PHBern
Pädagogische Hochschule

Anwendungsorientierung: Modellieren und Mathematisieren[1]

Anwendungsorientierung bezeichnet die Auseinandersetzung mit lebensweltlichen Kontexten (vgl. Büchter & Henn, 2015). Es geht darum, Sachverhalte der aussermathematischen Welt mithilfe von mathematischen Werkzeugen zu bearbeiten. Im Mathematikunterricht müssen entsprechende Bearbeitungsstrategien aufgebaut werden.

Das Modell von Blum (2007) bildet den Modellierungsprozess ab. Modellieren ist eine Transferleistung zwischen Realität und Mathematik, Mathematisieren ist eine Teilleistung davon.

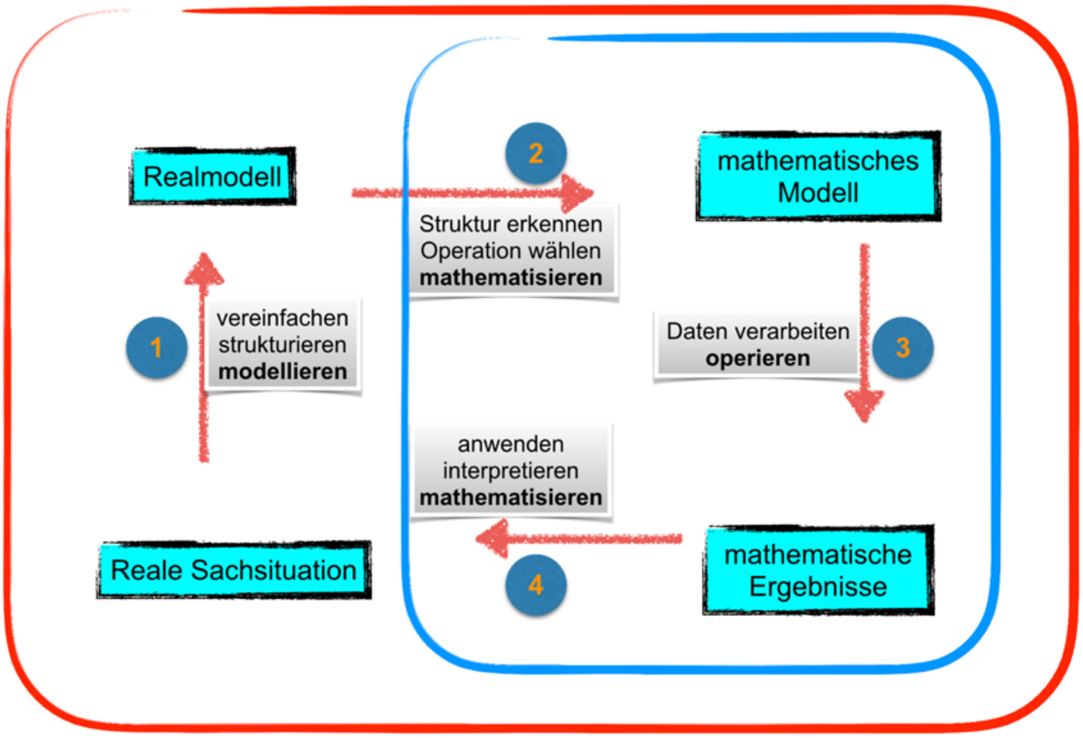

Abbildung 1: Vereinfachtes Modell des Modellierungskreislaufs (eigene Darstellung in Anlehnung an Blum, 2007, in Nydegger 2018).

Modellieren

Der Modellierungsprozess umfasst alle Teilschritte 1 – 4 (rote Rahmung).

(1) Als Ausgangslage liegt eine Sachsituation vor. Sie wird in ein Realmodell übertragen. Die Herausforderung besteht hauptsächlich darin, die Situation so zu vereinfachen, dass eine Quantifizierbarkeit der Sachsituation erhalten bleibt. Bei diesem Schritt

[1] Detaillierte Ausführungen zu diesem Thema in Nydegger-Haas, Annegret. (2018). Algebraisieren von Sachsituationen. Wechselwirkungen zwischen relationaler und operationaler Denk- und Sichtweise. Wiesbaden: Springer Fachmedien.

muss entschieden werden, was in welcher Form zur Berechnung der Sachsituation genutzt werden kann.

Modellierungsaufgaben

Modellierungsaufgaben bilden *echte* Phänomene der Alltagswelt ab (vgl. Leiss & Tropper 2014). Sie sind nicht vereinfacht. Wie sich die Situation quantifizieren lässt, ist nicht geklärt und muss erarbeitet werden. Beispielweise soll der Papierverbrauch von einem Jahr abgeschätzt werden, oder der Frage nachgegangen, wie gross der Wasserverlust bei einem ständig tropfenden Wasserhahn in einem Monat ist.

Die Umwelt wird mit einer «mathematischen Brille» betrachtet. Im Zentrum stehen die Fragen: *Lässt sich die vorliegende Problemstellung berechnen? Wie muss man dabei vorgehen?*

Modellierungsaufgaben sollen anregen:

- in Realsituationen eigene Fragen zu stellen.
- Realsituationen adäquat zu vereinfachen.
- nach geeigneten Realmodellen zu suchen und diese, wenn nötig anpassen.
- Ergebnisse kritisch zu hinterfragen und wenn nötig den Modellierungsprozess überarbeiten.
- die Kenntnis über unterschiedliche Realmodelle erweitern und mit Modellen beweglich umgehen.
- Sicherheit im Mathematisierungsprozess erlangen (Leuders & Büchter 2009, S. 76 - 80).

Ist in einer Problemstellung die Sachsituation so weit vereinfacht, dass ein Realmodell vorliegt, setzt der Mathematisierungsprozess ein.

Mathematisieren

Der Mathematisierungsprozess (blaue Rahmung siehe oben) umfasst die Schritte 2 – 4.

(2) Das Realmodell, eine Vereinfachung der authentischen Situation, wird nun in ein mathematisches Modell übertragen. In der Praxis zeigt sich, dass solche Übersetzungen nicht einfach sind.
Rechenoperationen sind mathematische Konstruktionen (Muster), die so nicht in der Realität vorkommen. Wer den Schritt 2 vollziehen will, muss verschiedene mathematische Modelle verfügbar haben. Bereits bei einfachen Sachsituationen kann die Suche nach der richtigen mathematischen Struktur herausfordernd sein. Je mehr mathematische Muster bekannt sind, desto leichter wird es sein, ein passendes Muster zu erkennen (Wittmann & Müller 2008, S. 67f).

(3) Dieser Schritt bezieht sich auf den Kalkül. Zahlen und Terme werden regelgeleitet verarbeitet. Die Zahlen, entnommen aus dem Realmodell, müssen mit dem richtigen Verfahren korrekt verarbeitet werden. Wer geläufig Rechenoperationen anwenden kann, wird diesen Schritt hauptsächlich mit einer operationalen Denkweise angehen. Wer zuerst die Grundoperationen ergründen muss, bevor sie verfügbar sind, wird auch auf die relationale Denkweise zurückgreifen.

(4) Anschliessend wird das Ergebnis interpretiert. Die Interpretation der Berechnungen ist eine Rückübersetzung. Dieser Schritt ist auch Teil des Mathematisierungsprozesses. Somit steht der Begriff Mathematisieren sowohl für die Übersetzung vom Realmodell zum mathematischen Modell wie auch für deren Umkehrung. Die Rechenergebnisse werden mit den, im Realmodell beschriebenen, Beziehungen abgeglichen und interpretiert.
Mathematisieren ist eine Transferleistung und fordert ein bewegliches Wechseln zwischen den beiden Denk- oder Sichtweisen relational und operational[2]. Terme müssen einmal relational, einmal operational gedeutet werden.

Mathematisierungsaufgaben
Mathematisierungsaufgaben grenzen sich von den umfassenden Modellierungsaufgaben ab. Schulbuchaufgaben fokussieren häufig Mathematisierungsprozesse. Sie sind schon so weit vereinfacht, dass sie keine echte Alltagssituation beschreiben. (Beispiele: Berechne das Volumen eines Zylinders; berechne den Rabatt bei einer Preisreduktion von 50.- CHF auf 40.- CHF). Die Auseinandersetzung ist eingegrenzt auf den Umgang mit mathematischen Modellen. Das Vereinfachen der Alltagssituation, das Erarbeiten eines Realmodells, wird dabei ausgeblendet. Einmal muss eine passende Operation gefunden, ein anderes Mal soll von der Operation ausgehend das Ergebnis interpretiert oder ein passendes Realmodell gefunden werden.

Modellierungsschritt 2 – Beispiel
Toni hat 4 Karten und Beni hat 8 Karten. Wie viele Karten haben sie insgesamt? Die Situation ist so einfach gehalten, dass eine Vereinfachung hin zu einem Realmodell (Modellierungsschritt 1) entfällt.

Die Aufgabenstellung ist ein vereinfachtes Konstrukt, wohl vorstellbar, aber kaum im Alltag in dieser Weise anzutreffen. Somit entfällt bei der Berechnung die Entwicklung eines Realmodells. Zu leisten ist eine Übersetzung der vereinfachten Situation in ein mathematisches Modell. Im Abgleich mit bekannten mathematischen Mustern werden die Lernenden erkennen, dass es sich hier um eine Addition handelt (relationale Sichtweise).

Modellierungsschritt 3 – Beispiel:
Die Operation wird durchgeführt. 4 + 8 = 12 (operationale Sichtweise).

Modellierungsschritt 4 – Beispiel:
Das Ergebnis wird interpretiert (relationale Sichtweise).

Mathematisierungsaufgaben beinhalten weitere Herausforderungen, die Lehrenden in diesem Zusammenhang vielleicht nicht bewusst sind, aber nicht ausser Acht gelassen werden dürfen. Gerster (2004, S. 388) weist darauf hin, dass Denkhandlungen im Bereich des Mathematisierens auf das Operationsverständnis zurückgreifen. Ein gut entwickeltes

---

[2] Siehe Text Denk- und Sichtweisen auf mathematische Objekte, E-Portal KfUE Mathematik

Operationsverständnis zeigt sich in einem sicheren Verbinden von Realmodellen und mathematischen Symbolen. Modelle und Visualisierungen übernehmen dabei häufig eine Vermittlerrolle. Wer das Rechnen nicht beherrscht und die Operationen nicht versteht, wird Mühe haben, Sachsituationen zu mathematisieren (Gerster 2004, S. 242). Dazu ist das Operationsverständnis eine wesentliche Grundlage. Der Schluss wäre jedoch nicht zulässig, dass demzufolge die Lernenden zuerst die Operationen trainieren sollen, um zu einem späteren Zeitpunkt das Mathematisieren aufzubauen. Ein solches Vorgehen steht im Gegensatz zu der Forderung, mathematische Inhalte in Sinnzusammenhängen aufzubauen, so dass in jeder Lernphase operationale und relationale Denkweisen zum Tragen kommen.

Die Prägung der Anwendungsorientierung hat sich im Verlaufe der letzten 50 Jahre stark verändert. Verschiedene didaktische Überzeugungen lösten sich gegenseitig ab. Aktuell ist die Anwendungsorientierung kaum bestritten und wird mit der Ausrichtung des *Lehrplans 21* von der Lernzielorientierung hin zur Kompetenzorientierung im Unterricht gestärkt. Dies bedeutet, dass im Mathematikunterricht sowohl Modellierungs- als auch Mathematisierungsaufgaben in sinnvoller Ausgewogenheit im Unterricht eingesetzt werden sollen.

Literaturverzeichnis

Blum, Werner. (2007). Mathematisches Modellieren. In Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht*. Dortmund: Universitätsbibliothek Dortmund.

Büchter, Andreas & Henn, Hans-Wolfgang. (2015). Schulmathematik und Realität – Verstehen durch Anwenden. In Hefendehl-Hebeker, Lisa; Bruder Regina, Schmidt-Thieme Barbara & Weigand Hans G. (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (19-49). Heidelberg, Berlin: Springer.

Gerster, Hans-Dieter & Schultz Rita. (2004). *Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht.* [online]. Freiburg: Pädagogische Hochschule Freiburg. Verfügbar unter: https://phfr.bsz-bw.de/frontdoor/index/ docId/16 [22. Februar 2021].

Leiss, Dominik & Tropper, Natalie. (2014). *Umgang mit Heterogenität im Mathematikunterricht.* Springer Berlin Heidelberg.

Leuders, Timo & Büchter, Andreas. (2009). *Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern – Leistung überprüfen.* Berlin: Cornelsen Scriptor.

Nydegger-Haas, Annegret (2018). *Algebraisieren von Sachsituationen.* Wiesbaden: Springer.

Wittmann, Erich C. & Müller, Gerhard. N. (2008). Muster und Strukturen als fachliches Grundkonzept. In Walther, Gerd; Van den Heuvel-Panhuizen, Marja; Ganzer Dietlinde & Köller Olaf (Hrsg.), *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret*, 42-65. Berlin: Cornelson.