Freie Universität Berlin
**Analytische Mechanik**
Sommer-Semester 2022

**Übungsblatt 5**
**Geometrie der Zwangskräfte und Runge-Lenz-Vektor**

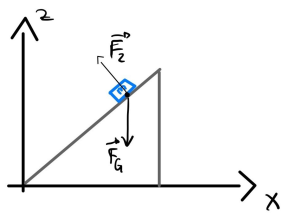
**Abgabe bis: 27.05.2022 um 12:00 Uhr**

---

## Aufgabe 1: Richtung der Zwangskraft / Normalenvektor

Um Zwangsbedingungen, also Einschränkungen der Bewegungsfreiheit von Körpern, in den Bewegungsgleichungen zu berücksichtigen, müssen Zwangskräfte richtig identifiziert werden. Jede Zwangskraft $\boldsymbol{F}_Z$ hat eine Richtung $\hat{\boldsymbol{e}}_Z$ und einen Betrag $|\boldsymbol{F}_Z|$, sodass $\boldsymbol{F}_Z = |\boldsymbol{F}_Z|\hat{\boldsymbol{e}}_Z$, wobei $\hat{\boldsymbol{e}}_Z$ der normierte Einheitsvektor sein soll, der genau in Richtung der Zwangskraft zeigt. In dieser Aufgabe wollen wir uns ausschließlich mit der Bestimmung dieses Richtungsvektors befassen.

Zum Warm-Up betrachten Sie eine Masse $m$ auf einer schiefen Ebene. Wir betrachten zunächst ausschließlich die $x-z-$Ebene, die $y$-Koordinate wird vernachlässigt. Wir betrachten also eine Bewegung im $\mathbb{R}^2$. Die Gewichtskraft wirke in die $-z$-Richtung, wir ignorieren jegliche Reibung. Die Steigung der schiefen Ebene betrage $\frac{\Delta z}{\Delta x} = 2$.

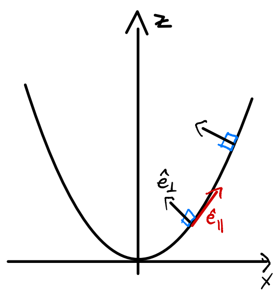



(a) Formulieren Sie die Zwangsbedingung für die Masse in **kartesischen** Koordinaten $(x, z)$. Bringen Sie diese zusätzlich in die Form $S(x, z) = 0$.

(b) Finden Sie nun zuerst einen normierten Einheitsvektor $\hat{\boldsymbol{e}}_\parallel$ parallel zur schiefen Ebene!

(c) Die Zwangskraft muss senkrecht auf der schiefen Ebene stehen. Begründen Sie dies zuerst. Finden Sie dann einen normierten Einheitsvektor $\hat{\boldsymbol{e}}_\perp$ senkrecht auf der schiefen Ebene. Der gefundene $\hat{\boldsymbol{e}}_\perp$ ist parallel zum Zwangskraft-Richtungsvektor $\hat{\boldsymbol{e}}_Z$, aber zeigt eventuell nicht in die gleiche Richtung, sondern in die entgegengesetzte Richtung. Geben Sie im letzten Schritt $\hat{\boldsymbol{e}}_Z$ an.

Widmen wir uns nun einem etwas schwierigeren Fall: einer krummlinigen Zwangsbedinung. Betrachten Sie dazu eine Masse $m$ auf einer Parabel mit Funktionsgleichung $z = \frac{x^2}{2b}$, wobei $b > 0$ eine Konstante ist. Die Masse unterliegt wiederum der Gewichtskraft (wir ignorieren jegliche Reibung) und bewegt sich nur in der $x-z$-Ebene und wir wollen den Richtungsvektor der Zwangskraft $\hat{\boldsymbol{e}}_Z$ bestimmen. Dieser Fall ist schon interessanter, weil hier die Richtung des Vektors $\hat{\boldsymbol{e}}_Z$ sich mit der Position der Masse auf der Parabel verändert, während der Vektor bei der schiefen Ebene immer in die gleiche Richtung gezeigt hat.




(d) Geben sie die Zwangsbedingung für die kartesischen Koordinaten der Masse in der Form $S(x, z) = 0$ an.

(e) Finden Sie nun wieder zuerst einen normierten Einheitsvektor $\hat{\boldsymbol{e}}_\parallel$, der tangential zur Parabel steht. Dieser muss von der Koordinaten des Teilchens abhängen!

*Tipp: Sie wissen bereits aus dem ersten Semester, wie man Tangentialvektoren für Bahnkurven berechnet. (Insbesondere ist der Richtungsvektor der Geschwindigkeit ein solcher Tangenteneinheitsvektor.) Fassen Sie die Parabel also einfach als Kurve auf.*

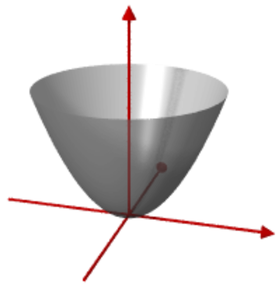
(f) Die Zwangskraft muss senkrecht auf der Parabel stehen. Finden Sie einen normierten Einheitsvektor $\hat{\boldsymbol{e}}_\perp$ senkrecht auf der Parabel. Der gefundene $\hat{\boldsymbol{e}}_\perp$ ist parallel zum Zwangskraft-Richtungsvektor $\hat{\boldsymbol{e}}_Z$, aber zeigt eventuell nicht in die gleiche Richtung. Geben Sie im letzten Schritt $\hat{\boldsymbol{e}}_Z$ an.

Die Vektoren $\hat{\boldsymbol{e}}_\perp, -\hat{\boldsymbol{e}}_\perp$ werden auch als (normierte) Normalenvektoren bezeichnet, daher wird auch oft das Symbol $\hat{\boldsymbol{n}}$ für sie verwendet.

Nun wollen wir einen direkteren Weg nehmen, um Normalenvektoren und damit Zwangskraft-Richtungsvektoren zu bestimmen: **Wenn man die Zwangsbedingung richtig aufgestellt und in die Form $S(x,z) = 0$ gebracht hat, dann ist der Gradient $\nabla S$ parallel zum Zwangskraft-Richtungsvektor $\hat{e}_Z$.**

(g) Berechnen Sie $\nabla S$ und verifizieren Sie, dass $\nabla S$ parallel zum gefunden $\hat{\boldsymbol{e}}_Z$ steht.

Wir beziehen nun die 3. Dimension mit ein und betrachten eine Masse im Paraboloid (siehe Abbildung). Der Paraboloid ist beschrieben durch die Gleichung $z = \frac{x^2}{2b} + \frac{y^2}{2b}$, wobei $b \in \mathbb{R}, b > 0$. Wie vorher wirkt die Gewichtskraft, wir vernachlässigen die Reibung und wollen den Richtungsvektor der Normalkraft finden (dieser wird wieder von den Koordinaten der Masse, also der Position auf dem Paraboloid abhängen.)

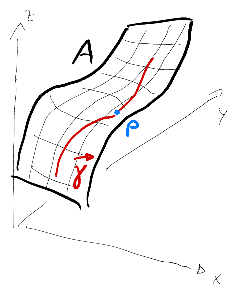


(h) Wiederholen Sie die obigen Schritte der Reihe nach. Das heißt: Stellen Sie die Zwangsbedingung als $S(x,y,z) = 0$ auf, finden Sie **zwei linear unabhängige Tangentialvektoren** $\hat{\boldsymbol{v}}_1, \hat{\boldsymbol{v}}_2$, dann den Normalenvektor $\hat{\boldsymbol{n}}$ und schließlich den Richtungsvektor der Zwangskraft. Normieren Sie alle diese Vektoren zu Einheitsvektoren.

**Hinweis:** Da wir nun in 3 Dimensionen sind, können wir eine ganze 2-dimensionale Tangentialebene an jeden Punkt des Paraboloids anlegen. Eine solche Ebene wird daher von 2 linear unabhängigen Tangentialvektoren aufgespannt. Um solche Tangentialvektoren zu finden, finden Sie zwei Kurven, die auf dem Paraboloid entlang verlaufen durch den Punkt $(x,y,z)$, also die Position der Masse. Um den Normalenvektor zu finden, erinnern Sie sich an die Eigenschaften des Kreuzprodukts!

(i) Verifizieren Sie wieder, dass $\nabla S$ parallel zur Zwangskraft steht.

Als letztes wollen wir beweisen, dass $\nabla S$ tatsächlich immer senkrecht auf der Zwangsbedingung steht, damit wir in Zukunft immer diesen direkteren Weg nehmen können. Dazu eine mathematische Vorbemerkung: Eine Zwangsbedingung der Form $S(x,y,z) = 0$ beschreibt eine zweidimensionale gekrümmte Fläche im $\mathbb{R}^3$ (formal eine Mannigfaltigkeit), die wir als Punktmenge aufschreiben können als




$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : S(x,y,z) = 0\}.$$

Diese gekrümmte Fläche war im vorherigen Beispiel gerade genau der Paraboloid.
Betrachten wir nun allgemein einen Punkt $P$ mit Koordinaten $(x_0, y_0, z_0) \in A$ auf einer solchen Fläche. Wir nehmen eine beliebige Kurve $\boldsymbol{\gamma}(s)$ her, die nur auf der Fläche $A$ entlang laufen soll. Hier ist $s \in (-a,a)$ ein beliebiges Interval um Null herum. Ein solche Kurve erfüllt

$$S(\boldsymbol{\gamma}(s)) = 0 \quad \forall s \in (-a,a)\ .$$

Die Kurve soll zusätzlich erfüllen, dass $\boldsymbol{\gamma}(s = 0) = (x_0, y_0, z_0)$. Die Kurve ist also so parametrisiert, dass sie bei $s = 0$ genau durch $P$ läuft.

(j) Zeigen Sie, dass $\nabla S$ immer senkrecht zu $A$ stehen muss, indem Sie $S(\boldsymbol{\gamma}(s)) = 0$ nach $s$ ableiten, die Kettenregel verwenden und dann die Ableitung bei $s = 0$ auswerten.

**Zusammenfassung des Gelernten:** Take-away aus dieser Aufgabe sollte für Sie sein: Der Richtungsvektor der Zwangskraft steht immer senkrecht zur durch die Zwangsbedingung definierten Fläche (oder Kurve, falls wir nur Bewegungen in 2D betrachten). Dadurch können wir die Richtung der Zwangskraft leicht über den Gradienten der Zwangsbedingung $\nabla S$ bestimmen.

(Aufgepasst: Der Gradient der Zwangsbedingung steht zwar senkrecht auf der Zwangsbedingung, könnte aber genau entgegensetzt zur Zwangskraft zeigen. Das Vorzeichen gilt es im Zweifel also händisch zu prüfen.)

Der Fakt, dass $\nabla S$ parallel zur Zwangskraft zeigt, ist im Übrigen auch der Grund dafür, dass in den Lagrange-Gleichungen 1.Art

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F} + \sum_i \lambda_i \nabla S_i$$

die Gradienten $\nabla S_i$ der Zwangsbedingungen eingehen. Hier wird implizit der Ansatz gemacht, dass die Zwangskraft $\boldsymbol{F}_{Z,i}$ von der Form $\boldsymbol{F}_{Z,i} = \lambda_i \nabla S_i$ sein muss, wobei $S_i$ die Zwangsbedigungen sind. Der Parameter $\lambda_i$, also der Betrag der Zwangskraft, muss dann noch bestimmt werden.

## Aufgabe 2: Runge-Lenz Vektor

In dieser Aufgabe beschäftigen wir uns mit einer Besonderheit des Kepler-Problems: Neben der Energie und dem Drehimpuls gibt es noch eine weitere Erhaltungsgröße. Betrachten Sie dazu ein Teilchen der Masse $m$ im Gravitationspotential $U : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, $U(r) = -\xi/r$ mit $\xi = \gamma M m$ und $\gamma$ der Gravitationskonstante, eines Objekts mit Masse $M$ und mit Drehimpuls $\boldsymbol{L}$. Der sogenannte *Runge-Lenz Vektor* ist definiert als die Größe

$$\boldsymbol{A} = \dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{L} - \gamma M m \frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

mit $r = |\mathbf{r}|$.[1]

(a) Warum liegt der Runge-Lenz Vektor $\boldsymbol{A}$ in der Bahnebene?

(b) Zeigen Sie das $\boldsymbol{A}$ eine Erhaltungsgröße ist. (*Hinweis:* Verwenden Sie $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b})$.)

[1] Eine alternative, äquivalente Definition des Runge-Lenz Vektors ist $\tilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{L} - \xi m \frac{\boldsymbol{r}}{r} = m\boldsymbol{A}$.