Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Sommersemester 2004

Prof. Dr. Joachim Weickert
Dr. Bernhard Burgeth

6. Übung zur Mathematik für Informatiker II

Aufgabe 1: (2+2+2+1+1 Punkte)

Diese Aufgabe beschäftigt sich mit dem Kreuzprodukt.

a) Zeigen Sie , dass $|a \times b| = |a||b|\sin(\varphi)$ gilt, wenn $0 \leq \varphi \leq \pi$ den Winkel zwischen a und b bezeichnet. Folgern Sie, dass die Fläche eines Parallelogramms, das von den Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^3$ aufgespannt wird, gleich $|a \times b|$ ist.

b) Zeigen Sie, dass der Absolutwert des sogenannten Spatproduktes $a \cdot (b \times c)$ gleich dem Volumen des von den Vektoren a, b, c aufgespannten Parallelepipeds („schiefwinkeliger Quader“) ist.

c) Zeigen Sie für $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ mit $a = (a_1, a_2, a_3),\ b = (b_1, b_2, b_3),\ c = (c_1, c_2, c_3)$, dass gilt:

$$a \cdot (b \times c) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} .$$

d) Zeigen Sie, dass zwei linear unabhängige Vektoren a, b aus dem euklidischen $\mathbb{R}^3$ immer senkrecht auf $a \times b$ stehen.

e) Für Vektoren $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ zeige man die Identität

$$a \cdot (b \times c) = (a \times b) \cdot c\,.$$

Aufgabe 2: (1+2+1 Punkte)

Berechnen Sie die Jacobi-Matrix der folgenden Funktionen:

a)

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ \ f : t \mapsto (e^t, \sin(t^2),\, \cos(t^3))^\top .$$

b)

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ g : x \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} 2^{-x_1^2-x_2^2-x_3^2}, \quad x = (x_1, x_2, x_3)^\top.$$

c)

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ g : x \mapsto x_3 \cdot e^{-x_1^2-x_2^2-x_3^2}, \quad x = (x_1, x_2, x_3)^\top.$$

Aufgabe 3: (2+2 Punkte)

a) Es sei $F : D \longrightarrow \mathbb{R}$, mit $D \subset \mathbb{R}^3$ offen, zweimal stetig differenzierbar.
Zeigen Sie, dass gilt:

$$\text{rot } \nabla f(x) = 0 \qquad \text{für alle } x \in D$$

b) Das Potentialfeld F um eine elektrische Ladungen E ist gegeben durch

$$F(x) = -E\,\frac{x}{|x|^3}, \quad x \in D := \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}\,.$$

Zeigen Sie, dass F in D wirbelfrei ist, d.h. rot $F(x) = 0$ für alle $x \in D$.

Aufgabe 4: (2+2 Punkte)

Es sei $F : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$, mit $D \subset \mathbb{R}^3$ offen, ein C^2-Vektorfeld.

a) Zeigen Sie:

$$\text{div rot } F = 0\,.$$

b) Ist das Vektorfeld $F(x, y, z) = (x^2y, z, xyz)^\top$ als Rotation eines anderen Vektorfeldes G darstellbar (d.h. $F =$ rot G) ?

Abgabetermin: Freitag, 4. 6. 2004 vor der Vorlesung