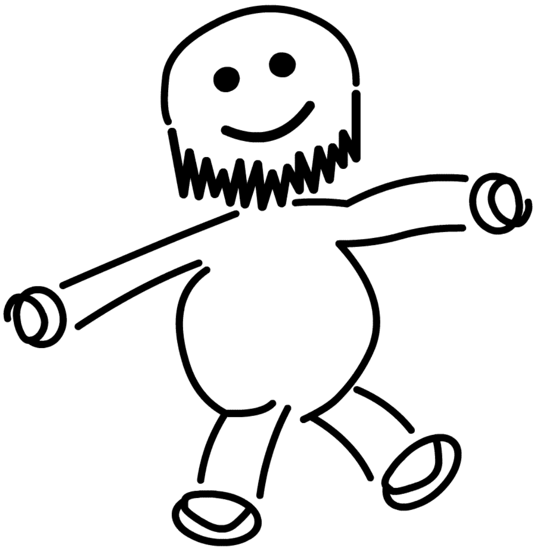
Physikalisches Praktikum für das Hauptfach Physik

Versuch 04

Kreiselpräzession

Sommersemester 2005



Name:	Hauke Rohmeyer
Mitarbeiter:	Daniel Scholz
EMail:	HaukeTR@gmx.de
Gruppe:	13

Assistent:	Sarah Köster
Durchgeführt am:	28. April 2005
Protokoll abgebeben:	19. Mai 2005
Protokoll verbessert:	26. Mai 2005

Stempel:

Testiert: ____________________________

1 Einleitung

In diesem Versuch sollen, nach der Besprechung des Trägheitsmomentes, nochmals die Bewegungsgleichungen starrer rotierender Körper vermittelt werden. Im Rahmen dieses Versuchs soll insbesondere die Präzession eines Kreisels gemessen werden. Diese ist, wenn man sie das erste Mal beobachtet sehr erstaunlich. Doch lässt sie sich mit Hilfe der Bewegungsgleichungen starrer rotierender Körper gut erklären.

2 Theorie

2.1 Winkelgeschwindigkeit

Mit der Translationsgeschwindigkeit lassen sich Geschwindigkeiten starrer rotierender Körper nicht elegant ausdrücken. Denkt man sich z.B. eine Kreisscheibe, so legen Punkte, die weiter von der Drehachse entfernt sind, in der gleichen Zeit eine längere Strecke zurück, als Punkte, die nahe an der Drehachse liegen. Denkt man sich jedoch eine Linie von der Drehachse zu einem beliebigen Punkt x, so überstreichen alle Punkte auf dieser Linie in einer gegebenen Zeit den gleichen Winkel ϕ. Die zeitliche Änderung dieses Winkels ist die ***Winkelgeschwindigkeit*** ω, mit der man die Geschwindigkeit eines starren rotierenden Körpers ausdrückt:

$$\omega = \frac{d\phi}{dt}.$$

Aus dieser Definition folgt der Zusammenhang zwischen Translations- und Winkelgeschwindigkeit:

$$v = \omega r \qquad \Leftrightarrow \qquad \omega = \frac{v}{r}.$$

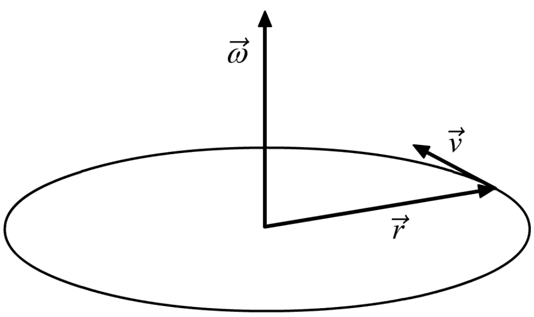


Abbildung 1 - Translations- und Winkelgeschwindigkeit

Mit der Umlaufzeit T für eine Drehung um den Winkel 2π wird die Winkelgeschwindigkeit zu

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

2.2 Drehimpuls und Drehmoment

Für einen starren Körper, der um eine feste Achse rotiert, erhält man den ***Drehimpuls*** L, wenn man den Impuls eines jeden Massenpunktes m mit seinem Abstand r von der Drehachse multipliziert und über den ganzen Körper summiert, also:

$$\vec{L} \;=\; \sum \vec{r}_i \times \vec{p}_i.$$

Mit $p = mv$, $v = \omega r$ und $J = mr^2$ ergibt sich

$$L \;=\; rmv \;=\; rm\omega r \;=\; mr^2\omega \;=\; J\omega.$$

Die zeitliche Änderung des Drehimpulses ist das ***Drehmoment***

$$M \;=\; \frac{dL}{dt}.$$

2.3 Kreisel

Ein Kreisel ist ein starrer Körper der um eine freie Achse rotiert, die nur in einem Punkt unterstüzt wird. Ist dies der Massenmittelpunkt so heißt der Kreisel kräftefrei, sonst spricht man von einem schweren Kreisel. Bei einem symmetrischen Kreisel ist der rotierende Körper symmetrisch zur Drehachse.

2.4 Präzession

Wenn die Drehachse des Kreisels horizontal gehalten wird und der Kreisel sich nicht dreht, so fällt er aufgrund der Schwerkraft einfach nach unten. Dreht sich der Kreisel jedoch, so weicht die Drehachse horizontal aus. Diese Bewegung nennt man ***Präzession***. Sie lässt sich dadurch erklären, dass das Drehmoment senkrecht zur einwirkenden Kraft und zum Drehimpuls steht.

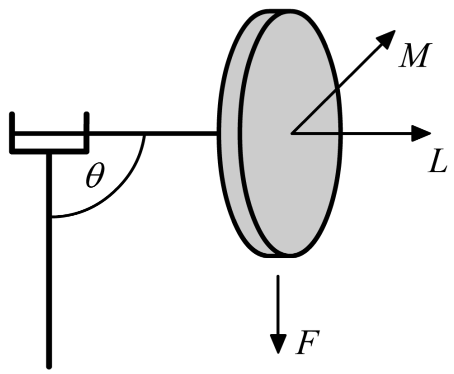


Abbildung 2 - Ein schwerer symmetrischer Kreisel.

Es ist also zu zeigen, dass $M \perp F$ und $M \perp L$ gilt. Es ist

$$\vec{L} \;=\; \vec{r} \times \vec{p} \;=\; \vec{r} \times m\vec{v}.$$

Nach der Definition von $\vec{M}$ folgt

$$\vec{M} \;=\; \frac{d\vec{L}}{dt} \;=\; \vec{r} \times m\,\frac{\vec{v}}{dt} \;=\; \vec{r} \times m\vec{a} \;=\; \vec{r} \times \vec{F}$$

und nach der Definition des Vektorproduktes schließlich $M \perp F$.

Da aber $\vec{r}$ in die gleiche Richtung zeigt wie $\vec{L}$ folgt ebenfalls $M \perp L$.

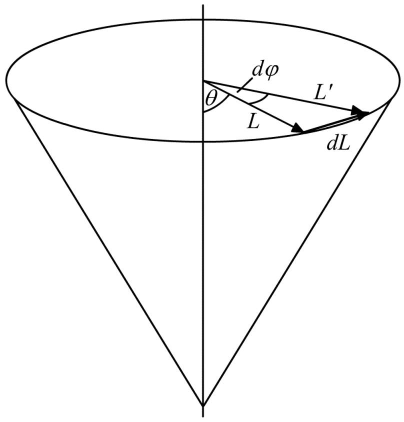


Abbildung 3 - Präzession

Nun lässt sich die ***Präzessionsgeschwindigkeit*** ω_p berechnen. Die Präzessionsgeschwindigkeit ist die zeitliche Änderung des Winkels φ.

Nun gilt wegen $M = \frac{dL}{dt} \Leftrightarrow M\,dt = dL$ gerade

$$d\varphi \;=\; \frac{dL}{L\;\sin\theta} \;=\; \frac{M\;dt}{L\;\sin\theta}.$$

Nach der Definition von ω_p folgt

$$\omega_p \;=\; \frac{d\varphi}{dt} \;=\; \frac{M}{L\;\sin\theta}.$$

Wegen

$$\vec{M} \;=\; \vec{r} \times \vec{F} \;=\; \vec{r} \times m\vec{g} \;=\; |\vec{r}|\;m\;|\vec{g}|\sin\theta$$

vereinfacht sich ω_p zu

$$\omega_p \;=\; \frac{rmg\sin\theta}{L\sin\theta} \;=\; \frac{rmg}{J\omega_k},$$

wobei ω_k die Winkelgeschwindigkeit des Kreisels ist.

2.5 Nutation

Aufgrund der Bewegung von dem Massenmittelpunkt des Kreisels gibt es ein kleines Drehmoment, das nach oben zeigt. Nun fällt die momentane Drehachse nicht mehr mit der Hauptträgheitsachse [die sog. ***Figurenachse***] zusammen, sondern rotiert um diese. Diese Bewegung sieht aus wie ein Nicken des Kreisels und wird ***Nutation*** genannt.

Nun lässt sich die Nutationsgeschwindigkeit ω_N berechnen.

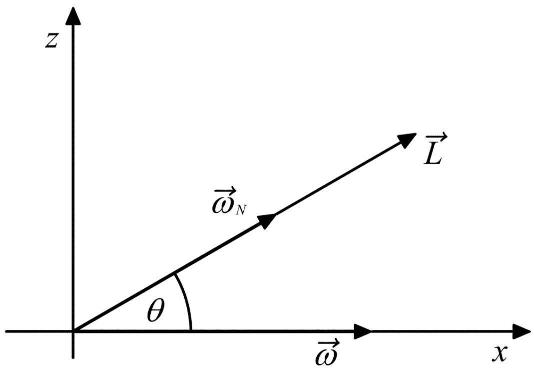


Abbildung 4 - Nutation

Es gilt:

(1) $\omega_{Nz} = \omega_N \sin\theta$

(2) $L_z = J_z\, \omega_{Nz}$, $L_x = J_x\, \omega$

(3) $\frac{L_z}{\sin\theta} = L = \frac{L_x}{\cos\theta}$

Daraus folgt nun

$$\omega_N = \omega_{Nz}\, \frac{1}{\sin\theta} = \frac{L_z}{J_z}\, \frac{1}{\sin\theta} = L\, \frac{1}{J_z} = \frac{L_x}{\cos\theta}\, \frac{1}{J_z} = \frac{1}{\cos\theta}\, \frac{J_x}{J_z}\omega,$$

was sich wegen $\theta \approx 0$, also $\cos\theta \approx 1$ zu

$$\omega_N \approx \frac{J_x}{J_z}\, \omega$$

vereinfacht.

3 Versuchsdurchführung

3.1 Versuchsteil A - Physikalisches Pendel

Zunächst wird der Kreisel eingespannt und durch ein Zusatzgewicht in ein physikalisches Pendel verwandelt. Nun wird die Schwingungsdauer über 10 Perioden mehrfach gemessen. Die Messung wird an der diametral gegenüberliegenden Stelle wiederholt.

3.2 Versuchsteil B - Präzession

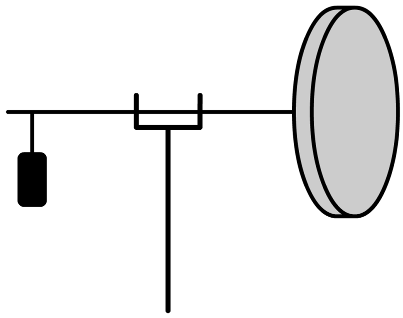


Abbildung 5 - Schema des Versuchskreisels mit Zusatzgewicht

Nachdem die Einspannung entfernt wurde, wird der Kreisel mit dem Ausgleichsgewicht in die horizontale Gleichgewichtslage gebracht. Mit der Aufzugsschnur wird das Rad in schnelle Rotation versetzt. Nun wird die Rotationsperiode des Rades mit Hilfe einer Lichtschranke bestimmt [am äußeren Rand des Rades wurde ein Klebestreifen angebracht damit er die Lichtschranke unterbrechen kann]. Ein Zusatzgewicht wird an die freie Achse des Kreisels gehängt. Nachdem der Kreisel per Hand langsam in die Präzessionsbewegung eingeführt wurde, wird eine halbe Präzessionsperiode gemessen. Diese Schritte [messen der Rotationsperiode des Rades und der Präzessionsperiode des Kreisels] werden zweimal wiederholt. Die gesamte Messung wird mit zwei weiteren Gewichten wiederholt.

3.3 Versuchsteil C - Nutation

Wieder wird das Rad in schnelle Rotation versetzt und die Rotationsperiode des Rades gemessen. Nun wird der freien Achse ein Stoß gegeben, und die Nutationsperiode gemessen. Diese beiden Schritte werden zweimal wiederholt.

4 Auswertung

4.1 Trägheitsmoment aus den Eigenschaften des Rades

Das Trägheitsmoment des Rades um die horizontale Achse wird mit der Formel

$$J_x \;=\; \frac{1}{2}\,mr^2$$

berechnet, wobei m die Masse des Rades und r dessen Radius ist. Es ergibt sich $J_x \;=\; 0,00993\;kg\;m^2$.

Das Trägheitsmoment des gesamten Kreisels um die Drehachse berechnet sich mit

$$\begin{aligned} J_z &= J_{Ausgleichsgewicht} + J_{Stange} + J_{Rad} \\ &= m_a z_a^2 \;+\; \frac{1}{12} m_s l^2 \;+\; m_s l'^2 \;+\; \frac{1}{4} m_r r^2 \;+\; \frac{1}{12} m_r d^2 \;+\; m_r z_r^2, \end{aligned}$$

wobei m_a die Masse des Ausgleichgewichtes und z_a seine Entfernung von der Drehachse ist, m_s die Masse und l die Länge des Stange, l' die Entfernung des Schwerpunktes der Stange zur Drehachse, m_r die Masse des Rades und r dessen Radius, d der Durchmesser des Rades und z_r der Abstand des Rades zur Drehachse. Hierbei wurde das Ausgleichsgewicht als Punktmasse angenommen, z_r mit dem Hebelgesetz ausgerechnet und mehrfach der Steinersche Satz angewendet. Die Masse der Stange wurde auf 400 g geschätzt, ihre Länge auf 50 cm. Der Abstand des Schwerpunktes der Stange zur Drehachse wurde auf 10 cm geschätzt.

Es ergibt sich $J_z \;=\; 0,05841\;kg\;m^2$.

4.2 Trägheitsmoment aus dem Physikalischen Pendel

Aus der Schwingungsdauer T des Rades mit Zusatzgewicht m im Abstand z von der Drehachse und der Gravitationsbeschleunigung g, folgt für das Trägheitsmoment [Herleitung siehe Versuch 03: Das Trägheitsmoment]

$$J \;=\; \frac{T^2 gmz}{4\pi^2} - mz^2.$$

Der Fehler der Schwingungsdauer wurde mit

$$\begin{aligned} \Delta T &= \text{kleinster Skalenwert der Stoppuhr} + 0,005 \cdot \text{Messwert} \\ &= 0,01 + 0,005 \cdot T \end{aligned}$$

berechnet. Für den Fehler des Trägheitsmomentes wurde das Gesetz der Fehlerfortpflanzung verwendet,

$$\sigma_J \;=\; \sqrt{\sigma_T^2 \left(\frac{\partial J}{\partial T}\right)^2 + \sigma_z^2 \left(\frac{\partial J}{\partial z}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\sigma_T \; \frac{Tgmz}{2\pi^2}\right)^2 + \sigma_z^2 \left(\frac{T^2gm}{4\pi^2} - 2mz\right)^2},$$

wobei g als Konstante und m als genau angenommen wurde, so dass sie nicht berücksichtigt wurden.

T[s]	Δ T	J $[kgm^2]$	σ_J
1.83	0.02	0.00930	0.00037
1.79	0.02	0.00880	0.00035
1.80	0.02	0.00898	0.00036
1.80	0.02	0.00896	0.00036
1.81	0.02	0.00907	0.00036
1.80	0.02	0.00915	0.00036

Es ergibt sich für den gewichteten Mittelwert $J = 0,00904\ kg\ m^2$ mit dem Fehler $\sigma_J = 0,00015\ kg\ m^2$.

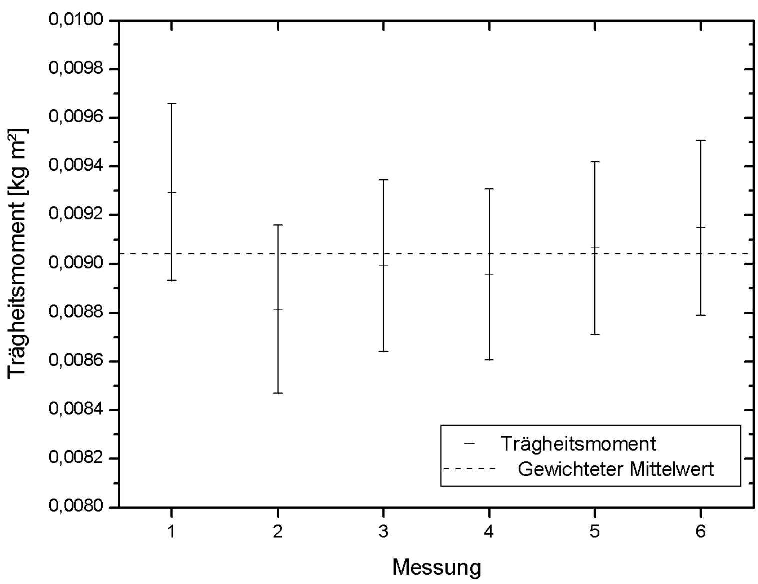


Abbildung 6 - Trägheitsmoment aus dem physikalischen Pendel

4.3 Trägheitsmoment aus der Präzessionsgeschwindigkeit

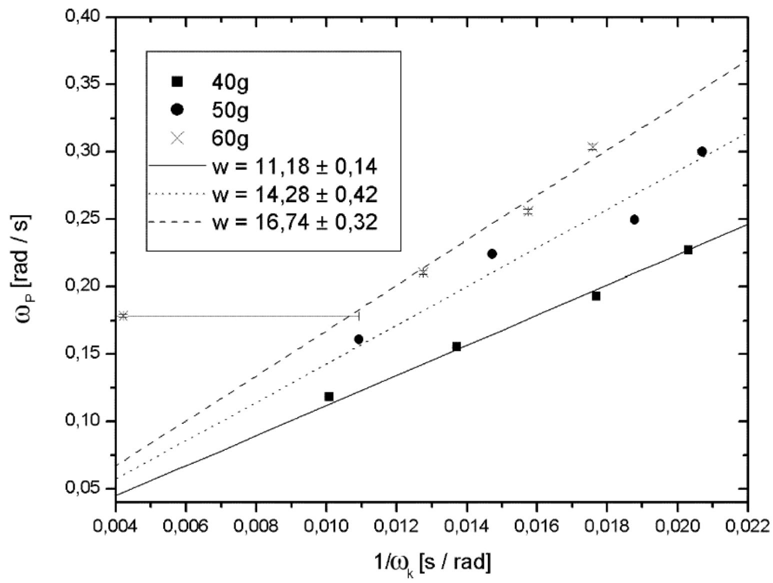


Abbildung 7 - Berechnung von $\omega_P \cdot \omega_k$

Der Fehler der Präzessionsperiode wurde wie in 4.2 berechnet. Leider sind die Fehlerbalken so klein, so dass sie in der Grafik kaum sichtbar sind. Dies ist für uns unerklärlich: wir haben die Fehler mehrmals nachgerechnet.

Der erste Messwert bei dem Zusatzgewicht von 60 g ist ein Messfehler. Dieser auf die falsche Bedienung der Lichtschranke zurückzuführen. Sie wurde wahrscheinlich zu dicht an das Rad gehalten, so dass die zweite Unterbrechung des Lichtstrahles nicht durch den Klebestreifen, sondern duch das Rad selber ausgelöst wurde.

Für ω_k wurde der Mittelwert der Rotationsgeschwindigkeit vor und nach der Messung der Präzessionsfrequenz genommen [ausser bei dem jeweils letzten Wert - das Praktikumsskript war ein wenig ungenau, so dass wir die Rotationsfrequenz nicht gemessen haben].

Mit $w := \omega_P \, \omega k$ berechnet sich das Trägheitsmoment durch

$$\omega_p = \frac{rmg}{J \, \omega_k} \Leftrightarrow J = \frac{rmg}{\omega_P \, \omega_k} = \frac{rmg}{w},$$

wobei m die Masse und r der Abstand des Zusatzgewichtes zur Drehachse ist. w ergibt sich durch die lineare Regression:

$$w = \frac{\omega_P}{\frac{1}{\omega_k}} = \omega_P \, \omega_k.$$

Der Fehler berechnet sich mittels der Fehlerfortpflanzung:

$$\begin{aligned}\sigma_J &= \sqrt{\sigma_r^2\left(\frac{\partial J}{\partial r}\right)^2+\sigma_w^2\left(\frac{\partial J}{\partial w}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\sigma_r\ \frac{mg}{\omega_P\ \omega_k}\right)^2+\sigma_w^2\left(-\frac{rmg}{w^2}\right)^2}.\end{aligned}$$

m	w	σ_w	$J\ [kg\ m^2]$	σ_J
0.04	11.18082	0.13943	0.00948	0.00133
0.05	14.27902	0.41437	0.00927	0.00385
0.06	16.73975	0.32491	0.00949	0.00309

Es ergibt sich der gewichtete Mittelwert $J = 0,00946\ kg\ m^2$ mit dem Fehler $\sigma_J = 0,00116\ kg\ m^2$.

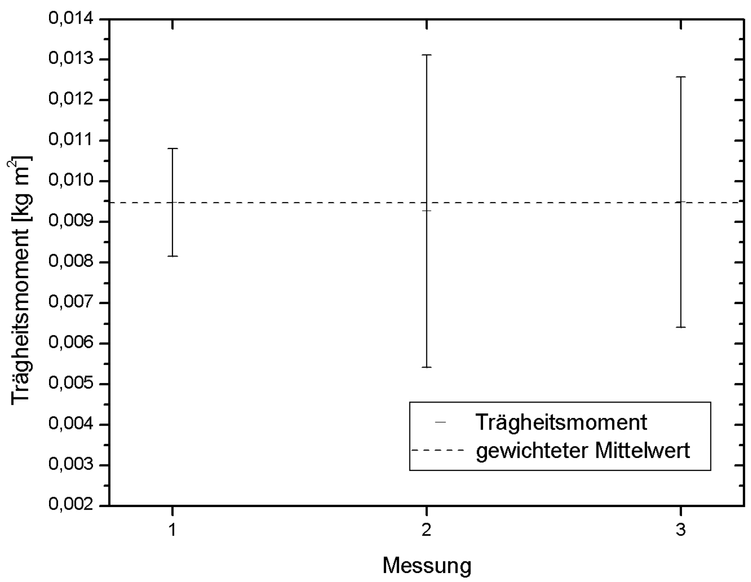


Abbildung 8 - Trägheitsmoment aus der Präzessionsgeschwindigkeit

4.4 Vergleich der Ergebnisse für das Trägheitsmoment

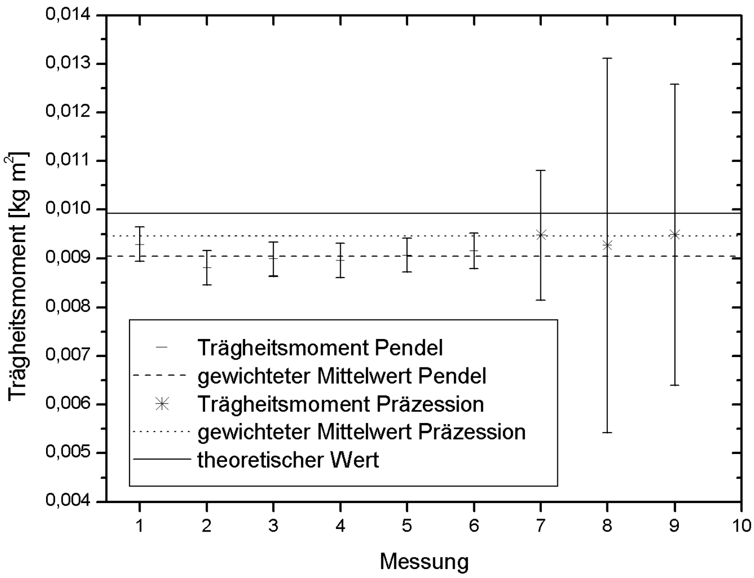


Abbildung 9 - Vergleich der Trägheitsmomente

Auffallend ist, dass die gemessenen Werte für das Trägheitsmoment von dem theoretischen Wert stark abweichen. Dies liegt wahrscheinlich daran, dass beim theoretischen Wert der Kreisel als reibungsfrei angenommen wird. Die Fehlerbalken des Trägheitmomentes welches durch die Pendelbewegung errechnet wurde [Messung 1-6] sind deutlich kleiner als die, die durch die Präzession errechnet wurden [Messung 7-9]. Der Grund hierfür ist, dass die Messungen 1-6 weniger Fehlerquellen beinhalteten. Man erkennt jedoch, dass die meisten Fehlerbalken von Messung 7-9 innerhalb des gewichteten Mittelwertes von Messung 1-6 liegen. Hieraus lässt sich schließen, dass das Trägheitsmoment des Rades am Besten durch den gewichteten Mittelwert von Messung 1-6 berechnet wurde.

4.5 Diskussion

Die Messung des Trägheitsmoment des Rades mit Hilfe des physikalischen Pendels lieferte Ergebnisse mit deutlich kleinerem Fehler. Da bei der Messung der Präzessionsperiode der Neigungswinkel θ schnell zunahm, musste man darauf achten, dass das Zusatzgewicht nicht gegen die Halterung des Kreisels stößt. So mussten die Messungen enorm schnell durchgeführt werden, und es kam zu Bedienungsfehlern der Lichtschranke.

4.6 Nutation

Die Nutationsgeschwindigkeit errechnet sich durch $\omega_N = \frac{2\pi}{T}$, wobei T die Nutationsperiode ist. Der Fehler wurde wieder durch $\Delta T = 0,01 + 0,005 \cdot T$ und durch das Gesetz der Fehlerfortpflanzung errechnet. In der Tabelle bezeichnet ω_{N_T} die durch die in 2.5 hergeleitete Formel errechneten Werte für die Nutationsgeschwindigkeit.

ω_R	ω_N	σ_{ω_N}	ω_{N_T}
104.71976	15.70796	0.47124	17.80977
87.87672	12.719	0.32106	14.94526
73.06029	10.57775	0.23097	12.42542
123.19971	17.79939	0.59323	20.95267
95.19978	13.68886	0.36668	16.1907
79.03378	11.8105	0.28105	13.44133

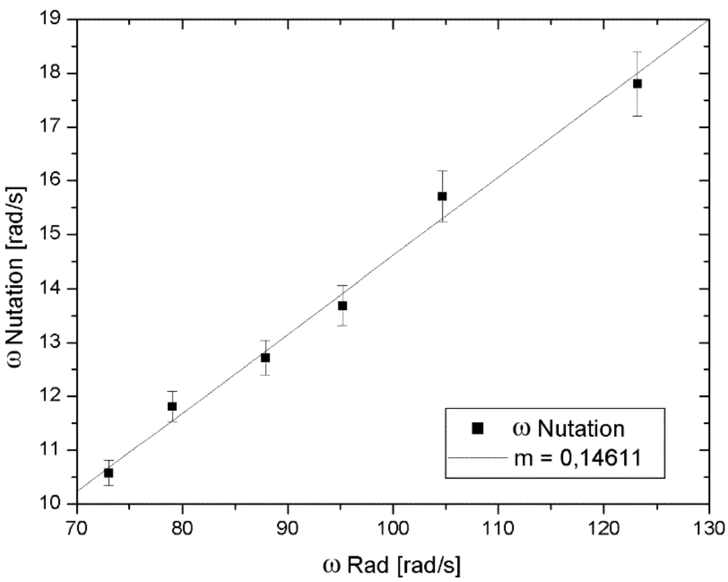


Abbildung 10 - Nutationsgeschwindigkeit

Aus der linearen Regression ergibt sich $\frac{\omega_N}{\omega_R} = 0,14611$. Dies entspricht ungefähr dem Wert $\frac{J_x}{J_z} = 0,17007$. [$J_x$ und J_z siehe 4.1].

4.7 Diskussion

Leider lässt die Genauigkeit des errechneten Trägheitsmoment des Kreisels einen direkten Vergleich der Trägheitsmomente nicht zu. Die Schätzungen in 4.1 mögen in etwa richtig sein, sind aber mit einem großen Fehler behaftet. Das Praktikumsskript war im Bezug auf die Errechnung des Trägheitsmoment bezüglich der Drehachse des Kreisels viel zu ungenau. Dort hieß es „Berechnen Sie aus den Angaben das Trägheitsmoment des Rades [...] um die vertikale Achse.“ Somit haben wir nur die Messungen vorgenommen, die zur Errechnung des Trägheitsmomentes um die vertikale Achse des Rades und nicht des gesamten Systems nötig gewesen sind. Zusätzlich lässt sich die Masse der Stange nicht bestimmen, ohne die gesamte Apparatur auseinanderzunehmen, was sicherlich nicht im Sinne der Praktikumstechniker wäre. Hier fehlen die Angaben am Praktikumsplatz. Bevor das Praktikumsskript um Versuchsteile ergänzt wird, sollte doch bitte die Praktikumsleitung die gewünschte Auswertung exemplarisch durchrechnen.

Trotz alledem ist das eigentliche Ergebnis sehr zufriedenstellend. Die Auftragung ergab einen linearen Zusammenhang und die Fehler sind in den erwünschten Größenordnungen.