2. Übung: Parallelisierung einfacher Grundroutinen

1. Wie sieht die parallele Programmierung folgender Operationen aus:

   (a) $\underline{z} = \underline{x} + \alpha \underline{y}$,

   (b) $\underline{y} = A\underline{x}$ bei spaltenweiser Verteilung der Matrix A.

2. Wie läßt sich das Gesamtschrittverfahren bei komponentenweiser Schreibweise einfach parallelisieren? Wie muß dabei die Matrix A verteilt sein? Welche Schwierigkeiten treten beim Einzelschrittverfahren auf?

   Zusatz: Man programmiere das parallele Gesamtschrittverfahren für eine vollbesetzte Matrix A. Man teste das Programm für eine Matrix $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$ der Form $a_{ii} = \sum_{j \neq i} a_{ij}$, wobei die a_{ij} für $i \neq j$ zufällige Zahlen aus $[0, 1]$ sind.

3. Wie läßt sich das PCG-Verfahren (mit Vorkonditionierung durch die Diagonale der Systemmatrix) parallelisieren?

4. Wir betrachten ein lineares Gleichungssystem der Form $A\underline{x} = \underline{y}$ mit einer (diagonaldominanten) tridiagonalen Matrix A.

   (a) Man formuliere den Gauß-Algorithmus. Wieviele Operationen sind nötig?

   (b) Man untersuche, wie sich dieser Algorithmus am besten parallel umsetzen läßt. Wie sollte die Lastverteilung der Matrix A sein?

5. Schnelle Fourier Transformation:
   Seien $\omega_n = e^{\frac{2i\pi}{n}} = \cos\frac{2\pi}{n} + i \sin\frac{2\pi}{n}$ die n-te Einheitswurzel und $F_n = \left[\omega_n^{(j-1)(k-1)}\right]_{j,k=1}^n$ die Fouriermatrix der Ordnung n mit $n = 2^l$.

   (a) Man formuliere den Algorithmus der schnellen Fouriertransformation (FFT) mit dem die Operation $F_n\underline{u}$ in $\mathcal{O}(n \log_2 n)$ Operationen ausgeführt werden kann.

   (b) Wie sieht eine parallele FFT aus?

   Literaturhinweis: Zur FFT siehe z.B.
   `http://www.tu-chemnitz.de/ uro/teaching/SS2001-mainf2/fouriermatrix.ps`

6. Gegeben sei die folgende Funktion $f : \mathbb{R}^9 \mapsto \mathbb{R}^9$:

$$\begin{bmatrix} 100x_1 + x_2^2 + x_3^5 + x_8^4 \\ 100x_2 + x_4^2 + x_7^2 + x_6x_8 \\ 100x_3 + x_4 + x_5x_7 + x_9 \\ 100x_4 + x_1^5 + x_3^2x_6^4 + x_5^2x_7x_8 \\ 100x_5 + x_1 + x_7 + x_8x_9 \\ 100x_6 + x_2 + x_7x_8 + x_9 \\ 100x_7 + x_1 + x_2x_4x_8 + x_3 \\ 100x_8 + x_4^2 + x_5^2 + x_6x_7x_8 \\ 100x_9 + x_1^2 + x_3^6 + x_4^3 \end{bmatrix}$$

Wieviele Operationen sind zur Berechnung der einzelnen Komponeneten erforderlich? Wie kann man die Auswertung $f(x)$ am besten auf 3 Prozessoren verteilen?

7. Beim impliziten Euler-Verfahren muß ein nichtlineares Gleichungssystem gelöst werden. Dieses nichtlineare Gleichungssystem kann mittels Newton-Verfahren gelöst werden, wozu in jedem Newton-Schritt die Lösung eines linearen Gleichungssystems berechnet werden muß. Welches numerische Verfahren kann bei kleiner Zeitschrittweite genutzt werden?