1. Übungsblatt Ferienkurs: Eindimensionale Probleme

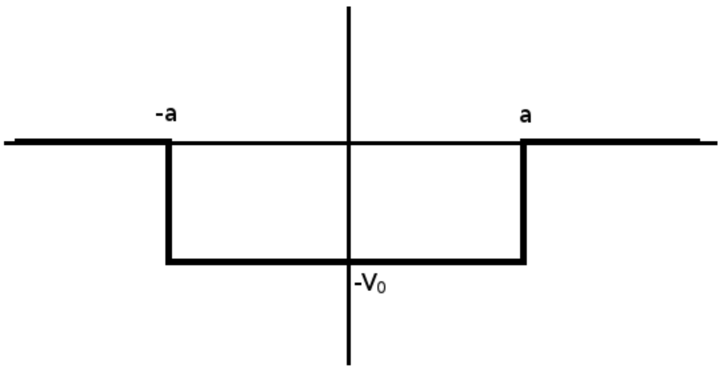
Michael Drews

August 31, 2012

1 Endlicher Potentialtopf

Gegeben ist das Potential

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & \text{für } -a < x < a \\ 0 & \text{für } |x| > a \end{cases}$$



a)

Löse die Schrödinger Gleichung für die Bindungszustände ($E < 0$) durch Forderung von Stetigkeit und stetiger Differenzierbarkeit der Wellenfunktion an den Grenzen $x = \pm a$. Dazu ist es hilfreich die Fälle gerader und ungerader Eigenfunktionen getrennt betrachten.
Zeige, dass man dadurch auf folgende beide Gleichungen kommt:

$$tan(z) = \sqrt{(z_0/z)^2 - 1} \quad (gerade) \qquad\qquad -cot(z) = \sqrt{(z_0/z)^2 - 1} \quad (ungerade)$$

Diese Gleichungen sind transzendent und lassen sich nicht analytisch lösen. Man kann sie jedoch graphisch lösen.

b)

Unter der Annahme, dass der Potentialtopf entweder breit und/oder sehr tief ist: Wie lauten die Eigenenergien E_n der möglichen Zustände? Vergleiche mit dem Fall des unendlichen Potentialtopfes.

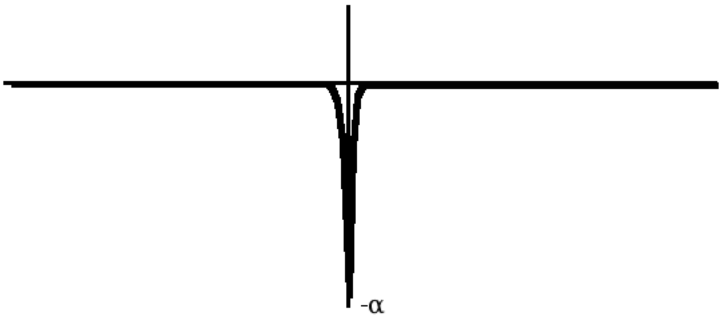
c)

Zeige, dass auch für schmale, kleine Potentialtöpfe immer mindestens ein Bindungszustand existiert. Unter welcher Bedingung an die Größe $V_0 a^2$ passen in das Potential genau $N\alpha$ Zustände?

2 Streuung am Delta-Potential

Gegeben ist das Potential

$$V(x) = -\alpha \cdot \delta(x)$$



a)

Finde den Bindungszustand ($E < 0$). Warum ist die Forderung nach Stetigkeit der Ableitung der Wellenfunktion bei $x = 0$ hier nicht gültig?
Zeige zuerst durch Integrieren der Schrödinger-Gleichung über ein kleines Intervall $[-\epsilon, \epsilon]$, dass man stattdessen die Forderung

$$\Delta\left(\frac{d\Psi}{dx}\right) = -\frac{-2m\alpha}{\hbar^2} \cdot \Psi(0)$$

stellen kann.
Berechne nun die zugehörige Eigenenergie des Bindungszustands.

b)

Löse die Schrödinger-Gleichung für die Streuzustände ($E > 0$) und berechne den Transmissionskoeffizienten.

3 Freies bewegtes Teilchen

Ein freies Teilchen habe die anfängliche Wellenfunktion

$$\Psi(x, 0) = A \cdot e^{\alpha x^2} \cdot e^{ilx}$$

a)

Berechne zuerst die beiden Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \qquad\qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot e^{-x^2} dx$$

(Ergebnis: $\sqrt{\pi}$, $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$)

b)

Normiere $\Psi(x, 0)$.

c)

Finde $\Psi(x,t)$. Integrale der Form

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+bx)}dx$$

lassen sich durch quadratische Ergänzung lösen. Sei $y = \sqrt{a}[x + \left(\frac{b}{2a}\right)]$. Dann ist $(ax^2 + bx) = y^2 - (\frac{b^2}{4a})$.
(Ergebnis: $\Psi(x,t) = \left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+2i\hbar\alpha t/m}} \cdot e^{-\frac{l^2}{4\alpha}} \cdot e^{a\cdot\left(\frac{l}{2\alpha}+ix\right)^2/(1+2i\hbar\alpha t/m)}$

d)

Das Betragsquadrat der Wellenfunktion $|\Psi(x,t)|^2$ lässt sich mithilfe der Größen $\theta = 2\hbar\alpha t/m$ und $w = \sqrt{\frac{a}{1+\theta^2}}$ darstellen als

$$|\Psi(x,t)|^2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot w \cdot e^{-2w^2\left(x-\frac{\theta l}{2\alpha}\right)^2}$$

Berechne nun die Erwartungswerte $< x >$, $< x^2 >$, $< p >$, $< p^2 >$.

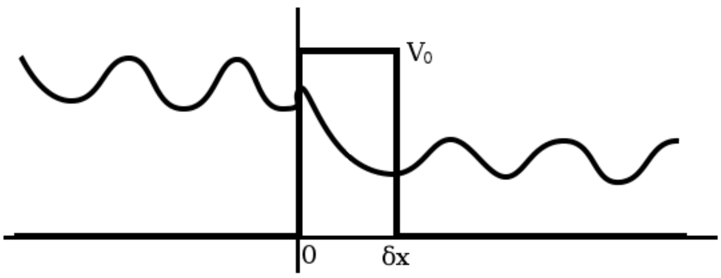
e)

Ist die Unschärferelation $\sigma_x\sigma_p \geq \hbar/2$ immer erfüllt? An welchem Punkt ist das System am nähesten am Limit der Unschärferelation?

4 Tunnelwahrscheinlichkeit

Näherungsweise gilt im Bereich einer rechteckigen Potentialbarriere für den Transmissionskoeffizienten:

$$T \approx \left|\frac{\Psi(\delta x)}{\Psi(0)}\right|^2$$



a)

Drücke dies explizit in Abhängigkeit der Eigenenergie E aus, indem du den Ansatz $\Psi(x) \propto e^{-\kappa x}$ machst.

b)

Einen beliebigen kontinuierlichen Potentialberg $V(x)$ kann man nun in kleine konstante Elemente zerlegen, sodass der Transmissionskoeffizient durch

$$T = \prod_i T_i$$

angenähert wird.
Zeige, dass sich die damit im Limes $\delta x \rightarrow 0$ die Tunnelwahrscheinlichkeit durch den Potentialberg als

$$T(E) = exp\left(-\frac{2}{\hbar}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{2m(V(x)-E)}dx\right)$$

berechnen lässt. Was sind x_1 und x_2 ?

c)

Berechne nun die Tunnelwahrscheinlichkeit durch ein Coulombpotential der Form

$$V_C(r) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi r}$$

Mit $Z_2 = 2$ ist dies die Wahrscheinlichkeit für die Emission eines α-Teilchens aus einem Atomkern. Die Halbwertszeit eines α-Strahlers ist damit proportional zu

$$ln(T^{-1}) = \frac{e^2 Z_1 Z_2}{4\hbar}\sqrt{\frac{2m_\alpha}{E}} + const.$$

Dies ist das Geiger-Nutall-Gesetz für den α-Zerfall radioaktiver Isotope. Es wurde über 25 Größenordnungen der Halbwertszeit bestätigt, was zeigt, dass die Lebenszeit eines α-Strahlers hauptsächlich durch die Schwierigkeit dem Coulombpotential des Kerns zu entkommen gezeichnet ist.