

Tabla de integrales inmediatas

Inmediatas	Cuasi inmediatas (con funciones)
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$ se suma 1 al expo y se divide por lo mismo	$\int f^n(x) \cdot f'(x) dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + k$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + k$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x) + k$
$\int e^x dx = e^x + k$ se queda igual	$\int e^{f(x)} f'(x) dx = e^{f(x)} + k$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + k$	$\int a^{f(x)} f'(x) dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + k$
$\int \operatorname{sen} x dx = -\operatorname{cos} x + k$	$\int \operatorname{sen}(f(x)) f'(x) dx = -\operatorname{cos}(f(x)) + k$
$\int \operatorname{cos} x dx = \operatorname{sen} x + k$	$\int \operatorname{cos}(f(x)) f'(x) dx = \operatorname{sen}(f(x)) + k$
$\int \frac{1}{\operatorname{cos}^2 x} dx = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x) dx = \operatorname{tg} x + k$	$\int \frac{f'(x)}{\operatorname{cos}^2(f(x))} dx = \int (1 + \operatorname{tg}^2(f(x))) f'(x) dx = \operatorname{tg}(f(x)) + k$
$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} dx = \int (1 + \operatorname{cotg}^2 x) dx = -\operatorname{ctg} x + k$	$\int \frac{f'(x)}{\operatorname{sen}^2(f(x))} dx =$ $\int (1 + \operatorname{ctg}^2(f(x))) f'(x) dx = -\operatorname{ctg}(f(x)) + k$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsen} x + k$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}} dx = \operatorname{arcsen}(f(x)) + k$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + k$	$\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} dx = \operatorname{arctg}(f(x)) + k$

Propiedades y métodos de calcular

- **En la suma/resta:** La integral de la suma es la suma de las integrales: $\int (u + v) dx = \int u dx + \int v dx$
Ejemplo: $\int (\operatorname{sen} x + x^2) dx = \int \operatorname{sen} x dx + \int x^2 dx = -\operatorname{cos} x \cdot \frac{x^3}{3} + k$
- **En la constante:** La integral de una constante por una función es la constante por la integral de la función.
Ejemplo: $\int 3 \cdot \operatorname{sen} x dx = 3 \cdot \int \operatorname{sen} x dx = 3(-\operatorname{cos} x) + K$
- **En la multiplicación:** No hay regla fija
 - Si un factor es la derivada del otro, por cambio de variable: $\int \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cos} x dx = \int t dt = \frac{t^2}{2} = \frac{(\operatorname{sen} x)^2}{2} + k$
 - Si un factor es la derivada del interior del otro (regla de la cadena inversa): $\int e^{x^2} \cdot 2x dx = \int u du = e^{x^2} + k$
 - Si ambos factores no tiene nada que ver: Por el método por partes:
Ejemplos: $\int 2x^3 dx = \int x^2 \cdot 2x dx = \int t \cdot dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{x^4}{2} + k$
- **En la división:** No hay regla fija
 - Intentar que el numerador sea la derivada del denominador, para aplicar Ln.
 - Si en el denominador hay una x^2 , intentar que se parezca a la arctang.
 - Si no, hacer por el método cambio variable o por descomposición:
 - Si no, aplicar método racionales.
Ejemplo: $\int \tan x dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x} dx = -\int \frac{-\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x} dx = -\ln |\operatorname{cos} x| + k$

Integrales inmediatas con ejemplos

Tipos	Ejemplos	Resolución
Tipo potencial $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}$	$\int \sqrt{x^3} dx$	$= \int x^{\frac{3}{2}} \cdot dx = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} = \frac{2\sqrt{x^5}}{5}$
Tipo logarítmico $\int \frac{f'}{f} dx = L f $	$\int \frac{e^x}{1+e^x} dx$	$= \text{Ln} 1+e^x $
Tipo exponencial $\int f' \cdot e^f \cdot dx = e^f$ $\int f' \cdot a^f \cdot dx = \frac{a^f}{\text{La}}$	$\int e^{-2x} dx$ $\int 5^x \cdot 9^x \cdot dx$	$\frac{1}{-2} \int (-2)e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} e^{-2x}$ $\int 45^x dx = \frac{1}{\text{Ln}45} \cdot 45^x$
Tipo coseno $\int \text{sen} x dx = -\text{cos} x$ $\int f' \cdot \text{sen} f \cdot dx = -\text{cos} f$	$\int \text{sen} \frac{x}{3} dx$	$= 3 \int \frac{1}{3} \cdot \text{sen} \frac{x}{3} dx = -3 \text{cos} \frac{x}{3}$
Tipo seno $\int \text{cos} x = \text{sen} x$ $\int f' \cdot \text{cos} f \cdot dx = \text{sen} f$	$\int \text{cos}(2x+5) dx$	$= \frac{1}{2} \int 2 \cdot \text{cos}(2x+5) dx = \text{sen}(2x+5)$
Tipo tangente $\int \frac{1}{\text{cos}^2 x} dx = \text{tg} x$ $\int \frac{f'}{\text{cos}^2 f} dx = \text{tg} f$	$\int \text{tg}^2 x dx$ $\int \frac{x}{\text{cos}^2(5x^2-3)} dx$	$\int (1+\text{tg}^2 x - 1) dx = \text{tg} x - x$ $\frac{1}{10} \int \frac{10x}{\text{cos}^2(5x^2-3)} = \frac{1}{10} \text{tg}(5x^2-3)$
Tipo cotangente $\int \frac{1}{\text{sen}^2 x} dx = -\text{cot} g x$ $\int \frac{f'}{\text{sen}^2 f} dx = -\text{cot} g f$	$\int \text{cot} g^2 x dx$ $\int \frac{x}{\text{sen}^2 3x^2} dx$	$\int (1+\text{cot} g^2 x - 1) dx = -\text{cot} g x - x$ $\frac{1}{6} \int \frac{6x}{\text{sen}^2 3x^2} dx = -\frac{1}{6} \text{cot} g 3x^2$
Tipo arc senx ($-\text{arc} \text{cos} x$) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \text{arc} \text{sen} x$ $\int \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}} dx = \text{arc} \text{sen} f$	$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx$ $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx$	$\frac{1}{2} \int \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}} dx = \frac{1}{2} \text{arcsen} x$ $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-(e^x)^2}} dx = \text{arcsen} e^x$
Tipo arc tang ($\text{arc} \text{cotang}$) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \text{arc} \text{tg} x$ $\int \frac{f'}{1+f^2} dx = \text{arc} \text{tg} f$	$\int \frac{1}{3+3x^2} dx$ $\int \frac{1}{1+9x^2} dx$	$\frac{1}{3} \int \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{1}{3} \text{arctg} x$ $\int \frac{1}{1+(3x)^2} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3}{1+(3x)^2} dx = \frac{1}{3} \text{arc} \text{tg}(3x)$

Exercicis bàsics:

- $\int (x^3 - 2x^2 + x - 5) dx = \int x^3 - \int 2x^2 + \int x - \int 5 = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 5x + C$
- $\int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x} + C$
- $\int \frac{1}{x} dx = \int x^{-1} dx = \frac{x^0}{0} = \nexists$ Mal es una inmediata: $D(\ln x) = \frac{1}{x} \rightarrow \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$
- $\int \sqrt{x} dx = \int x^{1/2} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{x^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + C$

MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

0. INTEGRALES CUASI INMEDIATAS:

Generalmente se ajusta una constante o para que un factor de la función sea la derivada del otro (una dentro de otra; regla cadena)

Ejemplo1 $\int f(x) \cdot f'(x) dx$ equivale a tener: $\int u du$

- $\int x^2(2 - 2x^3) dx \rightarrow$ buscamos la forma $\int f(x) \cdot f'(x) dx$ ó si: $t = 2 - 2x^3$ queda: $\int t dt$
 $= -\frac{1}{6} \int -6x^2(2 - 2x^3) dx = -\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} (2 - 2x^3)^2 = -\frac{1}{12} (2 - 2x^3)^2$

Si en el producto, una función es derivada de lo de dentro de la otra: $\int g(f) \cdot f' dx = g(f) + k$

- $\int \sin^3 x \cdot \cos x dx = \int (\sin x)^3 \cdot \cos x dx = \frac{(\sin x)^4}{4} + k \rightarrow$ equivale al cambio: $\int t^3 \cdot dt$

Ejemplo2: En la integral $\int \frac{\text{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$, la derivada $\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow$ multiplicando y dividiendo por 2:

$$\int \frac{\text{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int \frac{\text{sen}\sqrt{x}}{2 \cdot \sqrt{x}} dx = 2 \int \text{sen } t dt = -2 \cos \sqrt{x} + K$$

Ejemplos de integrales que se transforman en inmediatas (casi-inmediatas)

1. $\int x^2(2 - 2x^3) dx$	$= \int f(x) \cdot f'(x) dx \rightarrow -\frac{1}{6} \int -6x^2(2 - 2x^3) = -\frac{1}{12} (2 - 2x^3)^2$
2. $\int \frac{1}{x^5} dx \rightarrow$	$= \int x^{-5} dx = \frac{x^{-5+1}}{-5+1} = \frac{x^{-4}}{-4} = -\frac{1}{4x^4} + k$
3. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx \rightarrow$	$= \int x^{-\frac{2}{3}} = \frac{x^{1/3}}{1/3} = 3\sqrt[3]{x} + k$
4. $\int \frac{\text{sen } x - \cos x}{\text{sen } x + \cos x} dx \rightarrow$	$= -\int \frac{\cos x - \text{sen } x}{\text{sen } x + \cos x} dx = -\text{Ln} \text{sen } x + \cos x + k$
5. $\int \frac{3}{4x^2 - 4x + 1} dx$	$= \int \frac{3}{(2x-1)^2} = 3 \int (2x-1)^{-2} dx = -\frac{3}{2} (2x-1)^{-1} = -\frac{3}{2} \frac{1}{(2x-1)} + k$
6. $\int \frac{1}{\text{tg } x} dx \rightarrow$	$= \int \frac{\cos x}{\text{sen } x} dx = \text{Ln} \text{sen } x + C$
7. $\int \frac{x}{x^2+1} dx \rightarrow$	$= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \text{Ln}(x^2+1) + k$
8. $\int \frac{dx}{1+4x^2} \rightarrow$	$= \frac{1}{2} \int \frac{2 dx}{1+(2x)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2} \text{arctg } 2x + k$
9. $\int \frac{e^{\text{arcsen } x}}{\sqrt{1-x^2}} dx \rightarrow$	$= \int e^{\text{arcsen } x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = \int e^t dt = e^{\text{arcsen } x} + k$
10. $\int \frac{2^x}{1+4^x} dx \rightarrow$	$= \frac{1}{\text{Ln}2} \int \frac{2^x \cdot \text{Ln}2}{1+(2^x)^2} dx = \frac{1}{\text{Ln}2} \text{arctg } 2^x + k$
11. $\int \sec^2 \frac{x}{3} dx \rightarrow$	$= 3 \int \frac{1}{3} \cdot \sec^2 \frac{x}{3} dx = 3 \text{tg } \frac{x}{3} + k$
12. $\int \sec^2(2x+1) dx$	$= \frac{1}{2} \int 2 \cdot \sec^2(2x+1) dx = \frac{1}{2} \text{tg}(2x+1) + k$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}} \rightarrow$	$= \frac{1}{4} \int \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{9x^2}{16}}} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{\sqrt{1-(\frac{3x}{4})^2}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} \text{arc sin } \frac{3x}{4} + k = \frac{1}{2} \text{arc sin } \frac{3x}{4} + k$

Exercicis resolts:

- $\int \frac{3x^2-4x+5}{x} dx \rightarrow$
- $\int \frac{2x}{\sqrt{3x^2-1}} dx \rightarrow$
- $\int 2^{3x^2-2} \cdot 6x dx \rightarrow$

$$3 \int x dx - 4 \int dx + 5 \int \frac{1}{x} dx = 3 \frac{x^2}{2} - 4x + 5 \cdot \ln|x| + C$$

$$\int 2x \cdot (3x^2 - 1)^{-1/2} dx = \frac{1}{3} \int t^{-1/2} dt = \frac{1}{3} \left(\frac{t^{-1/2+1}}{-1/2+1} \right) = \frac{2}{3} \sqrt{3x^2 - 1} + C$$

$$\frac{2^{3x^2-2}}{\ln 2} + k$$

Exercicis immediatas:

Solucions

- | | | |
|---|--|--|
| a) $\int x^4 dx$ | b) $\int (x^3 + 2x) dx$ | c) $\int (x^2 + 2x^3) dx$ |
| d) $\int (x^7 + 8x^3 + x^{-2}) dx$ | e) $\int (x^{-6} - x^{-4} + x\sqrt{2}) dx$ | f) $\int (x^\pi + x^e + x^i) dx$ |
| g) $\int \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx$ | h) $\int \left(\frac{1}{x^{-100}} + \frac{1}{x\sqrt{2}} \right) dx$ | i) $\int \left(3x^2 + \frac{1}{x} \right) dx$ |
| j) $\int (7x^{-1} + 4x^{-2}) dx$ | k) $\int (x^{10} + x^{-3} + 2) dx$ | l) $\int (x^2 + 3x + 1) dx$ |
| m) $\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) dx$ | n) $\int (\sqrt[4]{x} + \sqrt[2]{x}) dx$ | ñ) $\int (\sqrt[1]{3x} + \sqrt[1/2]{x}) dx$ |
-
- | | | |
|------------------------------------|--|--|
| a) $\int (x+1)^3 dx$ | b) $\int (x+5)^3 dx$ | c) $\int \sqrt{x+1} dx$ |
| d) $\int (x-6)^{\sqrt{3}} dx$ | e) $\int 5\sqrt[3]{(x-4)^2} dx$ | f) $\int \frac{dx}{x-5}$ |
| g) $\int 3(3x+1)^3 dx$ | h) $\int 6(6x+5)^3 dx$ | i) $\int 7\sqrt{7x+1} dx$ |
| j) $\int 50(50x-6)^{\sqrt{3}} dx$ | k) $\int 5\sqrt[3]{(5x-4)^2} dx$ | l) $\int \frac{6dx}{6x-5}$ |
| m) $\int (7x+5)^9 dx$ | n) $\int (3x^2 2)^8 dx$ | ñ) $\int (4-2x)^7 dx$ |
| o) $\int \sqrt{5x+1} dx$ | p) $\int \sqrt[3]{\frac{x}{5} + 7} dx$ | q) $\int \frac{dx}{2x-5}$ |
| r) $\int (3x^2+2)(x^3+2x)^3 dx$ | s) $\int 2x(x^2+2)^{\sqrt{2}} dx$ | t) $\int \frac{6x^5-2x^{-3}}{(x^6+x^{-2})^2} dx$ |
| u) $\int \frac{4x^3+5}{x^4+5x} dx$ | v) $\int \frac{6x^2+4x+2}{x^3+x^2+x+1} dx$ | w) $\int (3x^2+4)\sqrt{x^3+4x} dx$ |
| x) $\int 3x^2\sqrt[3]{x^3-2} dx$ | y) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}} dx$ | z) $\int \frac{x^3}{(x^4+1)^5} dx$ |

- | | | |
|---|---|--|
| a) $\frac{x^5}{5} + k$ | b) $\frac{x^4}{4} + x^2 + k$ | c) $\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{2} + k$ |
| d) $\frac{x^8}{8} + 8\frac{x^4}{4} + \frac{x^{-1}}{-1} + k$ | e) $\frac{x^{-5}}{-5} - \frac{x^{-3}}{-3} + \frac{x\sqrt{2+1}}{\sqrt{2+1}} + k$ | f) $\frac{x^{\pi+1}}{\pi+1} + \frac{x^{e+1}}{e+1} + \frac{x^{i+1}}{i+1} + k$ |
| g) $2\ln x - \frac{1}{x} + k$ | h) $\frac{x^{101}}{101} + \frac{x^{1-\sqrt{2}}}{1-\sqrt{2}} + k$ | i) $x^3 + \ln x + k$ |
| j) $7\ln x - \frac{4}{x} + k$ | k) $\frac{x^{11}}{11} - \frac{x^{-2}}{-2} + 2x + k$ | l) $\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + x + k$ |
| m) $\frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^{4/3}}{4/3} + k$ | n) $\frac{x^{\pi+1}}{1+\pi} + \frac{x^{1/2}}{1/2} + k$ | ñ) $\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + k$ |
-
- | | | |
|--|--|--|
| a) $\frac{(x+1)^4}{4} + k$ | b) $\frac{(x+5)^4}{4} + k$ | c) $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} + k$ |
| d) $\frac{(x-6)^{\sqrt{3}+1}}{\sqrt{3}+1} + k$ | e) $5 \cdot \frac{(x-4)^{5/3}}{5/3} + k$ | f) $\ln x-5 + k$ |
| g) $\frac{(3x+1)^4}{4} + k$ | h) $\frac{(6x+5)^4}{4} + k$ | i) $\frac{2}{3}\sqrt{(7x+1)^3} + k$ |
| j) $\frac{(50x-6)^{\sqrt{3}+1}}{\sqrt{3}+1} + k$ | k) $\frac{(x-4)^{5/3}}{5/3} + k$ | l) $\ln 6x-5 + k$ |
| m) $\frac{1}{7} \frac{(7x+5)^{10}}{10} + k$ | n) $\frac{1}{3} \frac{(3x-2)^9}{9} + k$ | ñ) $-\frac{1}{2} \frac{(4-2x)^8}{8} + k$ |
| o) $\frac{2}{15} (5x+1)^{3/2} + k$ | p) $\frac{15}{4} \left(\frac{x}{5} + 7 \right)^{4/3} + k$ | q) $\frac{1}{2} \ln 2x-5 + k$ |
| r) $\frac{(x^3+2x)^4}{4} + k$ | s) $\frac{1}{\sqrt{2}+1} (x^2+2)^{\sqrt{2}+1} + k$ | t) $-(x^6+x^{-2})^{-1} + k$ |
| u) $\ln x^4+5x + k$ | v) $2\ln x^3+x^2+x+1 + k$ | w) $\frac{2}{3}\sqrt{(x^3+4x)^3} + k$ |
| x) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x^3-2)^4} + k$ | y) $\sqrt{x^2+2x} + k$ | z) $-\frac{1}{16} \frac{1}{(x^4+1)^4} + k$ |

1.- METODO DE INTEGRACION POR PARTES.

Se utiliza este método cuando en la expresión a integrar se aprecia la existencia de dos funciones sin que ninguna de ellas sea derivada de la otra. La fórmula a emplear es la siguiente: $\int u \, dv = u \, v - \int v \, du$

Recordar frase mnemotécnica: **UndiaVi = UnaVaca - Vestida deUniforme**

Una parte la tenemos que saber integrar y la otra derivar. Si hay parte polinómica, intentar que baje de grado.

Truco: orden de integración: **ALPES:** **A**rcos **L**ogaritmos **P**otencias **E**xponenciales **S**enoy**C**oseno

Ejemplos:

1.- $\int 3x^2 \cdot \ln x \, dx \rightarrow$ cambiamos el orden (ALPES): $\int \ln x \cdot 3x^2 \, dx$

$u = \ln x$ se deriva y $dv = 3x^2$ se integra. Luego aplicamos la fórmula: $\int u \, dv = u \, v - \int v \, du$ y sustituimos:

$$u = \ln x \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{x} \, dx$$

$$dv = 3x^2 \quad \Rightarrow \quad v = x^3, \quad \int 3x^2 \cdot \ln x \, dx = x^3 \cdot \ln x - \int \frac{1}{x} x^3 \, dx = x^3 \cdot \ln x - \frac{x^3}{3} + k$$

2.- $\int x^2 \cdot \text{sen} x \, dx$

$$u = x^2 \quad u = 2x \, dx \quad \rightarrow \quad I = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x \, dx.$$

(*) A veces hay que repetir la integración por partes como en este caso:

$$\left. \begin{array}{l} u = 2x \\ dv = \cos x \, dx \end{array} \right\} \begin{array}{l} du = 2 \, dx \\ v = \int \cos x \, dx = \text{sen} x \end{array} \rightarrow \int 2x \cos x \, dx = 2x \text{sen} x - \int 2 \text{sen} x \, dx = 2x \text{sen} x + 2 \cos x$$

Y volviendo a la expresión (*) obtenemos el resultado final: $I = -x^2 \cos x + 2x \text{sen} x + 2 \cos x + K$

3.- $\int e^x \cdot (7 + 2x) \, dx \rightarrow$ cambiamos el orden (ALPES): $\int (7 + 2x) \cdot e^x \, dx$

$$\left. \begin{array}{l} u = 7 + 2x \\ dv = e^x \end{array} \right\} \begin{array}{l} du = 2 \, dx \\ v = e^x \end{array} \rightarrow I = (7 + 2x) \cdot e^x - \int 2 \cdot e^x \, dx = (7 + 2x) \cdot e^x - 2 \cdot e^x = e^x (5 + 2x) + k$$

4.- $\int \frac{\ln x}{x^2} \, dx$

Equivale a: $\int \ln x \cdot x^{-2} \, dx$

$$u = \ln x \rightarrow du = 1/x$$

$$dv = x^{-2} \rightarrow v = \int x^{-2} = -x^{-1} \quad ; \quad I = u \cdot v - \int v \cdot du = \ln x \cdot -1/x - \int -x^{-2} \cdot 1/x \, dx = \frac{-\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C$$

5.- $\int \text{arc} \, \text{tg} \, x \, dx$

$$\left. \begin{array}{l} u = \text{arc} \, \text{tg} \, x \\ dv = dx \end{array} \right\} \begin{array}{l} du = \frac{1}{1+x^2} \\ v = x \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{Aplicando la fórmula que hemos indicado anteriormente,} \\ I = x \cdot \text{arctg} \, x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} \, dx \end{array} \right\}$$

La integral resultante es de tipo logarítmico: $I = x \cdot \text{arctg} \, x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} \, dx = x \cdot \text{arctg} \, x - \frac{1}{2} L(1+x^2) + C$

2.-METODO CAMBIO DE VARIABLE o sustitución.

Consiste en sustituir la variable x por otra variable t mediante una nueva función g tal que $x=g(t)$ a fin de transformar el integrando en otro más sencillo.

Ejemplos:

1.- $\int \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx$

Cambiamos x por t^2 (para eliminar la raíz) $x = t^2$, con lo que $dx = 2t dt$ y la integral queda:

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx = \int \frac{2t}{t^2+t} dt = \int \frac{2}{t+1} dt = 2\ln|t+1| + k = \ln(t+1)^2 + k.$$

Deshaciendo el cambio, $t = \sqrt{x}$, se tiene: $\int \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx = \ln(\sqrt{x} + 1)^2 + k.$

2.- $\int \frac{1}{x\sqrt{x-1}} dx$

Hacemos el cambio $\sqrt{x-1} = t$ y elevando al cuadrado, $x-1 = t^2$

Diferenciando la igualdad anterior, $dx = 2t dt$

Por otra parte, de $x-1 = t^2$ resulta $x = 1+t^2$

Sustituyendo resulta: $\int \frac{1}{x\sqrt{x-1}} dx = \int \frac{1}{(1+t^2)t} \cdot 2t dt = 2 \int \frac{1}{1+t^2} dt = 2 \arctan t = 2 \arctan \sqrt{x-1} + C$

3.- $\int x^2 \sqrt{1+x^3} dx$

Hacemos el cambio $\sqrt{1+x^3} = t \Rightarrow 1+x^3 = t^2 \Rightarrow 3x^2 dx = 2t dt$

Despejamos en forma adecuada: $x^2 dx = \frac{2t dt}{3}$ y ahora sustituimos:

$$\int x^2 \sqrt{1+x^3} = \int \sqrt{1+x^3} \cdot x^2 dx = \int t \cdot \frac{2t dt}{3} = \frac{2}{3} \int t^2 dt = \frac{2}{3} \frac{t^3}{3} = \frac{2}{9} \sqrt{(1+x^3)^3}$$

4.- $\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} dx$

Hacemos el cambio $x^2+x+1 = t \Rightarrow (2x+1)dx = dt$

Sustituyendo en la integral resulta:

$$\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} dx = \int \frac{dt}{t^2} = \int t^{-2} dt = \frac{t^{-1}}{-1} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{x^2+x+1} + C$$

5.- $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x dx$

El cambio que podemos realizar es el siguiente: $\operatorname{sen} x = t$ (Por ser impar en $\cos x$)

De dicho cambio resulta: $\cos x dx = dt$ y sustituyendo en la integral propuesta obtenemos:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x dx &= \int \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \cos x dx = \int t^2 (1-t^2) dt = \\ &= \int (t^2 - t^4) dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} - \frac{\operatorname{sen}^5 x}{5} + C \end{aligned}$$

$$6.- \int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} dx$$

$$\sqrt{x} = t \Rightarrow x = t^2 \rightarrow \begin{aligned} dx &= 2t dt \\ I &= \int \frac{1}{t\sqrt{1-t^2}} 2t dt = 2 \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = 2 \operatorname{arcsen} t = 2 \operatorname{arcsen} \sqrt{x} + k \end{aligned}$$

Otros cambios:

$$\int \frac{x^2}{x^3-2} dx = \frac{1}{3} \operatorname{Ln} |x^3-2| + C$$

$$\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx = \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2} + C$$

$$x^3 = t \Rightarrow 3x^2 dx = dt$$

$$\operatorname{arctg} x = t \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} dx = dt$$

$$\int \cos(x^2) 2x dx = \operatorname{sen} x^2 + C$$

$$\int 2xe^{x^2} dx = e^{x^2} + C$$

$$x^2 = t \Rightarrow 2x dx = dt$$

$$x^2 = t \Rightarrow 2x dx = dt$$

$$\int \frac{1}{x \cdot \ln x} dx = \operatorname{Ln} (\operatorname{Ln} x)$$

$$\text{Cambiamos: } \operatorname{Ln} x = t \rightarrow dt = \frac{1}{x} dx$$

$$\text{Para poder usar: } \int \frac{dt}{t} = \operatorname{Ln} t \rightarrow \text{Sustituimos: } \int \frac{1}{x \cdot \ln x} dx = \int \frac{1/x}{\ln x} dx = \operatorname{Ln} (\operatorname{Ln} x) + k$$

3.- METODO DE DESCOMPOSICION EN FRACCIONES SIMPLES

Consiste en separar la función fraccional en sumas de funciones fraccionales.

- Si grado del numerador > grado del denominador: se hace la división y después se integra el cociente más el resto partido por el divisor es decir, si: $\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r}{q(x)}$ por tanto: $\int \frac{p(x)}{q(x)} = \int c(x)dx + \int \frac{r}{q(x)} dx$
- Si grado del numerador < grado del denominador: descomponer el denominador en factores
 - Si todas las raíces del denominador son reales: Hacer suma de fracciones simples:
 - Ejemplo: $\frac{3}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x-2)} \rightarrow 3 = A(x-2) + B(x+1) \rightarrow A = -1; B = 3$
 - Si un factor está en potencia >1 hay que poner la suma de fracciones con las potencias menores del factor:
 - Ejemplo: $\frac{3}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x-2)^2}$
 - Si el denominador tiene raíces complejas: Descomponer en suma de fracciones simples asociadas a las raíces complejas.

Ejemplos:

1.- $\int \frac{2x^2}{2x+1} dx$

Sol: Grado numerador > grado denominador: realizar la división →

$$\int \frac{2x^2}{2x+1} dx = \int \left(x - \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{2x+1} \right) dx = \boxed{\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \ln|3x+1| + C}$$

$$\begin{array}{r} \frac{2x^2}{-2x-x} \quad \boxed{2x+1} \\ / \quad -x \quad 1 \\ \quad +x + \frac{1}{2} \quad x + \frac{1}{2} \\ \quad \quad \quad / \quad \frac{1}{2} \end{array}$$

2.- $\int \frac{1}{x^2 - 5x + 6} dx$

Sol: Grado numerador < grado denominador: factorizar denominador $x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \end{Bmatrix}$

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{1}{(x-3)(x-2)} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x-2} = \frac{a(x-2) + b(x-3)}{(x-3)(x-2)}$$

Al igualar los numeradores: $1 = a(x-2) + b(x-3) \rightarrow$ Para $x=2$: $1 = -b$; para $x=3$: $1 = a$

$$\int \frac{1}{x^2 - 5x + 6} dx = \int \frac{1}{x-3} dx - \int \frac{1}{x-2} dx = \mathbf{Ln|x-3| - Ln|x-2| + C}$$

3.- $\int \frac{x^4 + x^3 - x^2 - 2x + 5}{x^3 - x^2 - x - 1} dx$

Primero: hacer división para que quede con numerador de grado menor al denominador:

$$\frac{x^4 + x^3 - x^2 - 2x + 5}{x^3 - x^2 - x - 1} = x - \frac{x-5}{x^3 - x^2 - x - 1} \rightarrow \int \frac{x^4 + x^3 - x^2 - 2x + 5}{x^3 - x^2 - x - 1} = \int x dx - \int \frac{x-5}{x^3 - x^2 - x - 1} dx$$

Segundo: Factorizar la 2ª integral: $\int \frac{x-5}{x^3 - x^2 - x - 1} dx$

$$\frac{x-5}{x^3 + x^2 - x - 1} = \frac{x-5}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x-1)}{(x-1)(x+1)^2}$$

Al igualar numeradores: $x-5 = A(x+1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x-1)$, dar cualquier valor a x , preferentemente los ceros:

para $x = -1$: $-6 = 2C \rightarrow C = 3$,

para $x = 1$: $-4 = 4A \rightarrow A = -1$

para $x = 0$: $-5 = A - B - C \rightarrow B = 1$

$$\int \frac{x-5}{x^3 + x^2 - x - 1} dx = \int \frac{-1}{x-1} dx + \int \frac{1}{x+1} dx + \int \frac{3}{(x+1)^2} dx$$

$$\int \frac{x-5}{x^3 - x^2 - x - 1} dx = -\ln|x-1| + \ln|x+1| + \frac{3}{x+1} + C = \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| - \frac{3}{x+1} + C$$

Finalmente: $\int \frac{x-5}{x^3 + x^2 - x - 1} = \frac{x^2}{2} - \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| + \frac{3}{x+1} + k.$

EJERCICIOS RESUELTOS DE CÁLCULO DE INTEGRALES

1.-Calcula las siguientes integrales: a) $\int x \cdot e^x dx$; b) $\int x \cdot \text{sen } x dx$; c) $\int x \cdot \ln x dx$;

Solución: Todas ellas se resuelven por partes y la fórmula del método es: $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$

a) $I = \int x e^x dx$.

$$\left\{ \begin{array}{l} u = x \\ v = e^x \cdot dx \end{array} \middle| \begin{array}{l} du = dx \\ v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\} \rightarrow I = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C$$

b) $I = \int x \text{sen } x \cdot dx$

$$\left\{ \begin{array}{l} u = x \\ dv = \text{sen } x \cdot dx \end{array} \middle| \begin{array}{l} du = dx \\ v = \int \text{sen } x dx = -\cos x \end{array} \right\} \rightarrow I = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \text{sen } x + C$$

c) $I = \int x \ln x dx$

$$\left. \begin{array}{l} u = \ln x \quad du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x dx \quad v = \int x dx = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} \rightarrow I = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \cdot dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

2.-Calcula las siguientes integrales: a) $\int x^2 \cdot e^x dx$; b) $\int x^2 \cdot \cos 3 x dx$

Sol: Las dos se resuelven aplicando el método de integración por partes dos veces:

a) $\int x^2 e^x dx$

$$\left\{ \begin{array}{l} u = x^2 \\ dv = e^x dx \end{array} \middle| \begin{array}{l} du = 2x dx \\ v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\} \rightarrow I = x^2 e^x - \int 2x e^x dx; I = x^2 e^x - I_1$$

(*) donde $I_1 = \int 2x e^x dx$

Hacemos nuevamente:

$$\left\{ \begin{array}{l} u = 2x \\ dv = e^x dx \end{array} \middle| \begin{array}{l} du = 2 dx \\ v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\} \rightarrow I_1 = 2x e^x - \int 2 e^x dx = 2x e^x - 2e^x$$

Resultado final:

$$I = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C$$

b) $\int x^2 \cos 3 x dx$

$$\left\{ \begin{array}{l} u = x^2 \\ dv = \cos 3 x dx \end{array} \middle| \begin{array}{l} du = 2x dx \\ v = \int \cos 3 x dx = \frac{1}{3} \int 3 \cos 3 x dx = \frac{1}{3} \text{sen } 3 x \end{array} \right\}$$

$$\rightarrow I = \frac{1}{3} x^2 \text{sen } 3 x - \int \frac{2}{3} x \text{sen } 3 x dx.$$

Aplicamos nuevamente el método de integración por partes:

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \frac{2}{3} x \\ dv = \text{sen } 3 x dx \end{array} \middle| \begin{array}{l} du = \frac{2}{3} dx \\ v = \int \text{sen } 3 x dx = \frac{1}{3} \int 3 \text{sen } 3 x dx = -\frac{1}{3} \cos 3 x \end{array} \right\}$$

$$\int \frac{2}{3} x \text{sen } 3 x dx = -\frac{2}{9} x \cos 3 x + \int \frac{2}{9} \cos 3 x dx = -\frac{2}{9} x \cos 3 x + \frac{2}{27} \int 3 \cos 3 x dx =$$

$$= -\frac{2}{9} x \cos 3 x + \frac{2}{27} \text{sen } 3 x$$

$$I = \frac{1}{3} x^2 \text{sen } 3 x + \frac{2}{9} x \cos 3 x - \frac{2}{27} \text{sen } 3 x + C$$

3.-Integra las siguientes funciones racionales:

$$a) \int \frac{2x+1}{x^2+x-6} dx; \quad b) \int \frac{x-1}{x^2-2x-6} dx \quad c) \int \frac{1+2x}{1+x^2} dx; \quad d) \int \frac{x^2+1}{x-1} dx$$

Solución:

a) La primera es inmediata ya que el numerador es exactamente la derivada del denominador, por tanto,

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x-6} dx = L|x^2+x-6| + C$$

b) La segunda se resuelve buscando la derivada del denominador:

$$\int \frac{x-1}{x^2-2x-6} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x-2}{x^2-2x-6} dx = \frac{1}{2} \cdot L|x^2-2x-6| + C$$

c) La tercera la descomponemos en dos integrales:

$$\int \frac{1+2x}{1+x^2} dx = \int \frac{1}{1+x^2} dx + \int \frac{2x}{1+x^2} dx = \arctg x + L(1+x^2) + C$$

d) La cuarta se resuelve realizando previamente la división. Y podemos realizarla por Ruffini

Hecha la división se obtiene de cociente $x+1$ y de resto 2

$$\int \frac{x^2+1}{x-1} dx = \int \left(x+1 + \frac{2}{x-1}\right) dx = \frac{x^2}{2} + x + 2L|x-1| + C$$

$$4.- \quad I = \int \frac{2x+1}{x^2-5x+6} dx$$

Como no puede obtenerse en el numerador la derivada del denominador, utilizaremos el método de descomposición en fracciones simples, ya que el denominador tiene raíces reales.

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$$

$$\frac{2x+1}{x^2-5x+6} = \frac{2x-1}{(x-3)(x-2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x-3)}{(x-3)(x-2)}$$

Como los numeradores son iguales los denominadores también lo serán:

$$2x+1 = A(x-2) + B(x-3)$$

Para $x=3$, $7=A$; Para $x=2$, $5=-B$

(A x se le han dado los valores de las raíces del denominador.).

Ahora procedemos de la siguiente manera:

$$I = \int \frac{2x+1}{x^2-5x+6} dx = \int \frac{7}{x-3} dx + \int \frac{-5}{x-2} dx = 7L|x-3| - 5L|x-2|$$

5.-Calcula por el método más adecuado las siguientes integrales:

$$a) \int \frac{1}{(x-1)^2} dx; \quad b) \int \frac{x-1}{3x^2-6x+5} dx$$

a) La primera la resolvemos por un sencillo cambio de variable: $x-1=t \Rightarrow dx=dt$

$$\int \frac{1}{(x-1)^2} dx = \int \frac{1}{t^2} dt = \int t^{-2} dt = \frac{t^{-1}}{-1} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{x-1} + C$$

b) La segunda es una integral en la que el numerador puede transformarse en la derivada del denominador:

$$\int \frac{x-1}{3x^2-6x+5} dx = \frac{1}{6} \int \frac{6x-6}{3x^2-6x+5} dx = \frac{1}{6} L|3x^2-6x+5| + C$$

6.-La función $f(x)=2x+5$ tiene infinitas primitivas que difieren en una constante. ¿Cuál de estas funciones toma el valor 18 para $x=2$?

$$\int (2x+5). dx = x^2 + 5x + C$$
 Como toma el valor 18 para $x=2$ resulta: $2^2 + 5 \cdot 2 + C = 18 \Rightarrow C = 4$.
La función buscada es: $F(x) = x^2 + 5x + 4$

7.-Halla una función cuya derivada sea $f'(x) = 4x^2 - 7x + 5x - 1$ y que se anule para $x = 1$.

Buscamos la integral indefinida de $f(x)$ que es: $\int (4x^3 - 7x^2 + 5x - 1) \cdot dx = x^4 - \frac{7x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - x + C$

Como se anula para $x=1$ tenemos: $1^4 - \frac{7 \cdot 1^3}{3} + \frac{5 \cdot 1^2}{2} - 1 + C = 0$ y se obtiene que $C = -1/6$,

Por tanto, la función buscada es $F(x) = x^4 - \frac{7x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - x - \frac{1}{6}$

8.-Halla la función G tal que $G''(x) = 6x+1$; $G(0) = 1$ y $G(1) = 0$

Nos dan la segunda derivada por lo que tenemos que integrar dos veces:

$$G'(x) = \int (6x + 1) dx = 3x^2 + x + C \quad G(x) = \int (3x^2 + x + C) dx = x^3 + \frac{1}{2}x^2 + Cx + D$$

De $G(0)=1$ resulta: $D=1$, (después de sustituir la x por 0.)

De $G(1)=0$ obtenemos: $1+1/2+C+1=0$, (después de sustituir la x por 1) por lo que $C = -5/2$.

La función que buscamos es la siguiente: $G(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 1$

9.-Dada la función $f(x) = 6x$ halla la primitiva que pasa por el punto $A(1,2)$.

Sol: Hallamos la integral indefinida: $\int 6x dx = 3x^2 + C$

que es el conjunto de todas sus primitivas.

Ahora buscamos la que pasa por el punto $(1,2)$:

$3 \cdot 1^2 + C = 2$ lo que indica que $C = -1$, por tanto, la primitiva buscada es $F(x) = 3x^2 - 1$

10.- Resolver la integral $\int \sen^5 x dx$

Sol: Es impar en $\sen x$ por lo que hacemos el cambio $\cos x = t$

con lo que $-\sen x \cdot dx = dt$. Entonces:

$$\begin{aligned} \int \sen^5 x \cdot dx &= \int \sen^4 x \cdot \sen x \cdot dx = \int \sen^2 x \cdot \sen^2 x \cdot \sen x \cdot dx = \\ &= \int (1 - \cos^2 x)(1 - \cos^2 x) \cdot \sen x \cdot dx = \int (1 - t^2)^2 \cdot (-dt) = \\ &= - \int (1 - 2t^2 + t^4) \cdot dt = -(t - \frac{2t^3}{3} + \frac{t^5}{5}) + C = -t + \frac{2t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \\ &= -\cos x + \frac{2 \cos^3 x}{3} - \frac{\cos^5 x}{5} + C \end{aligned}$$

11.- Calcula por el método más adecuado la siguiente integral: $I = \int \frac{\cos x}{1 - \cos x} \cdot dx$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\cos x}{1 - \cos x} \cdot dx = \int \frac{\cos x (1 + \cos x)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} \cdot dx = \\ &= \int \frac{\cos x (1 + \cos x)}{1 - \cos^2 x} \cdot dx = \int \frac{\cos x + \cos^2 x}{\sen^2 x} dx = \int \frac{\cos x}{\sen^2 x} dx + \int \frac{\cos^2 x}{\sen^2 x} dx = \int \frac{\cos x}{\sen^2 x} dx + \int \frac{1 - \sen^2 x}{\sen^2 x} dx \\ &= \int \frac{\cos x}{\sen^2 x} dx + \int \frac{1}{\sen^2 x} dx - \int dx = I_1 - \ctg x + x + C \end{aligned}$$

Resolvemos ahora la integral $I_1 = \int \frac{\cos x}{\sen^2 x} dx$ haciendo el cambio $\sen x = t$; $\cos x dx = dt$ y entonces $I_1 =$

$$\int \frac{\cos x}{\sen^2 x} dx = \int \frac{dt}{t^2} = \int t^{-2} dt = \frac{t^{-1}}{-1} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{\sen x}$$

12.-Resuelve la integral siguiente: $I = \int \frac{x-3}{x^2+49} dx$

La descomponemos en dos integrales. En la primera podemos buscar en el numerador la derivada del denominador y en la segunda buscamos el arco tangente

$$I = \int \frac{x}{x^2+49} dx - \int \frac{3}{x^2+49} dx = I_1 + I_2$$

$$I_1 = \int \frac{x}{x^2+49} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+49} dx = L(x^2+49)$$

$$I_2 = \int \frac{3}{x^2+49} dx = \int \frac{3/49}{x^2/49+49/49} dx = \frac{3}{49} \int \frac{1}{1+(x/7)^2} dx$$

Haciendo el cambio $x/7=t$ resulta $x=7t$ y por tanto $dx=7dt$ por lo que

$$I_2 = \frac{3}{49} \int \frac{1}{1+t^2} \cdot 7dt = \frac{21}{49} \int \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{3}{7} \operatorname{arctg} t = \frac{3}{7} \operatorname{arctg} \frac{x}{7}$$

13.-Calcula por el método más adecuado la integral siguiente: $\int \frac{(Lx)^3}{x} dx$

$$Lx = t$$

El método más adecuado es el de sustitución o cambio de variable: $\frac{1}{x} dx = dt$

$$\int \frac{(Lx)^3}{x} dx = \int (Lx)^3 \cdot \frac{1}{x} dx = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{(Lx)^4}{4} + C$$

14.-Resuelva la integral $\int (x-1)e^x dx$ por partes

$$\left. \begin{array}{l} u = x-1 \\ dv = e^x dx \end{array} \right\} du = dx ; \quad v = \int e^x dx = e^x ; \quad \int u dv = uv - \int v du$$

$$\int (x-1)e^x dx = (x-1)e^x - \int e^x dx = (x-1)e^x - e^x + C$$

15.-Resuelve la siguiente integral por partes: $I = \int \cos^2 x dx$ por 2 métodos

Método por partes:

$$\left. \begin{array}{l} u = \cos x \\ dv = \cos x dx \end{array} \right\} du = -\operatorname{sen} x dx$$

$$v = \int \cos x dx = \operatorname{sen} x \rightarrow I = \int \cos^2 x dx = \int \cos x \cos x dx = \operatorname{sen} x \cos x + \int \operatorname{sen}^2 x dx$$

$$I = \operatorname{sen} x \cos x + \int (1 - \cos^2 x) dx \rightarrow I = \operatorname{sen} x \cos x + \int dx - \int \cos^2 x dx$$

$$\rightarrow \text{Volvemos a tener la misma: } I = \operatorname{sen} x \cos x + x - I \rightarrow 2I = \operatorname{sen} x \cos x + x \rightarrow I = \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{2} + C$$

Método por descomposición:

Descomponiendo en las relaciones trigonométricas: $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ y $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$$\int \cos^2 x dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \int \frac{1}{2} dx + \frac{1}{2} \int \frac{\cos 2x}{\cos 2x} dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 2x}{2} + k$$

16.-Resuelve la siguiente integral por partes: $\int x \ln(1+x) dx$

$$\left\{ \begin{array}{l} u = L(1+x) \\ dv = x \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} du = \frac{1}{1+x} \\ v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} \int u dv = uv - \int v du$$

$$I = \frac{x^2}{2} L|1+x| - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{1+x} dx = \frac{x^2}{2} L(1+x) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x} dx$$

Dividiendo x^2 entre $x+1$ se obtiene $x-1$ de cociente y 1 de resto, por tanto:

$$I = \frac{x^2}{2} L|1+x| - \frac{1}{2} \int (x-1 + \frac{1}{x+1}) dx \rightarrow I = \frac{x^2}{2} L|1+x| - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} - x + L|x+1| \right) + C$$

17.-Resuelve la integral trigonométrica: $\int \frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x}{\cos x} dx$

$$I = \int \frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x}{\cos x} = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx + \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} dx = I_1 + I_2$$

La primera la ponemos de forma que el numerador sea la derivada del denominador:

$$I_1 = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx = - \int \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} dx = -L|\cos x|$$

Para la segunda hacemos un cambio de variable: $I_2 = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} dx$ $\cos x = t$; $-\operatorname{sen} x dx = dt$

$$I_2 = \int \frac{-dt}{t^2} = - \int t^{-2} dt = - \left(\frac{t^{-1}}{-1} \right) = \frac{1}{t} = \frac{1}{\cos x}$$

18. Resuelve $\int \frac{8}{x^2-2x+3} dx$

Las raíces del denominador son imaginarias. En este caso se procede de la siguiente manera:

$$x^2 - 2x + 3 = (x - \alpha)^2 + \beta; \text{ es decir, } x^2 - 2x + 3 = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta$$

Identificando coeficientes se obtiene: $\alpha=1$; $\beta=2$.

$$\text{Entonces resulta: } \int \frac{8}{x^2-2x+3} dx = \int \frac{8}{(x-1)^2+2} dx = \int \frac{8/2}{\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)^2+1} dx = \int \frac{4}{\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)^2+1} dx$$

Si hacemos el cambio $\frac{x-1}{\sqrt{2}} = t$ se obtiene que $dx = \sqrt{2} dt$ y llevándolo a la integral planteada,

$$\int \frac{8}{x^2-2x+3} dx = \int \frac{4}{t^2+1} \sqrt{2} dt = 4\sqrt{2} \operatorname{arctg} t = 4\sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{\sqrt{2}} + C$$

19. Resuelve $\int \frac{3x-1}{x^2+x} dx$

$$\text{Descomposición en fracciones simples: } \frac{3x-1}{x^2+x} = \frac{3x-1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} = \frac{a(x+1)+bx}{x(x+1)}$$

Igualar numeradores: $3x-1 = a(x+1)+bx$ Las raíces del denominador son 0 y -1 :

Dar valores a la x , preferentemente las raíces: Para $x=-1$, $b=4$ y Para $x=0$, $a=-1$

$$\int \frac{3x-1}{x^2+x} dx = \int \frac{-1}{x} dx + \int \frac{4}{x+1} dx = -L|x| + 4L|x+1| + C$$

$$19.-Resuelve: \int \frac{dx}{x(x-1)^2}$$

Caso denominador con raíces múltiples: $\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$

(Si la raíz múltiple fuese de orden 3, llegaríamos con las fracciones hasta $\frac{D}{(x-1)^3}$)

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx}{x(x-1)^2} \quad (\text{donde hemos realizado la suma indicada})$$

Igualando numeradores: $1 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx$.

Para calcular los valores de A, B y C damos a x los valores de 0, 1 y otro valor cualquiera: 2

De ese modo obtenemos A = 1, B = -1 y C = 1.

Entonces:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x(x-1)^2} dx &= \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{1}{(x-1)^2} dx = L|x| - L|x-1| + \int (x-1)^{-2} dx = \\ &= L|x| - L|x-1| + \frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1} + C = L|x| - L|x-1| - \frac{1}{x-1} + C \end{aligned}$$

$$20.-Resuelve: I = \int \sqrt{25-x^2} dx$$

El cambio a realizar en este tipo de integrales es $x = 5 \operatorname{sen} t$

$$dx = 5 \cos t \cdot dt; \quad \sqrt{25-x^2} = \sqrt{25-(5 \operatorname{sen} t)^2} = \sqrt{25(1-\operatorname{sen}^2 t)} = 5 \cos t$$

Entonces: $I = \int 5 \cos t \cdot 5 \cos t \cdot dt = 25 \int \cos^2 t \cdot dt$. (*)

Hacemos $I_1 = \int \cos^2 t \cdot dt$ y la resolvemos por partes:

$$\cos t = u; \quad \cos t \cdot dt = dv; \quad -\operatorname{sen} t \cdot dt = du; \quad v = \int \cos t \cdot dt = \operatorname{sen} t$$

$$I_1 = \operatorname{sen} t \cdot \cos t + \int \operatorname{sen}^2 t \cdot dt = \operatorname{sen} t \cdot \cos t + \int (1 - \cos^2 t) dt = \operatorname{sen} t \cdot \cos t + \int dt - \int \cos^2 t \cdot dt$$

Es decir, $I_1 = \operatorname{sen} t \cdot \cos t + t - I_1$; y por tanto, $I_1 = \frac{\operatorname{sen} t \cdot \cos t + t}{2}$

Resultado que llevado a (*) nos da $I = \frac{25}{2} (\operatorname{sen} t \cdot \cos t + t)$. Si deshacemos el cambio de variable:

$$\operatorname{sen} t = \frac{x}{5}; \quad \text{y de la relación } \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1, \text{ sale que } \cos t = \frac{\sqrt{25-x^2}}{5}$$

Finalmente queda: $I = \frac{1}{2} x \sqrt{25-x^2} + \frac{25}{2} \operatorname{arcsen} \frac{x}{5} + C$

$$21.-Resuelve: I = \int x \cdot \sqrt{x+5} dx$$

Para eliminar la raíz, hacemos el cambio: $x+5 = t^2 \rightarrow x = t^2 - 5 \rightarrow dx = 2t$

$$I = \int (t^2 - 5) \cdot \sqrt{t^2} \cdot 2t dt = \int (t^2 - 5)t \cdot 2t dt = \int (2t^4 - 10t^2) dt = \frac{2t^5}{5} - \frac{10t^3}{3} + k$$

Luego deshacemos el cambio: $I = \frac{2\sqrt{(x+5)^5}}{5} - \frac{10\sqrt{(x+5)^3}}{3} + k$

$$22.-Resuelve: I = \int \sqrt{1-x^2} dx$$

Cambio trigonométrico: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow 1 - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha \rightarrow x = \sin \alpha \rightarrow dx = \cos \alpha \cdot d\alpha$

$$I = \int \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \cdot \cos \alpha d\alpha = \int \sqrt{\cos^2 \alpha} \cdot \cos \alpha d\alpha = \int \cos^2 \alpha d\alpha = \frac{\alpha}{2} + \frac{\sin 2\alpha}{4} + k \quad (\text{ver ejer. 15})$$

Deshaciendo el cambio: $I = \frac{\operatorname{arc} \sin x}{2} + \frac{\sin(2 \operatorname{arc} \sin x)}{4} + k$

EJERCICIOS PROPUESTOS.

1.- Resolver la integral: $I = \int \frac{1}{\operatorname{sen} x} dx$

(Indicación: Multiplica y divide por $\operatorname{sen} x$)

Sol: $-\frac{1}{2}L(\cos x + 1) + \frac{1}{2}L|\cos x - 1| + C$

2.- Resuelve $I = \int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x}$

(Indicación: multiplica y divide por el conjugado del denominador) Sol: $\operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x} + C$

3.- Halla el valor de la siguiente integral: $I = \int \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}} dx$

Buscando el arco seno resulta: $I = a \cdot \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} + C$

4.- Resuelve la integral siguiente: $I = \int \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt[3]{x+2}} dx$

Se hace el cambio $x + 2 = t^{\operatorname{m.c.m}(\operatorname{indices})} = t^6$ y se obtiene

$$I = 2\sqrt{x+2} - 3\sqrt[3]{x+2} + 6\sqrt[6]{x+2} - 6L|1 + \sqrt[6]{x+2}| + C$$

5.- Resuelve: $I = \int \frac{1}{\sqrt{7+6x-x^2}} dx$

Eliminamos el término en x haciendo el cambio $x=t-b/2$. Después buscamos el arco seno y se obtiene

$$I = \operatorname{arcsen} \frac{x-3}{4} + C$$

6.- Demostrar que $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a}} dx = L|x + \sqrt{x^2-a}| + C$

Sol: Hágase el cambio $\sqrt{x^2-a} = t-x$

7.- Comprueba que $\int \frac{2}{\sqrt{x^2+4}} dx = 2L|x + \sqrt{x^2+4}| + C$

8.- Resuelve: $\int \frac{dx}{x^2+8x+20}$

→ Sol. $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+4}{2}$

9.- Utilizando el cambio de variable $e^x = t$, calcula $\int \frac{e^{2x}-3e^x}{e^x+1} dx$ → Sol. $e^x - 4L(e^x + 1)$

10.- Calcula la siguiente integral: $I = \int \frac{1+\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x \cos x} dx$

(Indicación: Sustituye el 1 por $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$, después la descompones en suma de dos integrales y cada una de ellas se resuelve por cambio de variable) Sol. $-2L(\cos x) + L(\operatorname{sen} x)$

11.- Resuelve: $I = \int \frac{1}{e^x+1} dx$

→ Sol. $I = L(e^x) - L(e^x + 1) + C$

INTEGRAL DEFINIDA - CÁLCULO DE ÁREAS

- *Interpretación geométrica:* $\int_a^b f(x)dx$ es el área de la región limitada por las rectas $x = a$, $x = b$, $y = 0$ (eje de abscisa) y la gráfica de la función $f(x)$.
- *Teorema del valor medio:* $\int_a^b f(x)dx = (b - a) \cdot f(c)$
- *Regla de Barrow:* (integral definida): $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$
- *Cálculo de áreas:*
 - › Para una función con OX: Comprobar si hay corte con OX entre los intervalos de integración dados
 - › Para una función que corta a OX: Buscar los puntos de corte con OX para usarlos como intervalos
 - › Para dos funciones que se cortan: Integrar la resta de las funciones entre los puntos de corte

0.- Calcular la integral $\int_2^3 \frac{x}{x^2-1} dx$

Solución:

$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{x}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)} \rightarrow x = A(x+1) + B(x-1)$$

Para $x = -1 \rightarrow B = 1/2$; Para $x = 1 \rightarrow A = 1/2$

$$\int \frac{x}{x^2-1} dx = \int \frac{\frac{1}{2}}{x-1} dx + \int \frac{\frac{1}{2}}{x+1} dx = \frac{1}{2}L|x-1| + \frac{1}{2}L|x+1| = Ln|\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1}|$$

Por tanto: $\int \frac{x}{x^2-1} dx = [L(\sqrt{x-1}\sqrt{x+1})]_2^3 = Ln\sqrt{8} - Ln\sqrt{3}$

1.- Calcular el área de la región limitada por la gráfica de la función $y = x^3 - 3x^2 - x + 3$, las rectas $x = -2$, $x = 2$ y el eje **OX**

1º- Resolver la ecuación: $y = x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$ (para calcular las abscisa de los puntos de corte de la gráfica de f con el eje OX); $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ y $x_3 = 3$, este último fuera del intervalo $[-2, 2]$, con lo que no se tiene en cuenta.

2º- Calcular la suma de los valores absolutos de las integrales definidas:

$$\left| \int_{-2}^{-1} (x^3 - 3x^2 - x + 3) dx \right| + \left| \int_{-1}^1 (x^3 - 3x^2 - x + 3) dx \right| + \left| \int_1^2 (x^3 - 3x^2 - x + 3) dx \right| =$$

$$\left| \left[\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x \right]_{-2}^{-1} \right| + \left| \left[\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x \right]_{-1}^1 \right| + \left| \left[\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x \right]_1^2 \right| = \left| -\frac{25}{4} \right| + |4| + \left| -\frac{7}{4} \right|$$

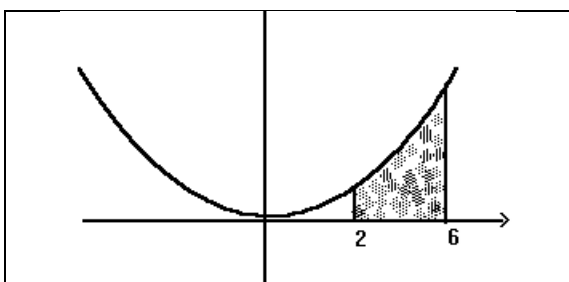
$$= 12u^2.$$

2.- Calcula el área del recinto limitado por la parábola $y=x^2$ y las rectas $y=0$, $x=2$, $x=6$.

Solución:

La recta $y=0$ es el eje x .

El área del recinto limitado por una función $f(x)$, el eje x y la rectas $x=a$, $x=b$, viene dada por el valor absoluto de la integral $I = \int_a^b f(x)dx$ siempre que la función $f(x)$ no corte al eje x en ningún punto interior del intervalo $[a,b]$



$$I = \int_2^6 x^2 dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} \right]_2^6 = \frac{6^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{208}{3}$$

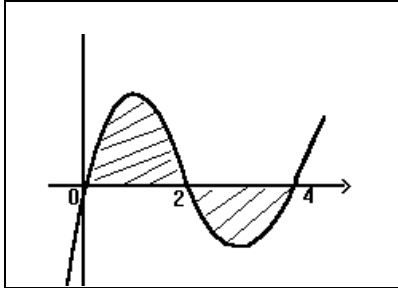
$$\text{Area} = \left| \frac{208}{3} \right| = \frac{208}{3} u^2$$

3.- Calcula el área limitada por la curva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ y el eje x

Calculamos los puntos de corte de la curva con el eje x :

$$x^3 - 6x^2 + 8x = 0 \rightarrow (x^2 - 6x + 8)x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow x = 2; x = 4 \end{cases}$$

Los puntos de corte obtenidos son **0, 2 y 4**, por tanto el área pedida se halla resolviendo las integrales:



$$I_1 = \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x) dx$$

$$I_2 = \int_2^4 (x^3 - 6x^2 + 8x) dx$$

$$I_1 = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2 \right]_0^2 = 4;$$

$$I_2 = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2 \right]_2^4 = -4;$$

$$\text{Area} = |4| + |-4| = 8 \text{ u}^2$$

4.- Calcula el área del recinto limitado por la parábola de ecuación $y = 9 - x^2$ y el eje de abscisas.

Determinamos los puntos de corte de la curva con el eje x : $9 - x^2 = 0 \rightarrow x = 3; x = -3$

$$I = \int_{-3}^3 (9 - x^2) dx = \left[9x - \frac{x^3}{3} \right]_{-3}^3 = (27 - 9) - (-27 + 9) = 36 ; \text{ Area} = |36| = 36 \text{ u}^2$$

5.- Halla el área comprendida entre las parábolas $y = 8 - x^2$; $y = x^2$

Buscamos los puntos de corte de las dos curvas: $8 - x^2 = x^2 \Rightarrow 2x^2 = 8 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

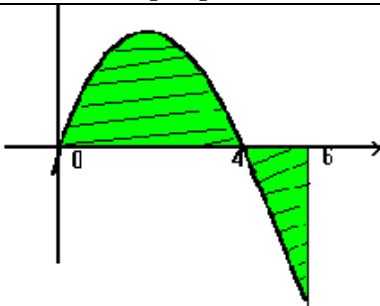
Los límites de integración son: -2 y 2

La función a integrar es la diferencia de las dos funciones: $8 - x^2 - x^2 = 8 - 2x^2$,

por tanto, $I = \int_{-2}^2 (8 - 2x^2) dx = \left[8x - \frac{2x^3}{3} \right]_{-2}^2$

$$I = \left(16 - \frac{16}{3} \right) - \left(-16 - \frac{-16}{3} \right) = 32 - \frac{32}{3} = \frac{64}{3} ; \text{ Area} = \left| \frac{64}{3} \right| \text{ u}^2 = \frac{64}{3} \text{ u}^2$$

6.- Calcula el área del recinto limitado por la parábola $y = 4x - x^2$ y el eje de abscisas en el intervalo $[0, 6]$



Comprobamos si hay puntos de corte dentro del intervalo $[0, 6]$.

$$4x - x^2 = 0 \rightarrow x(4 - x) = 0 \rightarrow x = 0; x = 4$$

Como hay un punto de corte dentro del intervalo $[0, 6]$ que es $x = 4$, las integrales a plantear son:

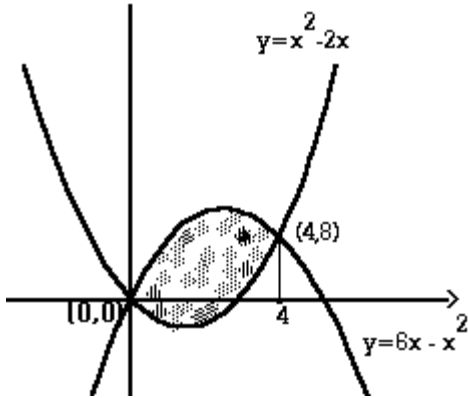
$$I_1 = \int_0^4 (4x - x^2) dx = \left[2x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^4$$

$$I_1 = 32 - \frac{64}{3} = \frac{96 - 64}{3} = \frac{32}{3}$$

$$I_2 = \int_4^6 (4x - x^2) dx \rightarrow I_2 = \left[2x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_4^6 = (64 - 72) - \frac{32}{3} = -\frac{56}{3}$$

$$\rightarrow \text{Area} = \left| \frac{32}{3} \right| + \left| -\frac{56}{3} \right| = \frac{88}{3}; \text{ Area} = \frac{88}{3} \text{ u}^2$$

7.-Halla el área comprendida entre las curvas $y=6x-x^2$; $y=x^2-2x$



Igualamos ambas curvas para encontrar los puntos de intersección:

$$6x - x^2 = x^2 - 2x \Rightarrow 2x^2 - 8x = 0$$

$$2x(x - 4) = 0 \Rightarrow x = 0; \quad x = 4$$

Función a integrar:

$$(x^2 - 2x) - (6x - x^2) = 2x^2 - 8x$$

$$I = \int_0^4 (2x^2 - 8x) dx = \left[\frac{2x^3}{3} - 4x^2 \right]_0^4 = \frac{128 - 192}{3} = -\frac{64}{3} \quad \text{Area} = \left| -\frac{64}{3} \right| = \frac{64}{3} u^2$$

8.-Area del recinto limitado por la parábola $y=3x-x^2$ y la recta $y=x-3$

Solución:

Límites de integración: $3x - x^2 = x - 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

Resolviendo la ecuación se obtiene $x=3$; $x=-1$

Función a integrar: $I = \int_{-1}^3 (x^2 - 2x - 3) dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x \right]_{-1}^3 = -\frac{32}{3}$; $\text{Area} = \left| -\frac{32}{3} \right| = \frac{32}{3} u^2$

9.-Halla el área del recinto limitado por la parábola de ecuación $y=x^2$, la recta de ecuación $y=x+2$ y el eje **OX.**

- Límites de integración: Son los puntos de corte de la parábola y la recta:

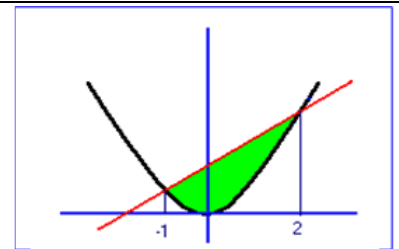
$$x^2 = x + 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

- Función a integrar: $x + 2 - x^2$ (Diferencia de las dos funciones)

resolver la integral: $I = \int_{-1}^2 (x + 2 - x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^2 = \frac{9}{2}$;

$$\text{Area} = \left| \frac{9}{2} \right| u^2 = \frac{9}{2} u^2$$



10.-Calcula el área limitada por la parábola de ecuación $y=2(1-x^2)$ y la recta de ecuación $y = 0$

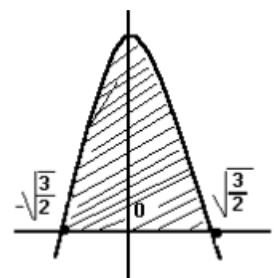
Como la curva es simétrica respecto al eje de ordenadas, podemos

integrar entre 0 y $\sqrt{\frac{3}{2}}$ y multiplicar el resultado por 2.

Límites de integración: $2(1-x^2) = -1 \Rightarrow 3 = 2x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$

Función a integrar: $2(1-x^2) - (-1) = 3 - 2x^2$

$$I = \int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} (3 - 2x^2) dx = \left[3x - \frac{2x^3}{3} \right]_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} = 2\sqrt{\frac{3}{2}} \rightarrow \text{Area} = 4\sqrt{\frac{3}{2}} u^2$$



11.-Calcula el área del recinto limitado por la curva de ecuación $y = 2\sqrt{x}$ y la recta $y = x$.

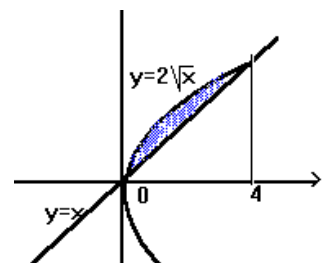
Límites de integración: $2\sqrt{x} = x$

$$2\sqrt{x} = x \Rightarrow 4x = x^2 \Rightarrow x^2 - 4x = 0$$

$$x(x - 4) = 0 \Rightarrow x = 0; \quad x = 4$$

Función a integrar: $2\sqrt{x} - x$

$$I = \int_0^4 (2\sqrt{x} - x) dx = \int_0^4 (2x^{\frac{1}{2}} - x) dx = \left[\frac{4\sqrt{x^3}}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_0^4 = \frac{8}{3}$$
 ; $\text{Area} = \frac{8}{3} u^2$



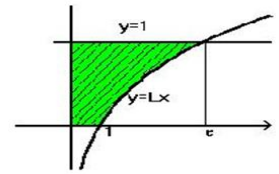
12.-Halla el área limitada por las gráficas de las funciones $y = \text{Ln } x$, $y = 1$ y los ejes de coordenadas.

Área = diferencia entre las integrales $\int_0^e 1 \cdot dx$ y $\int_1^e \text{Ln } x \, dx$

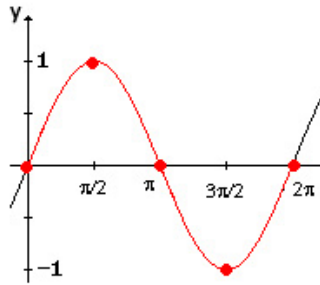
$$I_1 = \int_0^e 1 \cdot dx = [x]_0^e = e$$

$$I_2 = \int_1^e \text{Ln } x \, dx = (\text{por partes}): [x \text{Ln } x - x]_1^e = (e - e) - (0 - 1) = 1$$

$$\text{Area} = I_1 - I_2 = e - 1 \text{ u}^2$$



13.- Halla el área limitada por la función $y = \text{sen } x$, en el primer periodo (entre 0 y 2π)



Comprobamos si hay puntos de corte dentro del intervalo.

Como se anula en: $\text{sen } \pi = 0$ integramos entre $[0, \pi]$ y entre $[\pi, 2\pi]$:

$$\int_0^{2\pi} \text{sen } x \, dx = \int_0^{\pi} \text{sen } x \, dx + \int_{\pi}^{2\pi} \text{sen } x \, dx = [-\text{cos } x]_0^{\pi} + [-\text{cos } x]_{\pi}^{2\pi}$$

Como el recinto está compuesto por dos áreas iguales:

$$A = 2 \cdot [-\text{cos } x]_0^{\pi} = 2 \cdot |-\text{cos } \pi + \text{cos } 0| = 2(1 + 1) = 4 \text{ u}^2$$

14.- Halla el área limitada por la parábola $y = x^2$, la recta de ecuación $y = -x + 2$ y el eje OX

Punto de corte de la parábola y el eje OX:

$$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

Punto de corte de la recta y el eje =OX:

$$-x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

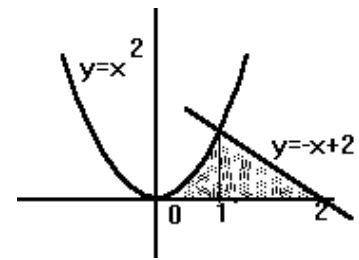
Punto de corte de la parábola y la recta:

$$x^2 = -x + 2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ -2 \end{matrix} \right.$$

La solución $x = -2$ está fuera del eje OX, por tanto, sólo hemos de considerar el valor $x = 1$

Observando el dibujo, hemos de resolver las integrales siguientes:

$$I_1 = \int_0^1 x^2 \, dx = \frac{1}{3}; \quad I_2 = \int_1^2 (-x + 2) \, dx = \frac{1}{2}; \quad \text{Area} = \left| \frac{1}{3} \right| + \left| \frac{1}{2} \right| = \frac{5}{6} \text{ u}^2$$

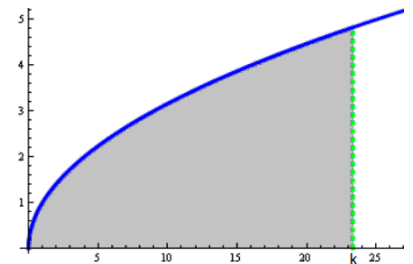


15.- Determina el valor de k de forma que l'àrea entre la funció $f(x) = \sqrt{x}$, la recta vertical $x = k$ i els eixos de coordenades sigui igual a 75.2

$$\int \sqrt{x} \, dx = \int x^{1/2} \, dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2x^{3/2}}{3} + C$$

$$\text{Àrea} = \int_0^k \sqrt{x} \, dx = \frac{2k^{3/2}}{3} - \frac{2 \cdot 0^{3/2}}{3} = \frac{2k^{3/2}}{3}$$

$$\frac{2k^{3/2}}{3} = 75.2 \Rightarrow k^{3/2} = \frac{3 \cdot 75.2}{2} \Rightarrow k^{3/2} = 112.8 \Rightarrow k = 112.8^{2/3} \cong 23.3457$$

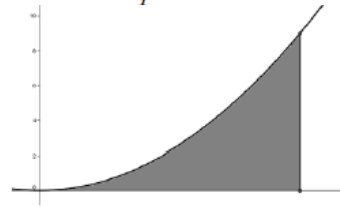


16. Determina el valor de p positiu per al qual la gràfica de $f(x) = x^2$, la seva recta tangent pel punt d'abscissa $x = p$ i l'eix d'abscisses determinen un recinte d'àrea igual a $27/12$.

recta tangent: $a = f'(p) = 2p$, $b = f(p) - a \cdot p = p^2 - 2p \cdot p = -p^2$, $y = ax + b = 2px - p^2$
 talla l'eix X al punt $2px - p^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{p^2}{2p} = \frac{p}{2}$, és a dir, al punt mig del segment.

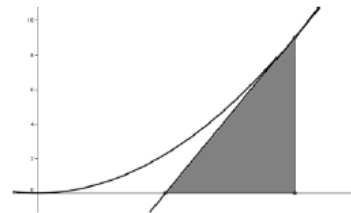
$$A_1 = \int_0^p x^2 dx = F(p) - F(0) = \frac{p^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{p^3}{3}$$

$$F(x) = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$$



L'àrea B és l'àrea d'un triangle que té base $p/2$ i altura $f(p) = p^2$, per tant no cal fer cap integral, apliquem la fórmula de l'àrea del triangle:

$$B = \frac{p/2 \cdot p^2}{2} = \frac{p^3}{4}$$



$$\text{Finalment, Àrea} = A - B = \frac{p^3}{3} - \frac{p^3}{4} = \frac{4p^3 - 3p^3}{12} = \frac{p^3}{12} = \frac{27}{12} \Leftrightarrow p^3 = 27 \Leftrightarrow p = 3$$

(suposem $p > 0$)

17. Calcula l'àrea determinada per les gràfiques de $f(x) = \sin x$ i $g(x) = x^2$.
 (Observació: L'equació $\sin x = x^2$ només té com a solució $x = 0$ i $x = 0.8767$)

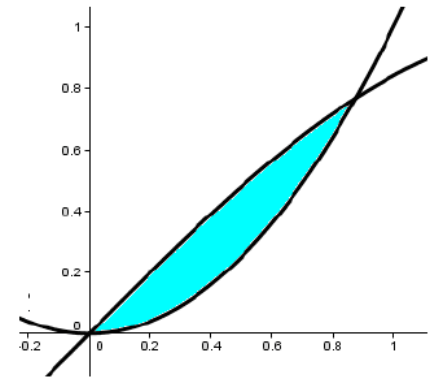
$$A = \int_0^{0.8767} \sin x - x^2 dx = F(0.8767) - F(0) \text{ on } F(x) = \int \sin x - x^2 dx$$

$$F(x) = \int \sin x - x^2 dx = \int \sin x dx - \int x^2 dx = -\cos x - \frac{x^3}{3} + C$$

$$F(0.8767) = -\cos(0.8767) - \frac{0.8767^3}{3} \cong -0.8643$$

$$F(0) = -\cos(0) - \frac{0^3}{3} = -1$$

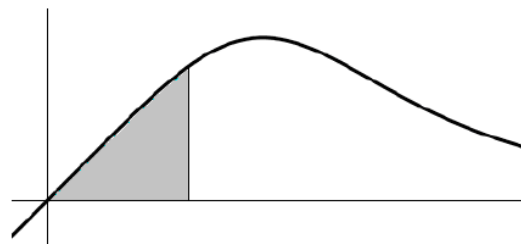
$$A = \int_0^{0.8767} \sin x - x^2 dx = F(0.8767) - F(0) \cong -0.8643 - (-1) \cong 0.1357$$



18. Calculeu l'àrea entre la corba $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ i les rectes $x=0$, $x=1/2$ i l'eix OX.

$$A = \int_0^{1/2} \frac{x}{1+x^4} dx = F(1/2) - F(0)$$

Fem un canvi de variable $u = x^2 \rightarrow u' = 2x$



$$F(x) = \int \frac{x}{1+x^4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+u^2} 2x dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+u^2} du = \frac{1}{2} \arctan(u) + C = \frac{1}{2} \arctan(x^2) + C$$

$$A = \int_0^{1/2} \frac{x}{1+x^4} dx = F(1/2) - F(0) \cong 0.122489 - 0 \cong 0.122489$$

PAU Sept 2017. Sigui la funció $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$

a) Calculeu una primitiva de la funció $f(x)$.

b) Calculeu l'àrea limitada per la funció $f(x)$ i l'eix de les abscisses entre les abscisses $x=0$ i $x = \pi/4$

a) canvi de variable $\cos x = t \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{-dt}{t^2} = -\int t^{-2} dt = \frac{1}{t} + C = \frac{1}{\cos x} + C$

b) positiva l'àrea demanada

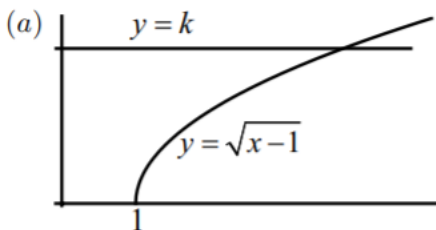
$$\text{Àrea} = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \left[\frac{1}{\cos x} \right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{4}} - \frac{1}{\cos 0} = \frac{1}{\sqrt{2}/2} - 1 = \frac{2}{\sqrt{2}} - 1 = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}-2}{2} = 0,414 \text{ u}^2$$

PAU Jun 2013.

Donada la funció $f(x) = \sqrt{x-1}$ i la recta horitzontal $y = k$, amb $k > 0, 1$

a) Feu un esbós del recinte limitat per les gràfiques de la funció i la recta, i els eixos de coordenades.

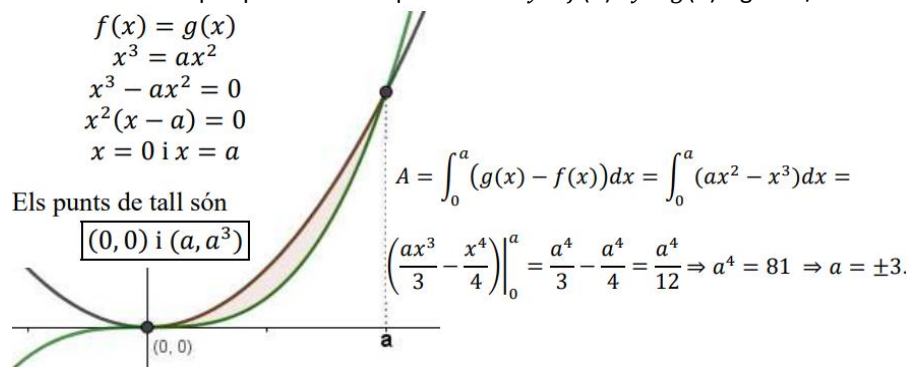
b) Trobeu el valor de k sabent que l'àrea d'aquest recinte és igual a $14/3$.



(b) punt de tall $\sqrt{x-1} = k \implies x = k^2 + 1$.

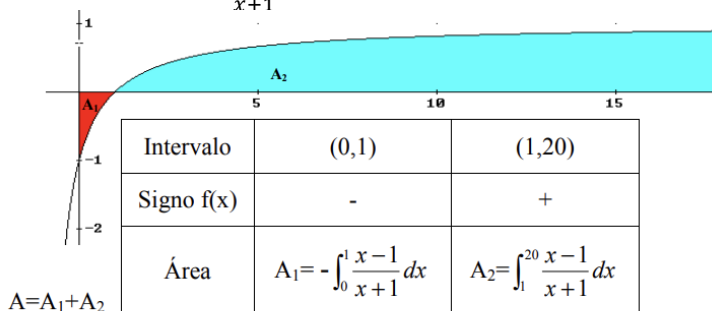
$$A = k(k^2 + 1) - \int_1^{k^2+1} (x-1)^{1/2} dx = k^3 + k - \left[\frac{(x-1)^{3/2}}{3/2} \right]_1^{k^2+1} = k^3 + k - \frac{2k^3}{3} = \frac{k^3}{3} + k$$

PAU 2020 Siguien les funcions $f(x) = x^3$ i $g(x) = a \cdot x^2$, en què a és un nombre real positiu. a) Trobeu, en funció del paràmetre a , els punts de tall entre les dues corbes $y = f(x)$ i $y = g(x)$ i feu un esbós de la regió limitada per les dues gràfiques. b) Calculeu el valor de a perquè l'àrea compresa entre $y = f(x)$ i $y = g(x)$ sigui $27/4 \text{ u}^2$



PAU 2006. Calcúlese el área de la región limitada por $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ y las rectas $x=0, x= 20, y = 0$

$(x-1):(x+1) = 1 \text{ residuo } -2 \rightarrow 1 - \frac{2}{x+1}$



$A_1 = -\int_0^1 \frac{x-1}{x+1} dx = -[x - 2\ln(x+1)]_0^1 = -[(1 - 2\ln(2)) - (0 - 2\ln(1))] = -(1 - 2\ln(2)) \approx 0,37 \cdot \text{u}^2$

$A_2 = \int_1^{20} \frac{x-1}{x+1} dx = [x - 2\ln(x+1)]_1^{20} = (20 - 2\ln(21)) - (1 - 2\ln(2)) = 19 - 2\ln(21) + 2\ln(2) \cdot \text{u}^2 \approx 14,3 \text{ u}^2$

$\int \frac{x-1}{x+1} dx = \int 1 dx - 2 \int \frac{dx}{x+1} = x - 2\ln(x+1) \quad A = 18 - 2\ln(21) + 4\ln(2) \approx 14,67 \cdot \text{u}^2$

CÁLCULO DEL VOLUMEN DE UN CUERPO

Que se genera al girar la gráfica de la función $y = f(x)$ entre los puntos de abscisas a y b alrededor de un eje:

Alrededor del eje de abscisas:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Para calcular el volumen del cuerpo que se genera al girar la gráfica de la función $y = x\sqrt{x+1}$, entre los puntos de corte con el eje OX, alrededor de este eje, calculamos la integral definida:

$V = \pi \int_{-1}^0 (x\sqrt{1+x})^2 dx$ ($x = -1$ y $x = 0$ son las soluciones de la ecuación $x\sqrt{x+1} = 0$, abscisas de los puntos de corte de la gráfica de f con el eje OX).

$$V = \pi \int_{-1}^0 (x\sqrt{1+x})^2 dx = \pi \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right]_{-1}^0 = \left[0 - \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) \right] = \frac{\pi}{12} u^3.$$

Alrededor del eje de ordenadas:

$$V = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot x \cdot dx.$$

f-3-2-1) Ejemplo: para calcular el volumen del cuerpo que se genera al girar la gráfica de la función $y = x\sqrt{x+1}$, entre los puntos de corte con el eje OX, alrededor del eje de ordenadas, calculamos la integral definida:

$$V = 2\pi \int_{-1}^0 x(x\sqrt{1+x}) dx = 2\pi \int_{-1}^0 x^2\sqrt{1+x} dx.$$

Aplicando el cambio de variable $1+x = t^2$, se tiene: $x = t^2 - 1$, $dx = 2tdt$; y los límites de integración:

si $x = -1$, $t = 0$ y

si $x = 0$, $t = 1$.

$$V = 2\pi \int_0^1 (t^2 - 1)^2 \cdot t \cdot 2tdt = 2\pi \int_0^1 (2t^6 - 4t^4 + 2t^2) dt = 2\pi \left[\frac{2t^7}{7} - \frac{4t^5}{5} + \frac{2t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{32}{105} \pi u^3.$$