



Mathematische Gesetzmäßigkeiten in der Blattstellungslehre

Hauptseminar Mathematische Modellierung - Prof. Dr. Mária Lukáčová

Dominik Hartmann, 30.10.2018



Gliederung

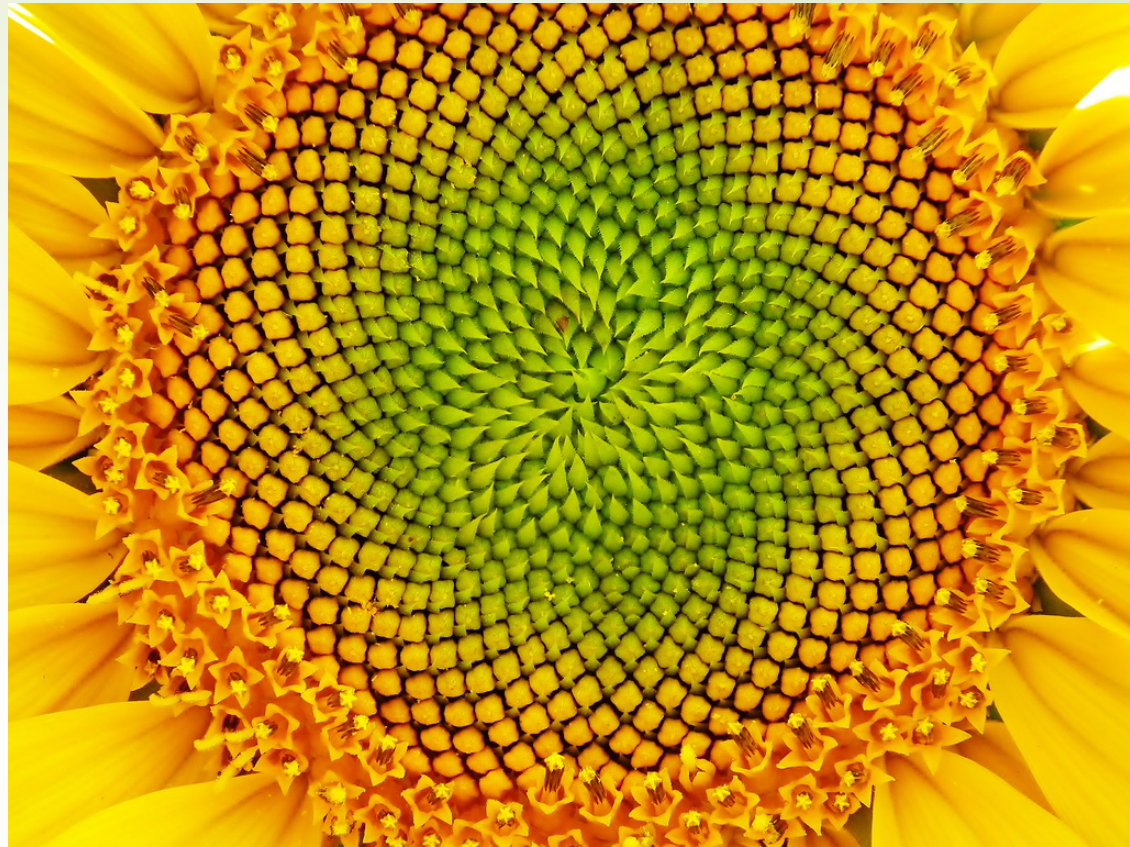
- Motivation
 - Phyllotaxis – botanische Grundlagen
 - Auftretende Divergenzen
 - Fibonaccizahlen
 - Goldener Schnitt
 - Goldener Winkel
 - Spiralbildung
 - Parastichen
 - Folgen für Pflanzen
 - Typen von Spiralen
 - Modelle
 - Ursachen
- 



Motivation

- ▶ Fast unbeschränkte Vielfalt an Formen und Farben in Natur
- ▶ Aber: Es existieren wiederkehrende Muster!

Beispiele: Blütenstände von Blumen, Fruchtblätter von Kiefernzapfen oder Ananas, Laubblätter an Sprossachse

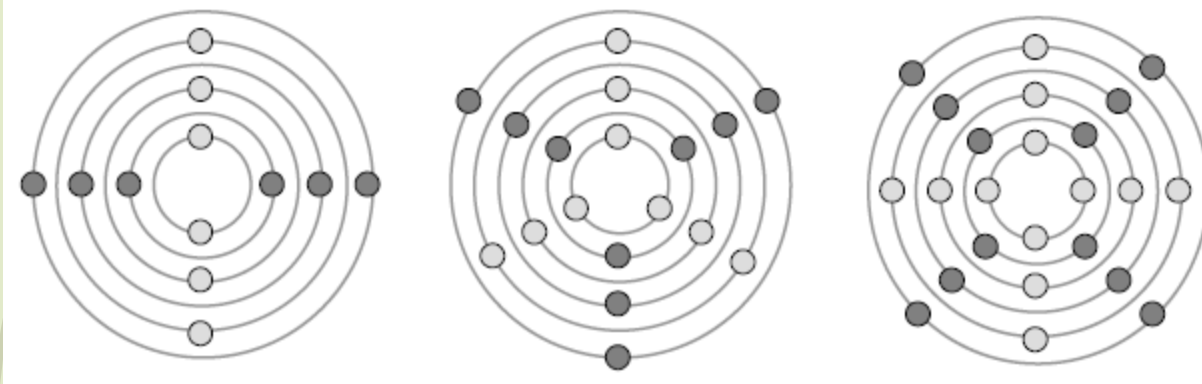


<https://lookinnotout.files.wordpress.com/2014/07/fibonaccispiralaloe.jpg>
https://farm5.static.flickr.com/4406/37064624035_0726b5d2c5_b.jpg
https://c1.staticflickr.com/7/6205/6086105698_81cfbcd872_b.jpg

Phyllotaxis – botanische Grundlagen

= Lehre von der Anordnung der Blätter

1. Pro Knoten mehrere Blätter
 - 1.1 Gegenständige Blattstellung
 - 1.2 Wirtelige Blattstellung



1.1

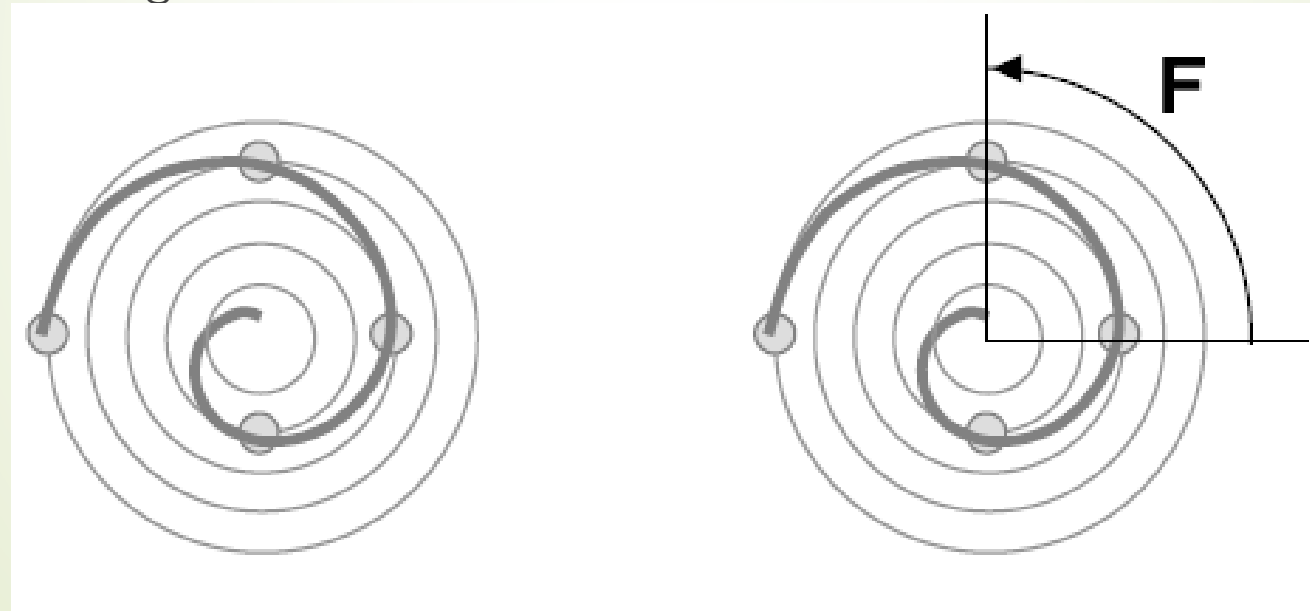
1.2

1.2

Orthostichen werden sichtbar

Phyllotaxis – botanische Grundlagen

- 2. Ein Blatt pro Knoten
- Blattstellungsdiagramm liefert genetische Spirale mit festem Divergenzwinkel F , mit $0^\circ < F < 360^\circ$

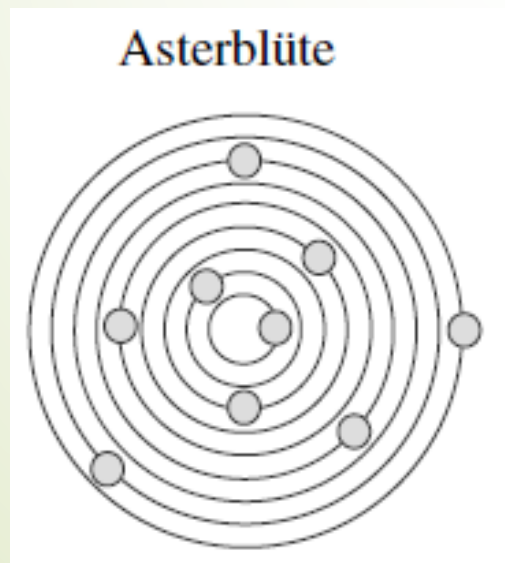


Phyllotaxis – botanische Grundlagen

► Ist die Divergenz g rational mit $g = \frac{z}{n}$ mit $z, n \in \mathbb{N}$,

so ist z =Anzahl der Spiralwindungen, n =Anzahl der Blätter bis
Übereinanderstehen

Beispiel:



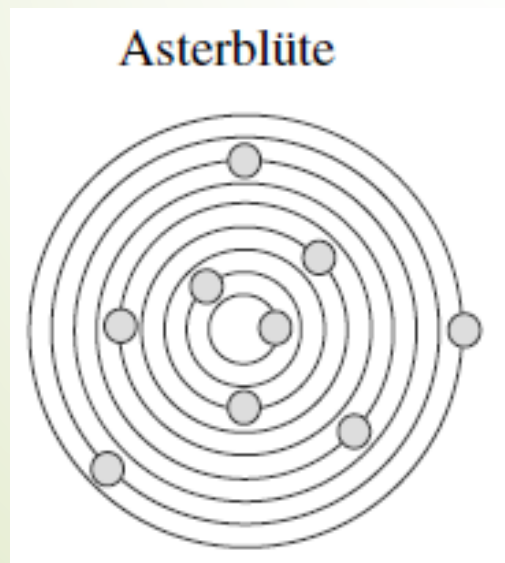
| | Kirsche | Aster |
|-----------------|---------|-------|
| Divergenz | ? | ? |
| Divergenzwinkel | ? | ? |

Phyllotaxis – botanische Grundlagen

► Ist die Divergenz g rational mit $g = \frac{z}{n}$ mit $z, n \in \mathbb{N}$,

so ist z =Anzahl der Spiralwindungen, n =Anzahl der Blätter bis
Übereinanderstehen

Beispiel:



| | Kirsche | Aster |
|-----------------|---------------|---------------|
| Divergenz | $\frac{2}{5}$ | $\frac{3}{8}$ |
| Divergenzwinkel | 144 | 135 |

Auftretende Divergenzen

- Schimper-Braunsche Hauptreihe der Blattstellungen
- Untersuchung von über 20.000 Pflanzen

| q_k | F_k |
|-------|---------|
| 1/2 | 180° |
| 1/3 | 120° |
| 2/5 | 144° |
| 3/8 | 135° |
| 5/13 | 138,46° |
| 8/21 | 137,14° |
| 13/34 | 137,65° |
| 21/55 | 137,45° |
| ⋮ | ⋮ |



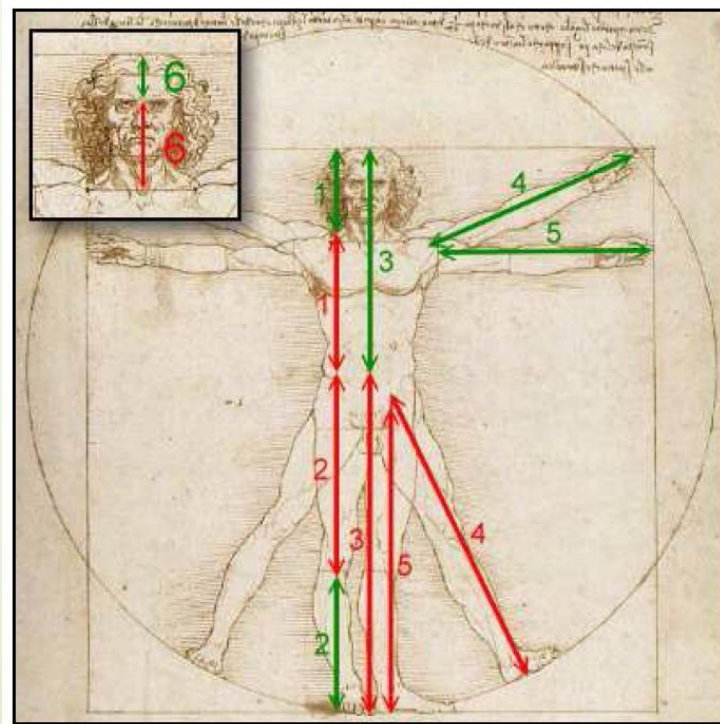
Fibonaccizahlen

- ▶ Fibonaccifolge (f_k) ist definiert als
$$f_1 = 1, f_2 = 1, f_k = f_{k-2} + f_{k-1} \text{ für } k \geq 3$$
- ▶ $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} := (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 88, \dots)$
- ▶ Spezialfall der Lucasfolgen
- ▶ $L_n = pL_{n-2} + qL_{n-1}$ für $n \geq 2$ mit $L_1, L_2 \in \mathbb{Z}$
 p und q ganzzahlige, teilerfremde Faktoren

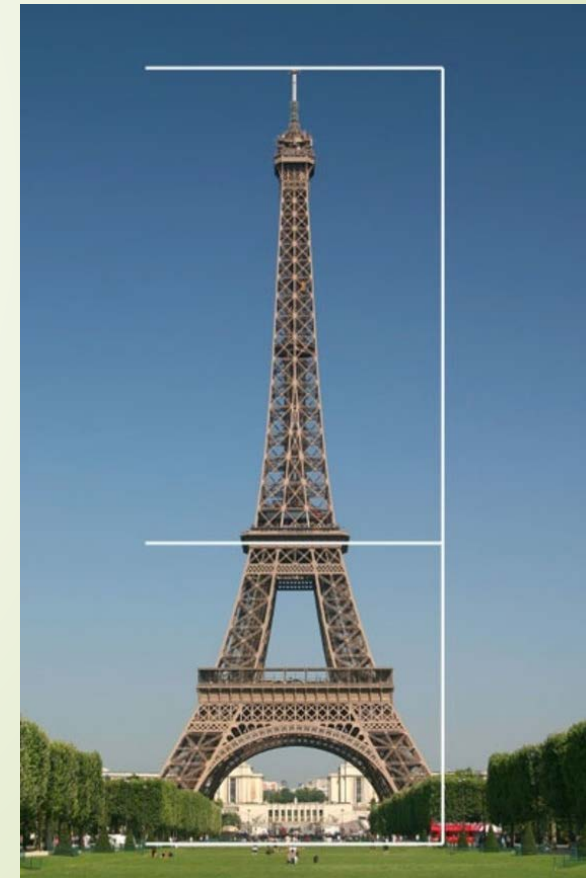
Goldener Schnitt

- proportio divina

- Bestimmtes Zahlenverhältnis, häufig bei Strecken zu finden
 - Harmonische/ästhetische Wahrnehmung
- Vorkommen in Kunst, Architektur, Fotografie



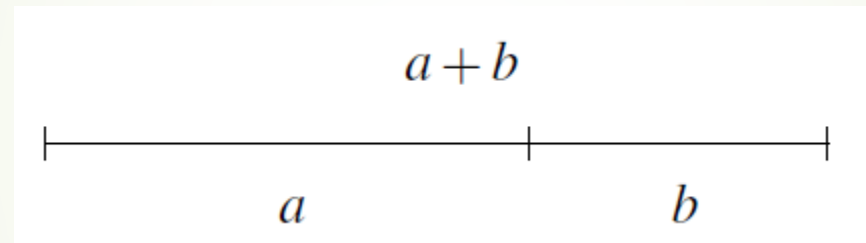
<https://i.pinimg.com/736x/83/fe/9a/83fe9a5a73dd8524efd904195fcb140e.jpg>



http://freiflug.tssteinfurt.de/images/P2_Mathe/Fotos/Eifelturm.png

Goldener Schnitt


- 2 Strecken a, b $a > b$ im goldenen Schnitt wenn gilt: $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$



$$\Phi = \frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,6180$$



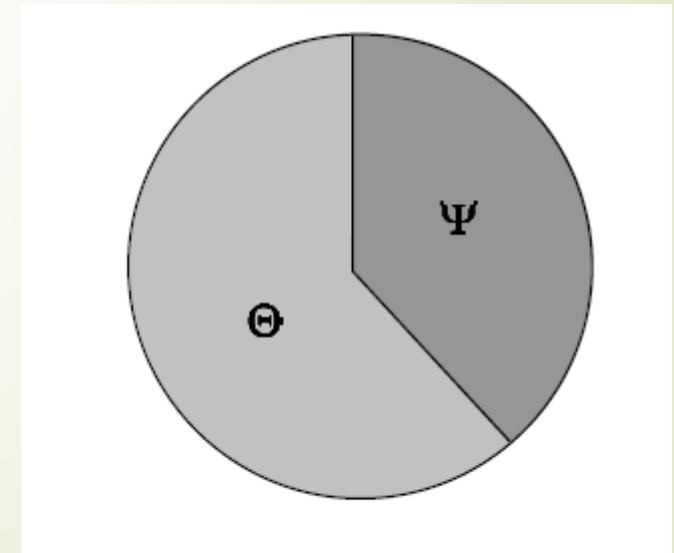
Beweis


$$\Phi = \frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,6180$$

Goldener Winkel

- Wird ein Kreis durch die Winkel ψ und θ im Verhältnis des goldenen Schnitts geteilt, so bezeichnet man den Winkel ψ als **goldenen Winkel**.

- $\frac{360^\circ}{\theta} = \frac{\theta}{\psi} \quad \longrightarrow \quad \psi \approx 137,5078^\circ$





Beweis


$$\frac{360^\circ}{\vartheta} = \frac{\vartheta}{\psi} \quad \psi \approx 137,5078^\circ$$


Erinnerung

Hauptreihe der Blattstellungen

- → Zähler und Nenner der Divergenzfolge q_k bilden Fibonaccifolge
Ist diese f_k , so ist $z_k = f_k$ und $n_k = f_{k+2}$
- Folge der Divergenzwinkel F_k konvergiert gegen Limitkonvergenzwinkel, dieser entspricht goldenem Winkel ψ

| q_k | F_k |
|-------|---------|
| 1/2 | 180° |
| 1/3 | 120° |
| 2/5 | 144° |
| 3/8 | 135° |
| 5/13 | 138,46° |
| 8/21 | 137,14° |
| 13/34 | 137,65° |
| 21/55 | 137,45° |
| ⋮ | ⋮ |



Feststellungen

Entweder

- ▶ I) Divergenzwinkel zweier aufeinanderfolgender Blätter ist rationales Vielfaches von 360° , meist Quotient aus benachbarten Fibonaccizahlen
→ zwei Blätter werden übereinander stehen

ODER

- ▶ II) Divergenzwinkel ist irrationales Vielfaches von 360° , dann meist
 $F = \psi \approx 137,51^\circ$

Spiralbildung

- Nur noch Pflanzen mit irrationalem Divergenzwinkel
- Keine übereinanderstehenden Blätter
- Bsp. Samen Sonnenblume, Blätter von Palmen, Kohlkopf, Rosen

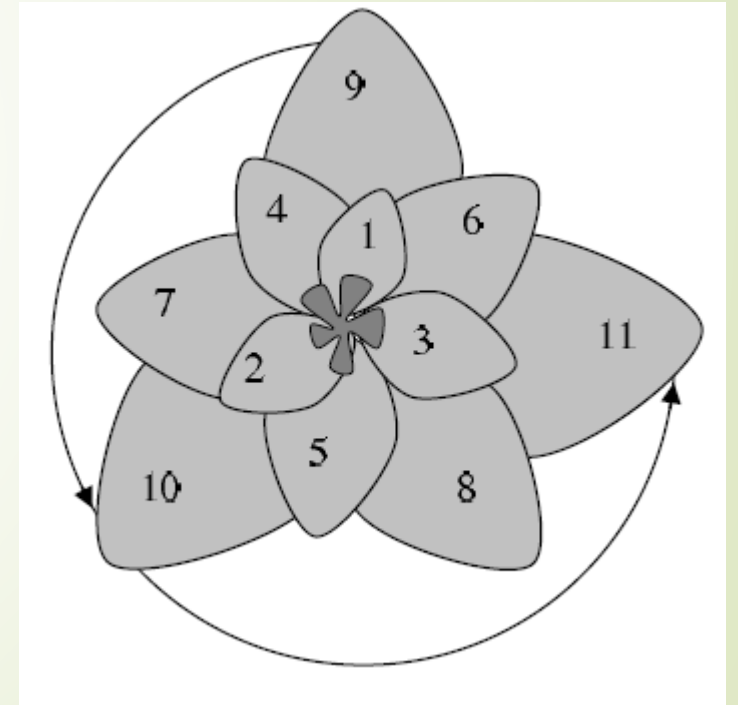




Abbildung aus Ortlieb et al., Mathematische Modellierung 2013, S. 38





Spiralen rechtsdrehend: 34

Spiralen linksdrehend: 21



Fibonaccispiralen

Abbildung aus Ortlieb et al., Mathematische Modellierung 2013, S. 38





Parastichen



- Erkennbare Spiralen
- Meist zwei gegenläufige Serien
- Zwei Blätter eines Spiralarms im Abstand von n Blättern gewachsen, mit $n = f_k$
- n faches des goldenen Winkels ist *ungefähr* Vielfaches von 360°

$$n\psi \approx f_k \frac{f_{k-2}}{f_k} 360^\circ = f_{k-2} 360^\circ$$

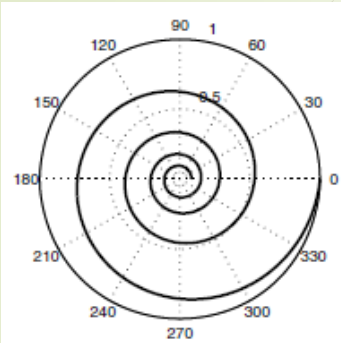
- „ungefähr“  Blätter in unmittelbarer Nachbarschaft statt übereinander
- Erstes und $(n + 1)$ -tes Blatt differieren ungefähr um Vielfaches von 360°
 Wahrnehmung als eine Spirale



Folgen für Pflanze

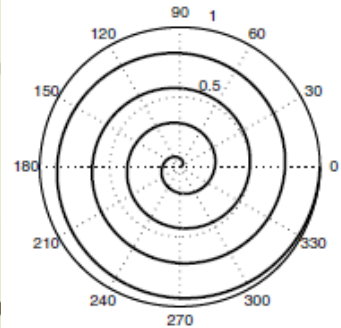
- ▶ Soll Anzahl der Parastichenserien konstant bleiben, muss Blattgröße mit Abstand zu Mitte anwachsen
- ▶ Alternativ: räumliches Wachstum wie Ananas oder Tannenzapfen
 - Radius bleibt konstant
- ▶ Aber: Sonnenblume wächst eben, kein Anwachsen nach außen
 - Anzahl Parastichen nicht konstant, ermittelte Anzahl abhängig von Entfernung zu Mittelpunkt beim Zählen

Typen von Spiralen



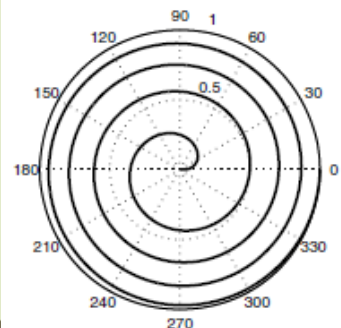
Logarithmische Spirale

- $r(\varphi) = ae^{k\varphi}$, a, k konstant
- Exponentialfunktion streng konvex \rightarrow Ableitung monoton steigend
- \rightarrow Spirale wächst nach außen schneller



Archimedische Spirale

- $r(\varphi) = a\varphi$, a konstant
- Linearer Verlauf, gleiche Abstände

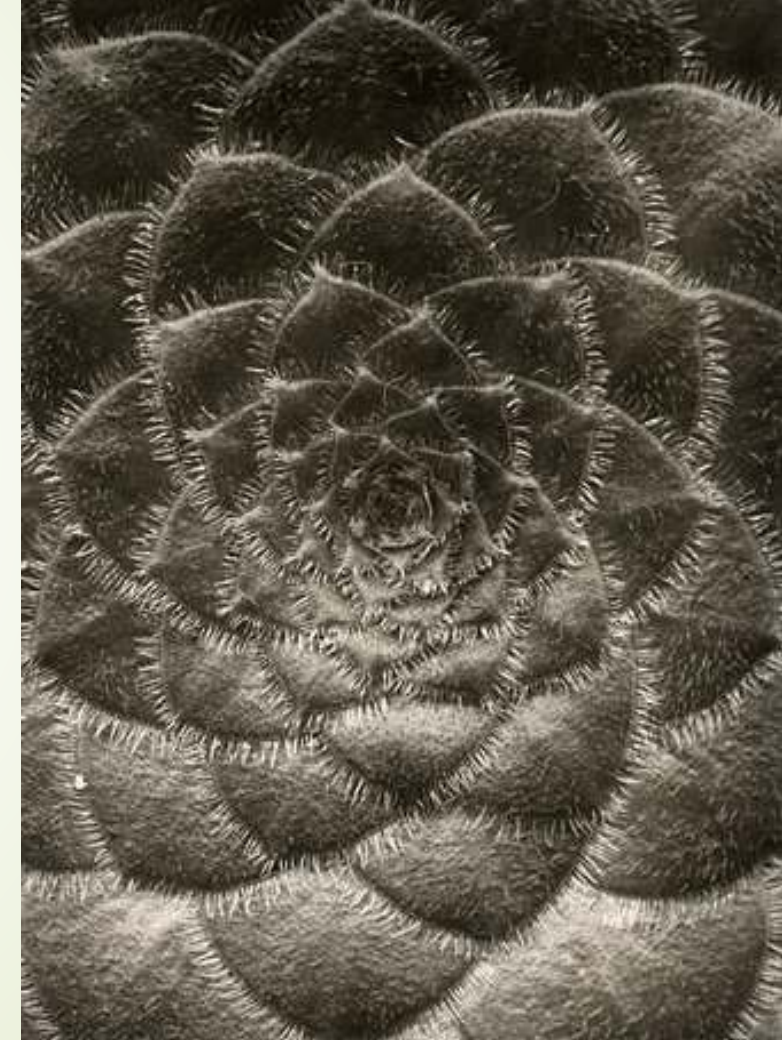
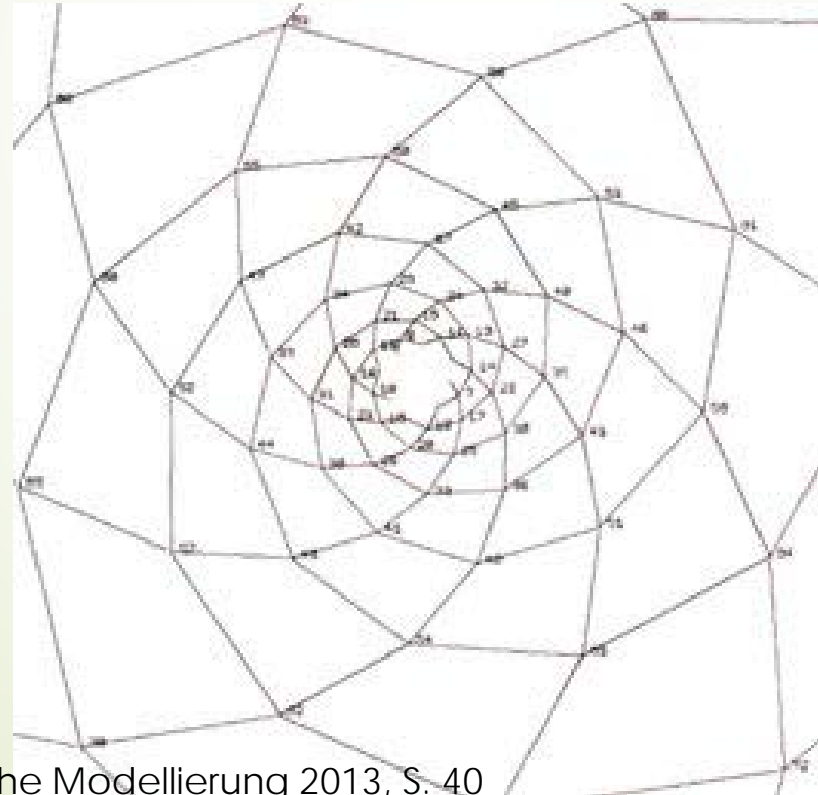


Fermatsche Spirale

- $r(\varphi) = a\sqrt{\varphi}$, a konstant
- Wurzelfunktion streng konkav \rightarrow Ableitung monoton fallend
- \rightarrow Abstand der Windungen wird geringer

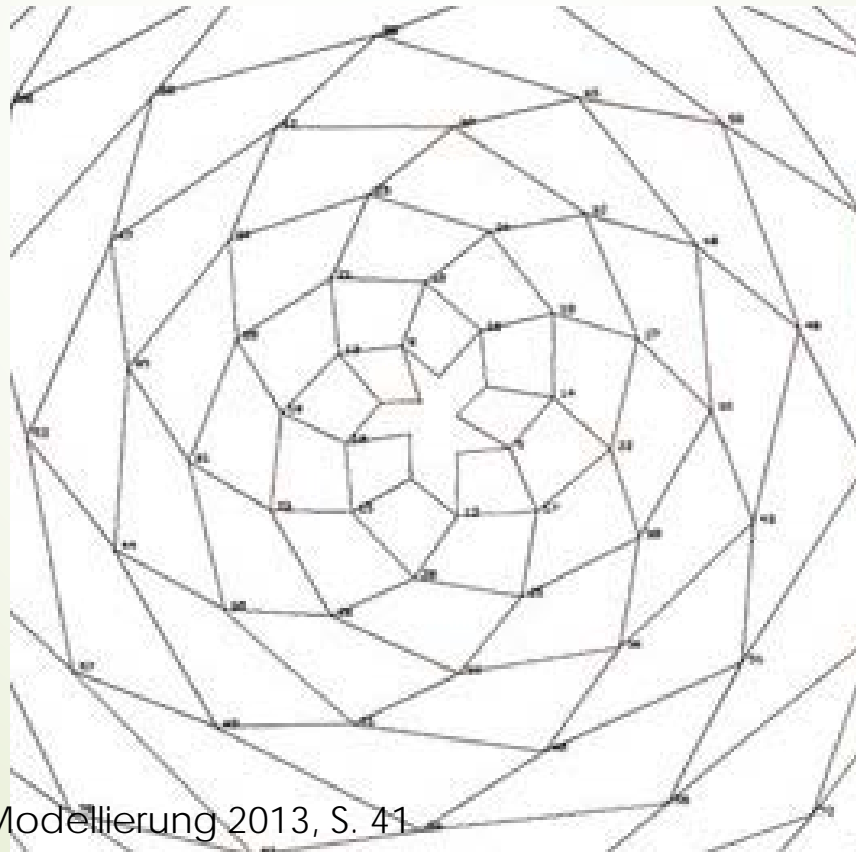
Modelle

- Konstant 5 Parastichen in eine Richtung,
8 in die andere
- Blattwachstum nach außen erhöht
- Simulation durch logarithmische Spirale
- $r(\varphi) = ae^{k\varphi}$



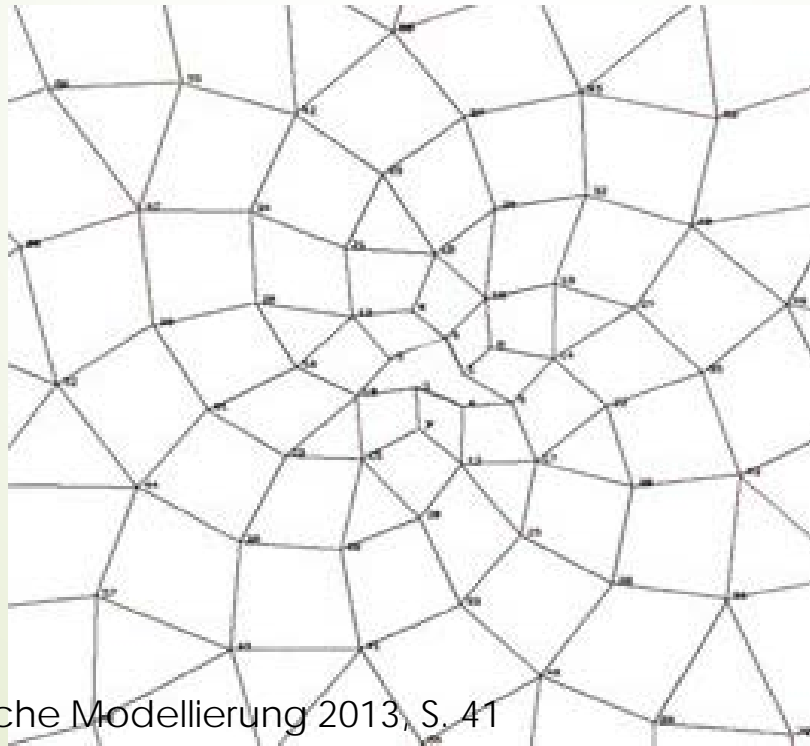
Modelle

- Blattgröße konstant
- → Archimedische Spirale, um Steigung der Kurve konstant zu halten
- $r(\varphi) = a\varphi$



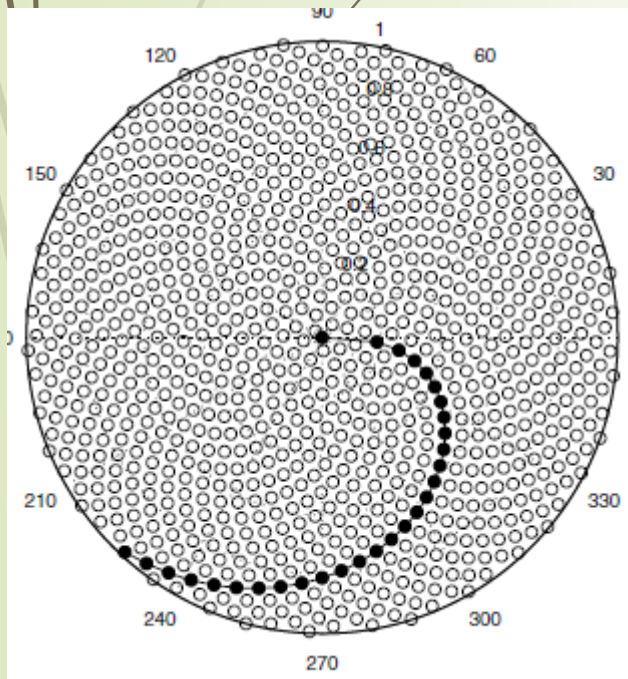
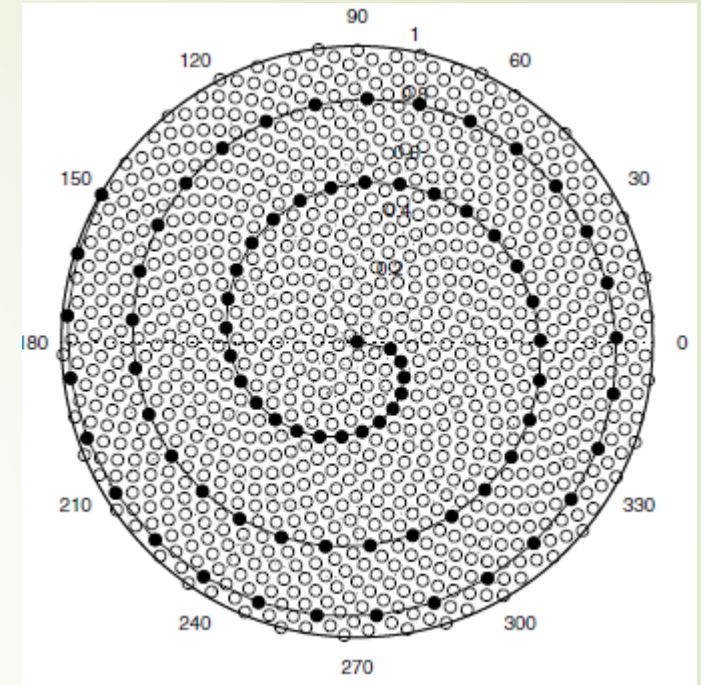
Modelle

- Flacher Blütenstand
- Genetische Spirale nach außen verengt
- Bildung von Umschaltpunkten
- Fermatsche Spirale
- $r(\varphi) = a\sqrt{\varphi}$



Spiralarme

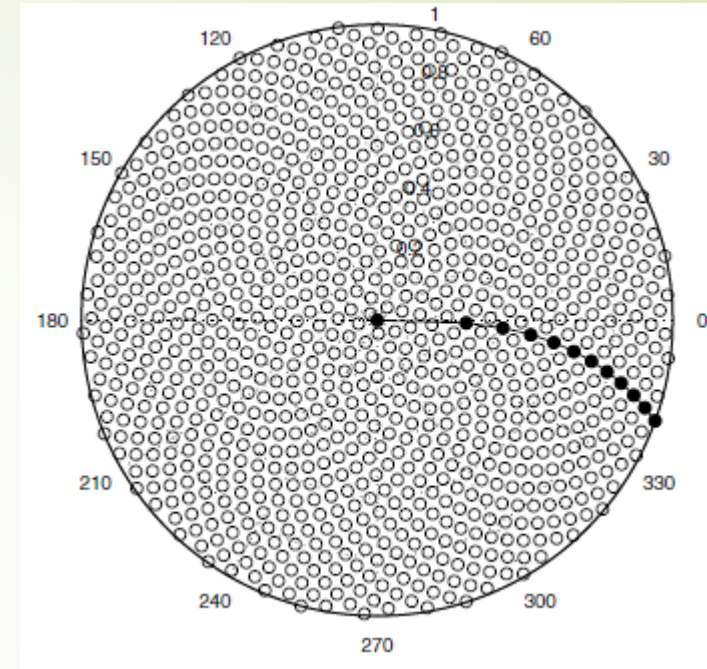
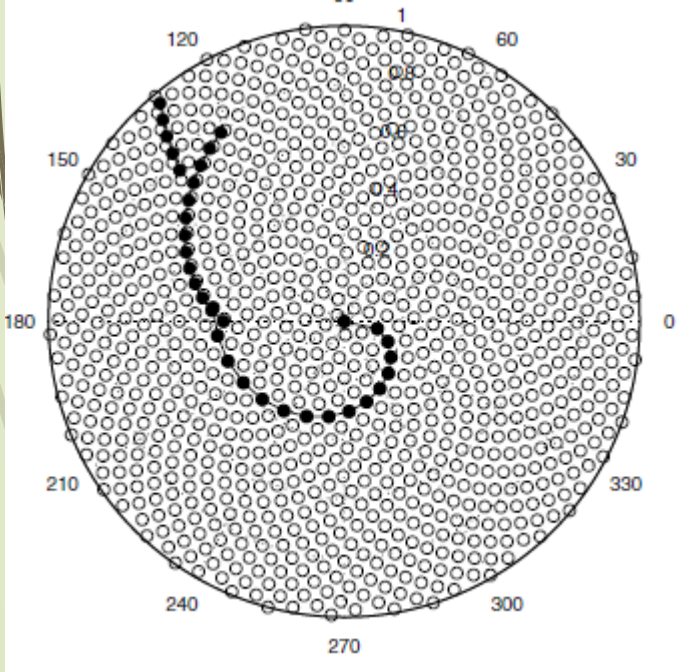
- Markierung jeder 13ten Einzelblüte
- Spiralstruktur im inneren Bereich
- Außen nicht mehr erkennbar



- Jede 34ste Einzelblüte markiert
- Großer Bereich der Fläche abgedeckt
- → Dominant wahrgenommene Spiralen

Spiralarme

- Jede 89ste Blüte markiert
- Spiralen beginnen weit außen



- Je Bereich am stärksten hervortretender Spiralarm
- Umschaltunkte werden sichtbar

Lucasfolgen

- Meist goldener Winkel ψ als Divergenzwinkel
- Und wenn nicht?
- → weitere vorkommende irrationale Winkel: $99,5^\circ$, $77,96^\circ$, $151,14^\circ \dots$
- $\frac{360^\circ}{\phi+1} \approx 137,5078^\circ$
- $\frac{360^\circ}{\phi+2} \approx 99,5016^\circ$
- $\frac{360^\circ}{\phi+3} \approx 77,9552^\circ$
- $\frac{360^\circ}{\gamma^2+2} \approx 151,1357^\circ$



Ursachen

- ▶ Goldener Winkel sorgt für ökonomischste Platznutzung
- ▶ → optimale Ausnutzung des Sonnenlichts
- ▶ → effektiver Transport von Zuckerlösung von Blättern zu Wurzeln

- ▶ Vermutung: Jedes Blatt produziert Inhibitor, der von Blatt Richtung Stamm diffundiert → Konzentrationsgefälle
- ▶ Durch Folgeblatt Überlagerung der Hemmstoffverteilung, drittes Blatt an Stelle niedrigster InhibitorKonzentration



Goldene Schnitt-Zahl als „irrationalste“ Zahl als Lösung



Zusammenfassung

- Bestimmte Strukturen beim Wachstum von Pflanzen
- Unterscheidung zwischen rationaler und irrationaler Divergenz
- Rational: nach n Blättern stehen zwei übereinander
- Irrational: oftmals goldener Winkel, Entstehung von Blattspiralen
- Links- und rechtsläufige Blattspiralen entsprechen konsekutiven Fibonaccizahlen
- Grund: Inhibitionsformel, Blattbildung an Ort der geringsten InhibitorKonzentration



Verteilung der Blätter im goldenen Winkel optimal

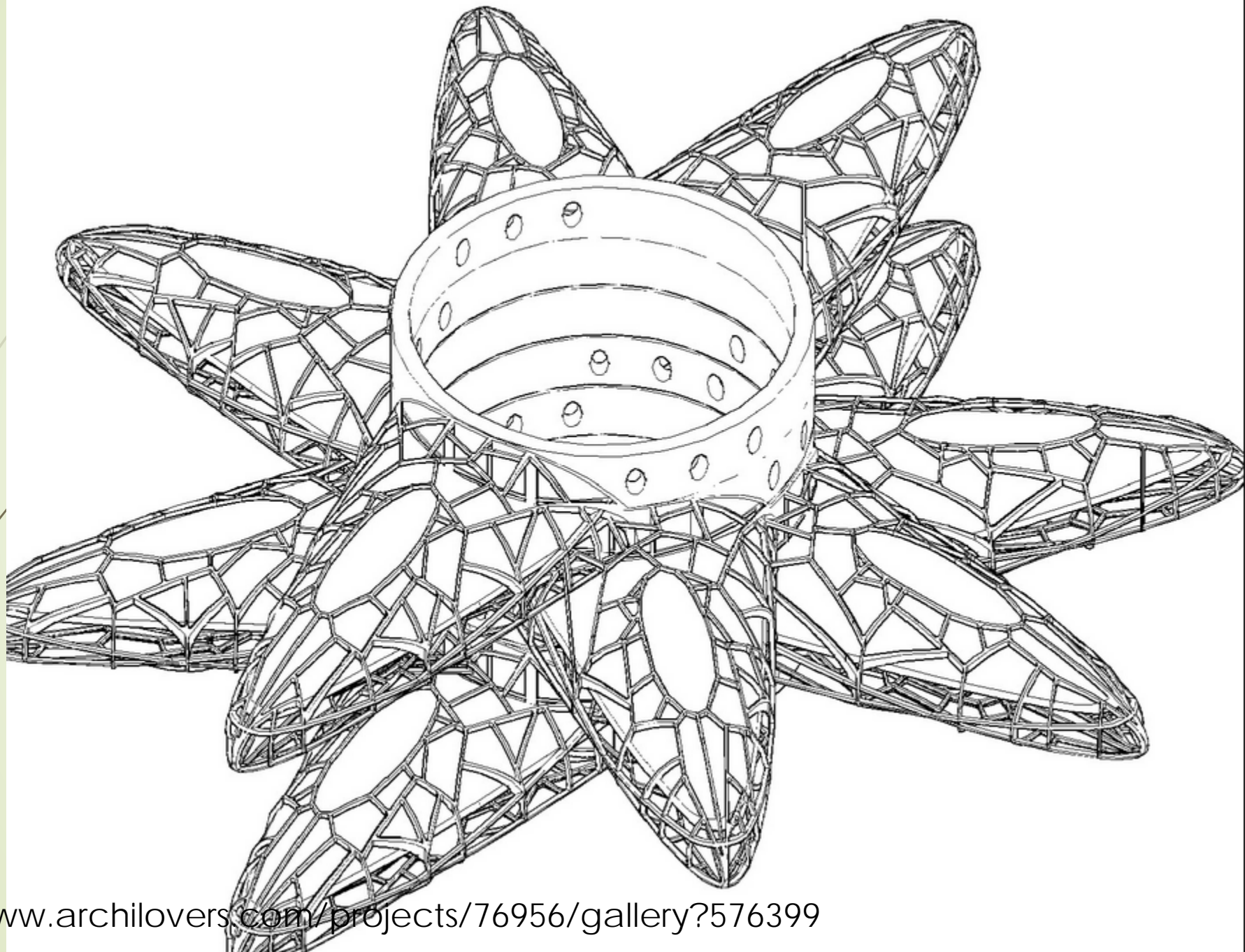


Welchen Nutzen hat die Modellierung?





<http://www.starcage.org/miami/exterior.html>



<https://www.archilovers.com/projects/76956/gallery?576399>



Quellen



- ▶ Ortlieb, C.P., C. Dresky, I. Gasser und S. Günzel (2013): Mathematische Modellierung. Wiesbaden.
- ▶ <https://lookinnotout.files.wordpress.com/2014/07/fibonaccispiralaloe.jpg>(25.10.18)
- ▶ https://farm5.static.flickr.com/4406/37064624035_0726b5d2c5_b.jpg(25.10.18)
- ▶ https://c1.staticflickr.com/7/6205/6086105698_81cfbcd872_b.jpg(25.10.18)
- ▶ <https://www.archilovers.com/projects/76956/gallery?576399>(25.10.18)
- ▶ <http://www.starcage.org/miami/exterior.html>(25.10.18)
- ▶ <https://i.pinimg.com/736x/83/fe/9a/83fe9a5a73dd8524efd904195fcb140e.jpg>(25.10.18)
- ▶ http://freiflug.tssteinfurt.de/images/P2_Mathe/Fotos/Eifelturm.png(25.10.18)