Mathematische Begriffsbildungen zur Gravitationstheorie.[1]

Von

Marcel Grossmann.

Der mathematische Grundgedanke der Einstein'schen Gravitationstheorie, ein Gravitationsfeld zu charakterisieren durch eine quadratische Differentialform mit variabeln Koeffizienten, zwingt zu einer Verallgemeinerung der Begriffsbildungen und Methoden der Vektoranalysis. Von grundlegender Bedeutung ist hiebei die berühmte Abhandlung von Christoffel „Über die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades" aus dem Jahre 1869 (Journal für Math. 70) und die auf dieser fussende Abhandlung von Ricci und Levi-Cività „Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications" vom Jahre 1901 (Math. Ann. 54). In dieser letzteren Arbeit entwickelten die Verfasser Methoden, die den Differentialgleichungen der mathematischen Physik eine invariante, d. h. vom Koordinatensystem unabhängige Form geben lassen. Die seitherige Entwicklung der Vektoranalysis lässt die Vorzüge einer allgemeinen invariantentheoretischen Behandlung noch viel deutlicher erkennen, da eine solche das vollständige System der vektoranalytischen Begriffe vermittelt und damit auch den neuen Begriffen, die von Minkowski, Sommerfeld, Laue u. a. in die vierdimensionale Welt der Relativitätstheorie eingeführt wurden, ihre naturgemässe Stellung anweist.

Da es sich an dieser Stelle nicht darum handeln kann, die invarianten-theoretischen Methoden der Vektoranalysis systematisch zu entwickeln, will ich mich darauf beschränken, an den einfachsten Begriffen und Sätzen der Vektoranalysis den Unterschied der invariantentheoretischen Methode von der in der theoretischen Physik üblichen Methode darzulegen. Dieser Unterschied besteht wesentlich in folgen-

[1]) Nach einem Vortrage, gehalten am 9. September 1913 an der Jahresversammlung der Schweiz. Naturforschenden Gesellschaft in Frauenfeld.

dem. Die Physiker leiten die Begriffe und Sätze der Vektoranalysis ab in unmittelbarer Anlehnung an die physikalischen Probleme, denen die betreffenden Begriffe und Sätze ihre Entdeckung und Anwendung verdanken. So berechtigt und anschaulich diese Methode auch im einzelnen Fall sein mag, so wenig befriedigend ist sie doch vom mathematischen Standpunkte. Hiezu kommt, dass die Anschaulichkeit im Vierdimensionalen sowieso auf Schwierigkeiten stösst, ganz abgesehen davon, dass nur den einfachsten vektoranalytischen Begriffen ein anschauliches Korrelat entspricht.

Wir zeigen nun zunächst am Beispiele des Vektors und der mit ihm verknüpften Begriffe den Unterschied der Methoden.

I. Gewöhnliche Vektoranalysis. Der vierdimensionale euklidische Raum sei bezogen auf rechtwinklige Koordinaten, in denen das Linienelement die Form

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 \tag{1}$$

hat. Eine Drehung des Koordinatensystems ist dann bekanntlich gegeben durch eine orthogonale Substitution

$$x_r = \sum_i p_{ri}\, x'_i, \tag{2}$$

deren Auflösung

$$x'_r = \sum_i p_{ir}\, x_i \tag{2a}$$

ist.[1]) Vier Funktionen

$$A_i\,(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

bilden dann die Komponenten eines Vektors, wenn sie sich bei einer Drehung des Koordinatensystems transformieren wie die rechtwinkligen Koordinaten selbst, also nach den Formeln

$$A'_r = \sum_i p_{ir}\, A_i. \tag{3}$$

Die rechtwinkligen Koordinaten selbst sind dann auch Vektorkomponenten, wie auch ihre Differentiale. Das Linienelement (1) erweist sich (wegen der Orthogonalität der Substitution (2)) als absolute Invariante (Skalar) und allgemeiner gehört zu jedem Vektor A ein Skalar

$$A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_4^2,$$

nämlich das Quadrat seines Betrages.

[1]) Alle Summationsindizes laufen hier wie in den übrigen Summen von 1 bis 4; alle festen Indizes können die Werte 1 bis 4 annehmen.

Von besonderer Wichtigkeit sind nun in der theoretischen Physik die Differentialoperationen der Vektoranalysis. So erhält man aus einem Vektor A einen Skalar, seine Divergenz, durch die Differentialoperation

$$\operatorname{div} A = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} + \frac{\partial A_4}{\partial x_4}.$$

Man verifiziert die Richtigkeit dieses Satzes durch Ausführung der orthogonalen Substitution; gewöhnlich beweist man den Satz (im Dreidimensionalen) aber folgendermassen: Man denkt sich den Vektor A als Geschwindigkeitsvektor im Strömungsfeld einer inkompressibeln Flüssigkeit. In dem endlichen Raumgebiete S, begrenzt durch die Oberfläche σ, seien einzelne Quellen und Senken. Berechnet man ihre Ergiebigkeit im Gebiete S, also die Flüssigkeitsmenge, die in der Zeiteinheit die Oberfläche σ durchströmt, so findet man nach Anwendung des Gauss'schen Integralsatzes

$$\int_\sigma A_n \, d\sigma = \int_S \operatorname{div} A \cdot dS.$$

Damit ist die Divergenz als eine vom Koordinatensystem unabhängige Grösse nachgewiesen.

II. Allgemeine Vektoranalysis. Man kann nun aber diese und andere Begriffe und Sätze der Vektoranalysis auf befriedigendere Art ableiten und gelangt dazu, indem man zunächst beliebige krummlinige Koordinaten einführt. Das Linienelement hat dann die Form

$$ds^2 = \sum_{ik} g_{ik} \, dx_i \, dx_k, \tag{1}$$

worin die Grössen g_{ik} Funktionen von x_1, x_2, x_3 und x_4 sind. Die Allgemeinheit dieser quadratischen Differentialform ermöglicht es, abzusehen davon, ob der vorliegende Raum euklidisch oder nichteuklidisch oder gar von variabelm Krümmungsmass ist. Transformiert man die Koordinaten nach den Formeln

$$x_\nu = x_\nu (x_1', x_2', x_3', x_4'),$$

transformiert man also die Differentiale der Koordinaten nach den Formeln

$$dx_\nu = \sum_i \frac{\partial x_\nu}{\partial x_i'} dx_i' = \sum_i p_{\nu i} \, dx_i' \tag{2}$$

oder

$$dx_\nu' = \sum_i \frac{\partial x_\nu'}{\partial x_i} dx_i = \sum_i \pi_{i\nu} \, dx_i, \tag{2a}$$

so transformieren sich, sofern das Linienelement (1) ein Skalar sein soll, dessen Koeffizienten nach den Formeln

$$g'_{rs} = \sum_{ik} p_{ir}\, p_{ks}\, g_{ik}. \tag{3}$$

Ist g die Diskriminante der Differentialform (1), also die Determinante $|g_{ik}|$, und bezeichnet man mit γ_{ik} die durch g dividierte, dem Elemente g_{ik} adjungierte Unterdeterminante derselben, so transformieren sich diese Grössen γ_{ik} nach den Formeln

$$\gamma'_{rs} = \sum_{ik} \pi_{ir}\, \pi_{ks}\, \gamma_{ik}. \tag{4}$$

Unter einem kovarianten Vektor A verstehen wir nun den Inbegriff von vier Funktionen

$$A_i(x_1, x_2, x_3, x_4),$$

wenn diese sich transformieren nach den Formeln

$$A'_r = \sum_i p_{ir}\, A_i.$$

Unter einem kontravarianten Vektor Θ verstehen wir dagegen den Inbegriff von vier Funktionen

$$\Theta_i(x_1, x_2, x_3, x_4), \tag{5}$$

wenn sie sich transformieren nach den Formeln

$$\Theta'_r = \sum_i \pi_{ir}\, \Theta_i. \tag{6}$$

Aus diesen Definitionen folgt, dass die Koordinaten selbst keine Vektoren mehr sind, dass dagegen ihre Differentiale, wie Gleichung (2a) zeigt, die Komponenten eines kontravarianten Vektors sind. Weil bei einer orthogonalen Substitution $p_{ir} = \pi_{ri}$ ist, fällt der Unterschied zwischen Kovarianz und Kontravarianz in der gewöhnlichen Vektoranalysis dahin, während dieser Dualismus in der allgemeinen Vektoranalysis von grundlegender Bedeutung ist.

Sind A und B zwei kovariante Vektoren und bilden wir aus ihren Komponenten die 16 Grössen

$$T_{ik} = A_i B_k,$$

so transformieren sich diese nach den Gleichungen

$$T'_{rs} = \sum_{ik} p_{ir}\, p_{ks}\, T_{ik}. \tag{7}$$

Allgemein nennen wir den Inbegriff eines derartigen Systems von 16 Grössen mit diesen Transformationseigenschaften einen kovarianten Tensor zweiten Ranges (letzteres wegen der zwei Indizes, die seine Komponenten charakterisieren). Die Grössen g_{ik} bilden daher einen kovarianten Tensor zweiten Ranges, wie Gleichung (3) zeigt; wir nennen ihn den kovarianten Fundamentaltensor. In leicht verständlicher Analogie werden wir die Grössen γ_{ik} als Komponenten des kontravarianten Fundamentaltensors betrachten.

Man kann nun allgemein als kovarianten Tensor vom Range λ, den Inbegriff eines Systems von Funktionen $T_{i_1 i_2 \ldots i_\lambda}$ definieren, wenn diese sich transformieren nach den Formeln

$$(8) \qquad T'_{r_1 r_2 \ldots r_\lambda} = \sum_{i_1 i_2 \ldots i_\lambda} p_{i_1 r_1} p_{i_2 r_2} \ldots p_{i_\lambda r_\lambda} T_{i_1 i_2 \ldots i_\lambda}.$$

Analog bilden $\Theta_{i_1 i_2 \ldots i_\lambda}$ einen kontravarianten Tensor vom Range λ, wenn die Transformationsformeln lauten:

$$(9) \qquad \Theta'_{r_1 r_2 \ldots r_\lambda} = \sum_{i_1 i_2 \ldots i_\lambda} \pi_{i_1 r_1} \pi_{i_2 r_2} \ldots \pi_{i_\lambda r_\lambda} \Theta_{i_1 i_2 \ldots i_\lambda}.$$

Endlich können wir diese beiden Begriffe zusammenfassen unter dem Begriffe des gemischten Tensors, kovariant vom Range λ, kontravariant vom Range μ, wenn die Transformationsformeln lauten:

$$(10) \qquad \mathfrak{T}'_{r_1 r_2 \ldots r_\lambda / s_1 s_2 \ldots s_\mu} =$$

$$= \sum_{\substack{i_1 i_2 \ldots i_\lambda \\ k_1 k_2 \ldots k_\lambda}} p_{i_1 r_1} p_{i_2 r_2} \ldots p_{i_\lambda r_\lambda} \cdot \pi_{k_1 s_1} \pi_{k_2 s_2} \ldots \pi_{k_\lambda s_\lambda} \cdot \mathfrak{T}_{i_1 i_2 \ldots i_\lambda / k_1 k_2 \ldots k_\mu}.$$

Derartige kovariante Systeme, wie wir sie jetzt als Tensoren bezeichnen, spielen in der Transformationstheorie von Christoffel eine grosse Rolle; wir müssen ihr noch einen zum Aufbau der allgemeinen Vektoranalysis wichtigen Satz entnehmen. Christoffel hat gezeigt, dass man durch eine einmalige bestimmte Differentialoperation immer von einem Tensor vom Range λ zu einem gleichartigen vom Range $\lambda + 1$ gelangen kann. Für unsere Zwecke genügt es, anzugeben, wie die Differentialoperation lautet, die aus einem kovarianten Vektor A (d. h. aus einem kovarianten Tensor ersten Ranges) einen kovarianten Tensor zweiten Ranges hervorgehen lässt, weil wir auf diesem Wege zum Begriff der Divergenz eines kovarianten Vektors gelangen. Diese Differentialoperation („Erweiterung") lautet:

$$(11) \qquad A_{rs} = \frac{\partial A_r}{\partial x_s} - \sum_{ik} \tfrac{1}{2} \gamma_{ik} \left(\frac{\partial g_{ir}}{\partial x_s} + \frac{\partial g_{is}}{\partial x_r} - \frac{\partial g_{rs}}{\partial x_i} \right) A_k.$$

Bildet man nun die Summe

$$\sum_{rs} \gamma_{rs} A_{rs} \tag{12}$$

und beachtet man, dass die A_{rs} sich kovariant, die γ_{rs} kontravariant verhalten, so erkennt man, dass diese Summe eine absolute Invariante sein muss, also die Divergenz des Vektors A ist. Eine leichte Umformung liefert so

$$\operatorname{div} A = \sum_{rs} \gamma_{rs} A_{rs} = \sum_{rs} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_s} \left(\sqrt{g}\, \gamma_{rs} A_r\right). \tag{12'}$$

Ist nun das Linienelement das euklidische, sind also die g_{ik} gleich 0 bezw. 1, so ist nach Formel (11) die Erweiterung des Vektors A der Tensor

$$A_{rs} = \frac{\partial A_r}{\partial x_s}$$

und die Summation (12) oder die Gleichung (12′) liefert als Divergenz des Vektors unmittelbar

$$\operatorname{div} A = \sum_r \frac{\partial A_r}{\partial x_r}.$$

Als weiteres Beispiel für die invarianten-theoretischen Methoden der allgemeinen Vektoranalysis wähle ich die Ableitung der Begriffe, die sich an das Feld eines Skalars $\varphi\,(x_1, x_2, x_3, x_4)$ anschliessen.

Ist φ ein Skalar, so ist auch

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \cdot d x_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \cdot d x_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \cdot d x_3 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_4} \cdot d x_4$$

ein Skalar. Da nun die Differentiale $d x_i$ einen kontravarianten Vektor bilden, so müssen die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ einen kovarianten Vektor bilden, den man den **Gradienten** von φ nennt. Als Quadrat seines Betrages haben wir den Skalar

$$\sum_{rs} \gamma_{rs} \frac{\partial \varphi}{\partial x_r} \frac{\partial \varphi}{\partial x_s}$$

zu betrachten, den man den **ersten Beltrami'schen Differentialparameter** nennt und der im Falle der gewöhnlichen Vektoranalysis zu dem bekannten **ersten Lamé'schen Differentialparameter**

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_4}\right)^2$$

wird. Die **Divergenz des Gradienten** ist nach Formel (12′)

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \sum_{rs} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_s}\left(\sqrt{g}\,\gamma_{rs}\frac{\partial\varphi}{\partial x_r}\right),$$

d. h. gleich dem zweiten Beltrami'schen Differentialparameter und wird im Falle der gewöhnlichen Vektoranalysis zum zweiten Lamé'schen Differentialparameter

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_4^2}.$$

Endlich sei noch die vektoranalytische Natur der Impuls-Energie-Gleichungen (2) des vorstehenden Vortrages von Einstein erläutert. Diese vier Gleichungen lauten:

$$\sum_{\nu} \frac{\partial \mathfrak{T}_{\nu\sigma}}{\partial x_\nu} = \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu\tau} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \gamma_{\mu\tau} \mathfrak{T}_{\sigma\nu}.$$

Setzt man in ihnen für die (im wesentlichen einen gemischten Tensor zweiten Ranges darstellenden) Komponenten $\mathfrak{T}_{\sigma\nu}$ die dort angegebenen Werte

$$\mathfrak{T}_{\sigma\nu} = \sqrt{-g}\cdot\sum_{\mu} g_{\sigma\mu}\,\Theta_{\mu\nu},$$

so lauten die Gleichungen

$$\sum_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\sqrt{g}\cdot g_{\sigma\mu}\,\Theta_{\mu\nu}\right) - \frac{1}{2}\sqrt{g}\cdot\sum_{\mu\nu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\cdot\Theta_{\mu\nu} = 0.$$

Man kann nun zeigen, dass die linken Seiten dieser vier Gleichungen bis auf einen unwesentlichen Faktor die Komponenten eines kovarianten Vektors darstellen, der also durch eine Differentialoperation aus dem kontravarianten Tensor $\Theta_{\mu\nu}$ des physikalischen Vorganges hervorgeht und den man als die kovariante Divergenz des Tensors $\Theta_{\mu\nu}$ bezeichnen kann. Der Inhalt der Impuls-Energie-Gleichungen lässt sich also so ausdrücken:

Die Divergenz des Spannungs-Energie-Tensors des physikalischen Vorganges verschwindet.