

Spektroskopie und Streuung

TU München - Sommersemester 08

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	1
1 Experimentelle Methoden der Atomphysik	2
1.1 Spektroskopische Methoden	2
1.2 Messung von integralen und differentiellen Wirkungsquerschnitten	2
2 Streuung	2
3 Spektroskopie	4
3.1 Fourierspektroskopie	5
3.2 Dopplerfreie Sättigungsspektroskopie	6
3.3 Dopplerfreie Zweiphotonenspektroskopie	8
4 Linienverbreiterung	8
5 Übergangswahrscheinlichkeiten	10
6 Absorption	12

1 Experimentelle Methoden der Atomphysik

Wesentliche Ziele der experimentellen Atomphysik:

- Aufklärung der Struktur von Atomen und Molekülen
- Bestimmung der Wechselwirkung zwischen den Atomen
- Messung von Bindungs- und Ionisationsenergien
- Messung elektrischen und magnetischen Momente
- Messung der molekularen Dynamik (Änderung der Molekülstruktur)

1.1 Spektroskopische Methoden

Absorption und Emission elektromagnetischer Strahlung gibt Aufschluss über die Energieniveaus in den Atomen. Daraus lässt sich auf die Atom- und Molekülstruktur schliessen. Die Intensität von Emissionslinien lässt Rückschlüsse auf die Übergangswahrscheinlichkeiten zu (Symmetrien der Zustände). Aus den Linienbreiten bei der Absorptions- und Emissionsspektroskopie lassen sich die Lebensdauern der Zustände bestimmen. Messung der Druckverbreiterung gibt Aufschluss über die Wechselwirkungspotenziale.

1.2 Messung von integralen und differentiellen Wirkungsquerschnitten

Messung von elastischen Streuquerschnitten gibt Informationen über die Wechselwirkungspotenziale. Messung von inelastischen Streuquerschnitten ermöglicht es auf die Primärprozesse bei chemischen Reaktionen zu schliessen.

2 Streuung

Streuversuche geben Aufschluss über die Ladungsverteilung innerhalb von Atomen, sowie über Wechselwirkungspotenziale zwischen den Atomen. Wichtige Messgrößen sind dabei der integrale Streuquerschnitt σ (Wirkungsquerschnitt) und der differentielle Streuquerschnitt $d\sigma/d\Omega$. Jedem Streuzentrum der Sorte B wird eine Fläche $\sigma = \pi r^2$ zugeordnet, die den Wechselwirkungsbereich zwischen dem Strahlteilchen (A) und dem Targetteilchen (B) definiert (Wirkungsquerschnitt). Eine messbare Ablenkung der einfallenden Teilchen findet nur in diesem Wechselwirkungsbereich statt. Die Anzahl der abgelenkten Teilchen der Sorte A $d\dot{N}_A$ pro Zeit- und Flächeneinheit hängt wie folgt von der Teilchenflussdichte \dot{N}_A , dem Wirkungsquerschnitt σ , der Teilchenzahldichte im Target n_B und dem Weegelement dx ab:

$$d\dot{N}_A = -\dot{N}_A \cdot \underbrace{\sigma \cdot n_B \cdot dx}_{\frac{dN_B/F}{F_S/F}} \quad (1)$$

$$\rightarrow \dot{N}_A = \dot{N}_0 \cdot e^{-n_B \sigma x} \quad (2)$$

F_S/F ist dabei das Flächenverhältnis zwischen der Fläche aller Streuzentren zur gesamten bestrahlten Fläche. Allgemeiner wird der integrale Wirkungsquerschnitt σ definiert als:

$$\sigma = \frac{\text{Zahl der Reaktionen in der Zeit } dt \text{ } (d\dot{N}_A \cdot F)}{\text{Stromdichte } \dot{N}_A \cdot \text{Zahl der Streuzentren } n_B \cdot F \cdot dx} \quad (3)$$

Diese Definition ist unabhängig von der Vorstellung einer kleinen Fläche um die Streuzentren und kann daher auch in der Quantenmechanik verwendet werden. Die Definition des differentiellen Wirkungsquerschnitts lautet wie folgt:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_\theta = \frac{\text{Zahl der in das Raumwinkelement } d\Omega \text{ gestreuten Teilchen/(s und Streuzentrum)}}{\text{Stromdichte } \dot{N}_A \text{ der einfallenden Teilchen der Sorte A}} \quad (4)$$

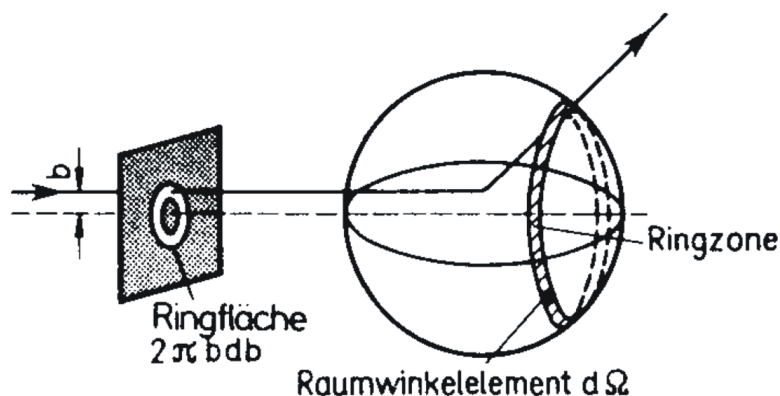


Abbildung 1: Zur Bestimmung des differentiellen Streuquerschnitts.

Er ist eine Spezifizierung des integralen Wirkungsquerschnitts bezogen auf die Streuung in ein Raumwinkelement $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$. $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_\theta$ ist in aller Regel eine Funktion des Streuwinkels θ . Um eine Verbindung des Streuwinkels θ mit der mikroskopischen Größe des Stossparameters b herzustellen wird zunächst von einem axialsymmetrischen System ausgegangen (z.B. keine Spin Effekte). Der einfallende Teilchenstrom/s durch eine Ringfläche $2\pi \cdot bdb$ (siehe Abb. 1) ist dann gleich $\dot{N}_A \cdot 2\pi \cdot bdb$. Dieser muss nach Definition 4 identisch sein mit dem ausfallenden Teilchenstrom/s unter dem Winkel θ in das Raumwinkelement $dR = 2\pi \cdot \sin\theta d\theta$: $j dR \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_\theta = j \cdot 2\pi \cdot \sin\theta d\theta \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_\theta$. Daraus folgt:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_\theta = \frac{b}{\sin\theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right| \quad (5)$$

(Der Wirkungsquerschnitt darf nie negativ werden, daher die Betragsstriche)

In Abb. 2 ist ein schematischer Aufbau zur Messung von differentiellen Wirkungsquerschnitten abgebildet.

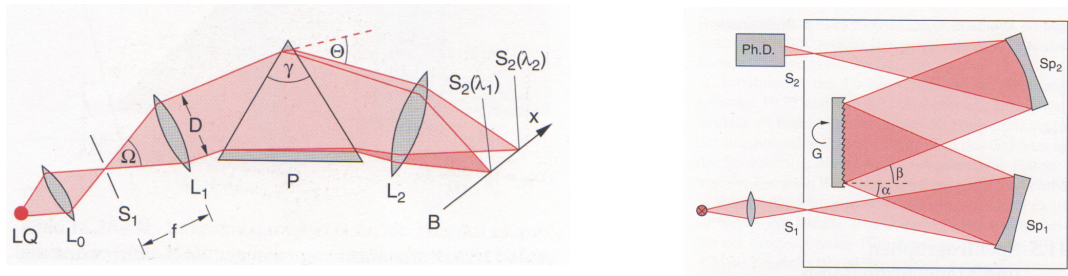


Abbildung 3: Prismenspektrograph (links) und Gittermonochromator (rechts). Bilder aus Demtröder Band 3.

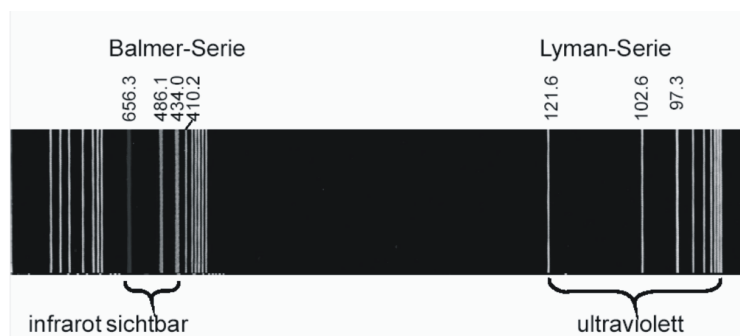


Abbildung 4: Wasserstoff Linienspektrum

$$\bar{\nu} = R_y \cdot \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \quad (9)$$

R_y ist die Rydbergkonstante und hat den Wert $R_y = 109678 \text{ cm}^{-1}$. Aus der empirisch bestimmten Formel für die gemessenen Spektren hat sich das Bohrsche Atommodell zur Beschreibung eben dieser entwickelt (Quantisierung des Drehimpulses).

Die Absorptionsspektroskopie ist wesentliche Grundlage zur Bestimmung der Zusammensetzung von Sternen (siehe Abb. 5).

3.1 Fourierspektroskopie

Bei der Fourierspektroskopie wird im wesentlichen ein Michelson-Interferometer mit variablem Gangunterschied verwendet (siehe Abb. 6). Die Feldstärke am Detektor pro Strahl hat folgende Form

$$E(s, t) = \frac{1}{2} E_0 \cdot e^{i(\omega \cdot t + k \cdot s)} \quad (10)$$

mit der Wellenzahl $k = \omega/c$. Für den einen Arm des Spektrometers kann s auf 0 gesetzt werden, für den anderen Arm gilt $s = v \cdot t$. Die gemessene Intensität $I(s, t)$ am Detektor ist

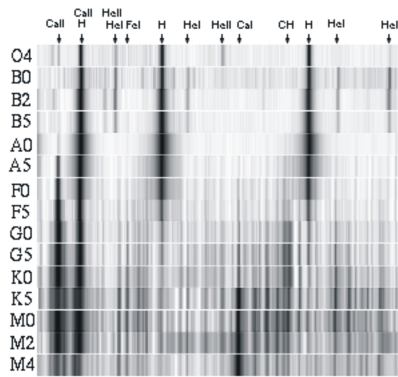


Abbildung 5: Spektren und Klassifikation von Sternen.

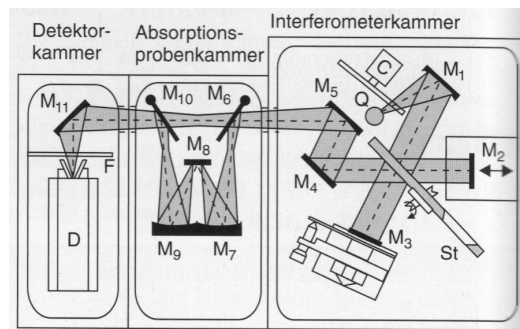


Abbildung 6: Prinzip eines Fourier-Spektrometers. Bild aus Demtröder Experimentalphysik 3.

proportional zum Betragsquadrat der Feldstärke:

$$I(s, t) = c \cdot \epsilon_0 \cdot |E(s, t)|^2 = c \cdot \epsilon_0 \cdot \left| \frac{1}{2} E_0 \cdot e^{i(\omega \cdot t)} + \frac{1}{2} E_0 \cdot e^{i(\omega \cdot t + k \cdot v \cdot t)} \right|^2 \quad (11)$$

$$= \frac{1}{4} E_0^2 \cdot c \cdot \epsilon_0 \cdot (1 + \cos(k \cdot v \cdot t)) \quad (12)$$

$$= \frac{1}{4} E_0^2 \cdot c \cdot \epsilon_0 \cdot \left(1 + \cos\left(\frac{v}{c} \cdot \omega \cdot t\right) \right) \quad (13)$$

D.h. die hochfrequente und nicht messbare Strahlung wird um den Faktor v/c heruntertransformiert. Durch eine Fourieranalyse des gemessenen Intensitätsspektrum können die Frequenzen ω bestimmt werden.

3.2 Dopplerfreie Sättigungsspektroskopie

Um die natürliche Linienbreite zu messen ist es nötig die Dopplerverbreiterung (siehe Abschnitt 4), welche in der Regel um einige Größenordnungen breiter ist als die natürliche Linienbreite, zu umgehen. Bei der dopplerfreien Sättigungsspektroskopie wird ein Pumplaser

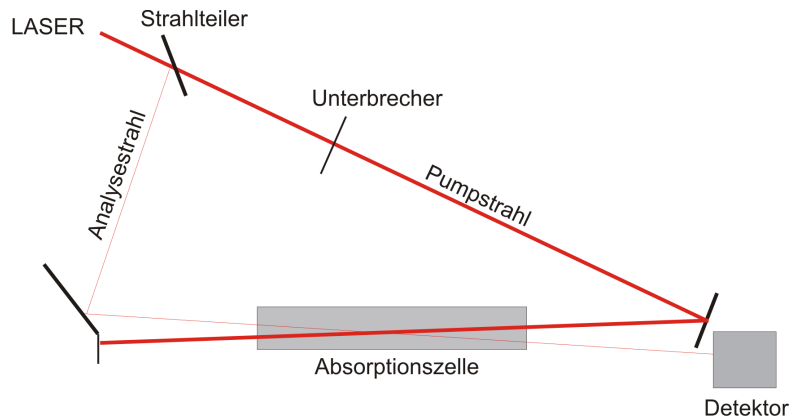


Abbildung 7: Schematischer Aufbau zur Sättigungsspektroskopie.

(Sättigungslaser) mit hoher Intensität sowie ein Analyselaser mit geringer Intensität verwendet (siehe Abb. 7). Sie durchlaufen eine Absorptionszelle in entgegengesetzten Richtungen fast parallel zueinander. Die Photonen der Laser mit der gleichen Frequenz ω werden in der Nähe der Resonanzfrequenz ω_0 absorbiert, wenn die Bedingung $\omega = \omega_0 \cdot (1 + k \cdot v_z)$ erfüllt ist. Da für die beiden entgegenlaufenden Laser gilt $k_1 = -k_2$ ist für Atome der Geschwindigkeit v_z die Bedingung nie für beide Laser gleichzeitig erfüllt. Die Absorption der beiden Laser ist praktisch unabhängig voneinander und dopplerverbreitert. Dies ändert sich, wenn $v_z = 0$ ist, d.h. für die Atome, die keine Geschwindigkeitskomponente parallel zu den Lasern aufweisen. Bei der Resonanzfrequenz $\omega = \omega_0$ bringt der Pumplaser bringt alle Atome mit $v_z = 0$ auf das höhere Energienivea. Der Analyselaser kann dann bei dieser Frequenz nahezu ungehindert die Absorptionszelle durchlaufen, es zeigt sich ein Einbruch in der Absorption. Aus der Differenz zwischen den Absorptionskurven mit und ohne Pumplaser kann die natürliche Linienbreite extrahiert werden (siehe Abb. 8).

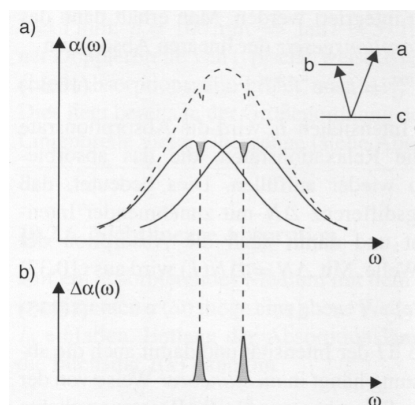


Abbildung 8: Lamb-Dips von zwei benachbarten Moleküllinien. Bild aus Demtröder Experimentalphysik 3.

3.3 Dopplerfreie Zweiphotonenspektroskopie

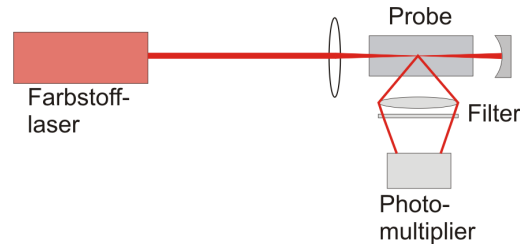


Abbildung 9: Schematischer Versuchsaufbau zur dopplerfreien Zweiphotonenspektroskopie.

Hat man durchstimmbare Laser mit hoher Intensität zur Verfügung kann man eine dopplerfreie Zweiphotonenspektroskopie durchführen. Hierbei werden zwei Laser mit der gleichen Frequenz ω und gleichen Intensität ebenfalls antiparallel zueinander auf eine Probe fokussiert. Um einen Übergang vom Energieniveau E_i in das höher liegende Energieniveau E_f zu erreichen muss bei der Absorption von gleichzeitig zwei Photonen die Bedingung gelten $E_f - E_i = \hbar(\omega_1 + \omega_2)$. Dabei sind die Frequenzen $\omega_1 = \omega - v_z \cdot k$ und $\omega_2 = \omega + v_z \cdot k$, da die Laser antiparallel zueinander laufen und damit gilt $k_1 = -k_2$. Wenn $\omega = (1/2) \cdot \omega_0$ ist gilt entsprechend

$$E_f - E_i = \hbar(\omega_1 - \omega_2) = \hbar((1/2) \cdot \omega_0 - v_z \cdot k + (1/2) \cdot \omega_0 + v_z \cdot k) = \hbar\omega_0 \quad (14)$$

was zu einem Übergang $E_i \rightarrow E_f$ führt. Das Fluoreszenzlicht kann dann durch einen separaten Detektor (siehe Abb. 9) gemessen werden.

4 Linienverbreiterung

Es zeigt sich bei spektroskopischen Untersuchungen auch, dass die Emissions- und Absorptionslinien nicht beliebig scharf sind. Ursachen hierfür sind:

- Die Energieniveaus der Atome sind nicht beliebig scharf. Auf Grund der endlichen Lebensdauer Δt der Zustände führt die Heisenbergsche Unschärferelation $\Delta E \cdot \Delta t \geq 2\pi\hbar$ zu einer Energieverbreiterung bzw. Frequenzverbreiterung $\Delta\nu = \Delta E/h = 1/(2\pi\tau_i)$ (τ_i ist die Lebensdauer des Zustandes). Bei einem Übergang von einem Niveau E_i in ein Niveau E_k tragen bei Zustandsbreiten zur Verbreiterung des Linienspektrums bei:
- Die thermische Bewegung der Atome führt zu einer Dopplerverbreiterung. Die emittierte Frequenz ω_e eines sich mit der Geschwindigkeit \vec{v} bewegendes Atomes ändert sich im Vergleich zur Eigenfrequenz ω_0 zu

$$\omega_e = \omega_0 + \vec{k} \cdot \vec{v} \quad \text{mit} \quad |\vec{k}| = k = 2\pi/\lambda. \quad (15)$$

Soll die Eigenfrequenz ω_0 im bewegten System absorbiert werden gilt die Bedingung für die absorbierende Frequenz ω_a :

$$\omega_a = \omega_0 + \vec{k} \cdot \vec{v} \quad \text{für } \vec{k} = (0, 0, k_z) \text{ gilt } \omega_a = \omega_0 + k_z \cdot v_z = \omega_0(1 + v_z/c) \quad (16)$$

$$\rightarrow v_z = c(\omega_a/\omega_0 - 1) \text{ und das Differential } dv_z = (c/\omega_0)d\omega \quad (17)$$

Für die Berechnung der mittleren Verbreiterung der Emissions- bzw. Absorptionsfrequenzen muss zunächst die Geschwindigkeitsverteilung der Atome bestimmt werden. Diese ist im thermischen Gleichgewicht Maxwellverteilt:

$$n_i(v_z)dv_z = \frac{N_i}{v_w \cdot \sqrt{\pi}} e^{-(v_z/v_w)^2} dv_z \quad \text{mit } v_w = (2k_B T/m)^{1/2} \quad (18)$$

(v_w ist die wahrscheinlichste Geschwindigkeit, $N_i = \int_{-\infty}^{+\infty} n_i(v_z)dv_z$ ist die Gesamtanzahl der Atome im Zustand E_i pro Volumeneinheit) Mit der Ersetzung von $\omega = \omega_a$ durch v_z erhält man:

$$n_i(\omega)d\omega = \frac{c \cdot N_i}{\omega_0 \cdot v_w \cdot \sqrt{\pi}} e^{-[c(\omega-\omega_0)/(\omega_0 \cdot v_w)]^2} d\omega \quad (19)$$

Die Strahlungsleistung $P(\omega)$ ist proportional zur Anzahldichte $n_i(\omega)$:

$$P(\omega) = P(\omega_0) \cdot e^{-[c(\omega-\omega_0)/(\omega_0 \cdot v_w)]^2} \quad (20)$$

- Durch Wechselwirkung zwischen den Atomen, wie z.B. bei Stößen, kommt es zu einer Veränderung der Energieniveaus. Lebensdauer angeregter Zustände:

$$N_i(t) = N_i(0) \cdot e^{-A_i \cdot t} \text{ mit } A_i = \sum_j A_{ij} \quad (21)$$

(A_{ij} bezeichnet die Wahrscheinlichkeit, dass ein Atom im Zustand i in einen tiefer liegenden Zustand j übergeht.) $\tau_i = 1/A_i$ ist die mittlere Lebensdauer des Zustandes, nach dieser Zeit sind noch $1/e$ Atome im Zustand i . Zusätzliche Entvölkerung des Niveaus E_i z.B. durch inelastische Stossprozesse, mit der Wahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit R_i einen Übergang herbeizuführen. Dies führt zu einer effektiven Lebensdauer

$$\tau_i^{eff} = \frac{1}{A_i + R_i} \quad (22)$$

R_i kann bei inelastischen Stossprozessen durch den inelastischen Wirkungsquerschnitt σ_i^{inel} , die Teilchenzahldichte n_B des Stosspartners B sowie die mittlere Relativgeschwindigkeit der beiden Atome

$$\bar{v}_{AB} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi\mu}} \text{ mit der reduzierten Masse } \mu = \frac{M_A \cdot M_B}{M_A + M_B} \quad (23)$$

$$R_i = n_B \cdot \bar{v}_{AB} \cdot \sigma_i^{inel} \quad (24)$$

Hinweis für die Bestimmung der mittleren Geschwindigkeit. Diese ist allgemein gegeben durch:

$$\bar{v} = \int_0^{\infty} v \cdot F(v) dv \text{ mit der Verteilungsfunktion der Geschwindigkeiten } F(v) \quad (25)$$

$F(v)$ ist im thermischen Gleichgewicht Maxwell-Boltzmann verteilt:

$$F(v) = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \cdot \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right) \quad (26)$$

Durch Integration erhält man dann das obige Ergebniss für die mittlere Geschwindigkeit. Mit 22 erhält man

$$\tau_i^{eff} = \frac{1}{\tau_i^{spontan}} + n_B \cdot \bar{v}_{AB} \cdot \sigma_i^{inel} \quad (27)$$

Was schliesslich mit der Ersetzung der mittleren Geschwindigkeit aus 23 und der Formel für die allgemeine Gasgleichung

$$p \cdot V = N \cdot k_B \cdot T \quad (28)$$

$$\rightarrow n_B = \frac{N}{V} = \frac{p}{k_B \cdot T} \quad (29)$$

zu folgendem Zusammenhang führt:

$$\frac{1}{\tau_i^{eff}} = \frac{1}{\tau_i^{spontan}} + \sigma_i^{inel} \cdot \sqrt{\frac{8}{\pi \mu k T}} \cdot p \quad (30)$$

Man sieht, dass die effektive Lebensdauer linear mit dem Druck p abnimmt.

5 Übergangswahrscheinlichkeiten

Ein atomares System mit zwei Energieniveaus E_i und E_k (Abb. 10) befindet sich in einem Strahlungsfeld mit der spektralen Energiedichte $\omega_\nu(\nu)$. Die Wahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit W_{ki} für einen Absorptionsübergang ($k \rightarrow i$) ist proportional zu $\omega_\nu(\nu)$:

$$W_{ki} = B_{ki} \cdot \omega_\nu(\nu) \quad (31)$$

Wobei die Frequenz ν als ν_{ki} aufgefasst werden muss. Die spektrale Energiedichte $\omega_\nu(\nu)$ ist definiert durch die Anzahl der Photonen pro Volumen und Frequenzbereich $\Delta\nu = 1/s$ multipliziert mit der entsprechenden Photonenenergie:

$$\omega_\nu(\nu) = n(\nu) \cdot h \cdot \nu \quad (32)$$

Die Wahrscheinlichkeit W_{ik} für induzierte Emission, also eine Emission eines Photons der Energie $h \cdot \nu$ nach Einstrahlung eines Photons der gleichen Energie, ist ebenfalls proportional zur spektralen Energiedichte:

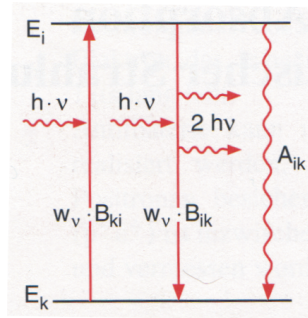


Abbildung 10: Absorption, induzierte Emission und spontane Emission von Photonen. Bild aus Demtröder Experimentalphysik 3.

$$W_{ik} = B_{ik} \cdot \omega_\nu(\nu) \quad (33)$$

Die Wahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit für eine spontane Emission ist unabhängig vom äusseren Strahlungsfeld:

$$W_{ik}^s = A_{ik} \quad (34)$$

Im thermischen Gleichgewicht ist die Absorptionsrate gleich der Emissionsrate und es gilt:

$$\underbrace{(A_{ik} + B_{ik} \cdot \omega_\nu(\nu)) \cdot N_i}_{\text{Emissionsrate}} = \underbrace{B_{ki} \cdot \omega_\nu(\nu) \cdot N_k}_{\text{Absorptionsrate}} \quad (35)$$

Mit N_i und N_k als die Besetzungszahlen für die beiden Energieniveaus E_i und E_k . N_i und N_k sind im thermischen Gleichgewicht durch die Boltzmann-Verteilung gegeben

$$\frac{N_i}{N_k} = \frac{g_i}{g_k} e^{-(E_i - E_k)/kT} = \frac{g_i}{g_k} e^{-h\nu/kT} \quad (36)$$

Die Faktoren g_i und g_k sind die statistischen Gewichte für die beiden Niveaus. Sie geben den Entartungsgrad des Niveau an, der mit dem Gesamtdrehimpuls J gegeben ist zu $g = 2J + 1$. Je höher die Entartung, also die Anzahl von gleichen Energiezuständen für verschiedene Quantenzahlen, desto grösser ist dann auch die entsprechende Besetzungsdichte.

Zusammenfassend lässt sich aus den Gleichungen 35 und 36 nach der spektralen Energiedichte auflösen:

$$\omega_\nu(\nu) = \frac{A_{ik}/B_{ik}}{(g_i/g_k)(B_{ik}/B_{ki}(e^{h\nu/kT} - 1))} \quad (37)$$

Im direkten Vergleich mit dem Planckschen Strahlungsgesetz 41 können die Koeffizienten bestimmt werden. Es müssen für alle Temperaturen T und Frequenzen ν beide Gleichungen gelten.

$$B_{ik} = \frac{g_k}{g_i} B_{ki} \quad (38)$$

$$A_{ik} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} B_{ik} \quad (39)$$

Die spektrale Modendichte, also die Anzahl der Moden pro Volumen und Frequenzbereich ist gegeben durch (Demtröder, Band 2 Kapitel 7):

$$n(\nu)d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} d\nu \quad (40)$$

Das Plancksche Strahlungsgesetz lautet:

$$\rho(\nu, T)d\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/(kT)} - 1} d\nu \quad (41)$$

Wenn man 39 umschreibt erhält man:

$$\frac{A_{ik}}{8\pi\nu^2/c^3} = B_{ik} \cdot h \cdot \nu \quad (42)$$

Mit 32 und 33 erkennt man, dass die rechte Seite die Wahrscheinlichkeit pro Zeit für die induzierte Emission ist für ein Photon pro Frequenzintervall. Die linke Seite ist die spontane Emissionswahrscheinlichkeit pro Zeit und Mode. Erweitert man mit der Anzahl der Photonen pro Mode n erhält man:

$$\frac{W_{ik}^{ind.Em}}{W_{ik}^{spont}} = \frac{B_{ik} \cdot n \cdot h \cdot \nu}{A_{ik} \cdot c^3 / 8\pi\nu^2} = n \quad (43)$$

Für LASER wird es also interessant, wenn n sehr gross ist.

6 Absorption

Die Änderung der Intensität dI ist proportional zur Strecke im Medium dx und der eingestrahlenen Intensität I :

$$-dI = \alpha(\nu) \cdot I(x)dx \quad (44)$$

$$\rightarrow I_t(\nu) = I_0 \cdot e^{-\alpha(\nu) \cdot x} \quad (45)$$

Der Faktor α wird Absorptionskoeffizient genannt und hängt entsprechend Abschnitt 5 von den Besetzungszahlen N_i und N_k der beiden Energieniveaus sowie deren Entartungsgrade g_i und g_k und dem Absorptionsquerschnitt $\sigma_\nu(\nu_{ki})$ wie folgt ab:

$$\alpha_\nu(\nu_{ki}) = [N_k - (g_k/g_i)N_i] \cdot \sigma_\nu(\nu_{ki}) \quad (46)$$

Hinweis: Der Zusammenhang zwischen dem Einsteinkoeffizienten B_{ki} und dem Absorptionsquerschnitt $\sigma_\nu(\nu_{ki})$ ist wie folgt:

$$B_{ki} = \frac{c}{h \cdot \nu_{ki}} \int \sigma_\nu(\nu_{ki}) d\nu \quad (47)$$

Das Lambert-Beersche Gesetz lautet nach Integration von Gleichung 45:

$$I_t(\nu) = I_0 \cdot e^{-\alpha(\nu) \cdot x} \quad (48)$$