Ferienkurs Mathematik für Physiker I
Blatt 4
30.3.2017

Aufgabe 1: Endomorphismen über allgemeinen Vektorräumen

Der $\mathbb{R}^n$ ist ein klassischer Vektorraum. Das Konzept des Vektorraums ist jedoch deutlich allgemeiner. Hier betrachten wir zum Beispiel den $\mathbb{R}$-Vektorraum $K_3[x]$ der reellwertigen Polynome mit Grad kleiner 3, definiert als

$$K_3[x] := \{f \in K_R[x] \,|\deg(f) < 3\} \tag{1}$$

mit

$$K_R[x] := \{f \in K[x] \,| f(x) \in \mathbb{R} \, \forall x \in \mathbb{R}\}\,. \tag{2}$$

(a) Finden Sie die Matrixdarstellung der folgenden Endomorphismen in der Basis $\{b_1, b_2, b_3\}$ mit $b_i(x) = x^{i-1}$.

 (i) $F : K_3[x] \to K_3[x]\,, f \to f \circ g$ mit $g(x) = 3x$.

 (ii) $F : K_3[x] \to K_3[x]\,, f \to f'$

 (iii) $F : K_3[x] \to K_3[x]\,, f \to c_1 g_1 + c_2 g_2$
 mit $g_1, g_2 \in V$ definiert als $g_1(x) = 5x^2 - 3$ und $g_2(x) = 3x + 4$ und $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ definiert als $c_1 = f(x = 1)$ und $c_2 = f(x = 0)$.

(b) Was ist jeweils der Rang der drei betrachteten Endomorphismen aus (a) ? Bestimmen Sie jeweils den Kern der Abbildungen!

Aufgabe 2: Diagonalisieren von Matrizen

Wir betrachten folgende Matrizen :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & -6 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) Finden Sie die Eigenwerte der Matrizen bestimmen Sie für jeden Eigenwert die geometrische und algebraische Vielfachheit.

(b) Welche Bedingung muss eine Matrix erfüllen, um diagonalisierbar zu sein? Erfüllen die gegebenen Matrizen diese Bedingung?

 Hinweis: Die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten sind relevant.

(c) Die Matrizen A und B sind diagonalisierbar. Geben Sie jeweils eine Basis aus Eigenvektoren an!

Aufgabe 3: Skalarprodukte

Es sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine Matrix. Wir betrachten eine zweistellige Abbildung $F_A : V \times V \to K, x \to x^T Ax$ von einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V in den zugrundeliegenden Körper $\mathbb{K}$.

(a) Welche Eigenschaften muss eine zweistellige Abbildung im allgemeinen erfüllen damit sie ein Skalarprodukt definiert?

(b) Sei nun $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und A eine positiv definite, symmetrische Matrix. Zeigen Sie, dass F_A ein Skalarprodukt definiert.

Hinweis: Eine reelle Matrix M heißt „symmetrisch“ falls $M^T = M$ gilt und „positiv definit“ falls sie diagonalisierbar ist und alle ihre Eigenwerte positiv sind. Schreiben Sie x als Linearombination von Eingenvektoren von A.

(c) Überprüfen Sie, ob F_A mit der folgen Wahl von A ein Skalarprodukt definiert.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

Aufgabe 4: Schwingende Kugeln

Als physikalisches Beispiel eines Eigenwertproblems betrachten wir eine Anordnung aus zwei leichten Kugeln mit Masse m_1 und einer schweren Kugel mit Masse m_2, die durch zwei Federn mit Federkonstante k so verbunden sind, dass sich die schwere Kugel in der Mitte zwischen den beiden anderen Kugeln befindet und mit jeder von beiden über jeweils einer der beiden Federn verbunden ist.
Die Auslenkungen x_1, x_2, und x_3 der Massen aus ihrer jeweiligen Ruhelage schreiben wir als Komponenten eines dreidimensionalen Vektors $x \in \mathbb{R}^3$. Ihre Bewegungsgleichungen lassen sich auf diese Weise in der folgenden Matrixgleichung zusammen fassen:

$$\ddot{x_1} = M \cdot x \tag{3}$$

mit

$$M = \begin{pmatrix} -\frac{k}{m_1} & \frac{k}{m_1} & 0 \\ \frac{k}{m_2} & -2\frac{k}{m_2} & \frac{k}{m_2} \\ 0 & \frac{k}{m_1} & -\frac{k}{m_1} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Hierbei ist $\ddot{x} = (\ddot{x}_1, \ddot{x}_2, \ddot{x}_3)$ der Vektor, der aus den Zeitableitungen der Geschwindigkeiten der Kugeln besteht. Im folgenden zeigen Sie wie diese Bewegungsgleichung mithilfe von Eigenvektoren in voneinander unabhängige Teile zerlegt werden kann.

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix M. Ist die Matrix diagonalisierbar?

(b) Bestimmen Sie für alle drei Eigenwerte λ_1, λ_2, λ_3 jeweils den Eigenraum und geben sie für M eine Basis aus Eigenvektoren an.

(c) Schreiben Sie $x = (x_1, x_2, x_3)$ als Linearkombination der Eigenvektoren von M. Nutzen Sie anschließend die Eigenschaften der Eigenvektoren um die Bewegungsgleichung (3) in drei unabhängige Teile zu zerlegen.