

KAPITEL III

Radioaktivität

III.1	Grundbegriffe der Radioaktivität. Zerfallsgesetz	57
III.1.1	Zerfallsgesetz	57
III.1.2	Radioaktivität als zufälliger Prozess	59
III.1.3	Radioaktive Zerfallsreihen	61
III.2	Natürlich vorkommende Radioisotope	65
III.3	Arten der Radioaktivität	67
III.3.1	Erhaltungsgrößen in Zerfällen	67
III.3.2	α -Zerfall	67
III.3.3	β -Zerfall und verwandte Zerfälle	75
III.3.4	γ -Zerfall	80
III.3.5	Andere Zerfallsarten	82
	Anhang zum Kapitel III	89
III.A	α -Zerfall: Berechnung der Tunnelwahrscheinlichkeit	89

Unter dem Begriff der Radioaktivität versteht man eine natürliche oder künstliche Kernumwandlung, wobei ein Ausgangsnuklid — hiernach auch „Mutterkern“ genannt — sich in ein Zerfallsprodukt — den „Tochterkern“ — durch die Emission von sog. „Strahlung“ umwandelt. Diese Kerntransmutation ist ein zufälliger Vorgang, der in erster Näherung durch äußere Umstände — wie die Temperatur, den Druck, ein elektrisches bzw. magnetisches Feld, usw. — nicht zu beeinflussen ist (s. Bemerkung unten). Wegen des Auftretens des Zufalls bei den einzelnen Prozessen genügt die Anzahl von radioaktiven Nukliden einer Substanz ein einfaches Zerfallsgesetz, das in Abschn. III.1 zusammen mit einigen Definitionen vorgestellt wird. Dort werden auch Zerfallsreihen diskutiert, die auftauchen, wenn das Produkt eines radioaktiven Zerfallsprozesses selbst instabil ist.

Radioaktive Atomkerne sind definitionsgemäß instabil und sollen daher irgendwann zerfallen, nichtsdestotrotz kommen jedoch ein paar davon in der Natur in messbarer Menge vor (Abschn. III.2). Einige solche Nuklide lassen sich für eine wichtige Anwendung der Radioaktivität verwenden, und zwar die Datierung der Entstehung von Substanzen bzw. Systemen. Schließlich befasst sich Abschn. III.3 mit den verschiedenen natürlich auftretenden Arten von radioaktiven Zerfallsprozessen bei Atomkernen.

Bemerkung: Einige der in diesem Kapitel diskutierten Prozesse können auch *induziert* werden, insbesondere solche, die durch die Existenz einer Potentialbarriere zwischen Anfangs- und Endzustand verzögert sind, und daher über Tunneleffekt stattfinden (α -Zerfall, induzierte Spaltung...). Dabei kann Energiezufuhr zu einer niedrigeren Barriere führen und somit die Zerfallswahrscheinlichkeit bzw. -rate erhöhen. Damit die Änderung signifikant ist, soll die zugeführte Energie der Ordnung 1–5 MeV pro Nuklid sein, entsprechend schon extremen — aus dem irdischen Gesichtspunkt — physikalischen Bedingungen wie z.B. Temperaturen von etwa $1 \text{ MeV}/k_B \approx 10^{10} \text{ K}$, weshalb Radioaktivität als „unabhängig von äußeren Umständen“ vorgestellt wird. Solche induzierten Prozesse, die neben dem Ausgangsnuklid noch die Anwesenheit eines weiteren Teilchens im Anfangszustand

voraussetzen, werden mit Ausnahme des Elektroneneinfangs (§III.3.3 c) nicht in diesem Kapitel behandelt.⁽⁴¹⁾

III.1 Grundbegriffe der Radioaktivität. Zerfallsgesetz

Einige Überlegungen der ersten zwei Kapitel — über die ungleichen Bindungsenergien pro Nukleon von unterschiedlichen Kernen (§ I.3.2) oder die Möglichkeit, Nukleonen auf höhere Energieniveaus anzuregen (Abschn. II.4) — legen die Existenz von instabilen Nukliden nahe, aus denen die Nukleonen über irgendeinen Prozess in einen stabileren Zustand übergehen können. Solche instabilen Kerne werden als *radioaktiv* bezeichnet, oder auch *Radioisotope* bzw. *Radionuklide* genannt.

III.1.1 Zerfallsgesetz

Aus Beobachtungen ermittelten Rutherford und Soddy 1902 das Gesetz der zeitlichen Abnahme der Anzahl von radioaktiven Nukliden einer bestimmten Spezies. Sei $N(t)$ diese Zahl zum Zeitpunkt t . Im Zeitintervall dt zwischen t und $t + dt$ sinkt $N(t)$ gemäß dem *Zerfallsgesetz*

$$dN(t) = -\lambda N(t) dt, \quad (\text{III.1})$$

unter den Gültigkeitsbedingungen $N(t) \gg 1$ und $dt \lesssim \mathcal{O}(1/\lambda)$. Die Proportionalitätskonstante λ heißt *Zerfallskonstante* bzw. manchmal *Zerfallsrate*. Die Unabhängigkeit der Radioaktivität von den äußeren Umständen entspricht der Gleichmäßigkeit von λ .

Bemerkung: Das Gesetz (III.1) entspricht einfach einer Bilanzgleichung, die voraussetzt, dass sich die Anzahl der zerfallenden Nuklide nur über Zerfall ändert. Insbesondere werden hier die Kerne nicht durch einen anderen Prozess erzeugt.

Durch eine sofortige Integration führt das Zerfallsgesetz (III.1) zu

$$N(t) = N(t_0) e^{-\lambda(t-t_0)} = N_0 e^{-\lambda t}, \quad (\text{III.2})$$

mit $N_0 = N(0)$.

Das Zerfallsgesetz (III.1) bzw. (III.2) ist ein experimentelles Faktum. Unter relativ minimalen Ansätzen über den zugrundeliegenden Elementarprozess kann es möglicherweise „motiviert“ werden (vgl. § III.1.2).

III.1.1 a Mittlere Lebensdauer, Halbwertszeit

Die durchschnittliche Zeit,⁽⁴²⁾ nach der ein Kern einer mit der Zerfallskonstante λ gegebenen Spezies zerfällt, ist die sog. *mittlere Lebensdauer*.

Man betrachte eine Menge von N_0 Kernen zur Zeit $t = 0$. Die $-dN(t)$ Kerne, die zwischen den Zeitpunkten t und $t + dt$ zerfallen, sind genau solche mit einer „Lebensdauer“ t — genauer handelt es sich um deren Überlebensdauer. Somit wird die „mittlere“⁽⁴²⁾ Lebensdauer der bei $t = 0$ anwesenden Kerne durch

$$\tau \equiv \frac{\int_0^{N_0} t dN(t)}{\int_0^{N_0} dN(t)} = \frac{1}{N_0} \int_0^{+\infty} t \lambda N(t) dt = \lambda \int_0^{+\infty} t e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} \quad (\text{III.3})$$

gegeben, wobei das Zerfallsgesetz (III.1) bzw. die Abhängigkeit (III.2) in der zweiten bzw. dritten Gleichung benutzt wurde.

⁽⁴¹⁾Induzierte Spaltung wird im folgenden Kapitel (Abschn. IV.1) diskutiert.

⁽⁴²⁾Eine sinnvolle statistische Deutung dieses Ausdrucks erfordert die Einführung einer Wahrscheinlichkeitsdichte, wie in Abschnitt III.1.2 stattfinden wird.

Als *Halbwertszeit* einer radioaktiven Substanz bezeichnet man die Zeitdauer $T_{1/2}$, während deren die Anzahl von radioaktiven Kernen um den Faktor $\frac{1}{2}$ abnimmt. Mithilfe des Zerfallsgesetzes (III.2) ergibt sich einfach

$$T_{1/2} = \tau \ln 2 = \frac{\ln 2}{\lambda}. \quad (\text{III.4})$$

III.1.1 b Aktivität

In den meisten experimentellen Fällen werden weder die Anzahl von Kernen $N(t)$ noch deren durch Gl. (III.1) gegebene Abnahme direkt gemessen. Stattdessen misst man eher die Anzahl der Zerfälle in einem Zeitintervall, sowie deren Nachlassen, durch die Detektion der zugehörigen emittierten Strahlung.

Die Anzahl von Zerfälle pro Zeiteinheit heißt *Aktivität* und wird durch

$$A(t) \equiv \lambda N(t) \quad (\text{III.5})$$

gegeben. Aus Gl. (III.2) folgt für die Aktivität einer Menge von zerfallenden Radionukliden, die nicht wieder erzeugt werden

$$A(t) = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = A_0 e^{-\lambda t}, \quad (\text{III.6})$$

mit $A_0 = A(0)$, d.h. die Aktivität einer zerfallenden Substanz nimmt in diesem Fall exponentiell ab.

Die SI-Einheit der Aktivität ist das Becquerel (Bq): $1 \text{ Bq} \equiv 1$ Zerfall pro Sekunde. (Eine veraltete Einheit ist 1 Ci (Curie) = $3,7 \cdot 10^{10}$ Bq.)

Aus Messungen der Aktivität einer Kernspezies zu aufeinanderfolgenden Zeitpunkten ergibt sich deren Zerfallskonstante λ einfach:

- bei t_1 wird $A(t_1) = A_0 e^{-\lambda t_1}$ gemessen;
- und bei t_2 ist die Aktivität $A(t_2) = A_0 e^{-\lambda t_2}$.

Dann lautet deren Verhältnis $A(t_1)/A(t_2) = e^{-\lambda(t_1-t_2)}$, woher die Zerfallskonstante sofort folgt:

$$\lambda = \frac{\ln[A(t_1)/A(t_2)]}{t_2 - t_1}.$$

Bemerkung: Der Vergleich der Form (III.2) des Zerfallsgesetzes mit der Zeitentwicklung (III.6) der Aktivität ergibt $A(t) = -dN(t)/dt$, was oft als Definition der Aktivität angenommen wird. Dieser einfache Zusammenhang zwischen der Rate der Zerfälle und der Zeitableitung der Anzahl von Kernen gilt aber nur, wenn $N(t)$ durch keinen anderen Prozess – wie z.B. die Zufuhr von zusätzlichen Kernen – beeinflusst wird. In § III.1.3 werden Beispiele von realistischen Fällen gegeben, in denen die Aktivität (III.5) von $-dN/dt$ abweicht.

III.1.1 c Zerfallskanäle

Ein gegebenes Nuklid weist oft mehrere Zerfallsarten mit unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten auf; z.B. kann es durch entweder α - oder β -Emission zerfallen. Diese verschiedenen Möglichkeiten werden als *Zerfallskanäle* bezeichnet.

In einem solchen Fall wird für jeden Zerfallskanal i eine *differentielle Zerfallskonstante* λ_i definiert. Das Zerfallsgesetz lautet dann

$$dN(t) = - \sum_i \lambda_i N(t) dt. \quad (\text{III.7})$$

Im Vergleich zur Gl. (III.1) wird dann die *totale* Zerfallsrate durch $\lambda = \sum_i \lambda_i$ gegeben.

Sinngemäß wird jedem vorhandenen Zerfallskanal eine differentielle mittlere Lebensdauer τ_i bzw. Halbwertszeit $T_{1/2,i}$ bzw. Aktivität A_i zugeordnet.

Das Verhältnis λ_i/λ einer partiellen Zerfallsrate zur gesamten Rate heißt *Verzweigungsverhältnis* (auf Englisch *branching ratio*, kurz BR).

Bemerkung: Falls eine Substanz verschiedene Zerfallskanäle hat, aber nur eine einzige Strahlungsart gemessen wird, so wird aus dem Nachlassen der Aktivität immer die totale Rate λ bestimmt.

Man betrachte z.B. eine Spezies, die i - und j -Strahlung mit jeweiligen Raten λ_i und λ_j emittiert. Sei angenommen, dass nur die Anzahl von i -Zerfälle gemessen wird, entsprechend der partiellen Aktivität $A_i(t) = \lambda_i N(t)$, während die j -Zerfälle nicht beobachtet werden, sodass deren Aktivität $A_j(t)$ unbekannt ist. Die totale Aktivität, die der Abnahme der Anzahl von Kernen $N(t)$ entspricht, lautet

$$A(t) = \lambda N(t) = \lambda_i N(t) + \lambda_j N(t) = \left(\frac{\lambda_i}{\lambda} + \frac{\lambda_j}{\lambda} \right) \lambda N(t) = \left(\frac{\lambda_i}{\lambda} + \frac{\lambda_j}{\lambda} \right) A(t),$$

$$\text{d.h. } A_i(t) = \frac{\lambda_i}{\lambda} A(t).$$

Messungen der differentiellen Aktivität A_i zu verschiedenen Zeitpunkten liefern dann

- bei t_1 : $A_i(t_1) = \frac{\lambda_i}{\lambda} A(t_1)$ und
- bei t_2 : $A_i(t_2) = \frac{\lambda_i}{\lambda} A(t_2)$,

woher sich $\ln \frac{A_i(t_1)}{A_i(t_2)} = \ln \frac{A(t_1)}{A(t_2)} = \lambda(t_2 - t_1)$ ergibt, was zur Bestimmung von λ führt! \square

Eine Messung der differentiellen Raten λ_i , λ_j erfordert die Kenntnis des Verhältnisses der differentiellen Aktivitäten, $A_i(t)/A_j(t) = \lambda_i/\lambda_j$, was die Detektion der beiden Strahlungsarten erfordert.

III.1.2 Radioaktivität als zufälliger Prozess

Dieser Paragraph ist nur für Mathe-Fans und auf keinen Fall prüfungsrelevant

Das experimentell beobachtete Zerfallsgesetz lässt sich mithilfe einer Annahme über den der Radioaktivität zugrunde liegenden Elementarprozess „erklären“, und zwar unter Nutzung des „stets wie neu“ Ansatzes für das radioaktive Nuklid:

Die *bedingte* Wahrscheinlichkeit, dass ein gegebener Kern bis zum Zeitpunkt $t_0 + t$ überlebt, wenn er schon bis zum Zeitpunkt t_0 überlebt hat, ist gleich der unbedingten Wahrscheinlichkeit, dass er vom Zeitpunkt 0 bis zum Zeitpunkt t überlebt.

Bemerkung: Die folgende Herleitung ist zwar mathematisch korrekt, sollte aber physikalisch vielleicht nicht zu ernsthaft genommen werden.

Mithilfe der Einführung einer *Zufallsvariable* T — die dem Zeitpunkt des Zerfalls entspricht — mit dem Zustandsraum $[0, +\infty[$ und der Wahrscheinlichkeit $\mathcal{P}[T \leq t]$, dass T einen Wert kleiner als die *Realisation* t annimmt, lautet der Ansatz

$$\mathcal{P}[T > t_0 + t | T > t_0] = \mathcal{P}[T > t] \quad \text{für } t, t_0 \geq 0. \quad (\text{III.8})$$

Natürlich ist $\mathcal{P}[T > t] = 1 - \mathcal{P}[T \leq t]$ die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable einen Wert größer als t annimmt. In Gl. (III.8) und im Folgenden bezeichnet $\mathcal{P}[\mathbf{a} | \mathbf{b}]$ die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis \mathbf{a} auftritt, vorausgesetzt, das Ereignis \mathbf{b} aufgetreten ist. Dazu heißt $\mathcal{P}[T > t]$ *Überlebensfunktion* der Variable t , während $\mathcal{P}[T \leq t]$ die entsprechende *Verteilungsfunktion* von t ist.

Zufälliges Verhalten eines Atomkerns

Zuerst kann man beweisen, dass T eine exponentiell verteilte Zufallsvariable ist. Sei S eine Funktion der Variable t , die für beliebiges reelles t durch $S(t) = \mathcal{P}[T > t]$ definiert wird.

- Da T nur positive Werte annehmen kann, ist $S(t) = 1$ für $t \leq 0$.

- Für $t, t_0 \geq 0$ gilt $S(t + t_0) = \mathcal{P}[T > t + t_0] = \mathcal{P}[T > t + t_0] \frac{\mathcal{P}[T > t_0]}{\mathcal{P}[T > t_0]}$.

Die Konjunktion $(T > t + t_0) \wedge (T > t_0)$ ist gleich dem Ereignis $(T > t_0)$; daher kann $\mathcal{P}[T > t + t_0]$ durch $\mathcal{P}[(T > t + t_0) \cup (T > t_0)]$ in diesem Ausdruck ersetzt werden.

Gemäß dem Bayes'schen Satz ist das Verhältnis dieser gemeinsamen Wahrscheinlichkeit zu $\mathcal{P}[T > t_0]$ die bedingte Wahrscheinlichkeit $\mathcal{P}[T > t + t_0 | T > t_0]$, die laut dem stets-wie-neu Ansatz (III.8) gleich $\mathcal{P}[T > t]$ ist, sodass

$$S(t + t_0) = \mathcal{P}[T > t] \mathcal{P}[T > t_0] = S(t)S(t_0). \quad (\text{III.9})$$

Diese Identität ist (bis auf einige mathematische Feinheiten) die Charakterisierung der Exponentialfunktion, d.h. es existiert λ , sodass $S(t) = e^{-\lambda t}$ für $t \geq 0$. Außerdem ist $S(t)$ für jedes t definitionsgemäß eine Wahrscheinlichkeit, d.h. λ darf nicht negativ sein. Letztendlich ist die Zerfallszeit T nicht unendlich, sodass $\lambda > 0$.

Schließlich gilt somit

$$\mathcal{P}[T > t] = \begin{cases} e^{-\lambda t} & \text{für } t \geq 0 \\ 1 & \text{für } t < 0 \end{cases}, \quad (\text{III.10})$$

d.h. die Lebensdauer T ist exponentiell verteilt mit dem Parameter $\lambda > 0$.

Die zugehörige Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung ist

$$f(t) = -\frac{d}{dt}S(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases},$$

woher sich der Erwartungswert $E[T] = \frac{1}{\lambda}$ und die Varianz $V[T] = \frac{1}{\lambda^2}$ der Zufallsvariable T ergeben.

Zufälliges Verhalten einer Atomkernmenge

Es seien jetzt N_0 identische (instabile) Kerne zum Zeitpunkt $t = 0$. Die Anzahl $N(t)$ von Kernen, die bis zum Zeitpunkt t überleben, ist für $t \geq 0$ eine Zufallsvariable.

Das Verhalten dieser Zufallsvariable — z.B. die Wahrscheinlichkeit $\mathcal{P}[N(t) = k]$, dass k Kerne zum Zeitpunkt t noch überleben — hängt von der oben hergeleiteten Überlebensfunktion eines Kerns $S(t) = e^{-\lambda t}$ ab.

Dabei braucht man genau gesagt eine weitere Annahme, und zwar, dass die Zerfallszeiten t_1, t_2, \dots der verschiedenen Kerne Realisationen von *statistisch unabhängigen* Zufallsvariablen (mit derselben Überlebensfunktion $S(t)$) sind. Dann hat jeder einzelne Kern die Wahrscheinlichkeit $S(t)$, bis zum Zeitpunkt t zu überleben, bzw. die Wahrscheinlichkeit $1 - S(t)$, vor dem Zeitpunkt t zu zerfallen, sodass die Wahrscheinlichkeit $\mathcal{P}[N(t) = k]$ durch die Binomialverteilung mit den Parametern N_0 und $e^{-\lambda t}$ gegeben ist:

$$\mathcal{P}[N(t) = k] = \begin{cases} \binom{N_0}{k} (e^{-\lambda t})^k (1 - e^{-\lambda t})^{N_0 - k} & \text{für } k = 0, 1, \dots, N_0; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (\text{III.11})$$

Aus bekannten Eigenschaften der Binomialverteilung ist dann der Erwartungswert von $N(t)$

$$E[N(t)] = N_0 e^{-\lambda t}, \quad (\text{III.12})$$

zusammen mit der Varianz $V[N(t)] = N_0 e^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})$.

Der Erwartungswert (III.12) entspricht offensichtlich dem Zerfallsgesetz (III.2)! Letzteres beschreibt also das „mittlere Verhalten“ von der Anzahl $N(t)$ der bei t noch anwesenden Kerne.

Analog findet man, dass die Anzahl $D(t)$ von Kernen, die bis zum Zeitpunkt t zerfallen, mit den Parametern N_0 und $1 - e^{-\lambda t}$ binomialverteilt ist,⁽⁴³⁾ sodass $E[D(t)] = N_0(1 - e^{-\lambda t})$, deren Ableitung

$$\frac{d}{dt}E[D(t)] = \lambda N_0 e^{-\lambda t}$$

die „Rate der Zerfälle zum Zeitpunkt t “ (d.h. die Aktivität) ergibt.

⁽⁴³⁾Dies folgt sofort von der trivialen Identität (in eindeutiger Schreibweise) $\mathcal{P}[D(t) = k] = \mathcal{P}[N(t) = N_0 - k]$.