

Anleitung zur Fehlerrechnung

Grundsätzlich ist jedes Messergebnis mit einem Fehler behaftet. Ein wie auch immer ermittelter Messwert einer physikalischen Größe weicht immer vom idealen, wahren Wert der Größe ab. Im folgenden werden Strategien diskutiert, wie diese Abweichung minimierbar und kontrollierbar ist. Exakt (d.h. mit beliebig vielen Stellen hinter dem Komma) verschwinden kann sie nie.

Es wird zunächst unterschieden zwischen Fehlern, die systematischer oder zufälliger Art sind. Systematische Fehler beruhen auf Fehlern des Messprozesses, d.h. der Messapparatur oder seiner Anwendung. Ein Beispiel dafür ist die Längenmessung eines Objekts mit einem Maßstab, dessen Markierungen einen zu kleinen oder einen zu großen Abstand haben oder aber das Wiegen eines Objekts mit einer Federwaage, bei der die Messskala nicht korrekt an die Federkonstante angepasst ist. Diese systematischen Fehler verfälschen einen konkreten Messwert stets um einen bestimmten Betrag in dieselbe Richtung. Ein Experimentator ist also angehalten, diese systematischen Fehler hinreichend genau zu bestimmen und zu korrigieren. Diesen Vorgang bezeichnet man als Kalibrierung der Messapparatur. Dabei stellt sich automatisch die Frage, bis zu welcher Genauigkeit die Kalibrierung einer Messapparatur sinnvoll ist; denn auch hier gilt wieder, dass sie natürlich nie perfekt sein kann.

Die Antwort darauf führt uns unmittelbar zur zweiten Art von Fehlern des Messprozesses, dem zufälligen oder statistischen Fehler. Dieser äußert sich dadurch, dass die wiederholte Messung einer nominell identischen physikalischen Größe dennoch bei hinreichend genauer Betrachtung (d.h. ab einer bestimmten Nachkommastelle) Abweichungen der Messwerte voneinander zeigen wird. Diese Abweichungen sind rein statistischer Natur und begrenzen die Genauigkeit, mit der ein Messwert aus einer Messreihe ermittelt werden kann. Wir werden weiter unten sehen, dass diese Genauigkeit auch von der Anzahl der unabhängigen Messungen einer physikalischen Größe, also der Anzahl N der Messwerte in der Messreihe, abhängt und wir werden Strategien diskutieren, wie diese Genauigkeit spezifizierbar ist. Die stets verbleibende Restungenauigkeit des Messwertes nimmt allerdings lediglich reziprok-proportional zur Wurzel aus der Anzahl der Messwerte ab (es erfordert eine Vervierfachung der Messwerte, um die Messungenauigkeit zu halbieren). Ein „vernünftiger“ Messprozess, d.h. einer bei dem der Aufwand (Anzahl der Messwerte) auf ein vernünftiges Maß festgelegt wird, definiert also stets eine statistische Restungenauigkeit des Messwertes. Diese Grenze der Genauigkeit stellt gleichzeitig die Grenze für die Kalibrierung der Messapparatur dar: Es macht keinen Sinn, eine Apparatur wesentlich genauer zu kalibrieren als dem typischen statistischen Fehler einer Messung entspricht.

Die Reduktion der systematischen Fehler einer Messapparatur bzw. eines Messprozesses unter die durch den typischen statistischen Fehler definierte Grenze ist zwar ein wichtiger Aspekt jedes Messprozesses, wird jedoch i.a. in den verschiedenen Bereichen der Wissenschaft durch die Bereitstellung einer „guten“ Messapparatur sichergestellt. Der verbleibende zufällige Fehler der Messung bleibt aber ein integraler Bestandteil jeder Messung und definiert damit schlussendlich die Genauigkeit des Messergebnisses. Diesem statistischen Fehler wenden wir uns im Folgenden zu.

Wir werden dabei zwei wichtige Fälle unterscheiden. Im ersten Fall beschäftigen wir uns mit der Bestimmung einer physikalischen Größe durch wiederholte Messung (dieser Größe selbst oder von Größen, aus denen sie abgeleitet wird) unter identischen Bedingungen (direkte Messreihenauswertung).

Im zweiten für die Praxis ebenfalls wichtigen Fall wollen wir die Bestimmung einer physikalischen Größe diskutieren, die Parameter einer linearen Beziehung zwischen zwei Messgrößen ist, für die wir Messreihen aus bewusst unterschiedlichen Messwerten aufnehmen. In einer graphischen Auftragung der Messwertpaare als Punkte in einem Diagramm entsprechen diese Parameter üblicherweise Steigung und/oder Achsenabschnitt einer geeignet zu bestimmenden Ausgleichsgeraden. Die gegeneinander aufzutragenden physikalischen Größen brauchen bei diesem Verfahren nicht einmal direkte Messgrößen zu sein. Auch wenn sie erst durch geeignete mathematische Operationen (Quadrieren, Wurzel ziehen, Logarithmieren, mit anderen korrelierten physikalischen Größen kombinieren, ...) in Wertepaare verwandelt werden, die einem linearen Zusammenhang folgen sollten, erlaubt deren Auswertung die Bestimmung der Zielparame-ter durch das oben erwähnte Verfahren (lineare Regression).

1 Direkte Messreihenauswertung

1.1 Messwert und Messfehler

Wir wollen zunächst einen Messwert für eine physikalische Größe x aus einer Messreihe bestimmen, bei der dieser Wert N -mal unter identischen Bedingungen mit den Werten x_1, \dots, x_N gemessen wurde. Nach unserer obigen Vorbetrachtung ist klar, dass wir uns dem wahren Wert der physikalischen Größe bei jeder Strategie nur annähern können. Der beste Wert (statistisch: die beste Schätzung) für die wahre physikalische Größe ist tatsächlich - wie leicht zu vermuten ist - der Mittelwert der Messreihe:

$$\bar{x} = \frac{1}{N}(x_1 + x_2 + \dots + x_N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (1)$$

Die Angabe dieses Wertes beinhaltet in der Praxis bereits implizit eine Genauigkeit, die durch die Angabe der letzten Nachkommastelle festgelegt wird. Es stellt sich also sofort die Frage, wie viele Nachkommastellen des Mittelwertes angegeben werden sollen. Je mehr Stellen wir angeben, desto größer ist die Wahrscheinlichkeit, dass der wahre Wert der physikalischen Größe nicht mehr von der Messwertangabe abgedeckt wird. Geben wir immer weniger Stellen an, wird es hingegen wahrscheinlicher, den wahren Wert mit der Messwertangabe zu erfassen; der Messwert wird also **verlässlicher**, aber auf Kosten der **Genauigkeit**. Diese Betrachtung zeigt bereits ganz offensichtlich, dass die beiden Kategorien Verlässlichkeit und Genauigkeit nicht unabhängig voneinander festgelegt werden können. Die Angabe einer Genauigkeit des Messwertes erfordert also zunächst eine Entscheidung darüber, wie verlässlich die Messwertangabe sein soll. Außerdem erlaubt die implizite Angabe einer Genauigkeit über die Anzahl der Nachkommastellen wegen des Dezimalsprungs keine stufenlose Variation dieser Genauigkeit, sondern springt bei Ergänzung bzw. Unterdrückung einer Dezimalstelle um eine Faktor 10. Wir wollen deswegen im Folgenden ein Fehlerintervall um den Mittelwert der Messreihe bilden, das sich stufenlos an eine konkrete Messreihe anpasst und eine wohldefinierte statistische Bedeutung hat. Der letzte Punkt verlangt, dass wir ein statistisches Modell für die zufällige Abweichung der Messwerte vom wahren Wert annehmen müssen. Ohne weitere Vorinformationen ist dafür die übliche (und vernünftige) Annahme die einer Gaußschen Normalverteilung der Messwerte mit einer Standardabweichung σ (griech. „Sigma“) um den wahren Wert der physikalischen Größe herum.

Der Parameter σ heißt Standardfehler der Einzelmessung. Auch für ihn kann aus einer gegebenen Messreihe nur ein Schätzwert ermittelt werden. Die (statistisch) beste Schätzung s für diesen Streuparameter der einzelnen Messwerte ist i.W. die Wurzel aus deren mittlerer quadratischer Abweichung vom Mittelwert der Messreihe:

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}. \quad (2)$$

Aus subtilen statistischen Gründen wird die Summe der Quadratabweichungen hier mit $N - 1$, nicht mit N normiert. Für jede individuelle Messreihe liefert s einen etwas anderen Schätzwert für den Parameter σ . Die Werte für s werden allerdings nicht systematisch kleiner, wenn die Anzahl der Messwerte in einer Messreihe erhöht wird; dennoch erwarten wir, dass dadurch die Genauigkeit des Mittelwertes mit zunehmender Messwertzahl wohl besser wird. Ein korrektes Maß Δx für die Genauigkeit des Mittelwertes \bar{x} (als Messwert für den wahren Wert) erhält man deswegen erst, wenn s noch einmal durch die Wurzel aus der Anzahl der Messwerte geteilt wird.

$$\Delta x = \frac{s}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}. \quad (3)$$

Diese Größe Δx heißt Standardfehler **des Mittelwertes**. Wenn ohne weitere Spezifikation von Messfehler die Rede ist, ist stets dieser Standardfehler des Mittelwertes gemeint. Er wird, da s nicht systematisch von N abhängt, reziprok-proportional mit der Wurzel aus der Anzahl der Messwerte einer Messreihe kleiner. Das beschreibt den weiter oben bereits angedeuteten Gewinn an Genauigkeit, der durch Ausdehnung der Messreihe erreicht werden kann. Wir geben schließlich ein Messergebnis kompakt in der Form

$$x = \bar{x} \pm \Delta x \quad (4)$$

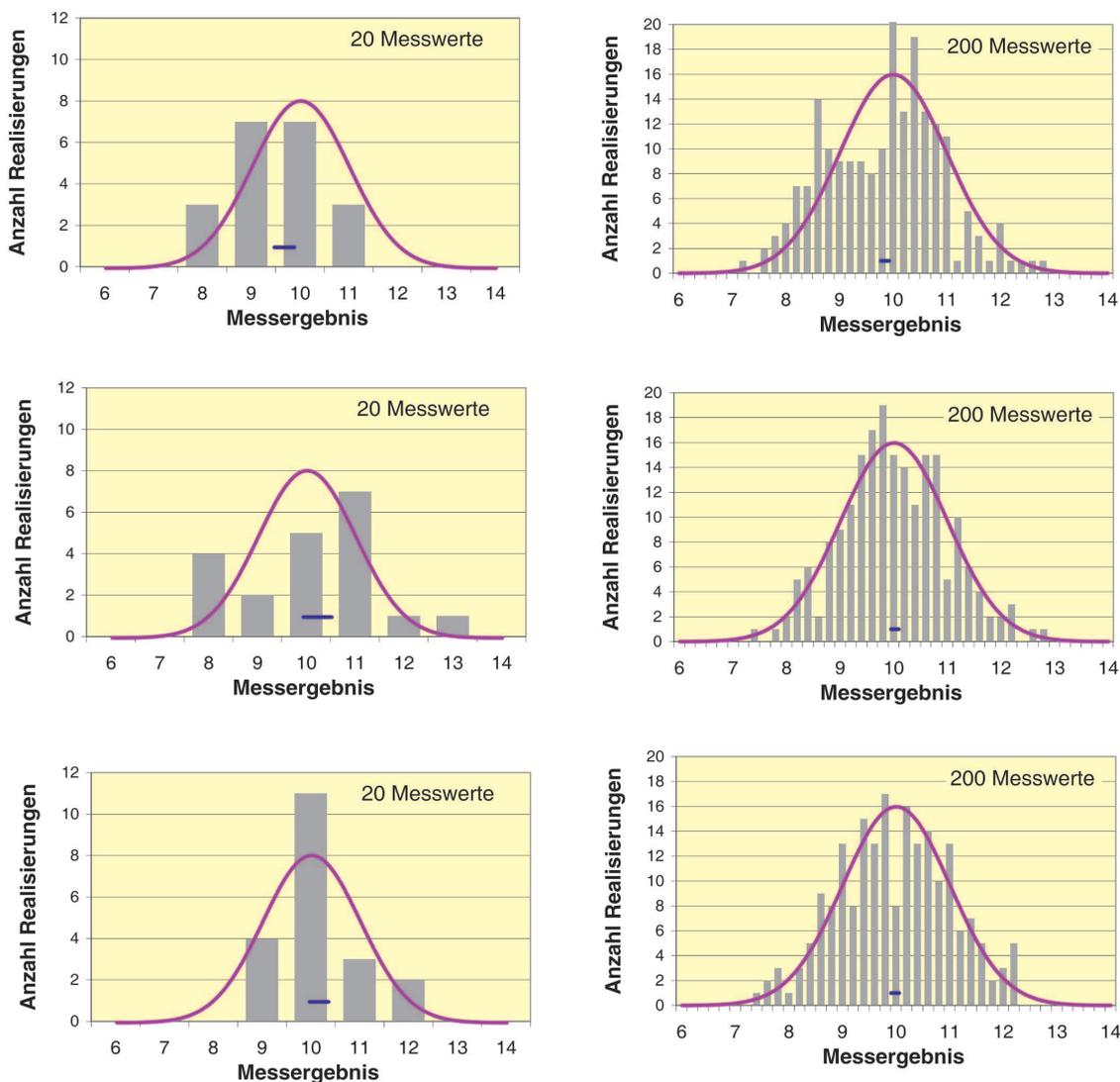


Abbildung 1: Illustration zur Ermittlung eines Messwertes aus einer Messreihe. Details dazu sind im Text beschrieben. Man beachte: Die Marken an den Abszissen entsprechen halbzahligem Werten (links) bzw. ungeraden Zehntelwerten (rechts).

mit dem Messfehler in seiner absoluten Größe oder als

$$x = \bar{x} \left[1 \pm \left(\frac{\Delta x}{|\bar{x}|} \cdot 100 \right) \% \right] \quad (5)$$

mit seinem relativen Fehler an. Wir legen damit explizit ein Intervall der Breite $2 \cdot \Delta x$ um den Mittelwert unserer Messreihe fest. Es ist dieses Intervall, nicht der Mittelwert der Messreihe allein, der das Ergebnis unserer Messung darstellt. So, wie der Standardfehler des Mittelwertes gebildet wurde, ist die Aussage „Die physikalische Größe x liegt im Intervall $\bar{x} \pm \Delta x$ “ mit einer Wahrscheinlichkeit von 68% (nicht mehr!) wahr. In etwa einem Drittel der Fälle liegt der wahre Wert einer gemessenen physikalischen Größe außerhalb des Fehlerintervalls, das durch den Standardfehler angegeben wird. Implizit ist also durch die Konstruktion von Δx die Verlässlichkeit der Messwertangabe bereits a priori auf 68% festgelegt worden. Diese Abwägung zwischen Genauigkeit und Verlässlichkeit ist allerdings nur eine (wenn auch weit verbreitete) Konvention. Falls mehr Wert auf Verlässlichkeit gelegt werden soll, kann das Intervall um den Mittelwert einer Messreihe auch verdoppelt oder verdreifacht werden. Folgt man dieser so genannten „ 2σ -Regel“ (sie müsste in unserer Notation hier eher „ 2Δ -Regel“ heißen) oder „ 3σ -Regel“, erhöht sich die Verlässlichkeit der Messwertangabe auf 95% bzw. 99,7%, freilich auf Kosten der Genauigkeit.

Abbildung 1 zeigt eine Computersimulation eines Messprozesses. Für den wahren Wert der Messgröße ist hier jeweils (ohne eine Maßeinheit) 10 angenommen worden, und es wurde eine Streuung der Messwerte um diesen wahren Wert gemäß einer Gaußfunktion („Normalverteilung“) mit der Standardabweichung $\sigma = 1,0$ mit Hilfe eines Zufallsgenerators implementiert. Auf dieser Basis wurden jeweils drei Messreihen mit 20 Messwerten (linke Spalte) und drei Messreihen mit 200 Messwerten (rechte Spalte) erzeugt und in geeignet feine Histogramme eingeordnet. Die wirkliche Wahrscheinlichkeitsdichte der Messwerte, die Gaußfunktion mit Mittelwert 10 und Standardabweichung 1, ist jeweils maßstabsgetreu zu den Histogrammen dazu gezeichnet worden.

Es fällt zunächst auf, dass die Ablesung eines Messwertes allein auf der Basis der Histogramme schwer fällt (man ignoriere dazu, so gut es geht, die durchgezogenen Kurven und schätze jeweils einen Messwert ab).

Der Messwert, der sich nach dem oben beschriebenen Verfahren aus den verschiedenen Messreihen ergibt, ist in Form des Intervalls $\bar{x} \pm \Delta x$ durch die blaue horizontale Marke in den Diagrammen wiedergegeben. Die Intervalle variieren bzgl. Lage und Breite erkennbar von Messreihe zu Messreihe. Systematisch jedoch ist erkennbar, dass der Messfehler in der rechten Spalte deutlich kleiner ist als in der linken. Das entspricht der erwarteten Skalierung mit $1/\sqrt{N}$, die hier eine Reduktion der Messgenauigkeit um einen Faktor $1/\sqrt{10} \approx 1/3$ erwarten lässt. Man erkennt ferner bei genauerer Betrachtung, dass der Messwert mit seinem Fehlerintervall den wahren Wert (10) nur jeweils in zwei der drei Fälle korrekt wiedergibt (für die linke Spalte in den oberen beiden Graphiken; in der rechten in den unteren beiden). Dies spiegelt in der Tat die Verlässlichkeit von 68% wider, welche wie oben erklärt für den Standardfehler jeweils gilt. Die Ausdehnung der Messreihe von 20 auf 200 Messwerte erhöht also nicht die Verlässlichkeit des Ergebnisses, aber dessen Genauigkeit.

Wir wollen abschließend noch einmal auf den Zusammenhang zwischen Genauigkeit und Verlässlichkeit eingehen, der bereits oben erwähnt wurde. Er kann mit statistischen Methoden abgeleitet werden und ist in der Abbildung 2 illustriert.

Je nach Anzahl der Messwerte einer Messreihe ergeben sich grundsätzlich unterschiedliche Kurven. Das ist durchaus zu erwarten: Gibt man sich mit einer vergleichsweise geringeren Anzahl von Messungen zufrieden, wird das bei unveränderter Verlässlichkeit (horizontaler Schnitt durch das Diagramm) ein größeres Fehlerintervall verlangen bzw. bei identisch gebildetem Fehlerintervall (vertikaler Schnitt durch das Diagramm) weniger verlässlich sein. Allerdings nähern sich die verschiedenen Kurven mit zunehmender Anzahl an Messungen einer Asymptote an, die von dem hier gezeigten Fall $N = 200$ praktisch nicht mehr unterscheidbar ist. Die oben erwähnten Faustregeln (1- σ -, 2- σ - und 3- σ -Regel) beziehen sich auf diese Asymptote. Für den meist verwendeten Standardfehler ist die 1- σ -Regel ab etwa fünf Messwerten praktisch erfüllt (63% statt 68% Verlässlichkeit).

2 Fehlerfortpflanzung

2.1 Das Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz

In vielen Fällen kann eine physikalische Größe Y nicht in einem Zuge durch eine Messung bestimmt werden, sondern sie kann nur rechnerisch aus (einer oder mehreren), direkt messbaren Größen X_1, \dots, X_K abgeleitet werden. Dazu muss der funktionale Zusammenhang $Y(X_1, \dots, X_K)$ natürlich bekannt sein. Wir wollen nun diskutieren, wie sich bei bekannten Messwerten $X_i \pm \Delta X_i$ ein Messwert Y und ein Standardfehler ΔY für die abgeleitete physikalische Größe ermitteln lässt.

Der bestmögliche Wert für Y (wir wollen ihn auch mit \bar{Y} abkürzen, obwohl er nicht aus einer direkten Mittelwertbildung resultiert) ergibt sich - wie zu erwarten - indem man schlichtweg die Mittelwerte \bar{X}_i der Messreihen für die Einzelmessgrößen in die Formel für Y einsetzt:

$$\bar{Y} = Y(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_K) \quad (6)$$

Den Standardfehler ΔY der abgeleiteten Messgröße Y , der dieselbe statistische Bedeutung hat wie sie oben für den Standardfehler einer direkten Messgröße beschrieben wurde, findet man mit dem so genannten Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz:

$$\Delta Y = \sqrt{\left(\frac{\partial Y}{\partial X_1} \cdot \Delta \bar{X}_1\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial X_2} \cdot \Delta \bar{X}_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial Y}{\partial X_K} \cdot \Delta \bar{X}_K\right)^2} \quad (7)$$

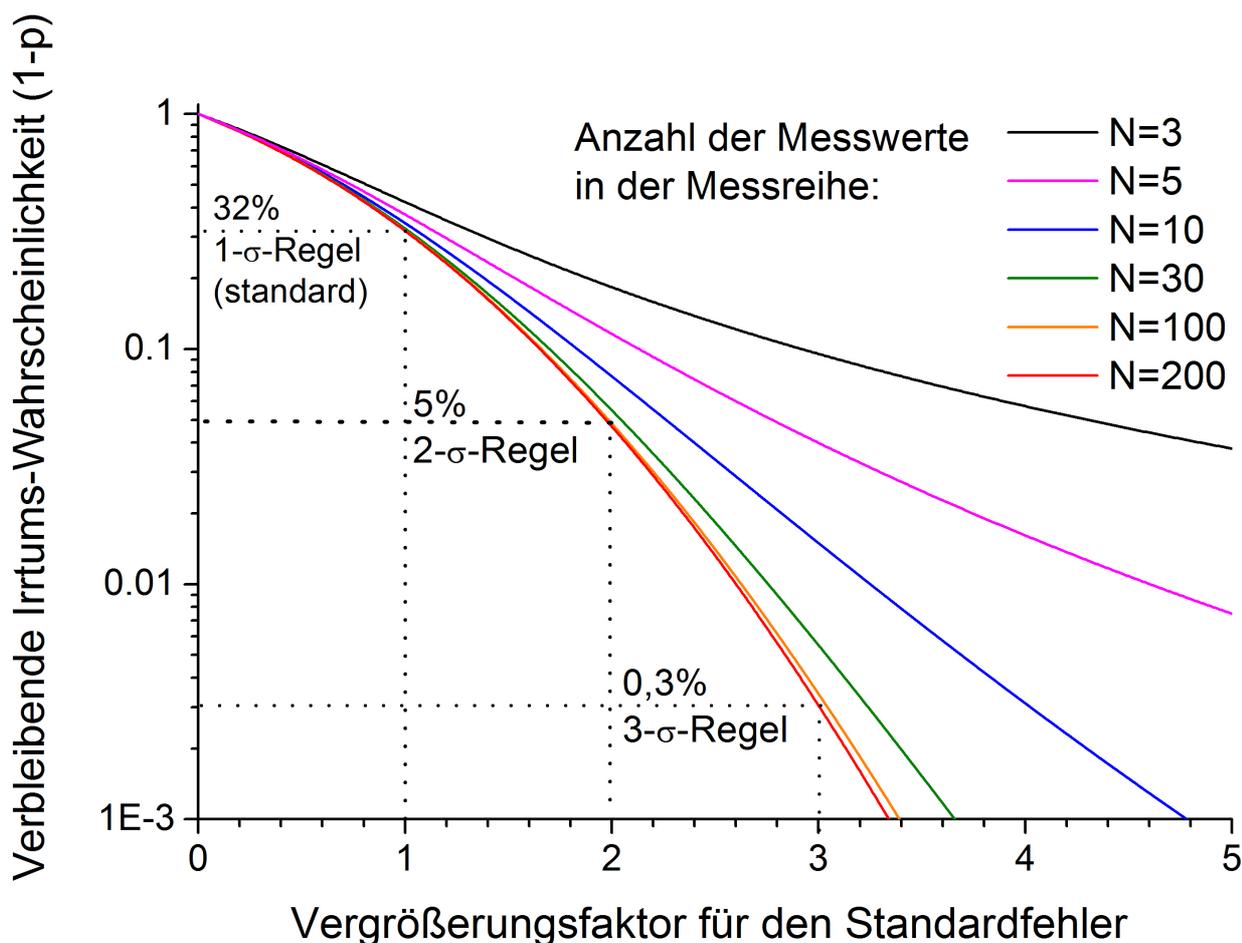


Abbildung 2: Zusammenhang zwischen Genauigkeit und Verlässlichkeit p eines Messwertes. Auf der logarithmischen Ordinate ist die komplementäre Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Messwert mit seinem Fehler den wahren Wert korrekt erfasst, aufgetragen. Die im Text erwähnten 1- σ -, 2- σ - und 3- σ -Regeln sind für den Grenzfall hinreichend vieler Messwerte einer Messreihe an Hand der gepunkteten Linien illustriert.

Es wird also die Wurzel aus den Summenquadraten von partiellen Fehlern gebildet, welche aus dem Produkt der Standardfehler der Einzelmessgrößen und der partiellen Ableitung der Funktion Y nach ebendieser Einzelmessgröße bestehen. Die partiellen Ableitungen sind dabei natürlich mit den Argumenten $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_K$ auszuwerten. Diese besondere Art der „statistischen“ Summation führt, wie man sich leicht überlegt, dazu, dass größere partielle Fehler stärker gewichtet werden als kleinere und dass die „statistische“ Summe kleiner ist, als hätte man einfach die Absolutbeträge der partiellen Fehler addiert. In seiner allgemeinen Form wird das Fehlerfortpflanzungsgesetz selten benötigt. Wir wollen deswegen die zwei wichtigsten Spezialfälle hier konkreter diskutieren.

2.2 Fehlerfortpflanzung bei additiver Verknüpfung

Oft kommt es vor, dass eine abgeleitete Messgröße aus der Summe (oder Differenz, s.u.) mehrerer direkt messbarer Größen ermittelt werden kann:

$$Y = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_K X_K. \quad (8)$$

Die c_i sind dabei positive oder negative Konstanten, im einfachsten Falle +1 oder -1. Die Auswertung des Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetzes unter Anwendung der Differentiationsregeln ergibt unmittelbar das Ergebnis

$$\Delta Y = \sqrt{(c_1 \Delta X_1)^2 + (c_2 \Delta X_2)^2 + \dots + (c_K \Delta X_K)^2}. \quad (9)$$

Im einfachsten Falle einer direkten Summe oder Differenz ($|c_i| = 1$) ergibt sich als Gesamtfehler die statistische Summe der Einzelfehler. Man beachte, dass bei einer Differenzbildung selbst bei moderaten **relativen** Einzelfehlern $\Delta X_i / |\bar{X}|$ große **relative** Fehler in der abgeleiteten Messgröße $\Delta Y / |\bar{Y}|$ entstehen können, wenn die Differenz zweier etwa gleich großer Einzelmessgrößen gebildet wird!

2.3 Fehlerfortpflanzung bei verallgemeinerter multiplikativer Verknüpfung

Der in der Praxis mit Abstand häufigste Zusammenhang zwischen physikalischen Größen ist eine verallgemeinerte multiplikative Verknüpfung

$$Y = c X_1^{m_1} \cdot X_2^{m_2} \cdot \dots \cdot X_K^{m_K}, \quad (10)$$

wobei c und m_i jeweils positive oder negative Konstanten sind. Negative Exponenten m_i decken dabei den Fall beliebiger Brüche ab. Auch hier ergibt die Auswertung des Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetzes (Produktregel der Differentiation) ein einfaches Resultat:

$$\begin{aligned} \Delta Y^2 = & c^2 \left[(m_1 \bar{X}_1^{m_1-1} \cdot \bar{X}_2^{m_2} \cdot \dots \cdot \bar{X}_K^{m_K})^2 \cdot \Delta X_1^2 \right. \\ & + (m_2 \bar{X}_1^{m_1} \cdot \bar{X}_2^{m_2-1} \cdot \dots \cdot \bar{X}_K^{m_K})^2 \cdot \Delta X_2^2 + \dots \\ & \left. + (m_K \bar{X}_1^{m_1} \cdot \bar{X}_2^{m_2} \cdot \dots \cdot \bar{X}_K^{m_K-1})^2 \cdot \Delta X_K^2 \right]. \quad (11) \end{aligned}$$

Division beider Seiten durch das Quadrat der abgeleiteten Messgröße $Y = c \bar{X}_1^{m_1} \cdot \bar{X}_2^{m_2} \cdot \dots \cdot \bar{X}_K^{m_K}$ selbst ergibt daraus nach geeignetem Kürzen

$$\frac{\Delta Y^2}{\bar{Y}^2} = m_1^2 \frac{\Delta X_1^2}{\bar{X}_1^2} + m_2^2 \frac{\Delta X_2^2}{\bar{X}_2^2} + \dots + m_K^2 \frac{\Delta X_K^2}{\bar{X}_K^2} \quad (12)$$

oder

$$\frac{\Delta Y}{|\bar{Y}|} = \sqrt{\left(m_1 \frac{\Delta X_1}{\bar{X}_1}\right)^2 + \left(m_2 \frac{\Delta X_2}{\bar{X}_2}\right)^2 + \dots + \left(m_K \frac{\Delta X_K}{\bar{X}_K}\right)^2}. \quad (13)$$

Wir können also für diesen wichtigen Fall der verallgemeinerten multiplikativen Verknüpfung eine ähnliche Fehlerfortpflanzungsregel formulieren wie für den Fall der additiven Verknüpfung, wenn wir sie statt für den Messfehler an sich für den relativen Messfehler formulieren: Der relative Messfehler einer abgeleiteten Größe ist die statistische Summe (d.h. wieder die Wurzel aus der Quadratsumme) der Exponentengewichteten Fehler der Einzelmessgrößen. Je empfindlicher eine Größe von einer Einzelmessgröße abhängt (größerer Betrag des Exponenten), desto stärker trägt deren relativer Fehler zum Gesamtfehler für die abgeleitete Größe bei. Selbst wenn eine Größe nur von einer einzigen Messgröße, jedoch mit einem von 1 (oder -1) verschiedenen Exponenten, abhängt, ist der relative Fehler der abgeleiteten Größe also um den Faktor dieses Exponenten größer als der relative Fehler der Einzelmessgröße. Ist zum Beispiel der Durchmesser einer Kugel mit einem relativen Messfehler von 5% gemessen worden, so beträgt der relative Fehler in der daraus abgeleiteten Messgröße Volumen der Kugel 15%! Wenn alle Einzelmessgrößen mit dem Exponenten 1 (oder -1) in der Formel für die abgeleitete Messgröße vorkommen, ist der relative Gesamtfehler einfach die statistische (!) Summe der relativen Einzelfehler. Dieser Fall ist in der Praxis der häufigste.

3 Messgrößenbestimmung durch lineare Regression

Wir wollen nun den oben bereits erwähnten Fall diskutieren, bei dem physikalische Größen a und b als Parameter in einem linearen Zusammenhang zweier anderer physikalischer Größen X und Y vorkommen, die ihrerseits (indirekte) Messgrößen sind und für die Wertepaare $(x_1|y_1), (x_2|y_2), \dots, (x_N|y_N)$ aus einer Messreihe vorliegen:

$$Y = b \cdot X + a \quad (14)$$

Mit dem Adjektiv „indirekt“ ist gemeint, dass der lineare Zusammenhang zwischen Y und X auch erst durch geeignete mathematische Weiterverarbeitung (z.B. Quadrieren, Wurzel ziehen, ...) direkt gemessener Größen (und entsprechende Behandlung der Wertepaare) hergestellt werden kann. Für das so genannte einfache Regressionsmodell, auf das wir uns im Folgenden beschränken wollen, wird angenommen, dass die Wertepaare der o.g. linearen Beziehung folgen, die y -Messwerte jedoch um den wahren Wert gemäß einer Normalverteilung mit Varianz σ^2 streuen. Der Parameter σ ist wie a und b zunächst unbekannt. Man beachte, dass dieses einfache Regressionsmodell die Streuung der Messwerte, die in der Realität x - und y -Werte betreffen kann, ersatzweise nur den y -Werten zuschreibt. Dennoch beschreibt dieses Modell Verlässlichkeit und Genauigkeit der aus den Messwertpaaren $(x_i|y_i)$ bestimmten Parameter a und b im Allgemeinen ausreichend gut. Das einfachste lineare Regressionsverfahren besteht in der graphischen Auftragung der $(x_i|y_i)$ -Wertepaare und der Anpassung einer Ausgleichsgerade mit dem Auge. Auch die Verlässlichkeit der dann aus Achsenabschnitt und Steigung ablesbaren Parameter a und b kann zumindest abgeschätzt werden, indem eine „knapp erkennbar falsche“ Ausgleichsgerade zum Vergleich ausgewertet wird.

Wir wollen jedoch im Folgenden ein rechnerisches Verfahren diskutieren, mit dem Messwert und Fehler für a und b quantitativ ermittelt werden können.

Mit den Abkürzungen $\bar{x} = \sum_{i=1}^N x_i/N$ und $\bar{y} = \sum_{i=1}^N y_i/N$ für die Mittelwerte der Messwerte, $\langle x^2 \rangle = \langle x \cdot x \rangle = \sum_{i=1}^N x_i^2/N$ für den Mittelwert der x -Messwertquadrate und $\langle x \cdot y \rangle = \sum_{i=1}^N x_i \cdot y_i/N$ für den Mittelwert der Messwertpaarprodukte ergeben sich als beste Werte

$$B = \frac{\langle x \cdot y \rangle - \bar{x}\bar{y}}{\langle x^2 \rangle - \bar{x}^2} \quad (15)$$

für den Parameter b und

$$A = \bar{y} - B \cdot \bar{x} \quad (16)$$

für den Parameter a .

In den meisten Taschenrechnern mit Statistikfunktionen sind genau diese Beziehungen für die Auswertung einer linearen Regression einprogrammiert.

Damit sind zwar die optimalen Werte für die gesuchten Parameter und damit die physikalischen Zielgrößen der Auswertung gefunden, allerdings fehlt dazu noch der Fehler, um die Genauigkeit der Auswertung zu spezifizieren. Er ergibt sich aus der mittleren quadratischen Abweichung s^2 der y -Werte um die zu erwartenden, mit A und B aus den x -Werten berechneten Werte:

$$s = \sqrt{\sum_{i=1}^N (y_i - Bx_i - A)^2 / N}. \quad (17)$$

Dieser Wert ist zugleich die beste Schätzung für den o.g. Parameter σ . Die Fehlerintervalle für die Parameter ergeben sich aus s durch folgende Skalierungen:

$$\Delta B = s \cdot \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}} \quad (18)$$

und

$$\Delta A = s \sqrt{\frac{\langle x^2 \rangle}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}}. \quad (19)$$

Diese beiden Fehler treten an die Stelle der Standardfehler der Mittelwerte, wie sie aus der oben beschriebenen direkten Auswertung einer Messreihe resultieren. Die statistische Bedeutung der mit dem linearen Regressionsmodell ermittelten Fehler ist dieselbe: Mit einer Wahrscheinlichkeit von 68% liegen die physikalischen Größen a und b in den Intervallen $A \pm \Delta A$ und $B \pm \Delta B$. Die mittlere Streuung s der gemessenen y -Werte um die erwarteten Werte wird nicht systematisch mit der Anzahl der Messwertpaare abnehmen.

Man erkennt deswegen aus den Formeln für ΔA und ΔB sofort, dass auch bei der linearen Regression beide Messfehler - wie zu erwarten - mit zunehmender Anzahl von Messwerten kleiner werden. Allerdings zeigen die Formeln ebenfalls, dass sie auch umso kleiner werden, je größer der Bereich der x -Werte für die Messwertpaare gewählt wird. Bedenkt man, dass hier Achsenabschnitt und Steigung einer Geraden ermittelt werden, ist auch das unmittelbar einsichtig!