52 Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine positiv definite Matrix die bezüglich dem Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$ selbstadjungiert ist. Weiters sei $\underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ eine gegebene Näherungslösung und $\underline{p}_k \in \mathbb{R}^n$ eine gegebene Suchrichtung. Man berechne die Schrittweite $\alpha_k \in \mathbb{R}$, die gegeben ist durch die Minimierungsaufgabe

$$\alpha_k = \arg\min_{\alpha\in\mathbb{R}} g(\alpha),$$

mit $g(\alpha) := \mathcal{J}_A(\underline{x}_k + \alpha\underline{p}_k)$ und $\mathcal{J}_A(\underline{x}) := \frac{1}{2}(A\underline{x},\underline{x}) - (\underline{f},\underline{x})$, $\underline{f} \in \mathbb{R}^n$.

53 Betrachtet werden die rekursiv definierten Tschebyscheff-Polynome

$$T_0(t) = 1, \qquad T_1(t) = t, \qquad T_{k+1}(t) = 2tT_k(t) - T_{k-1}(t), \quad \text{für } k = 1,2,\ldots$$

a) Für $|t| \le 1$ zeige man die alternative Darstellung

$$T_k(t) = \cos(k\arccos(t)), \qquad k \in \mathbb{N}_0.$$

b) Man berechne die Nullstelen für das k-te Tschebyscheff-Polynom T_k.

54 Wiederum werden die rekursiv definierten Tschebyscheff-Polynome

$$T_0(t) = 1, \qquad T_1(t) = t, \qquad T_{k+1}(t) = 2tT_k(t) - T_{k-1}(t), \quad \text{für } k = 1,2,\ldots$$

betrachtet. Für $|t| > 1$ zeige man die alternative Darstellung

$$T_k(t) = \frac{1}{2}\left[(t+\sqrt{t^2-1})^k + (t+\sqrt{t^2-1})^{-k}\right], \qquad k \in \mathbb{N}_0.$$

55 Für $0 < a < b$ betrachte man die Transformation

$$\psi : [a,b] \to [-1,1] \qquad \text{mit} \quad \psi(x) = \frac{b+a-2x}{b-a}$$

und die modifizierten Tschebyscheff-Polynome

$$\widetilde{T}_k(x) := \frac{T_k(\psi(x))}{T_k(\psi(0)} \in \mathbb{P}_k \qquad k \in \mathbb{N}_0,$$

wobei $T_k \in \mathbb{P}_k$ das k-te Tschebyscheff-Polynom ist, siehe dazu Aufgabe 53 bzw. auch Aufgabe 54. Man zeige für $k \in \mathbb{N}_0$, dass $\widetilde{T}_k \in \mathbb{P}_k$ Lösung der Minimierungsaufgabe

$$\max_{x\in[a,b]} |\widetilde{T}_k(x)| = \min_{\substack{p\in\mathbb{P}_k \\ p(0)=1}} \max_{x\in[a,b]} |\widetilde{p}(x)|$$

ist.

Hinweis: Man nehme an, dass es ein weiters Polynom $q_k \in \mathbb{P}_k$, $q_k(0) = 1$ gibt, mit

$$\max_{x\in[a,b]} |q_k(x)| < \max_{x\in[a,b]} |\widetilde{T}_k(x)|.$$

Daraus folgere man, dass $r_k := \widetilde{T}_k - q_k \in \mathbb{P}_k$ mindestens $k+1$ Nullstellen besitzt, indem man das Polynom r_k in den Punkten

$$x_i := \psi^{-1}(t_i), \qquad t_i := \cos(\frac{\ell\pi}{k}) \qquad \text{für} \quad \ell = 0,\ldots,k$$

betrachtet.

Programmierteil.

56 Man implementiere eine Routine, die es ermöglicht berechnete Lösungen grafisch darzustellen. Zum Beispiel kann man die Lösungen in eine Datei schreiben, die dann von einem anderen Programm eingelesen werden kann.

Zum Beispiel kann das Programm "ParaView" (`http://www.paraview.org/`) verwendet werden um Lösungen darzustellen. Als Dateiformat empfiehlt es sich das "vtk"-Format zu verwenden, siehe `http://www.vtk.org/VTK/img/file-formats.pdf`. In diesem Format können eindimensionale Element als `VTK_LINIE` oder als `VTK_POLY_LINE` dargestellt werden.