_{\geqq}) \cap Y$$

kompakt ist. Ist Y nicht leer sowie $\mathbb{R}^p_{\geqq}$-kompakt, dann ist Y extern stabil.

Satz 3.2.4

Sei Y_N extern stabil und es existiere eine optimale Lösung des MaxOrder Problems ($MaxOP$).

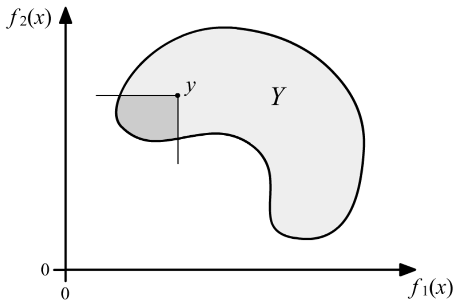


Abbildung 3.2: Zur Verdeutlichung von $\mathbb{R}^p_{\geqq}$-Kompaktkeit.

Dann gilt

$$X_{MO} \cap X_E \neq \emptyset.$$

Wenn es ein $\overline{y} \in Y$ gibt mit $f(x) = \overline{y}$ für alle $x \in X_{MO}$, dann gilt sogar $X_{MO} \subset X_E$.

3.3 Lexikographische MaxOrder Optimalität

Die Idee ist nun eine Kombination der vorherigen Ansätze: Wir betrachten die *schlechteste* Zielfunktion wie bei MaxOrder und danach die zweit *schlechteste* und so weiter durch Einsatz der lexikographischen Ordnung.

Definition 3.3.1

Sei $y \in \mathbb{R}^p$. Die Funktion

$$\mathrm{sort}(y) \ = \ (\mathrm{sort}_1(y), \ldots, \mathrm{sort}_p(y)) \ \in \ \mathbb{R}^p$$

ordnet die Komponenten von y in eine nicht aufsteigende Reihenfolge, so dass

$$\mathrm{sort}_1(y) \ \geq \ \mathrm{sort}_2(y) \ \geq \ \ldots \ \geq \ \mathrm{sort}_p(y)$$

gilt. Im Falle zweier gleicher Komponenten $y_n = y_m$ wird die Sortierung durch die Ordnung der Indize m und n gegeben.

Definition 3.3.2

Eine zulässige Lösung $\hat{x} \in X$ eines multikriteriellen Optimierungsproblems heißt ***lexikographische maxorder Lösung***, wenn

$$\mathrm{sort}(f(\hat{x})) \ \leq_{\mathrm{lex}} \ \mathrm{sort}(f(x)) \qquad \text{für alle} \qquad x \in X$$

gilt. Die Menge der lexikographischen maxorder Lösungen sei X_{lexMO} und weiter sei $Y_{lexMO} = f(X_{lexMO})$.

Satz 3.3.3

Es gilt $X_{lexMO} \subset X_E \cap X_{MO}$.

Beispiel 3.3.4

Sei $X = \{a, b, c, d, e, f\}$. Wir betrachten dazu das multikriterielle Optimierungsproblem aus Tabelle 3.1.

x	$f(x)$	$\max f_k(x)$	$\mathrm{sort}(f(x))$
a	$(1, 3, 8, 2, 4)$	8	$(8, 4, 3, 2, 1)$
b	$(4, 3, 8, 1, 1)$	8	$(8, 4, 3, 1, 1)$
c	$(7, 5, 4, 6, 1)$	7	$(7, 6, 5, 4, 1)$
d	$(3, 7, 4, 6, 5)$	7	$(7, 6, 5, 4, 3)$
e	$(4, 7, 5, 6, 5)$	7	$(7, 6, 5, 5, 4)$
f	$(5, 6, 7, 5, 8)$	8	$(8, 7, 6, 5, 3)$

Tabelle 3.1: Beispiel eines lexikographischen MaxOrder Problems.

In diesem Beispiel gilt

$$X_E = \{a, b, c, d, f\}, \qquad X_{MO} = \{c, d, e\} \qquad \text{und} \qquad X_{lexMO} = \{c\}.$$

Wir erhalten $X_{MO} \cap X_E = \{c, d\}$, somit kann im vorherigen Satz auch eine echte Teilmenge auftreten.

Satz 3.3.5

Eine zulässige Lösung $\hat{x} \in X$ ist genau dann effizient, wenn es ein $\lambda \in \mathbb{R}^p_>$ gibt, so dass $\hat{x}$ lexikographische maxorder Lösung bezüglich des Zielfunktionsvektors

$$(\lambda_1(f_1(\hat{x}) - y_1^U), \ldots, \lambda_p(f_p(\hat{x}) - y_p^U))$$

ist.

3.4 Aufgaben

Aufgabe 3.4.1

Wir betrachten das multikriterielle Optimierungsproblem

$$\mathrm{vecmin}(f_1(x), f_2(x), f_3(x)) = \mathrm{vecmin}(-x_1 + x_2 - x_3,\ x_2,\ -x_1 - 2x_2)$$

unter den Nebenbedingungen

$$x_1 + x_2 \leq 1, \qquad x_1 - x_2 + x_3 \leq 4 \qquad \text{und} \qquad x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Löse dieses Problem mit der lexikographischen Methode für die beiden Zielfunktionsreihenfolgen

$$(f_1(x), f_2(x), f_3(x)) \qquad \text{und} \qquad (f_3(x), f_2(x), f_1(x))$$

Lösung

Zunächst beschäftigen wir uns mit dem lexikographischen Problem bezüglich

$$(f_1(x), f_2(x), f_3(x)).$$

Dazu betrachen wir als erstes die Minimierung von $f_1(x)$ unter den gegebenen Nebenbedingungen, also

$$\min -x_1 + x_2 - x_3.$$

Die optimalen Lösungen hiervon sind alle $x_1, x_2, x_3 \geq 0$, für die $x_1 + x_2 \leq 1$ und $x_1 - x_2 + x_3 = 4$ gilt. Bei der nächsten Minimierung von $f_2(x)$, also

$$\min x_2,$$

müssen wir nun auch die neue Nebenbedingung $x_1 - x_2 + x_3 = 4$ berücksichtigen. Wir erhalten als optimale Lösungen alle zulässigen x mit $x_2 = 0$. Im dritten Schritt haben wir nun das Minimierungsproblem

$$\min -x_1 - 2x_2 \quad \text{mit} \quad x_2 = 0, \; x_1 = 1, \; x_1 - x_2 + x_3 = 4 \quad \text{und} \quad x_3 \geq 0.$$

Hier ist nur $\hat{x}^1 = (x_1^1, x_2^1, x_3^1) = (1, 0, 3)$ zulässig, somit ist $\hat{x}^1$ die gesuchte lexikographische Lösung.

Nun betrachten wir das lexikographischen Problem bezüglich

$$(f_3(x), f_2(x), f_1(x)).$$

Bei der Minimierung von $f_3(x)$ erhalten wir als optimale Lösungen alle zulässigen x mit $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$. Mit diesen zusätzlichen Nebenbedingungen sind alle zulässigen Lösungen für das zweite Problem $\min x_2$ optimal. Zu letzt müssen wir noch

$$\min -x_1 + x_2 - x_3 \quad \text{mit} \quad x_1 = 0, \; x_2 = 1, \; -1 + x_3 \leq 4 \quad \text{und} \quad x_3 \geq 0$$

betrachten und erhalten als einzige optimale Lösung $\hat{x}^2 = (x_1^2, x_2^2, x_3^2) = (0, 1, 5)$, was der gesuchten Lösung des lexikographischen Problems entspricht.

Aufgabe 3.4.2

Wir betrachten das multikriterielle Optimierungsproblem

$$\text{vecmin}(f_1(x), f_2(x), f_3(x)) = \text{vecmin}(x_1 + x_2 + x_3, \; -x_1 + x_2, \; -x_2 + 2x_3)$$

unter den Nebenbedingungen

$$x_1 + x_2 \geq 1, \qquad x_1 - x_2 + x_3 \geq 4 \qquad \text{und} \qquad x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Formuliere das zugehörige MaxOrder Problem und löse es.

Lösung

Das MaxOrder Problem ist

$$\min \max\{x_1 + x_2 + x_3,\ -x_1 + x_2,\ -x_2 + 2x_3\}$$

unter den Nebenbedingungen

$$x_1 + x_2 \ \geq\ 1, \qquad x_1 - x_2 + x_3 \ \geq\ 4 \qquad \text{und} \qquad x_1, x_2, x_3 \ \geq\ 0.$$

Anhand der Nebenbedingung $x_1 - x_2 + x_3 \geq 4$ und der ersten Zielfunktion $x_1 + x_2 + x_3$ erkennen wir, dass der optimale Zielfunktionswert ≥ 4 ist. Es ist zum Beispiel $\hat{x} = (x_1, x_2, x_3) = (4, 0, 0)$ zulässig und es gilt

$$\min \max\{f_1(\hat{x}), f_2(\hat{x}), f_3(\hat{x})\} \ = \ \min \max\{4, -4, 0\} \ = \ 4,$$

somit löst $\hat{x}$ das MaxOrder Problem. Diese Lösung ist sogar effizient, da wir ein unbeschränktes lineares Programm betrachten und uns an einer Ecke des Polyeders befinden.

Aufgabe 3.4.3

Zeige, dass eine optimale Lösung $\hat{x}$ des MaxOrder Problems

$$\min_{x \in X} \max_{k=1,\dots,p} f_k(x)$$

schwach effizient ist und finde ein Beispiel dafür, dass eine optimale Lösung $\hat{x}$ nicht notwendigerweise effizient ist.

Lösung

Angenommen $\hat{x}$ ist nicht schwach effizient für das MaxOrder Problem, dann gibt es ein $x \in X$ mit

$$f_k(x) \ < \ f_k(\hat{x}) \qquad \text{für} \qquad k = 1, \dots, p.$$

Dann gilt aber auch

$$\max_{k=1,\dots,p} f_k(x) \ < \ \max_{k=1,\dots,p} f_k(\hat{x}),$$

was ein Widerspruch zur Optimalität von $\hat{x}$ ist.

Ein Beispiel dafür, dass eine optimale Lösung $\hat{x}$ nicht notwendigerweise effizient ist, ist Abbildung 3.3 zu entnehmen.
Wir betrachten $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \leq x_1 \leq 3,\ 1 \leq x_2 \leq 2\}$ und $(f_1(x), f_2(x)) = (x_1, x_2)$. Die Punkte $\hat{x} = (2, 1)$ und $x' = (2, 2)$ sind beide optimal für das MaxOrder Problem, es gilt

$$\max\{\hat{x}_1, \hat{x}_2\} \ = \ \max\{x'_1, x'_2\} \ = \ 2,$$

x' ist aber nur schwach effizient und nicht effizient.

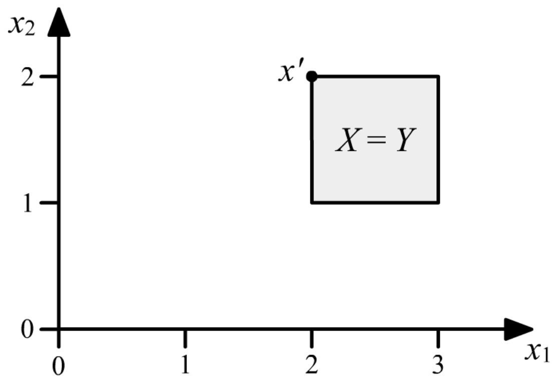


Abbildung 3.3: Schwach effiziente optimale Lösung von MaxOrder.

4 Lineare Optimierung

In diesem Kapitel betrachten wir stets multikriterielle Optimierungsprobleme mit linearen Zielfunktionen und linearen Nebenbedingungen.

4.1 Grundlagen und gewichtete Summe

Definition 4.1.1

Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, sei $b \in \mathbb{R}^m$ und sei $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ mit den Zeilen c_k^T für $k = 1,\ldots,p$.

Damit wird ein ***multikriterielles lineare Programm*** (MLP) gegeben durch

$$\operatorname{vecmin} Cx \qquad \text{mit} \qquad Ax = b \quad \text{und} \quad x \geqq 0.$$

Ein Beispiel hierzu haben wir bereits in Beispiel 1.1.1 kennengelernt.

Bemerkungen

(1) (MLP) ist eine Instanz von (MOP) mit

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b,\ x \geqq 0\} \qquad \text{und} \qquad f_k(x) = c_k^T x.$$

(2) Die zulässige Menge X und das Bild $Y = \{Cx \mid x \in X\}$ sind konvexe Mengen und ist zusätzlich X abgeschlossen, so auch Y. Vergleiche hierzu auch Aufgabe 1.5.3.

Definition 4.1.2

Sei $\lambda \in \mathbb{R}^p_{\geq}$. Das ***gewichtete Summen lineare Programm*** $(LP\lambda)$ wird gegeben durch

$$\min \lambda^T Cx \qquad \text{mit} \qquad Ax = b \quad \text{und} \quad x \geqq 0.$$

Damit ist $(LP\lambda)$ ein Spezialfall des parametrischen Problems (PP). Wie wir bei (PP) bereits kennengelernt haben, ist ein optimales $\hat{x} \in X$ schwach effizient, wenn $\lambda \geq 0$ gilt und effizient, wenn $\lambda > 0$ gilt.

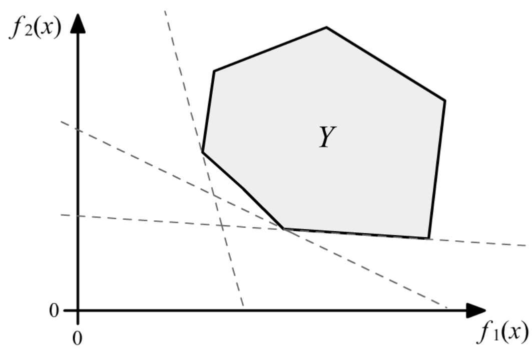


Abbildung 4.1: Beispiel unterschiedlicher Niveaulinien.

Ein Eckpunkt des Polyeders Y kann durch mehrere Gewichte λ bestimmt werden. Mit einem einzelnen Vektor λ können auch mehrere nicht dominierende Punkte bestimmen werden, nämlich wenn die Niveaulinie parallel zu einer Nebenbedingung bzw. einer Kante des Polyeders ist.

Es ist nun möglich alle nicht dominierenden Punkte mit einer endlichen Menge von Vektoren λ zu finden. Das war bei (PP) nicht der Fall. Das Ziel wird es nun sein zu zeigen, dass mittels $(LP\lambda)$ alle effizienten Punkte eines (MLP) gefunden werden können. Für den späteren Beweis dieser Hauptaussage des Abschnitts müssen zunächst einige Aussagen aus der einkriteriellen Optimierung wiederholt werden.

Definition 4.1.3

Ein (einkriterielles) ***lineares Programm*** (LP) wird gegeben durch

$$\min c^T x \qquad \text{mit} \qquad Ax = b, \; Dx \geqq h \quad \text{und} \quad x \geqq 0.$$

Das ***Duale*** (DLP) von (LP) wird gegeben durch

$$\max b^T u + h^T w \qquad \text{mit} \qquad A^T u + D^T w \leqq c \quad \text{und} \quad u \in \mathbb{R}^m, \; w \geqq 0.$$

Die Dimensionen der Matrizen und Vektoren müssen natürlich entsprechend gewählt werden. Weiter definieren wir mit

$$U := \{(u, w) \in \mathbb{R}^{m+q} \mid A^T u + D^T w \leqq c, \; w \geqq 0\}$$

die ***zulässige Menge*** von (DLP).

Satz 4.1.4 (Schwache und starke Dualität)

(1) Seien $x \in X$ bzw. $(u, w) \in U$ zulässige Lösungen von (LP) bzw. (DLP).

Dann gilt

$$b^T u + h^T w \;\leq\; c^T x.$$

Die Lösung von (LP) ist also stets größer gleich der Lösung von (DLP).

(2) Aus (LP) unbeschränkt folgt, dass (DLP) unzulässig ist.

(3) Aus (DLP) unbeschränkt folgt, dass (LP) unzulässig ist.

(4) Es ist möglich, dass (LP) und (DLP) unzulässig sind.

(5) Hat (LP) oder (DLP) eine endliche optimale Lösung, so auch das andere und die Zielfunktionswerte sind gleich, also

$$\min_{x \in X} c^T x \;=\; \max_{(u,w) \in U} b^T u + h^T w.$$

Lemma 4.1.5 (Benson Methode für lineare Programme)

Sei $e = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^p$, sei I_p die $p \times p$ Einheitsmatrix und sei $z \in \mathbb{R}^p_{\geqq}$.

Eine zulässige Lösung $x^0 \in X$ ist genau dann effizient für ein (MLP), wenn das $(LP1)$

$$\max e^T z \qquad \text{mit} \qquad Ax \;=\; b, \;\; Cx + I_p z \;=\; Cx^0 \quad \text{und} \quad x, z \;\geqq\; 0$$

eine optimale Lösung $(\hat{x}, \hat{z})$ mit $\hat{z} = 0$ hat.

Dies folgt aus Satz 2.5.2.

Lemma 4.1.6

Sei $e = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^p$.

Eine zulässige Lösung $x^0 \in X$ ist genau dann effizient für ein (MLP), wenn das $(LP2)$

$$\min u^T b + w^T C x^0 \qquad \text{mit} \qquad u^T A + w^T C \;\geqq\; 0, \;\; w \;\geqq\; e, \;\; u \;\in\; \mathbb{R}^m$$

eine optimale Lösung $(\hat{u}, \hat{w})$ mit $\hat{u}^T b + \hat{w}^T C x^0 = 0$ hat.

Bemerkung

Die linearen Programme $(LP1)$ und $(LP2)$ sind dual zueinander.

Aus diesen Vorarbeitungen folgt nun die bereits angesprochene Hauptaussage:

Satz 4.1.7

Eine zulässige Lösung x^0 eines (MLP) ist genau dann effizient, wenn es ein $\lambda \in \mathbb{R}^p_>$ gibt, so dass

$$\lambda^T C x^0 \;\leq\; \lambda^T C x$$

gilt für alle $x \in X$, wenn also x^0 optimal für $(LP\lambda)$ ist.

Satz 4.1.8

Für (MLP) gilt $S(Y) = Y_N$ und weiterhin $Y_N = Y_{pN}$.

4.2 Simplex Algorithmus für bikriterielle Programme

Ziel dieses Abschnitts ist es das Simplex Verfahren auf bikriterielle Programme anzuwenden, also auf Programme mit zwei Zielfunktionen. Dazu wiederholen wir kurz die wichtigsten Begriffe zum Simplex Verfahren in der üblichen einkriteriellen Form.

Die einkriterielle Simplex Methode

Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $\mathrm{rang}(A) = m$, sei $b \in \mathbb{R}^m$ und sei $c \in \mathbb{R}^n$. Ein einkriterielles lineares Programm ist dann

$$\min\{c^T x \mid Ax = b,\ x \geqq 0\}.$$

Eine ***Basis*** B ist eine System aus m Spaltenindize zu m linear unabhängigen Spalten von A. Die ***Basismatrix*** A_B ist die reguläre Matrix $m \times m$ Matrix aus den m linear unabhängigen Spalten aus B. Die ***Nichtbasis*** N ist $N = \{1, \ldots, n\} - B$. Basis- bzw. Nichtbasisvariablen sind x_i mit $i \in B$ bzw. $i \in N$.

Mit diesen Bezeichnungen gilt

$$b \;=\; Ax \;=\; (A_B, A_N) \cdot (x_B^T, x_N^T) \;=\; A_B x_B + A_N x_N$$

und somit folgt direkt

$$x_B \;=\; A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N.$$

Jede Basislösung entspricht einer Ecke des zu untersuchenden Polyeders. Gilt $x_B \geqq 0$, so nennen wir die Basislösung zulässig.

Für die Zielfunktion folgt

$$\begin{aligned} c^T x \;&=\; (c_B^T, c_N^T) \cdot (x_B^T, x_N^T)^T \;=\; c_B^T x_B + c_N^T x_N \\ &=\; c_B^T A_B^{-1} b + (c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N) x_N. \end{aligned}$$

Den letzten Term in der Klammer schreiben wir um als

$$\overline{c}^T \;=\; c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N$$

und nennen $\overline{c}^T$ die ***reduzierten Kosten***. Erhöhen wir den Wert von $x_N = 0$ auf $x_N = \delta > 0$, so ändert sich $c^T x$ um den Wert $\delta \cdot \overline{c}$, daher diese Bezeichnung.

Um nun beim Simplex Verfahren von Ecke zu Ecke zu springen, müssen wir einen Basistausch durchführen. Dazu nutzen wir die Pivotwahl

$$s \in \{i \in N \mid \overline{c}_i < 0\} \qquad \text{und} \qquad r = \operatorname{argmin}_{j \in B}\{\tilde{b}_j / \tilde{A}_{js} \mid \tilde{A}_{js} > 0\}.$$

Dabei gilt $\tilde{A} = A_B^{-1} A$ und $\tilde{b} = A_B^{-1} b$.

Gibt es kein $\tilde{A}_{js} \leq 0$, so ist das lineare Programm unbeschränkt. Wir befinden uns an einer optimalen Ecke, wenn $c_N \geqq 0$ gilt, dann ist $(x_B, 0)$ eine optimale Lösung. Die Rückrichtung dieser Aussage gilt nur bei nicht entarteten Problemen, was wir im folgenden aber stets fordern werden.

Diese Ergebnisse der einkriteriellen Optimierung wollen wir nun zunächst auf bikriterielle Probleme übertragen, dazu die folgenden Definitionen:

Definition 4.2.1

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, seien $c^1, c^2 \in \mathbb{R}^n$ und sei $b \in \mathbb{R}^m$.

Ein ***bikriterielles lineares Programm*** (BLP) wird gegeben durch

$$\operatorname{vecmin}((c^1)^T x,\, (c^2)^T (x)) \qquad \text{mit} \qquad Ax = b, \;\; x \geqq 0.$$

Nach Satz 4.1.7 finden wir effiziente Lösungen zu (BLP) durch das Lösen von

$$\min\{\lambda_1 (c^1)^T + \lambda_2 (c^2)^T \mid Ax = b,\; x \geqq 0\}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}^2_>$.

Wir normieren $(\lambda_1, \lambda_2) = (\tau, 1 - \tau)$ für $\tau \in [0, 1]$. Damit können λ_1 und λ_2 auch 0 werden, somit erreichen wir auch schwach effiziente Punkte, was nicht erwünscht ist. Diesen Nebeneffekt können wir später aber recht einfach wieder ausräumen.

Definition 4.2.2

Die ***parametrische Zielfunktion*** eines bikriteriellen linearen Programmes (BLP) wird gegeben durch

$$c(\tau) \;:=\; \tau c^1 + (1 - \tau) c^2.$$

Um damit (BLP) zu lösen, können wir das ***bikriterielles parametrisches lineares Problem*** (BPP)

$$\min\{c(\tau)^T x \mid Ax = b,\ x \geqq 0\}$$

benutzen.

Die Frage ist nun, wie wir die τ am besten zu wählen haben, um alle effizienten Punkte zu berechnen. Wir wissen ja bereits, dass wir nur eine endliche Anzahl benötigen, um alle effiziente Punkte zu erreichen.

Proposition 4.2.3

Sei B eine zulässige Basis von (BPP). Dann sind die ***reduzierten Kosten*** der parametrischen Zielfunktion

$$\overline{c}(\tau) \;=\; \tau\overline{c}^1 + (1-\tau)\overline{c}^2.$$

Ist weiter $\hat{B}$ eine optimale Basis von (BPP) mit $\tau = \hat{\tau}$ und ist das Programm nicht entartet, dann folgt

$$\overline{c}(\tau) \;\geqq\; 0$$

aus dem üblichen Optimalitätskriterium der einkriteriellen Optimierung.

Definition 4.2.4

Wir definieren

$$I \;=\; \{i \in N \mid \overline{c}_i^2 < 0,\ \overline{c}_i^1 \geq 0\}$$

und dazu

$$\tau' \;:=\; \begin{cases} 0 & \text{wenn} \quad I = \emptyset \\ \max\limits_{i \in I} \frac{-\overline{c}_i^2}{\overline{c}_i^1 - \overline{c}_i^2} & \text{wenn} \quad I \neq \emptyset \end{cases}.$$

Satz 4.2.5

Sei $\hat{B}$ eine optimale Basis für (BPP) mit $\tau = \hat{\tau}$.

Dann ist $\hat{B}$ optimal für (BPP) für alle $\tau \in [\tau', \hat{\tau}]$. Für $\tau < \tau'$ wird eine neue Basis optimal.

Damit erhalten wir ein Vorgehen zur Bestimmung der relavanten τ und damit der effizienten Lösungen:

(1) Wir starten mit $\tau = 1$, optimieren also nur $f_1(x) = (c^1)^T x$. Wir nehmen dabei an, dass eine optimale Lösung von $(LP1)$ existiert.

(2) Wir lösen (BPP) mit $\tau = 1$ und bestimmen eine optimale Basis B und ein zughöriges x. Dann bestimmen wir τ' sowie i^* und ersetzen in der Basis τ' durch i^*.

(3) Dieses Vorgehen iterieren wir.

Ein Algorithmus könnte folgendermaßen aussehen:

Parametrischer Simplex Algorithmus

(Eingabe) $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $\operatorname{rang}(A) = m$, $b \in \mathbb{R}^m$ und $c^1, c^2 \in \mathbb{R}^n$.

(1) Löse (BPP) für $\tau = 1$ mit dem Simplex Algorithmus.
Bestimme eine optimale Basis $\hat{B}$ mit einer Basislösung $\hat{x}$.
Berechne $\tilde{A}$, $\tilde{b}$, $\overline{c}^1$ und $\overline{c}^2$.

(2) Solange $I \neq \emptyset$ bestimme

$$\tau \;=\; \max_{i\in I} \frac{-\overline{c}_i^2}{\overline{c}_i^1 - \overline{c}_i^2}$$

und setzt

$$s \in \operatorname{argmin}_{i\in I}\{-(\overline{c}_i^2)/(\overline{c}_i^1 - \overline{c}_i^2)\} \quad \text{und} \quad r = \operatorname{argmin}_{j\in B}\{\tilde{b}_j/\tilde{A}_{js} \mid \tilde{A}_{js} > 0\}.$$

sowie $\hat{B} = (\hat{B} - \{r\}) \cup \{s\}$.
Berechne $\tilde{A}$ und $\tilde{b}$.

(3) Erzeuge die Sequenz

$$1 \;=\; \lambda^1 \;> \ldots > \lambda^l \;=\; 0$$

sowie die zugehörige Sequenz der Basislösungen $\hat{x}^1, \ldots, \hat{x}^{l-1}$.

(Ausgabe) Relevante τ und effiziente Lösungen.

Beispiel 4.2.6

Wir betrachten das bikriterielle Optimierungsproblem

$$\operatorname{vecmin}(f_1(x),\, f_2(x)) \;=\; \operatorname{vecmin}(3x_1 + x_2,\; -x_1 - 2x_2)$$

unter den Nebenbedingungen

$$x_2 \le 3, \qquad 3x_1 - x_2 \le 6 \qquad \text{und} \qquad x_1, x_2 \ge 0.$$

Als parametrisches Problem $(LP\lambda)$ erhalten wir

$$\min \lambda(3x_1 + x_2) + (1-\lambda)(-x_1 - 2x_2) \;=\; \min\,(4\lambda - 1)x_1 + (3\lambda - 2)x_2$$

unter den Nebenbedingungen

$$x_2 + x_3 = 3, \qquad 3x_1 - x_2 + x_4 = 6 \qquad \text{und} \qquad x_1, \dots, x_4 \geq 0.$$

Dabei haben wir bereits die Schlupfvariablen x_3 und x_4 eingeführt. Mit $\lambda^1 = 1$ und der Basis $B^1 = \{3, 4\}$ erhalten wir die optimale Lösung $x^1 = (0, 0, 3, 6)$. Wir haben also das Simplex Tableau

3	1	0	0	0	$\overline{c}^1$
-1	-2	0	0	0	$\overline{c}^2$
0	1	1	0	3	x_3
3	-1	0	1	6	x_4

mit den reduzierten Kosten $\overline{c}(1) = (3, 1, 0, 0)$ und mit $f(x^1_B) = (0, 0)$. Es gilt $I^2 = \{1, 2\}$ und damit

$$\lambda^2 = \max\left\{\frac{1}{3+1}, \frac{2}{1+2}\right\} = \frac{2}{3}.$$

Wir pivotisieren mit $s = 2$ sowie $r = 3$ und erhalten im nächsten Schritt mit der Basis $B^2 = \{2, 4\}$

3	0	-1	0	-3	$\overline{c}^1$
-1	0	2	0	6	$\overline{c}^2$
0	1	1	0	3	x_2
3	0	1	1	9	x_4.

Somit gilt $x^2 = (0, 3, 0, 9)$ und $f(x^2_B) = (3, -6)$ sowie $\overline{c}(2/3) = (5/3, 0, 0, 0)$.

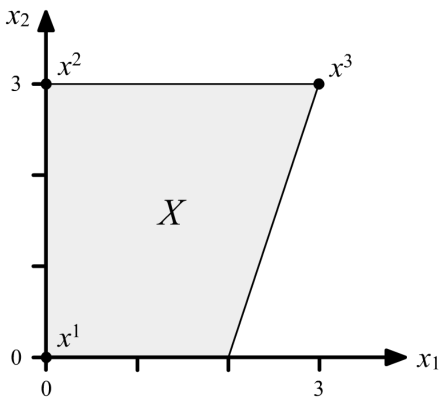


Abbildung 4.2: Zulässige Menge X aus Beispiel 4.2.6.

Nun haben wir $I^3 = \{1\}$, also folgt sofort $\lambda^3 = 1/(3 + 1) = 1/4$. Als neue Basis erhalten wir $B = \{2, 1\}$ und damit berechnen wir

0	0	-2	-1	-12	$\overline{c}^1$
0	0	7/3	1/3	9	$\overline{c}^2$
0	1	1	0	3	x_2
1	0	1/3	1/3	3	x_1.

Wir lesen daraus $x^3 = (3, 3, 0, 0)$ sowie $f(x_B^3) = (12, -9)$ ab. Es folgt nun $I^4 = \emptyset$, somit bricht der Algorithmus ab.

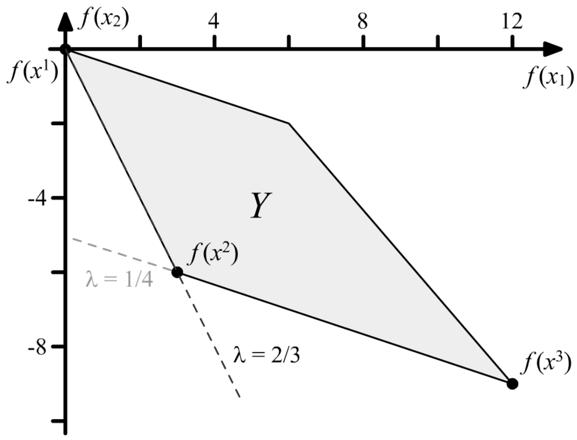


Abbildung 4.3: Verdeutlichung der Ergebnisse aus Beispiel 4.2.6.

Als Ergebnis erhalten wir die Sequenz

$$\lambda^1 = 1 \quad \geq \quad \lambda^2 = \frac{2}{3} \quad \geq \quad \lambda^3 = \frac{1}{4} \quad \geq \quad \lambda^4 = 0.$$

Beispiel 4.2.7

Wir betrachten das bikriterielle Optimierungsproblem

$$\text{vecmin}(f_1(x),\ f_2(x)) \ = \ \text{vecmin}(-2x_1 + x_2, \ -4x_1 - 3x_2)$$

unter den Nebenbedingungen

$$x_1 + 2x_2 \leq 10, \qquad x_1 \leq 5 \qquad \text{und} \qquad x_1, x_2 \geq 0.$$

Zunächst starten wir mit dem Simplex Tableau

-4	-3	0	0	0	$\overline{c}^1$
-2	1	0	0	0	$\overline{c}^2$
1	2	1	0	10	
1	0	0	1	5	

und wählen $\lambda = 1$, wir haben also nur $f_1(x) = -2x_1 + x_2$ zu optimieren. Mit der Basis $B = \{1, 3\}$ erhalten wir das neue Tableau

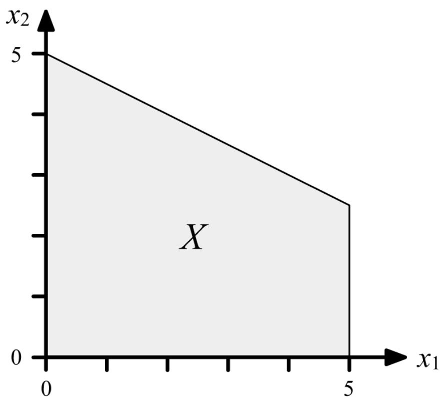


Abbildung 4.4: Zulässige Menge X aus Beispiel 4.2.7.

0	-3	0	4	20	$\overline{c}^1$
0	1	0	2	10	$\overline{c}^2$
1	0	0	1	5	
0	2	1	-1	0	.

Es gilt nun $\overline{c}(1) = (-2, 1, 0, 0)$ sowie $I = \{2\}$ und es folgt

$$\lambda' \;=\; -\frac{\overline{c}_2^2}{\overline{c}_2^1 - \overline{c}_2^2} \;=\; \frac{3}{1+3} \;=\; \frac{3}{4}.$$

Als neue Basis wählen wir $B = \{1, 2\}$ und erhalten damit das Simplex Tableau

0	0	1.5	2.5	27.5	$\overline{c}^1$
0	0	-0.5	2.5	7.5	$\overline{c}^2$
1	0	0	1	5	
0	1	0.5	-0.5	2.5	.

Nun gilt $\overline{c}(3/4) = (0, 0, 0, 2.5)$ sowie $I = \emptyset$ und somit bricht der Algorithmus ab. Wir erhalten:

(1) Für $\lambda \in [3/4, 1]$ ist $(-10, -20)$ der Zielfunktionsvektor zur optimalen Lösung $(5, 0)$.

(2) Für $\lambda \in [0, 3/4]$ ist $(-7.5, -27.5)$ der Zielfunktionsvektor zur optimalen Lösung $(5, 2.5)$.

Die Menge der effizienten Lösungen ist demnach

$$X_E \;=\; \{t \cdot (5,0) + (1-t) \cdot (5, 2.5) \mid 0 \le t \le 1\} \;=\; \{(5,\, 2.5\,t) \mid 0 \le t \le 1\}.$$

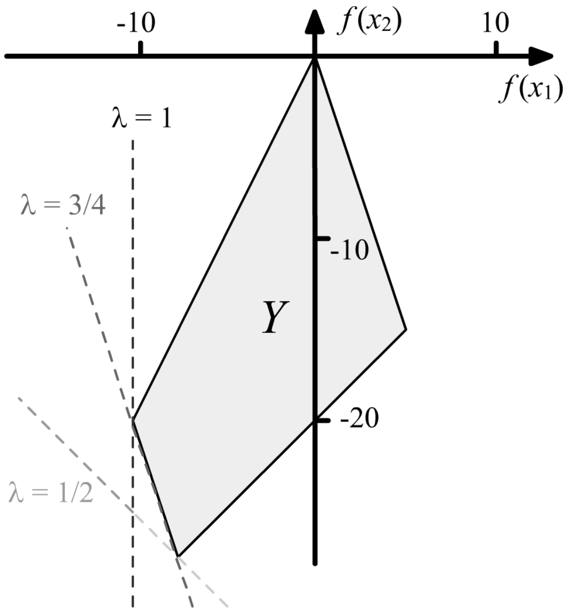


Abbildung 4.5: Verdeutlichung der Ergebnisse aus Beispiel 4.2.7.

4.3 Simplex Algorithmus für multikriterielle Programme

Wir betrachten nun multikriterielle Optimierungsprobleme (MLP) mit p Zielfunktionen und dazu das parametrisches Problem $(LP\lambda)$ für $\lambda \in \mathbb{R}^p_>$. Wir machen stets die Annahme, dass $y^I \notin Y$ gilt, derartige Probleme sind sowieso trivial. Außerdem nehmen wir weiterhin an, dass unsere Probleme nicht entartet sind.

Zunächst müssen wieder einige Begriffe definieren werden, bevor wir einen Algorithmus vorstellen können.

Definition 4.3.1

Bezüglich einer Basis B ist die ***reduzierte Kosten Matrix*** gegeben als

$$\overline{C} \ = \ C - C_B A_B^{-1} A.$$

Proposition 4.3.2

Die reduzierten Kosten der parametrischen Zielfunktion $\lambda^T C x$ sind

$$\overline{c}(\lambda) \ = \ \lambda^T \overline{C} \ \in \mathbb{R}^p.$$

Es gilt $\overline{C} = (\overline{C}_B, \overline{C}_N)$ mit $\overline{C}_B = 0$.

Wir schreiben stets $R := \overline{C}_N$ und bezeichnen mit r^j die zu x_j korrespondierende Spalte von R.

Lemma 4.3.3

Aus $X_E \neq \emptyset$ folgt, dass X eine zulässige effiziente Basislösung besitzt.

Wir finden also stets eine Ecke das Polyeders, die effizient ist.

Die Idee zum Algorithmus besteht nun darin von zulässige effiziente Basislösungen mittels Pivottausch zu suchen. Dabei stellen sich mehrere Fragen: Wie finden wir diese? Finden wir alle? Diese Fragen werden wir in den nächsten Sätzen beantworten können.

Definition 4.3.4

(1) Eine zulässige Basis B heißt ***effizient***, wenn B eine optimale Basis von $(LP\lambda)$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}^p_>$ ist und damit auch die zugehörige Basislösung effizient ist.

(2) Zwei Basen B und B' heißen ***adjazent***, wenn sich eine aus der anderen durch einen einzigen Pivottausch ergibt.

So sind zum Beispiel $\{1, 2, 3\}$ und $\{1, 5, 3\}$ adjazent, $\{1, 2, 3\}$ und $\{4, 5, 3\}$ hingegen nicht.

(3) Sei B eine effiziente Basis. Eine Variable x_j mit $j \in N$ heißt ***effiziente Nichtbasisvariable*** bezüglich B, wenn es ein $\lambda \in \mathbb{R}^p_>$ gibt, so dass $\lambda^T R \geqq 0$ und $\lambda^T r^j = 0$ gilt.

(4) Sei B eine effiziente Basis und x_j eine effiziente Nichtbasisvariable. Ein Pivot j in die Basis tauscht, heißt ***effizient***, wenn die neue Basis zulässig ist.

Lemma 4.3.5

Sei B eine effiziente Basis.

Dann existiert eine effiziente Nichtbasisvariable bezüglich B.

Lemma 4.3.6

Seien x^1 und x^2 zwei verschiedene zulässige effiziente Basislösungen, wobei die zugehörigen Basen adjazent seien.

Dann sind alle Punkte aus der konvexen Hülle von x^1 sowie x^2, also alle Punkte aus der Verbindungsstrecke zwischen x^1 und x^2, effizient.

Sind zwei Basen adjazent, so befinden wir uns an zwei benachbarten Ecken des Polyeders. Wenn es also zu beiden Basen zulässige effiziente Basislösungen gibt, so kann auch die Verbindungsstrecke nur effiziente Lösungen enthalten.

Lemma 4.3.7

Sei B effizient und x_j eine effiziente Nichtbasisvariable.

Dann erzeugt jedes effiziente Pivot bezüglich der Basis B ine adjazente effiziente Basis $\hat{B}$.

Der folgende Satz bietet nun eine Methode, um die Effizienz einer Nichtbasisvariablen bezügliche einer effizienten Basis zu testen:

Satz 4.3.8

Sei B effizient und $j \in N$.

Dann ist x_j genau dann eine effiziente Nichtbasisvarialbe, wenn das folgende lineare Programm den Optimalwert 0 hat:

$$\max e^T v$$

unter den Nebenbedingungen

$$Rz - r^j \delta + v \;=\; 0 \qquad \text{und} \qquad z, \delta, v \geqq 0.$$

Dabei ist $v \in \mathbb{R}^p$, $z \in \mathbb{R}^{n-m}$ und $\delta \in \mathbb{R}$.

Bemerkung

Dieses Programm besitzt immer die zulässige Lösung $(z, \delta, v) = 0$. Nach der starken Dualität ist es entweder unbeschränkt oder hat den Zielfunktionswert 0.

Definition 4.3.9

Zwei effiziente Basen B und $\hat{B}$ heißen ***zusammenhängend***, wenn eine aus der anderen durch effizientes Pivottauschen erzeugt werden kann.

Bei adjazent hatten wir nur einen Tausch, bei zusammenhängend können es mehrere sein.

Satz 4.3.10

Alle effizienten Basen sind zusammenhängend.

Dieser Satz bietet die Grundlage zum folgenden multikriteriellen Simplex Algorithmus:

Multikriterieller Simplex Algorithmus

(Eingabe) $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $\operatorname{rang}(A) = m$, $b \in \mathbb{R}^m$ und $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$.

(1) Setze $L_1 = \emptyset$ und $L_2 = \emptyset$.

(2) Löse das Ersatzproblem zur Ereugung einer zulässigen Startösung x_0 (wie es auch in der üblichen Optimierung durchgeführt wird).

(3) Löse
$$\min\{u^T b + w^T C x_0 \mid u^T A + w^T C \geqq 0,\ w \geqq e\}.$$

Ist dieses Problem unzulässig, dann STOP, es gilt $X_E = \emptyset$.

Sonst finden wir optimale $(\hat{u}, \hat{w})$. Löse damit

$$\min\{\hat{w}^T C x \mid Ax = b,\ x \geqq 0\}.$$

Sei B eine optimale Basis, dann ist B effizient. Setze $L_1 := \{B\}$.

(4) Solange $L_1 \neq \emptyset$ wähle ein B aus L_1 und setzte $L_1 = L_1 - \{B\}$ sowie $L_2 = L_2 \cup \{B\}$.

Berechne $\tilde{A}$, $\tilde{b}$, R und $\tilde{N} = N$ bezüglich B.

Für alle $j \in N$ löse

$$\max\{e^T v \mid Ry - r^j \delta + v = 0,\ y, \delta, v \geqq 0\}.$$

Ist diese Problem unbeschränkt, dann $\tilde{N} = \tilde{N} - \{j\}$.

Anschlieden prüfe für jedes $j \in \tilde{N}$ und für jedes $i \in B$, ob $B' = (B - \{i\}) \cup \{j\}$ zulässig ist und ob $B' \notin L_1 \cup L_2$. Ist dies der Fall, dann setzte $L_1 = L_1 \cup \{B'\}$.

(Ausgabe) Liste L_2 mit den effizienten Basen.

5 Anhang

5.1 Beweisstrategien

Fast alle Aussagen über Effizienz bzw. starker oder schwacher Effizienz lassen sich durch einfache Widerspruchsbeweise zeigen. Daher werden hier noch einmal die grundlegenden Beweisstrategien zusammengefasst.

Aussagen über Effizienz

Soll gezeigt werden, dass x' für ein multikriterielles Optimierungsproblem (MOP) effizient ist, so nehmen wir an, dass $x' \notin X_E$ gilt.

Demnach gibt es ein $x \in X$ mit

$$f_k(x) \;\leq\; f_k(x') \qquad \text{für} \qquad k = 1, \ldots, p$$

sowei mit

$$f_j(x) \;<\; f_j(x') \qquad \text{für ein} \qquad j \in \{1, \ldots, p\}.$$

Hiermit lässt sich meist leicht ein Widerspruch zu weiteren Voraussetzungen herleiten.

Aussagen über schwache Effizienz

Soll gezeigt werden, dass x' für ein multikriterielles Optimierungsproblem (MOP) schwach effizient ist, so nehmen wir an, dass $x' \notin X_{wE}$ gilt.

Demnach gibt es ein $x \in X$ mit

$$f_k(x) \;<\; f_k(x') \qquad \text{für} \qquad k = 1, \ldots, p.$$

Hiermit lässt sich meist leicht ein Widerspruch zu weiteren Voraussetzungen herleiten.

Aussagen über starke Effizienz

Soll gezeigt werden, dass x' für ein multikriterielles Optimierungsproblem (MOP) stark effizient ist, so nehmen wir an, dass $x' \notin X_{sE}$ gilt.

Demnach gibt es ein $x \in X$ mit $x \neq x'$ und mit

$$f_k(x) \;\leq\; f_k(x') \qquad \text{für} \qquad k = 1, \ldots, p.$$

Hiermit lässt sich meist leicht ein Widerspruch zu weiteren Voraussetzungen (oft die Eindeutigkeit einer optimalen Lösung) herleiten.

Literaturverzeichnis

[1] Ehrgott, M. : *Multicriteria optimization.* 1. Auflage. Springer Verlag Berlin Heidelberg, 2000

[2] Göpfert, A. ; Nehse, R. : *Vektoroptimierung.* 1. Auflage. Teubner Verlag Leipzig, 1990

[3] Scholz, D. : *Multikriterielle Optimierung.* – Vorlesungsmitschrift im Sommersemester 2006 zur Vorlesung von S. Schwarze, Universität Göttingen

[4] Schwarze, S. : *Übungen zur Multikriteriellen Optimierung.* – Übungszettel zur Vorlesung im Sommersemester 2006 von S. Schwarze, Universität Göttingen

Bezeichnungen und Symbole

Stichwortverzeichnis