

# **Simple Fluids - Einfache Strömungen**

von

**Daniel Moos**

Ausarbeitung im Hauptseminar komplexe Flüssigkeiten  
Frau Prof. Mária Lukáčová-Medvidová

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Verhalten in einfachen Strömungen</b>	<b>1</b>
1.1	Stetige einfache Scherströmungen . . . . .	1
1.1.1	Das UCM-Modell . . . . .	2
1.1.2	Das PTT-Modell . . . . .	3
1.1.3	Das Johnson-Segalman-Modell . . . . .	3
1.1.4	Das Giesekus-Modell . . . . .	4
1.2	Stetige viskometrische Strömungen . . . . .	7
1.3	Stetige Elongationsströmungen . . . . .	10
1.3.1	Dehnverhalten im UCM-Modell . . . . .	11
1.3.2	Dehnverhalten im Johnson-Segalman-Modell . . . . .	11
1.3.3	Dehnverhalten im Giesekus-Modell . . . . .	12
1.3.4	Dehnverhalten im PTT-Modell . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>13</b>

# 1 Verhalten in einfachen Strömungen

Nachdem wir nun Modelle zur mathematischen Formulierung von polymeren Fluiden kennengelernt haben, wollen wir uns mit sogenannten einfachen Strömungen beschäftigen und wie sich einige der Modelle in diesen verhalten.

Bei einfachen Strömungen beschränken wir uns, wie der Name schon sagt, auf ein einfaches Modell von Strömungen, bei dem wir das Geschwindigkeitsfeld explizit gegeben haben und wir leicht die Spannungen des betrachteten Modells finden können. Wir wollen durch diese Betrachtungen ein Gefühl dafür bekommen, wie sich die Modelle in Strömungen verhalten.

## 1.1 Stetige einfache Scherströmungen

Zunächst betrachten wir die stetige einfache Scherströmung. In einer solchen Strömung ist diese auf zwei Dimensionen begrenzt und bewegt sich somit also nur in 2 Richtungen. Die Geschwindigkeit  $v = (V(y), 0, 0)$  ist unidirektional, d.h. nur in eine Richtung gerichtet.

Aus der Geschwindigkeit  $v$  erhalten wir den Geschwindigkeitsgradienten

$$\nabla v = \begin{pmatrix} 0 & V'(y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Hierbei bezeichnen wir mit  $V'(y)$  die Scherrate.

Wenn  $x = (x, y, z)$  die Position eines Fluidpartikels zum Zeitpunkt  $t$  beschreibt, dann ist seine Position zum Zeitpunkt  $s$  genau  $(x - V(y)(t - s), y, z)$ , so dass der relative Deformationsgradient, der die Deformation jedes Partikels angibt durch

$$F(x, t, s) = \begin{pmatrix} 1 & -V'(y)(t - s) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

gegeben ist. Daraus ergibt sich die relative Cauchy-Spannung

$$C(x, t, s) = \begin{pmatrix} 1 & -V'(y)(t - s) & 0 \\ -V'(y)(t - s) & 1 + V'(y)^2(t - s)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

(Erinnerung: Wir erhalten den Deformationsgradienten durch  $F_{i,j} = \frac{\partial y_i(x,t,s)}{\partial x_j}$  und die Cauchy-Spannung durch  $C(x, t, s) = F^T(x, t, s)F(x, t, s)$ .)

Die Cauchy-Spannung  $C(x, t, s)$  wird somit vollständig durch die Scherrate  $\kappa = V'(y)$  bestimmt, und daher ist der Spannungstensor eine Funktion von  $\kappa$ . Durch die Invarianz von  $\mathcal{G}(Q(t)C(x, t, s)Q(t)^{-1})_{s=-\infty}^t = Q(t)\mathcal{G}(C(x, t, s))_{s=-\infty}^t Q(t)^{-1}$  und wenn wir  $Q(t)$  als  $180^\circ$ -Drehung um die z-Achse betrachten, finden wir, dass  $C(x, t, s)$  nach (3) erhalten bleibt:

$$Q(t)C(x, t, s)Q(t)^{-1} = C(x, t, s). \quad (4)$$

Daher muss der Stress  $T$  auch unter dieser Transformation erhalten bleiben. Die Komponenten  $T_{13}$  und  $T_{23}$  sind folglich gleich Null. Der Spannungstensor in der einfachen Scherströmung hat die Form

$$T = \begin{pmatrix} T_{11}(\kappa) & T_{12}(\kappa) & 0 \\ T_{12}(\kappa) & T_{22}(\kappa) & 0 \\ 0 & 0 & T_{33}(\kappa) \end{pmatrix}. \quad (5)$$

(Erinnerung: Wir erhalten den Spannungstensor durch  $T(x, t) = \mathcal{G}(C(x, t, s))_{s=-\infty}^t$ .) Aus dem Spannungstensor erhalten wir dann die drei viskometrischen Funktionen:

$$\begin{aligned} T_{12}(\kappa) &= \eta(\kappa)\kappa, \\ T_{11}(\kappa) - T_{22}(\kappa) &= N_1(\kappa), \\ T_{22}(\kappa) - T_{33}(\kappa) &= N_2(\kappa). \end{aligned} \quad (6)$$

Hier bezeichnet  $\eta(\kappa)$  die Viskosität,  $N_1$  und  $N_2$  nennen wir die ersten und zweiten normalen Spannungsdifferenzen. In einer Newtonschen Flüssigkeit ist  $\eta(\kappa)$  konstant und  $N_1$  und  $N_2$  sind gleich Null.

### 1.1.1 Das UCM-Modell

Wir werden nun das viskometrische Verhalten einiger einfacher Differentialmodelle vergleichen. Wir beginnen mit dem UCM-Modell (Upper-Convected-Maxwell Modell) mit der Gleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (v\nabla)T - (\nabla v)T - T(\nabla v)^T + \lambda T = 2\mu D. \quad (7)$$

Hierbei bezeichnet  $\lambda$  Relaxationszeit,  $\mu$  Viskosität und  $D = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$ .

Wenn wir das UCM-Modell auf den stetigen einfachen Scherfluss beschränken, erhalten wir die Gleichungen

$$\begin{aligned} \lambda T_{11} - 2\kappa T_{12} &= 0, \\ \lambda T_{12} - \kappa T_{22} &= \mu\kappa, \\ T_{22} = T_{33} &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Folglich sind  $\eta(\kappa) = \mu/\lambda$ ,  $N_1(\kappa) = 2\mu\kappa^2/\lambda^2$  und  $N_2(\kappa) = 0$ . Die Viskosität ist also konstant, die erste normale Spannungsdifferenz wächst quadratisch mit der Scherrate und die zweite normale Spannungsdifferenz ist Null.

Im weiteren betrachten wir Modelle, bei welchen zusätzlich zur Grundgleichung des

UCM-Modells Nichtlinearitäten hinzugefügt werden. Grund hierfür ist, dass bei dem UCM-Modell die Spannung bei hohen Deformationsraten überschätzt wird. Die weiteren Modelle zielen darauf ab, diesen Fehler zu korrigieren.

### 1.1.2 Das PTT-Modell

Das PTT-Modell (Phan-Thien-Thanner Modell) besitzt die Grundgleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (v\nabla)T - (\nabla v)T - T(\nabla v)^T + \lambda T + \nu(\text{spur}(T))T = 2\mu D. \quad (9)$$

$\nu$  wird hierbei aus physikalischen Gründen als positiv angenommen und beschreibt Viskosität. In der stetigen einfachen Scherströmung vereinfacht sich diese Gleichung zu

$$\begin{aligned} -2\kappa T_{12} + \lambda T_{11} + \nu(T_{11} + T_{22} + T_{33})T_{11} &= 0, \\ -\kappa T_{22} + \lambda T_{12} + \nu(T_{11} + T_{22} + T_{33})T_{12} &= \mu\kappa, \\ \lambda T_{22} + \nu(T_{11} + T_{22} + T_{33})T_{22} &= 0, \\ \lambda T_{33} + \nu(T_{11} + T_{22} + T_{33})T_{33} &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Aus den letzten beiden Gleichungen erhalten wir  $T_{22} = T_{33} = 0$ , und es bleiben

$$\begin{aligned} 2\kappa T_{12} + \lambda T_{11} + \nu T_{11}^2 &= 0, \\ \lambda T_{12} + \nu T_{11}T_{12} &= \mu\kappa. \end{aligned} \quad (11)$$

Wir können  $T_{11}$  aus der zweiten Gleichung eliminieren und in die erste einsetzen. Das Ergebnis ist die kubische Gleichung

$$2\nu T_{12}^3 + \lambda\mu T_{12} = \mu^2\kappa. \quad (12)$$

Dies zeigt, dass sich die Scherspannung  $T_{12}$  bei niedrigen Scherraten proportional zu  $\kappa$  verhält, aber bei hohen Scherraten proportional zu  $\kappa^{1/3}$ . Die erste normale Stressdifferenz  $N_1 = T_{11}$  erfüllt

$$\lambda T_{11} + \nu T_{11}^2 = 2\kappa T_{12}, \quad (13)$$

daher ist  $T_{11}$  proportional zu  $\kappa^2$  bei niedrigen Scherraten, aber proportional zu  $\kappa^{2/3}$  bei hohen Scherraten.

### 1.1.3 Das Johnson-Segalman-Modell

Für das Johnson-Segalman-Modell haben wir die Grundgleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (v\nabla)T - (\nabla v)T - T(\nabla v)^T + \lambda T + \nu(TD + DT) = 2\mu D. \quad (14)$$

In einfachen Scherströmungen führt dies zu

$$\begin{aligned} -2\kappa T_{12} + \lambda T_{11} + \nu\kappa T_{12} &= 0, \\ -\kappa T_{22} + \lambda T_{12} + \nu \frac{T_{11} + T_{22}}{2} &= \mu\kappa, \\ \lambda T_{22} + \nu\kappa T_{12} &= 0, \\ \lambda T_{33} &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Wir finden  $T_{33} = 0, T_{22} = -\nu\kappa T_{12}/\lambda$  und  $T_{11} = (2 - \nu)\kappa T_{12}/\lambda$ . Das Verhältnis der normalen Spannungsdifferenzen ist daher

$$\frac{N_2(\kappa)}{N_1(\kappa)} = -\frac{\nu}{2}. \quad (16)$$

Wenn das Vorzeichen der Normalspannung mit physikalischen Experimenten  $N_1 > 0, N_2 < 0$  konsistent sein soll, müssen nur Werte von  $\nu$  zwischen 0 und 2 berücksichtigt werden.

Nach dem Eliminieren von  $T_{11}$  und  $T_{22}$  aus den Gleichungen finden wir eine einzelne Gleichung für  $T_{12}$ , mit der Lösung

$$T_{12} = \frac{\mu\lambda\kappa}{\nu(2 - \nu)\kappa^2 + \lambda^2}. \quad (17)$$

Wir sehen, dass die Scherspannung bei niedrigen Scherraten proportional zu  $\kappa$  ist, aber dann erreicht die Scherspannung ein Maximum bei  $\kappa = \lambda/\sqrt{\nu(2 - \nu)}$  und sinkt anschließend bei großen Scherraten proportional zu  $1/\kappa$ . Das Johnson-Segalman-Modell ist daher sehr stark scherverdünnend.

#### 1.1.4 Das Giesekus-Modell

Die Grundgleichung für das Giesekus-Modell ist

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (v\nabla)T - (\nabla v)T - T(\nabla v)^T + \lambda T + \nu T^2 = 2\mu D. \quad (18)$$

und im Spezialfall der stetigen einfachen Scherströmung reduziert sich diese auf

$$\begin{aligned} -2\kappa T_{12} + \lambda T_{11} + \nu(T_{11}^2 + T_{12}^2) &= 0, \\ -\kappa T_{22} + \lambda T_{12} + \nu(T_{11} + T_{22})T_{12} &= \mu\kappa, \\ \lambda T_{22} + \nu(T_{12}^2 + T_{22}^2) &= 0, \\ \lambda T_{33} + \nu T_{33}^2 &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Die physikalisch relevante Lösung der letzten Gleichung ist  $T_{33} = 0$ . Die übrigen drei Gleichungen sind jedoch etwas komplizierter als in den vorhergehenden Beispielen. Wir können  $T_{11}$  und  $T_{22}$  eliminieren und eine Gleichung erhalten, die die Scherspannung  $T_{12}$  mit der Scherrate  $\kappa$  in Beziehung setzt. Das Ergebnis dieser Berechnung ist

$$\begin{aligned} &\kappa^2(\lambda\mu - \mu^2\nu - \nu T_{12}^2)^2 + \\ &\kappa T_{12}(-\lambda^3\mu + \lambda^2\mu^2\nu - \lambda^2\nu T_{12}^2 + 8\lambda\mu\nu^2 T_{12}^2 - 8\mu^2\nu^3 T_{12}^2) + \\ &\nu T_{12}^2(\lambda^3\mu - \lambda^2\mu^2\nu + \lambda^2\nu T_{12}^2 - 4\lambda\mu\nu^2 T_{12}^2 + 4\mu^2\nu^3 T_{12}^2) = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Wir können diese quadratische Gleichung für die Scherrate  $\kappa$  für die gegebene Scherspannung  $T_{12}$  betrachten. Die Diskriminante der quadratischen Gleichung ist

$$D = (\lambda - 2\mu\nu)^2 T_{12}^2 (\lambda^2 - 4\nu^2 T_{12}^2) (\lambda\mu - \mu^2\nu + \nu T_{12}^2)^2. \quad (21)$$

Für  $\kappa$  gibt es keine Lösung falls  $|T_{12}| < \lambda/2\nu$ , d.h. es gibt einen Grenzwert für die Scherspannung. Wenn  $|T_{12}| < \lambda/2\nu$ , dann gibt es normalerweise zwei Lösungen. Diese beiden Lösungen stimmen jedoch überein, wenn  $\nu = \lambda/2\nu, T_{12} = 0$  oder  $\lambda\mu - \mu^2\nu + \nu T_{12}^2 = 0$ . Als nächstes betrachten wir Grenzfälle. In der Grenze  $\kappa \rightarrow \infty$  nähert sich die Scherspannung dem Wert an, der den quadratischen Term in (20) gleich Null setzt:

$$\lambda\mu - \mu^2\nu - \nu T_{12}^2 = 0. \quad (22)$$

Diese Gleichung besitzt nur Lösungen, wenn  $\nu \leq \lambda/\mu$ . Wenn  $\nu$  größer als dieser Wert ist, dann gibt es keine Lösungen für hohe Scherraten, d.h. das Modell hat eine begrenzte Scherrate, jenseits derer eine stetige Scherströmung nicht existieren kann. Wir nehmen von nun an an, dass  $\nu < \lambda/\mu$ . Wenn  $\kappa$  und  $T_{12}$  klein sind, dann liefert uns das Gleichgewicht dominanter Terme in (20)

$$\mu^2(\lambda - \mu\nu)^2\kappa^2 - T_{12}\kappa\lambda^2\mu(\lambda - \mu\nu) + \nu T_{12}^2\lambda^2\mu(\lambda - \mu\nu) = 0, \quad (23)$$

was als

$$\mu(\lambda - \mu\nu)(\lambda T_{12} - \mu\kappa)(\nu\lambda T_{12} + (\nu\mu - \lambda)\kappa) = 0 \quad (24)$$

faktoriert werden kann. Wir erhalten die zwei möglichen Lösungen  $T_{12} = \mu\kappa/\lambda$  und  $T_{12} = (\lambda - \nu\mu)\kappa/(\nu\lambda)$ . Für die zweite dieser Lösungen kann gezeigt werden, dass sie zu einer von Null verschiedenen normalen Spannungsdifferenz in der Grenze der Nullscherrate führt und als unphysikalisch ausgeschlossen wird.

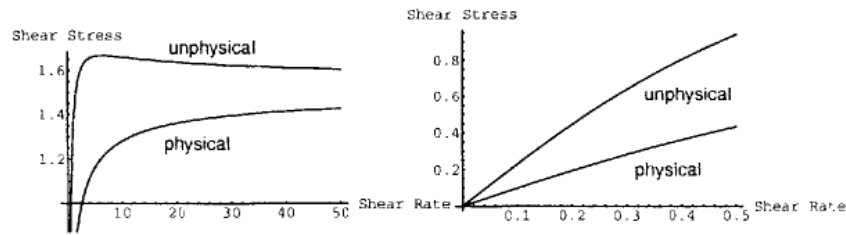


Figure 3.1: Shear stress vs. shear rate for the Giesekus model if  $\nu < \lambda/(2\mu)$ .

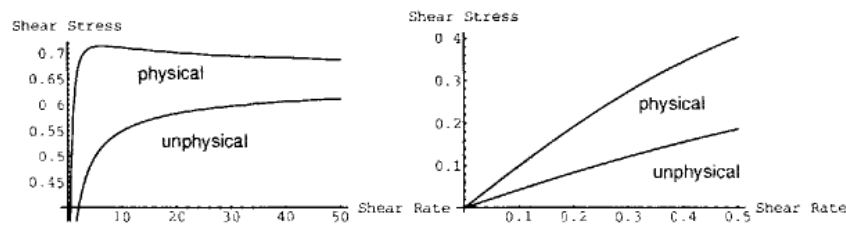


Figure 3.2: Shear stress vs. shear rate for the Giesekus model if  $\nu > \lambda/(2\mu)$ .

Die Scherspannung  $T_{12}$  und die Scherrate  $\kappa$  verhalten sich dann zueinander wie folgt (siehe Abbildung): Wenn  $\nu < \lambda/(2\mu)$  (Abbildung 3.1), dann hat die unphysikalische Lösung eine größere Scherspannung als die physikalische Lösung. Die Scherrate der unphysikalischen Lösung erreicht schließlich das Scherspannungs-Maximum  $\lambda/(2\mu)$ . Wenn die

Scherrate weiter ansteigt, nimmt die Scherspannung an der unphysikalischen Kurve wieder ab, während die Scherspannung an der physikalischen Kurve weiter ansteigt. Lläuft  $\kappa \rightarrow \infty$ , so nähert sich die Schubspannung an beiden Kurven der gemeinsamen Grenze  $\sqrt{(\lambda - \mu\nu)\mu/\nu}$ . Der erste Teil der Abbildung zeigt das Verhalten bei hohen Scherraten, der zweite Teil zeigt das Verhalten bei niedrigen Scherraten. Wenn  $\nu = \lambda/(2\mu)$ , dann fallen die beiden Kurven der physikalischen und der unphysikalischen Lösung zusammen. Wenn  $\nu > \lambda/(2\mu)$  (Abbildung 3.2), dann treten der größere Wert der Scherspannung und das Spannungsmaximum bei der physikalischen Kurve auf. Die Kurven der physikalischen und der unphysikalischen Lösung sind dann sozusagen vertauscht.

Das Giesekus-Modell ist also stärker scherverdünnend als das PTT-Modell, aber nicht so stark scherverdünnend wie das Johnson-Segalman-Modell. Ist  $\nu > \lambda/(2\mu)$ , dann ist die Scherspannung, wie im Johnson-Segalman-Modell eine nicht monotone Funktion der Schergeschwindigkeit. Ebenso wie das Johnson-Segalman-Modell hat das Giesekus-Modell eine zweite normale Spannungsdifferenz ungleich Null.



## 1.2 Stetige viskometrische Strömungen

Wir wollen uns nun anschauen, wie wir solche einfachen Scherströmungen experimentell erzeugen können. Eine Möglichkeit ist, das Fluid zwischen zwei unendlich lange Platten zu setzen und dann eine dieser Platten mit konstanter Geschwindigkeit gleiten zu lassen. In der Realität sind unendlich lange Platten nicht realisierbar, deswegen müssen wir auf andere Methoden zurückgreifen. Es gibt glücklicherweise einige Strömungen, die einfachen Scherströmungen entsprechen und experimentell realisierbar sind.

Wir nennen eine Strömung eine stationäre viskometrische Strömung, wenn der relative Deformationsgradient die folgende Form besitzt:

$$F(x, t, s) = Q(t - s, x)(1 - \kappa(x)(t - s)N(x)). \quad (25)$$

Dabei ist  $Q$  eine orthogonale Matrix,  $\kappa(x)$  ist eine konstante und  $N$  ist eine Matrix mit den Eigenschaften

$$N^2 = 0, |N| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^3 N_{ij}^2} = 1. \quad (26)$$

Hat der relative Deformationsgradient die durch (25) gegebene Form, so ist die relative Cauchy-Spannung

$$C(x, t, s) = I - \kappa(x)(t - s)(N(x) + N^T(x)) + \kappa(x)^2(t - s)^2 N^T(x)N(x). \quad (27)$$

Dann ist jede Matrix  $N(x)$ , die (26) erfüllt, von der Form

$$N(x) = Q(x) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}(x), \quad (28)$$

wobei  $Q(x)$  eine orthogonale Matrix ist.

*Beweis von (28):* Ist  $N^2 = 0$ , so ist  $N$  eine nilpotente Matrix. Für nilpotente Matrizen gilt:  $N$  ist von der Form

$$N = Q^{-1}BQ = Q^{-1} \begin{pmatrix} 0 & B_{12} & B_{13} \\ 0 & 0 & B_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q, \quad (29)$$

wobei  $Q$  eine orthogonale Matrix und  $B$  eine obere Dreiecksmatrix ist (oder untere Dreiecksmatrix). Daraus erhalten wir

$$N^2 = Q^{-1} \begin{pmatrix} 0 & B_{12} & B_{13} \\ 0 & 0 & B_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q Q^{-1} \begin{pmatrix} 0 & B_{12} & B_{13} \\ 0 & 0 & B_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q = Q^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & B_{12}B_{23} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q. \quad (30)$$

Da  $N^2 = 0$  gelten muss, muss  $B_{12}B_{23} = 0$  sein. Also muss entweder  $B_{12} = 0$  gelten, oder  $B_{23} = 0$ . Aus der zweiten Bedingung von (26) erhalten wir, dass  $B_{12} = 1$  ist wenn

$B_{23} = 0$ , oder  $B_{23} = 1$  wenn  $B_{12} = 0$ . (Für eine untere Dreiecksmatrix würden wir entweder  $B_{21} = 1$  oder  $B_{32} = 1$  erhalten, wobei die anderen Einträge alle 0 sind.) Damit kommen wir auf das Ergebnis

$$N(x) = Q(x) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}(x), \quad (31)$$

da wir die verschiedenen Positionen der 1 in der Matrix durch unsere Rotation mittels der Matrix  $Q$  erhalten können.  $\square$

Folglich ist  $C(x, t, s)$  von der Form

$$Q(x) \begin{pmatrix} 1 & -\kappa(x)(t-s) & 0 \\ -\kappa(x)(t-s) & 1 + \kappa(x)^2(t-s)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Q(x)^T. \quad (32)$$

Abgesehen von einer Rotation ist dies genau das Gleiche wie bei einer einfachen Scherströmung mit der Scherrate  $\kappa(x)$ , und folglich ist die Spannung auch die gleiche wie bei einer einfachen Scherströmung außer einer Rotation.

Die wichtigsten in Experimenten verwendeten viskometrischen Strömungen sind Torsionsflüsse, in solchen Strömungen bewegen sich Teilchen auf Kreisen um eine gegebene Achse, aber die Rotationsgeschwindigkeit kann mit der Position variieren. Wir benutzen die Notation  $x = (x, y, z)$  für einen Punkt im Raum und wir verwenden Großbuchstaben  $(X, Y, Z)$  für die Komponenten von  $y(x, t, s)$ .

Wenn die Rotationsachse die  $z$ -Achse und  $\omega$  die Rotationsgeschwindigkeit ist, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} X &= \cos(\omega(r, z)(t-s))x + \sin(\omega(r, z)(t-s))y, \\ Y &= -\sin(\omega(r, z)(t-s))x + \cos(\omega(r, z)(t-s))y, \\ Z &= z. \end{aligned} \quad (33)$$

Hier ist  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , d.h. die Entfernung von der Rotationsachse. Der Verformungsgradient ist dann

$$\begin{aligned} F(x, t, s) &= \begin{pmatrix} C & S & 0 \\ -S & C & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (t-s)\omega_r \begin{pmatrix} -\frac{x^2}{r}S + \frac{xy}{r}C & -\frac{xy}{r}S + \frac{y^2}{r}C & 0 \\ -\frac{x^2}{r}C - \frac{xy}{r}S & -\frac{xy}{r}C - \frac{y^2}{r}S & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + (t-s)\omega_z \begin{pmatrix} 0 & 0 & -xS + yC \\ 0 & 0 & -xC - yS \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (34)$$

Dabei sind  $C = \cos(\omega(t-s))$  und  $S = \sin(\omega(t-s))$ . Wir können die obige Gleichung in die Form  $F(x, t, s) = Q(t-s, x)(I + (t-s)M(x))$  bringen, wobei

$$Q(t-s, x) = \begin{pmatrix} C & S & 0 \\ -S & C & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (35)$$

bzw.

$$M(x) = \begin{pmatrix} \omega_r \frac{xy}{r} & \omega_r \frac{y^2}{r} & \omega_z y \\ -\omega_r \frac{x^2}{r} & -\omega_r \frac{xy}{r} & -\omega_z x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Es gelten  $M(x)^2 = 0$  und

$$\kappa(x) := |M(x)| = r\sqrt{\omega_r^2 + \omega_z^2}, \quad (37)$$

d.h. die Strömung ist viskometrisch mit der Scherrate  $\kappa(x)$ . Torsionsströmungen, welche dieser Art beschrieben werden umfassen die Strömung zwischen konzentrisch rotierenden Zylindern, die Strömung zwischen parallel rotierenden Platten und die Strömung zwischen einem Kegel und einer Platte.

### 1.3 Stetige Elongationsströmungen

Elongationsströmungen, oder auch Längsströmungen, sind Strömungen, in denen die Flüssigkeit eine Streckbewegung erfährt. Wir unterscheiden dabei zwischen einachsiger, planarer und biaxialer Ausdehnung. Die einachsige Ausdehnung hat ein Geschwindigkeitsfeld der Form  $v = (\kappa x, -\kappa y/2, -\kappa z/2)$ , die planare Ausdehnung hat eine Geschwindigkeit der Form  $v = (\kappa x, -\kappa y, 0)$ , und die zweiachsige Erweiterung hat das Geschwindigkeitsfeld  $v = (-\kappa x, \kappa y/2, \kappa z/2)$ .

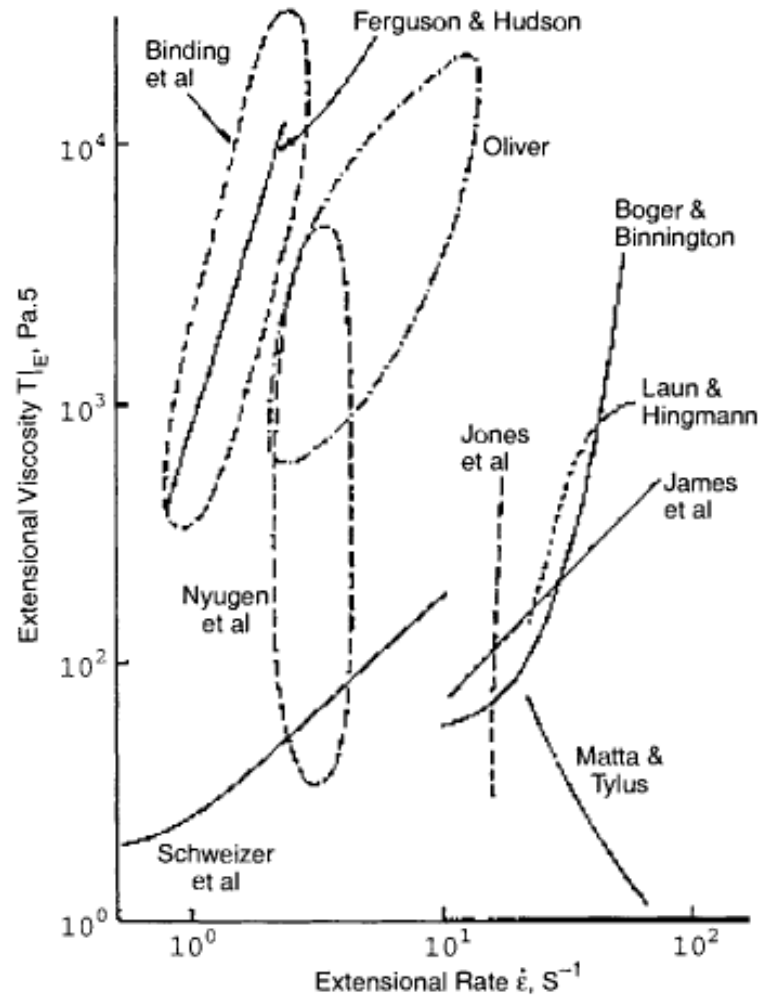


Figure 3.3: Comparison of elongational viscosity measurements for the same fluid (Figure 2.1 of [37]). Reprinted from D.F. James and K. Waters, A critical appraisal of available methods for the measurement of extensional properties of mobile systems, in *Techniques in Rheological Measurement*, A.A. Collyci, ed., pp. 33–53, with kind permission from Kluwer Academic Publishers, ©1993 by Chapman and Hall.

Ein solches Geschwindigkeitsfeld experimentell zu erzeugen gestaltet sich im Vergleich zur theoretischen Betrachtung als relativ schwierig. Abbildung 3.3 zeigt bei einer Vielzahl von Experimenten mit dem selben Fluid die Ausdehnungsrate im Vergleich zur Dehnviskosität. Die Ergebnisse sind teils sogar in sehr unterschiedlichen Größenordnungen und wir erhalten keine befriedigenden Ergebnisse. Daten über Dehnungsspannungen zu erhalten sind deutlich schwieriger und unsicherer als Scherdaten. Manchmal ist das Beste, was man über Dehnungviskositäten sagen kann, die mit verschiedenen Methoden gemessen werden, dass alle Punkte in einer Ebene liegen.

Wir werden jetzt das Dehnungsverhalten der gleichen Modelle, die wir oben im Schubfluss besprochen haben, untersuchen. Wir beschränken uns hierbei auf die einachsige Ausdehnung. Der Stress in einem solchen Fluss ist diagonal mit  $T_{22} = T_{33}$  und wir sind an der Stressdifferenz  $T_{11} - T_{22}$  als Funktion von  $\kappa$  interessiert. In einer Newtonschen Flüssigkeit haben wir  $T_{11} = 2\eta\kappa, T_{22} = -\eta\kappa$ , also ist der Unterschied  $3\eta\kappa$ . Die Menge  $(T_{11} - T_{22})/\kappa$  nennen wir Dehnviskosität, und das Verhältnis von Dehnungs- zu Scherviskosität bezeichnen wir als Trouton-Verhältnis. Das Trouton-Verhältnis für eine Newtonsche Flüssigkeit ist also 3.

### 1.3.1 Dehnverhalten im UCM-Modell

Für das UCM-Fluid haben wir also

$$\begin{aligned} T_{11} &= \frac{2\mu\kappa}{\lambda - 2\kappa}, \\ T_{22} &= -\frac{\mu\kappa}{\lambda + \kappa}, \end{aligned} \tag{38}$$

und damit dann

$$T_{11} - T_{22} = \frac{3\mu\kappa\lambda}{(\lambda + \kappa)(\lambda - 2\kappa)}. \tag{39}$$

Bei niedrigen Dehnungsraten ist das Trouton-Verhältnis 3, genau wie in einer Newtonschen Flüssigkeit, aber dann steigt die Dehnungviskosität mit der Dehnungsrate schnell an und wird bei  $\kappa = \lambda/2$  unendlich. Stetige Dehnungsströmungen mit einer größeren Dehnungsrate sind unmöglich. Obwohl dann eine Lösung der Gleichungen mit einem negativen  $T_{11} - T_{22}$  existiert, ist diese Lösung unerreichbar.

### 1.3.2 Dehnverhalten im Johnson-Segalman-Modell

Für das Johnson-Segalman-Modell erhalten wir

$$\begin{aligned} T_{11} &= 2\frac{2\mu\kappa}{\lambda - 2\kappa + 2\kappa\nu}, \\ T_{22} &= -\frac{\mu\kappa}{\lambda + \kappa - \kappa\nu}. \end{aligned} \tag{40}$$

Solange  $\nu < 1$  ist, ist das Verhalten ähnlich zu dem Verhalten im UCM-Modell. Obwohl das Johnson-Segalman-Modell bei allen hier betrachteten Modellen am stärksten abgeschwächt ist, ändert es das Dehnungsverhalten nicht quantitativ.

### 1.3.3 Dehnverhalten im Giesekus-Modell

Für das Giesekus-Modell finden wir

$$\begin{aligned} -2\kappa T_{11} + \lambda T_{11} + \nu T_{11}^2 &= 2\mu\kappa, \\ \kappa T_{22} + \lambda T_{22} + \nu T_{22}^2 &= -\mu\kappa. \end{aligned} \tag{41}$$

Für physikalisch relevante Lösungen ist  $T_{11}$  positiv und  $-\mu < T_{22} < 0$ . Für jedes positive  $\kappa$  bestimmt dies einen eindeutigen Wert von  $T_{11}$  und  $T_{22}$ . Die Dehnungsspannung erreicht bei einem endlichen  $\kappa$  nicht mehr unendlich; stattdessen ist das Wachstum von  $T_{11}$  für  $\kappa \rightarrow \infty$  proportional zu  $\kappa$ , wobei sich das Trouton-Verhältnis dem Grenzwert  $2\lambda/(\mu\nu)$  nähert.

### 1.3.4 Dehnverhalten im PTT-Modell

Für das PTT-Modell erhalten wir die Gleichungen

$$\begin{aligned} -2\kappa T_{11} + \lambda T_{11} + \nu(T_{11} + 2T_{22})T_{11} &= 2\mu\kappa, \\ \kappa T_{22} + \lambda T_{22} + \nu(T_{11} + 2T_{22})T_{22} &= -\mu\kappa. \end{aligned} \tag{42}$$

Wir können  $T_{22}$  und die Lösung für  $\kappa$  als eine Funktion von  $T_{11}$  eliminieren. Das Ergebnis dieser Berechnung ist

$$\kappa = \frac{T_{11}(2\lambda\mu + 3\lambda T_{11} + 3\nu T_{11}^2)}{4\mu^2 + 10\mu T_{11} + 6T_{11}^2}. \tag{43}$$

In der Grenze der niedrigen Dehnungsraten erhalten wir das Newtonsche Ergebnis von  $T_{11} = 2\mu\kappa/\lambda$ , während wir bei hohen Dehnungsraten die Spannung  $T_{11} = 2\kappa/\nu$  erhalten. Der Grenzwert der Dehnviskosität ist derselbe wie für das Giesekus-Modell.

## 2 Literaturverzeichnis

Renardy, Michael

*Mathematical Analysis of Viscoelastic Flows*

Virginia Polytechnic Institute and State University

Blacksburg, Virginia