Freie Universität Berlin (Fachbereich Physik) 10.Dezember 2014

VL: Mi 14-16 Uhr Prof. Dr. Kathy Lüdge
UE: Mi 16-18 Uhr (2 wöchig)

4. Übungsblatt zur Nichtlinearen Dynamik

Abgabe: Mi 17.12.14 in der VL. Die Abgabe erfolgt in 2er Gruppen.

Aufgabe 7 (15 Punkte): *Chaoskontrolle – OGY-Methode*
Betrachten Sie die Henon-Map

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= a + p - x_n^2 + b\, y_n, \\ y_{n+1} &= x_n, \end{aligned}$$

mit $b = 0.3$ und $a = 1.29$. Wir verwenden die Notation $\boldsymbol{\xi}_n := (x_n,\, y_n)$ für den Zustandsvektor. In dieser Aufgabe soll ein instabiler Fixpunkt der Henon-Map stabilisiert werden, indem bei jeder Iteration der Kontrollparameter p in einem kleinen Interval $-p_* < p < p_*$ (mit $p_* = 0.2$) geeignet variiert wird.

1. Zeigen Sie, dass es einen Fixpunkt bei

   $$\boldsymbol{\xi}_F := (x_F,\, x_F), \quad \text{mit} \quad x_F = \frac{1}{2}\left(b - 1 + \sqrt{(b-1)^2 + 4(a+p)}\right)$$

   gibt und $x_F \approx 0.838486$ für $p = 0$ ist.

   Dieser Fixpunkt ist ein Sattel und soll stabilisiert werden. Berechnen Sie den Eigenwert zur instabilen Richtung λ_u mit $|\lambda_u| > 1$ und den Eigenwert zur stabilen Richtung λ_s mit $|\lambda_s| < 1$ sowie die zugehörigen normierten Eigenvektoren $\mathbf{e}_u$ und $\mathbf{e}_s$.

2. Berechnen Sie die dualen Vektoren $\mathbf{f}_u$ und $\mathbf{f}_s$, für die gilt

   $$\begin{aligned} \mathbf{f}_u \cdot \mathbf{e}_u &= 1, \qquad & \mathbf{f}_u \cdot \mathbf{e}_s &= 0, \\ \mathbf{f}_s \cdot \mathbf{e}_s &= 1, \qquad & \mathbf{f}_s \cdot \mathbf{e}_u &= 0. \end{aligned}$$

3. Berechnen Sie den Vektor $\mathbf{g}$, der angibt, wie sich der Fixpunkt $\boldsymbol{\xi}_F$ ändert, wenn p verändert wird, sowie den Schwellwert δ (siehe Teil 4.):

   $$\begin{aligned} \mathbf{g} &:= \frac{\partial}{\partial p} \boldsymbol{\xi}_F(p)\Big|_{p=0}, \\ \delta &:= p_* \left|(1 - \lambda_u^{-1})\, \mathbf{g} \cdot \mathbf{f}_u\right|. \end{aligned}$$

4. *Numerischer Teil:* Starten Sie die Iteration an einem beliebigen Punkt $\xi_0 \in [0,\, 1] \times [0,\, 1]$ mit $p = 0$ und schalten Sie nach ca. 300 Iterationen folgendes Kontrollverfahren ein:

   Überprüfen Sie nach jedem Schritt, ob die Trajektorie nahe genug am Fixpunkt ist:

   $$(\boldsymbol{\xi}_n - \boldsymbol{\xi}_F) \cdot \mathbf{f}_u < \delta$$

   und ob das Kontrollsignal

   $$p_n := \lambda_u(\lambda_u - 1)^{-1}((\boldsymbol{\xi}_n - \boldsymbol{\xi}_F) \cdot \mathbf{f}_u))/(\mathbf{g} \cdot \mathbf{f}_u)$$

   im erlaubten Interval $[-p_*,\, p_*]$ liegt. Wenn beides zutrifft, verwenden Sie das Kontrollsignal $p = p_n$, sonst setzen Sie $p = 0$ für die nächste Iteration. Plotten Sie die Zeitserien von x_n und dem Kontrollsignal p_n.

Bitte Rückseite beachten!⟶

Aufgabe 8 (5 Punkte): *Fourier-Transformation und Transferfunktion*

In dieser Aufgabe sollen einige Eigenschaften der Ableitungskontrolle und der zeitverzögerte Rückkopplungskontrolle verglichen werden. Betrachten Sie ein nichtlineares dynamisches System

$$\dot{X}(t) = f(X(t)) + u(t)$$

mit einem Kontrollsignal $u(t)$. Untersuchen Sie die Transferfunktion

$$T(\omega) = \hat{u}(\omega)/\hat{X}(\omega)$$

für die beiden Fälle

$u(t) = -\gamma \dot{X}(t)$	Ableitungskontrolle
$u(t) = \gamma[X(t-\tau) - X(t)]$	zeitverzögerte Rückkopplungskontrolle.

Hierbei sind $\hat{u}(\omega)$ und $\hat{X}(\omega)$ die Fourier-Transformierten von $u(t)$ und $X(t)$. Wie verhält sich $|T(\omega)|$ für hohe Frequenzen? Plotten Sie $|T(\omega)|$ für geeignete Werte von γ und τ für die beiden Fälle.