Von Newton über Hamilton zu Kepler

Eine Variante von „Ein Newton ergibt 3 Kepler“, basierend auf einer Arbeit von Erich Ch. Wittman und den bis jetzt publizierten Beiträgen von Kepler_0x.pdf.

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{w}{r^2}$$

Version 1.0 vom März 2016

Ausgearbeitet von Martin Gubler, Kantonsschule Frauenfeld, im Dezember 2015

Mit LaTeX in eine lesbare Form gebracht von Alfred Hepp, Bergün, im Juni 2016

1 Bahnen in zentralen Kraftfeldern

Zeigt die Kraft immer von einem bestimmten Punkt weg oder auf diesen zu, so spricht man von einer Zentralkraft. Man wählt das Kraftzentrum als Nullpunkt des Koordinatensystems. Dann gilt $\vec{r} \parallel \vec{a}$ oder

$$\vec{r} \times \vec{a} = \vec{0} \tag{1}$$

Bahnen in einem zentralen Kraftfeld sind eben. Es gibt keine Kräfte, die einen Körper aus der Ebene hinaustreiben, welche vom Nullpunkt und den Vektoren $\vec{r}(t_0)$ und $\vec{v}(t_0)$ aufgespannt wird.

Man kann aber noch mehr sagen: Für jede Bewegung in einem zentralen Kraftfeld gilt

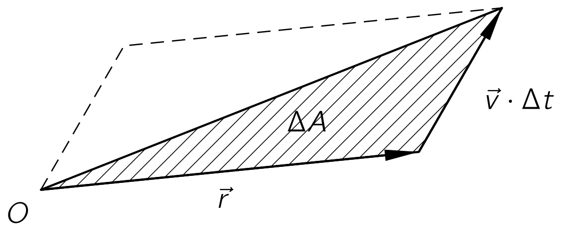
$$\vec{r} \times \vec{v} = \vec{w} = \text{konstant} \tag{2}$$

Mit (1) kann man leicht zeigen, dass die Ableitung von $\vec{w}$ nach der Zeit null ist.

$\vec{w}$ steht senkrecht auf der Bahnebene. $\vec{w}$ und $w = |\vec{w}|$ sind wichtige Invarianten der Bewegung.

$\vec{r} \times (m \cdot \vec{v}) = m \cdot (\vec{r} \times \vec{v}) = m \cdot \vec{w}$ ist der *Bahndrehimpuls* des Körpers. In zentralen Kraftfeldern gilt also die Erhaltung des Bahndrehimpulses.

2 Die vom Fahrstrahl überstrichene Fläche



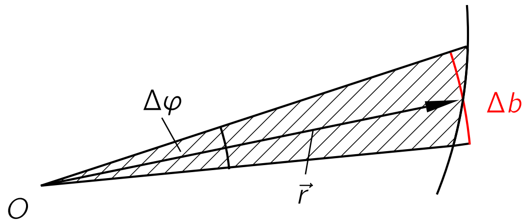
$$\Delta A = \tfrac{1}{2} \cdot |\vec{r} \times \vec{v} \cdot \Delta t| =$$
$$= \tfrac{1}{2} \cdot \Delta t \cdot |\vec{r} \times \vec{v}| = \tfrac{1}{2} \cdot \Delta t \cdot w$$

Für Bewegungen in zentralen Kraftfeldern gilt somit nach (2)

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \cdot w = c = \text{konstant} \tag{3}$$

Die Konstante c wird zur besseren Vergleichbarkeit mit andern Skripten eingeführt. (3) ist der Inhalt des zweiten Kepler'schen Gesetzes.

Da Bahnen in zentralen Kraftfeldern eben sind, können sie auch mit Polarkoordinaten beschrieben werden:



$$\Delta A = \tfrac{1}{2} \cdot r \cdot \Delta b = \tfrac{1}{2} \cdot r \cdot r \cdot \Delta\varphi$$

Für alle ebenen Bahnen gilt ohne weitere Voraussetzung

$$\frac{dA}{d\varphi} = \frac{1}{2} \cdot r^2 \tag{4}$$

Aus (3) und (4) gewinnen wir mit der Kettenregel noch

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{w}{r^2} \quad \text{und} \quad \frac{dt}{d\varphi} = \frac{r^2}{w} \tag{5}$$

Es ist ja

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

also

$$\frac{1}{2} \cdot w = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{und somit} \quad \frac{w}{r^2} = \frac{d\varphi}{dt} \qquad \square$$

3 Newtons Gravitationsgesetz

Nun verlangen wir mit Newton, dass die Zentralkraft kugelsymmetrisch sei und dass der Betrag der Kraft mit $\frac{1}{r^2}$ abnehmen soll:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{k}{r^2} \cdot \frac{-\vec{r}}{r} \tag{6}$$

Bewegt sich eine kleine Masse m im Gravitationsfeld einer grossen Masse M, so ist

$$k = G \cdot M \tag{7}$$

Dabei ist G die Gravitationskonstante.

Wenn der Betrag einer Zentralkraft nur vom Betrag von $\vec{r}$ abhängt ist das entprechende Kraftfeld „konservativ“. Es gilt dann zusätzlich zur Erhaltung des Bahndrehimpulses auch der Energieerhaltungssatz. Davon werden wir im Abschnitt 8 noch Gebrauch machen.

4 Der Hodograph ist kreisförmig

Nach (6) gilt

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{k}{r^2} \cdot \frac{-\vec{r}}{r} = \frac{k}{r^2} \cdot \begin{pmatrix} -\cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{pmatrix}$$

Mit der Kettenregel und (5) erhalten wir daraus

$$\frac{d\vec{v}}{d\varphi} = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{dt}{d\varphi} = \frac{k}{r^2} \cdot \begin{pmatrix} -\cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{pmatrix} \cdot \frac{r^2}{w} = \frac{k}{w} \cdot \begin{pmatrix} -\cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{pmatrix} \tag{8}$$

Integration nach φ liefert mühelos den Hodographen

$$\vec{v}(\varphi) = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \frac{k}{w} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Die Integrationskonstante h_1 wird null, wenn wir die Koordinaten so festlegen, dass $\vec{r}$ für $\varphi = 0$ zum Perihel der Bahn zeigt. $\vec{r}$ kann nur minimal sein, wenn $\vec{v}$ senkrecht steht auf $\vec{r}$. Es gilt dann

$$\vec{v}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} + \frac{k}{w} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} \tag{9}$$

Das ist die Gleichung eines Kreises mit Mittelpunkt $H = (0/h)$ und Radius ρ mit

$$\rho = \frac{k}{w} \tag{10}$$

Die Integrationskonstante h bestimmen wir in den Abschnitten 7 und 8.

Die Ideen zu den Abschnitten 4 und 5 dieser Arbeit entstammen vollständig der schönen Arbeit von Erich Ch. Wittmann:

„Von den Hüllkurvenkonstruktionen der Kegelschnitte zu den Planetenbahnen“
Mathematische Semesterberichte (2015) 62: 17-35, Springer Verlag 2015

5 Bahnen im Gravitationsfeld einer grossen Masse sind Kegelschnitte

Wir leiten eine weitere Gleichung für $\vec{v}$ her indem wir

$$\vec{r} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

nach der Zeit ableiten und dabei (5) und die Kettenregel verwenden:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{w}{r^2} \cdot \frac{d}{d\varphi}\left(r \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \right) = \frac{w}{r^2} \cdot \left(\frac{dr}{d\varphi} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} \right) \tag{11}$$

(9) und (11) stellen beide $\vec{v}(\varphi)$ dar. Komponentenweise gilt also

$$\begin{array}{ll} \mathrm{I} & 0 + \frac{k}{w} \cdot (-\sin\varphi) = \frac{w}{r^2} \cdot \frac{dr}{d\varphi} \cdot \cos\varphi + \frac{w}{r} \cdot (-\sin\varphi) \\ \mathrm{II} & h + \frac{k}{w} \cdot \cos\varphi = \frac{w}{r^2} \cdot \frac{dr}{d\varphi} \cdot \sin\varphi + \frac{w}{r} \cdot \cos\varphi \end{array}$$

Multiplikation von I mit $(-\sin\varphi)$ und von II mit $\cos\varphi$ und anschliessende Addition der entstehenden Gleichungen liefert

$$h \cdot \cos\varphi + \frac{k}{w} = \frac{w}{r}$$

und nach Multiplikation mit $r \cdot w/k$

$$r \cdot \left(\frac{h \cdot w}{k} \cdot \cos\varphi + 1 \right) = \frac{w^2}{k} \tag{12}$$

Setzt man

$$p = \frac{w^2}{k} \tag{13}$$

und

$$\varepsilon = \frac{h \cdot w}{k} \tag{14}$$

erhält man aus (12) die Gleichung eines Kegelschnitts in Polarform:

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cdot \cos\varphi} \tag{15}$$

Die Bahnen der Planeten sind also Ellipsen in deren einem Brennpunkt das Zentrum der Zentralkraft steht.

6 Die Proportionen der Halbachsen und der Umlaufzeiten

Wir leiten noch wie üblich das dritte Kepler'sche Gesetz her. Integration von (3) über eine ganze Umlaufzeit T liefert

$$c \cdot T = \pi \cdot a \cdot b$$

oder quadriert

$$c^2 \cdot T^2 = \pi^2 \cdot a^2 \cdot b^2$$

Mit $b^2 = a \cdot p$, (13) und $w^2 = 4 \cdot c^2$ folgt daraus

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{c^2}{p \cdot \pi^2} = \frac{c^2 \cdot k}{4 \cdot c^2 \cdot \pi^2} = \frac{k}{4 \cdot \pi^2} = \frac{G \cdot M}{4 \cdot \pi^2} \qquad (16)$$

Für alle Planeten hat der Quotient a^3/T^2 denselben Wert. Dies ist der Inhalt des dritten Kepler'schen Gesetzes.

Berücksichtigt man Newtons Wechselwirkungsprinzip, so muss auch die Sonne eine kleine Bewegung um den gemeinsamen Schwerpunkt von M und m machen. Daraus ergibt sich eine kleine Korrektur für (16). Exakt gilt innerhalb Newtons Gravitationstheorie für die Lösung des sogenannten „Zweikörperproblems“

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G \cdot (M + m)}{4 \cdot \pi^2} \qquad (17)$$

Diese für M und m symmetrische Formel muss beispielsweise bei der Bestimmung der Massen zweier Doppelsterne verwendet werden. Eine Herleitung von (17) findet sich in Kepler_01.pdf.

Die Skripte Kepler_xy.pdf lassen sich von der folgenden Adresse herunterladen:

www.physastromath.ch/material/mathematik/keplernewton/

7 Exzentrizität, Gesamtenergie und Mittelpunkt des Hodographen

Nach (10) und (13) gilt für den Radius des Hodographen

$$\rho = \frac{k}{w} = \frac{G \cdot M}{w} = \frac{w}{p} \tag{18}$$

Mit (14) ergibt sich daraus für die Integrationskonstante h

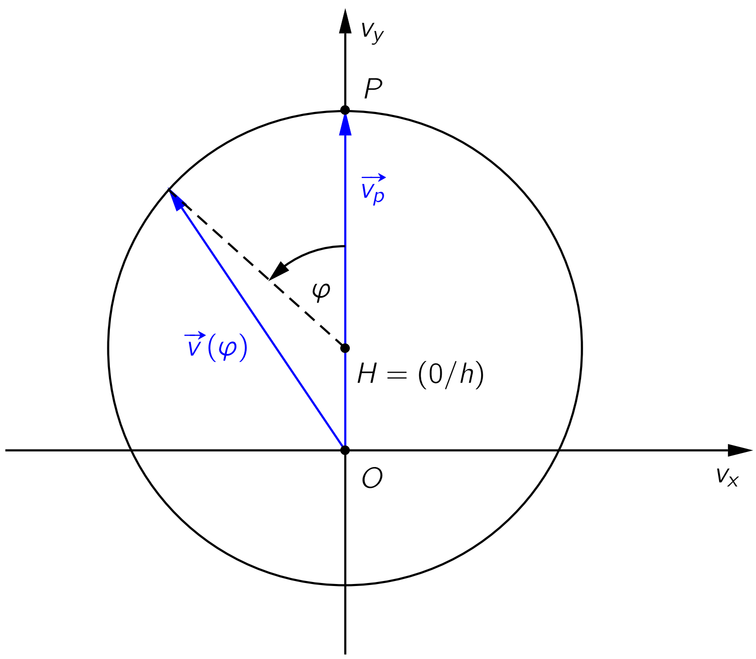
$$h = \varepsilon \cdot \frac{k}{w} = \varepsilon \cdot \rho \tag{19}$$

Es gilt somit

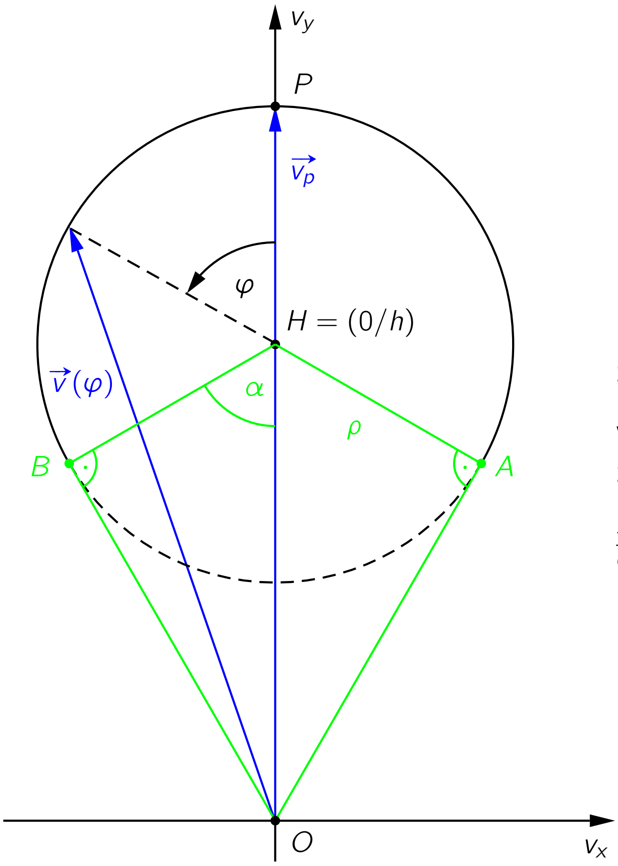
Bahnform	Ellipse	Parabel	Hyperbel
Exzentrizität	$\varepsilon < 1$	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon > 1$
Gesamtenergie	$E_{\text{tot}} < 0$	$E_{\text{tot}} = 0$	$E_{\text{tot}} > 0$
ρ und h	$h < \rho$	$h = \rho$	$h > \rho$
ρ und v_p	$v_p < 2 \cdot \rho$	$v_p = 2 \cdot \rho$	$v_p > 2 \cdot \rho$
Lage von O	im Hodographen	auf dem Hodographen	ausserhalb des Hodographen

Wir zeichnen noch den Hodographen für diese drei Fälle. $\vec{v}_p = \overrightarrow{OP}$ ist dabei die Geschwindigkeit von m im Perihel der Bahn, somit auch die maximale Geschwindigkeit von m.

Für $\varepsilon < 1$ liegt O im Hodographen:



Für $\varepsilon > 1$ liegt O ausserhalb des Kreises:



Die Spitzen der Geschwindigkeitsvektoren liegen nur auf dem Bogen APB. Zu A und B gehört schon der Abstand $r = \infty$ von der Sonne.

Wir beweisen noch den folgenden kleinen Satz:

A und B liegen auf dem Thaleskreis über $\overline{OH}$.

Beweis: $\varphi_{\max}$ wird erreicht für $r = \infty$. Dann gilt nach (15)

$$1 + \varepsilon \cdot \cos \varphi_{\max} = 0$$

also

$$\frac{1}{\varepsilon} = -\cos \varphi_{\max}$$

oder

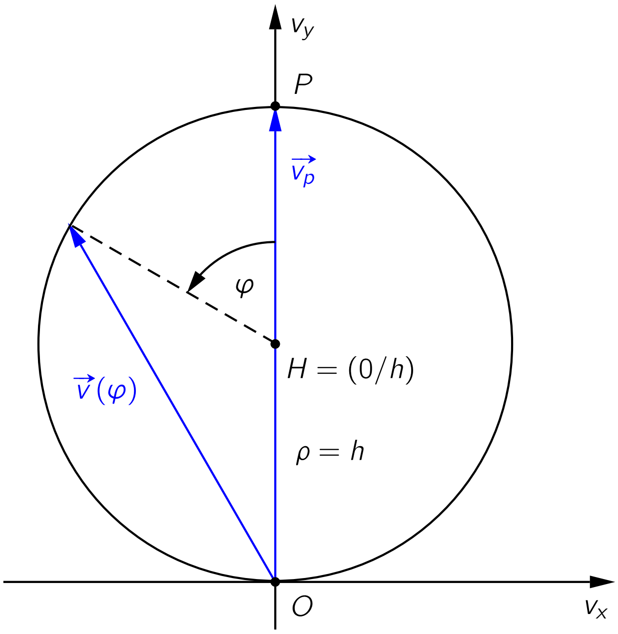
$$\frac{\rho}{h} = -\cos \varphi_{\max} = \cos(180^\circ - \varphi_{\max})$$

Genau diese Gleichung ist erfüllt, wenn A und B auf dem Thaleskreis über $\overline{OH}$ liegen:

$$\cos(180^\circ - \varphi_{\max}) = \cos \alpha = \frac{\overline{BH}}{\overline{OH}} = \frac{\rho}{h}$$

□

Für $\varepsilon = 1$ hat der Hodograph die folgende Gestalt:



Alle Punkte der Kurve werden erreicht ausser O. Zu O gehört der Abstand $r = \infty$ vom Nullpunkt. $|\overrightarrow{OP}| = 2 \cdot \rho$ ist die maximale Geschwindigkeit im Perihel.

8 Bestimmung der Bahnparameter aus $\vec{r}(t_0)$ und $\vec{v}(t_0)$

Es seien also zu einem bestimmten Zeitpunkt $\vec{r}$ und $\vec{v}$ bekannt. Dann erhalten wir aus (2) die Konstante w und damit auch $c = \frac{1}{2} \cdot w$.

Mit der Zentralmasse M ist auch $k = G \cdot M$ gegeben. Damit erhalten wir aus (10) den Radius ρ des Hodographen und aus (13) das Quermass p der Bahn.

Nun verwenden wir nochmals das Gravitationsgesetz von Newton. Das kugelsymmetrische Gravitationsfeld von M ist „konservativ“, es gilt der Energieerhaltungssatz

$$\frac{1}{2} \cdot \cancel{m} \cdot v^2 - G \cdot M \cdot \cancel{m} \cdot \frac{1}{r} = E_{\text{tot}} = -G \cdot M \cdot \cancel{m} \cdot \frac{1}{2 \cdot a} \tag{20}$$

oder

$$v^2 - \frac{2 \cdot k}{r} = -\frac{k}{a} \tag{21}$$

Dabei ist $2 \cdot a$ der Radius des „Fallkreises“ oder des „Leitkreises“ des Kegelschnittes (15). Im elliptischen Fall ist a die grosse Halbachse der Ellipse. Mehr dazu findet sich in Kepler_09.pdf !

Lösen wir (21) nach a auf erhalten wir

$$a = \frac{k \cdot r}{2 \cdot k - v^2 \cdot r} \tag{22}$$

Es fehlen noch die Werte ε und h. Diese sind nach (19) eng verknüpft ($h = \varepsilon \cdot \rho$). Kennt man ε, so kennt man auch h und umgekehrt. Mit $p = a \cdot (1 - \varepsilon^2)$ und (13) erhalten wir aus (22)

$$\varepsilon^2 = 1 - \frac{p}{a} = 1 - \frac{2 \cdot w^2}{k \cdot r} + \frac{v^2 \cdot w^2}{k^2} \tag{23}$$

Damit sind auch ε und $h = \varepsilon \cdot \rho$ bestimmt.

(20) bis (23) gelten auch für Hyperbeln, dort wird der Wert von a allerdings negativ. Bei Parabeln liefert (20) für a den Wert unendlich. Für Parabeln gilt aber sowieso $\varepsilon = 1$!

(23) kann unter Benutzung von (10) und (13) noch umgeformt werden zu

$$\varepsilon^2 = 1 - 2 \cdot \frac{p}{r} + \frac{v^2}{\rho^2} \tag{24}$$

Bei (24) ist schön zu erkennen, dass ε eine einheitenlose Zahl ist. p und r sind beides Längen, v und ρ sind beides Geschwindigkeiten.