

oder

$$\boxed{|\bar{M}|^2 \approx 2e^4 \frac{s^2 + u^2}{t^2}} \quad (6.14)$$

Das Ergebnis stimmt mit dem früher erhaltenen Resultat für Helizitätsamplituden überein.

- Der Wirkungsquerschnitt ist proportional zum Quadrat der Ladung an jedem Vertex, für $e\mu$ Streuung also proportional zu $q_e^2 q_m^2 = e^4$.
- Der Nenner t ist der Photon-Propagator und unterdrückt Streuung mit großem 4-er Impulsübertrag.
- Der Term mit s^2 entsteht durch Streuung mit entgegengesetzten Spins, so dass der Gesamtspin $J_Z = 0$ ist, denn s beinhaltet keine Winkelinformation (isotrop, da keine Richtung ausgezeichnet ist).
- Der Term mit u entspricht demnach Streuung mit $J_Z = 1$, also gleichgerichteten Spins der einlaufenden Teilchen.

Mit

$$t \approx -\frac{s}{2}(1 - \cos\Theta^*) \quad \text{und} \quad u \approx -\frac{s}{2}(1 + \cos\Theta^*) \quad (6.15)$$

folgt im CMS für ultrarelativistische Streuung

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2} \frac{1}{s} \frac{p_f}{p_i} |\bar{M}|^2 \quad (6.16)$$

$$= \frac{1}{64\pi^2 s} 2e^4 \frac{1 + \left(\frac{1 + \cos\Theta^*}{2}\right)^2}{\left(\frac{1 - \cos\Theta^*}{2}\right)^2} \quad (6.17)$$

Das Resultat ist in Fig. 6.3 gezeigt.

6.2 Crossing

Alle QED Prozesse hängen von Strömen wie $j^\mu = q\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$ ab. Ähnliche Rechnungen für andere $2 \rightarrow 2$ Prozesse lassen sich daher durch "Crossing" aus dem $e\mu \rightarrow e\mu$ Wirkungsquerschnitt ableiten.

Für den t-Kanal Prozess

$$e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^- \quad (6.18)$$

$$p_1 + p_2 = p_3 + p_4 \quad (6.19)$$

6.2 Crossing

ergab sich

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{-e^2}{(p_1 - p_3)^2} (\bar{u}_3 \gamma^\mu u_1) (\bar{u}_4 \gamma_\mu u_2) \\
 |\bar{M}|^2 &= \frac{e^4}{(p_1 - p_3)^4} \sum_{s_1, s_3} (\bar{u}_3 \gamma^\mu u_1) (\bar{u}_3 \gamma^\nu u_1)^* \sum_{s_2, s_4} (\dots 24) \\
 &= \frac{e^4}{(p_1 - p_3)^4} \text{Spur}((\not{p}_1 + m_1) \gamma^\mu (\not{p}_3 + m_3)) \gamma^\nu \text{Spur}(\dots 24) \\
 &= \frac{8e^4}{\underbrace{(p_1 - p_3)^4}_{t^2}} \left[\underbrace{(p_1 p_2)(p_3 p_4)}_{s^2/4} + \underbrace{(p_1 p_4)(p_2 p_3)}_{u^2/4} - \underbrace{p_1 p_3}_{-t/2} m_2^2 - \underbrace{p_2 p_4}_{-t/2} m_1^2 + 2m_1^2 m_2^2 \right]
 \end{aligned} \tag{6.20}$$

mit $m_1 = m_3$ und $m_2 = m_4$. Entscheidend war die Vollständigkeitsrelation

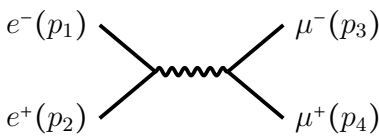
$$\sum_s u_s \bar{u}_s = \not{p} + m, \quad \sum_s v_s \bar{v}_s = \not{p} - m \tag{6.21}$$

Für ähnliche Ströme mit Teilchen und Antiteilchen-Spinoren gilt

$$\begin{aligned}
 \sum_{s_1, s_3} (\bar{u}_3 \gamma^\mu u_1) (\bar{u}_3 \gamma^\nu u_1)^* &= \text{Spur}((\not{p}_1 + m_1) \gamma^\mu (\not{p}_3 + m_3) \gamma^\nu) \\
 \bar{v}_3 \quad v_1 \quad \bar{v}_3 \quad v_1 &= \quad \quad \quad - \quad \quad - \\
 \bar{v}_3 \quad u_1 \quad \bar{v}_3 \quad u_1 &= \quad \quad \quad + \quad \quad - \\
 \bar{u}_3 \quad v_1 \quad \bar{u}_3 \quad v_1 &= \quad \quad \quad - \quad \quad +
 \end{aligned} \tag{6.22}$$

Wendet man dies z.B. auf den s -Kanal Prozess

$$e^-(p_1) + e^+(p_2) \rightarrow \mu^-(p_3) + \mu^+(p_4) \tag{6.23}$$



$$M = \frac{-e^2}{(p_1 + p_2)^2} (\bar{v}_2 \gamma^\mu u_1) (\bar{u}_3 \gamma_\mu v_4) \tag{6.24}$$

an, so folgt

Abb. 6.2
Paarproduktion im s -Kanal

$$\begin{aligned}
 |\bar{M}|^2 &= \frac{e^4}{(p_1 + p_2)^4} \text{Spur}((\not{p}_2 - m_2) \gamma^\mu (\not{p}_1 + m_1) \gamma^\nu) \text{Spur}((\not{p}_3 + m_3) \gamma_\mu (\not{p}_4 - m_4) \gamma_\nu) \\
 &= \frac{8e^4}{\underbrace{(p_1 + p_2)^4}_{s^2}} \left[\underbrace{(p_1 p_3)(p_2 p_4)}_{\approx t^2/4} + \underbrace{(p_1 p_4)(p_2 p_3)}_{\approx u^2/4} + \underbrace{p_3 p_4}_{\approx s/2} m_1^2 + \underbrace{p_1 p_2}_{\approx s/2} m_3^2 + 2m_1^2 m_3^2 \right]
 \end{aligned} \tag{6.25}$$

und, für kleine Massen ($m_1 = m_2$, $m_3 = m_4$),

$$\boxed{|\bar{M}|^2 \approx 2e^4 \frac{t^2 + u^2}{s^2}} \tag{6.26}$$

Man sieht, dass zwischen t - und s -Kanal für kleine Massen eine Crossing-Relation besteht, bei der im Endergebnis lediglich

$$p_2 \leftrightarrow -p_3 \tag{6.27}$$

vertauscht werden müssen. Anschaulich interpretiert bedeutet dies, dass ein einlaufendes Teilchen mit Impuls p durch ein auslaufendes Antiteilchen mit Impuls $-p$ ersetzt werden kann. Dies entspricht der Antiteilchen-Interpretation in der Dirac-Gleichung. Die Vertauschung von $p_2 \leftrightarrow -p_3$ bei der Ableitung des s -Kanal Prozesses aus dem t -Kanal Prozess bedeutet, dass man (in ultrarelativistischer Näherung) s und t vertauschen muss.

t -Kanal	\leftrightarrow	s -Kanal
$t = (p_1 - p_3)^2$	\leftrightarrow	$(p_1 + p_2)^2 = s$
$s = (p_1 + p_2)^2$	\leftrightarrow	$(p_1 - p_3)^2 = t$
$u = (p_3 - p_2)^2$	\leftrightarrow	$(p_2 - p_3)^2 = u$
$ \bar{M} ^2 \approx 2e^4 \frac{s^2 + u^2}{t^2}$	\leftrightarrow	$ \bar{M} ^2 \approx 2e^4 \frac{t^2 + u^2}{s^2}$

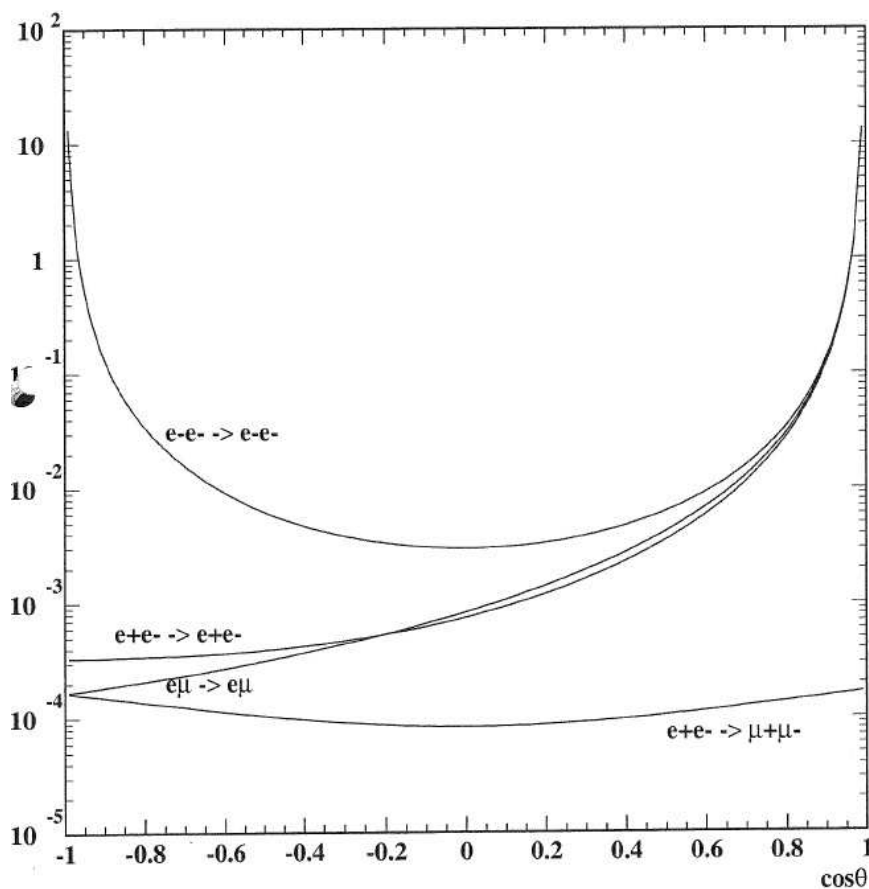
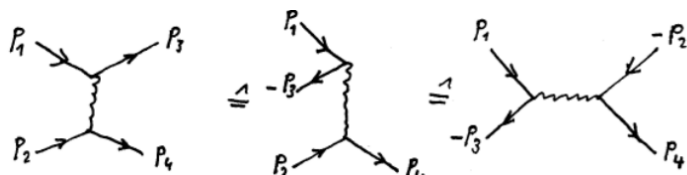
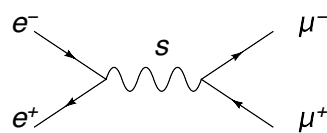


Abb. 6.3 Winkelverteilungen der elementaren QED Prozesse. Gezeigt ist $d\sigma/d\Omega$ in willkürlichen Einheiten.

6.3 Übersicht der elementaren QED-Prozesse

Aus diesen und ähnlichen Relationen lassen sich alle elementaren Matrixelemente und Wirkungsquerschnitte für $2 \rightarrow 2$ Prozesse mit Fermionen im Anfangs- und Endzustand aus der Rechnung für $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ ableiten. Die folgende Tabelle gibt einen Überblick. Die entsprechenden Winkelverteilungen in Abb. 6.3 sind hauptsächlich durch den Propagator geprägt, der im t -Kanal hohe Impulsüberträge unterdrückt und dementsprechend kleine Streuwinkel stark bevorzugt. Im s -Kanal ist die Streuung dagegen symmetrisch für Vorwärts- und Rückwärtsstreuung. Einen zusätzlichen Faktor liefern die Spins der ein- und auslaufenden Teilchen.

1.) Paar-Vernichtung und Paar-Erzeugung

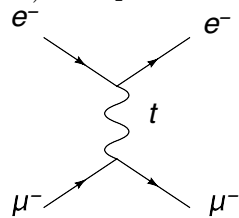


$$e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$$

$$|\bar{M}|^2 \approx 2e^4 \frac{u^2+t^2}{s^2} \approx (1 + \cos^2\Theta)$$

für unpolarisierte $e^- e^+$
symmetrisch in $\cos\Theta^*$

2.) 'Periphere' Streuung

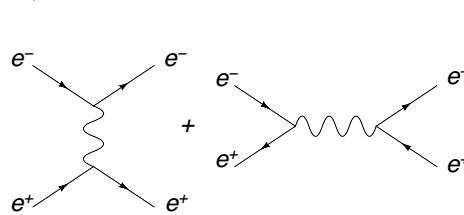


$$e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$$

$$|\bar{M}|^2 \approx 2e^4 \frac{s^2+u^2}{t^2}$$

Peak in Vorwärts-Richtung

3.) Bhabha - Streuung

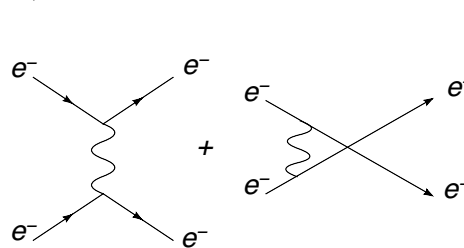


$$e^- e^+ \rightarrow e^- e^+$$

$$|\bar{M}|^2 \approx 2e^4 \left(\frac{s^2+u^2}{t^2} + \frac{2u^2}{t \cdot s} + \frac{u^2+t^2}{s^2} \right)$$

Zwei Diagramme mit gleichem Anfangs- und Endzustand
→ Interferenz von zwei Feynman-Amplituden
($|M_1 + M_2|^2$)

4.) Möller - Streuung: identische Fermionen



$$e^- e^- \rightarrow e^- e^-$$

$$|\bar{M}|^2 \approx 2e^4 \left(\frac{s^2+u^2}{t^2} + \frac{2s^2}{t \cdot u} + \frac{s^2+t^2}{u^2} \right)$$

Zwei Diagramme mit identischen Teilchen von verschiedenen Vertizes
→ negative Interferenz
($|M_1 - M_2|^2$)
Peak in Vorwärts- und Rückwärts- Richtung

Insbesondere bei der Bhabha-Streuung und der Möller-Streuung

$$e^-e^+ \rightarrow e^-e^+ \quad (6.28)$$

$$e^-e^- \rightarrow e^-e^- \quad (6.29)$$

ergeben sich zwei mögliche unterscheidbare Feynman-Diagramme. In diesen Fällen müssen die Matrixelemente der beiden Diagramme - getrennt für jede Spin-Konfiguration - erst addiert werden und dann das Betragsquadrat gebildet werden.

$$M = M_1 + M_2 \quad \Rightarrow \quad |M|^2 = |M_1 + M_2|^2 \quad (6.30)$$

Dies gilt immer dann, wenn sowohl die Anfangs- als auch die Endzustände beider Diagramme ununterscheidbar sind. Es ergibt sich dadurch ein sog. Interferenzterm $\sim M_1M_2^* + M_2M_1^*$.

6.4 Experimentelle Tests der Quanten-Elektrodynamik

Beim PETRA Beschleuniger am DESY wurde mit Schwerpunktsenergien bis $\sqrt{s} \leq 46$ GeV die Winkelverteilungen $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ gemessen. In diesem Energiebereich sind Effekte durch den Photon-Austausch noch deutlich größer als Effekte durch den Z^0 -Austausch der schwachen Wechselwirkung.

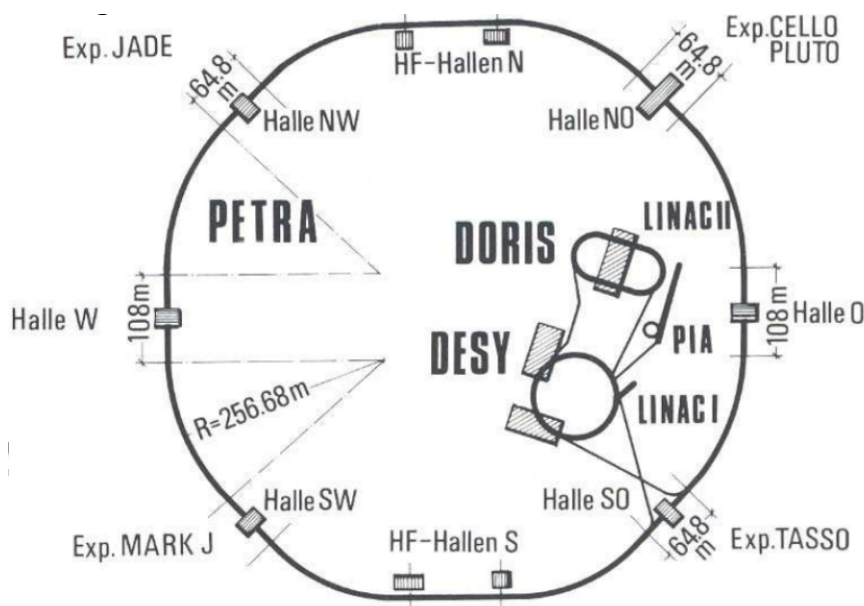


Abb. 6.4 PETRA-Beschleuniger bei DESY

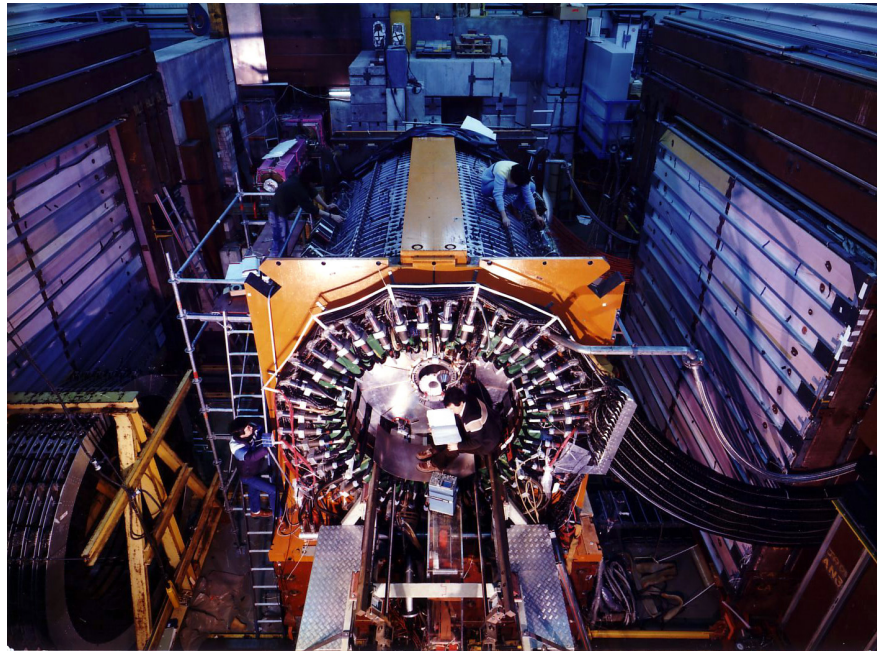


Abb. 6.5 JADE-Experiment bei PETRA

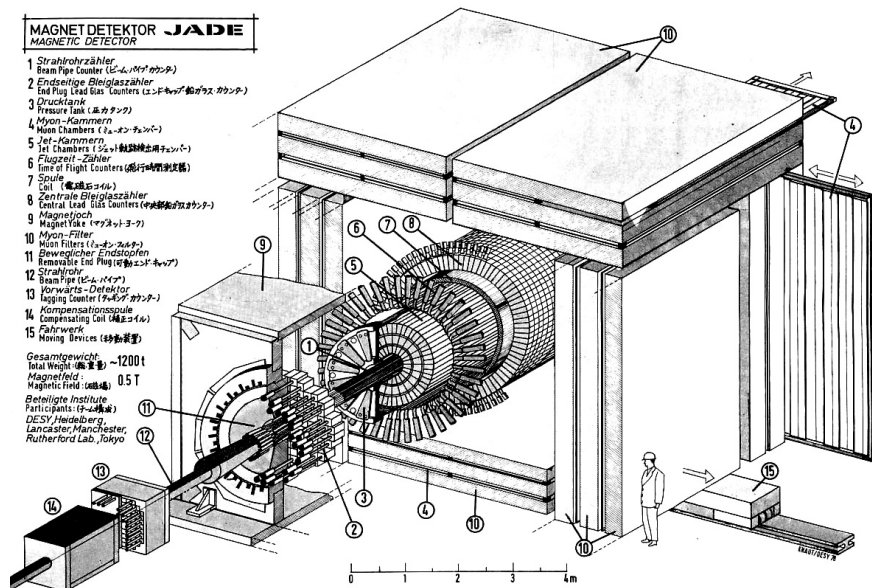


Abb. 6.6 JADE-Experiment bei PETRA

Der totale Wirkungsquerschnitt für $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ ergibt sich aus dem differentiellen durch Integration über den Raumwinkel,

$$\sigma = \frac{4\pi}{3} \frac{\alpha^2}{s} \approx 100 \text{nb} \cdot \frac{\text{GeV}^2}{s} \quad (6.31)$$

mit $\hbar c = 1 = 0,2 \text{GeV} \text{ fm}$ und der Feinstrukturkonstanten¹⁴

$$\alpha_{em} = \frac{e^2}{4\pi}$$

¹⁴ Bei diesen hohen Energien ist aufgrund der Renormierung der Quantenkorrekturen die Zahlenwert für $\alpha_{em} \approx 1/128$ bereits deutlich größer ist als der aus der Atomphysik bekannte Wert $1/137$.

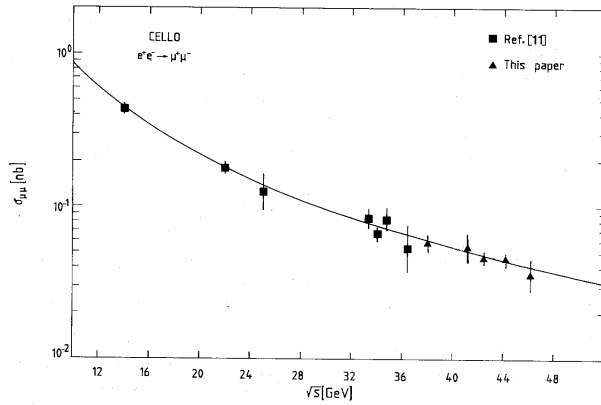


Abb. 6.7 Totaler Wirkungsquerschnitt σ für $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ als Funktion der Schwerpunktsenergie \sqrt{s} . Daten der Cello und Jade Kollaboration am PETRA Beschleuniger (Phys.Lett 191B (1987)).

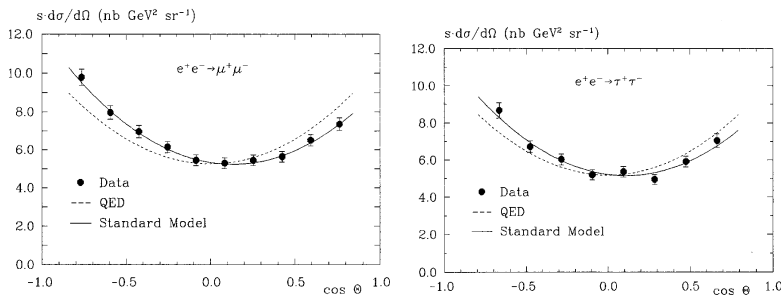


Abb. 6.8 Differentieller Wirkungsquerschnitt $s \cdot d\sigma/d\Omega$ für $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ (links) und für $e^+e^- \rightarrow \tau^+\tau^-$ (rechts) als Funktion des Streuwinkels Θ bei $\sqrt{s} = 35$ GeV. Daten der Jade Kollaboration am PETRA Beschleuniger (Z. Phys. C 46, 547-553 (1990)).

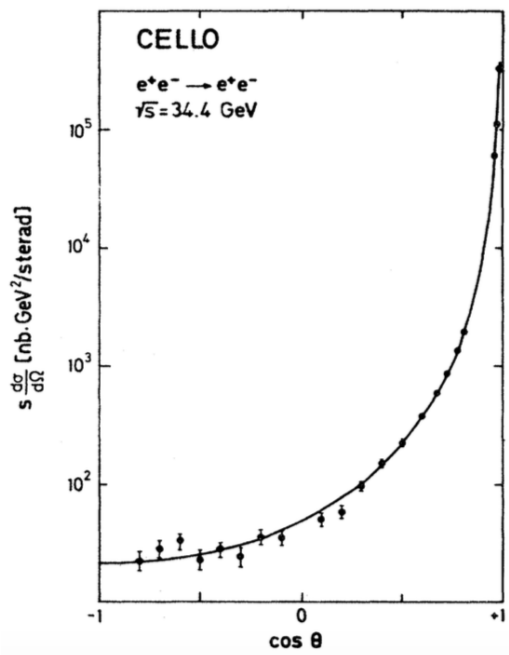


Abb. 6.9 Bhabha-Streuung: Differentieller Wirkungsquerschnitt $s \cdot d\sigma/d\Omega$ für $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ als Funktion des Streuwinkels Θ bei 34.4 GeV. Daten der CELLO Kollaboration am PETRA Beschleuniger.

Wie in Abb. 6.7 gezeigt fällt der Wirkungsquerschnitt mit der Schwerpunktsenergie, $\sigma \sim 1/s$, wie von der QED und auch aus Dimensionsgründen vorhergesagt. Bei $\sqrt{s} = 46$ GeV ist der Wirkungsquerschnitt 0.047 nb, die effektive Reichweite der Wechselwirkung also etwa 1000 mal kleiner als der Radius eines Protons. Dies schränkt sehr stark die Hypothese einer Substruktur des Elektrons oder Muons ein.

Die mit s normierte Winkelverteilung $s \cdot \frac{d\sigma}{d\Omega}$ für Paarproduktion von Muonen und Taus ist in Abb. 6.8 gezeigt. Die im Vergleich gezeigte Erwartung für reine QED beschreibt annähernd die Daten. Allerdings kann man bereits bei diesen \sqrt{s} Werten den Z^0 Austausch der schwachen Wechselwirkung nicht mehr vernachlässigen. In der Summe beschreibt QED und schwache Wechselwirkung die Daten sehr gut.

Abb. ?? zeigt die Winkelverteilung für Bhabha-Streuung, $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$. Auch hier stimmen die Daten sehr gut mit der QED-Erwartung, die auf der Interferenz zweier Matrixelemente (Feynmandiagramme) beruht, überein.

Auch gezeigt ist die Winkelverteilung für den Prozess $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$, dessen Feynman-Diagramm im Gegensatz zu den anderen Prozessen einen Fermion - Propagator beinhaltet. Auch hier wird die QED bestätigt. Insgesamt findet man bereits bei Rechnungen in führender Ordnung häufig Genauigkeiten im % Bereich.

6.5 Drell-Yan Prozess

In der Hadron-Hadron Streuung (πp , $p\bar{p}$ oder pp) beobachtet man die Erzeugung von Lepton-Paaren, z.B.

$$\bar{p}p \rightarrow \mu^+\mu^- + \text{Hadronen} \quad (6.32)$$

Die beiden Leptonen zusammen haben weniger Energie als die Schwerpunktsenergie. Im CMS-System der beiden Muonen beobachtet man als Winkelverteilung

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \sim 1 + \cos^2 \Theta^* \quad (6.33)$$

(für Energien kleiner als die Z^0 Energie, siehe Abb. 6.10), Hier ist Θ^* der Winkel der Muonen relativ zur Achse der Strahlteilchen im Schwerpunktsystem der beiden Muonen. Dies ist die gleiche Winkelverteilung wie beim Prozess $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$, so dass man folgern muss, dass die in die Reaktion einlaufenden Teilchen den gleichen Spin haben wie Elektronen. Dies ist einer der wichtigsten Hinweise auf Spin 1/2 Teilchen (Quarks) in Hadronen, die sich vernichten können,

$$q\bar{q} \rightarrow \mu^+\mu^- \quad (6.34)$$

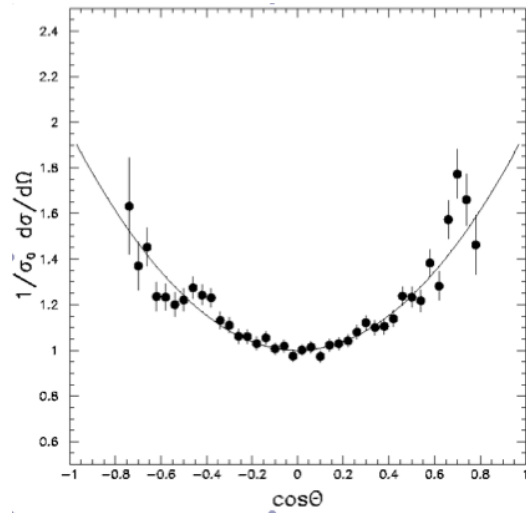


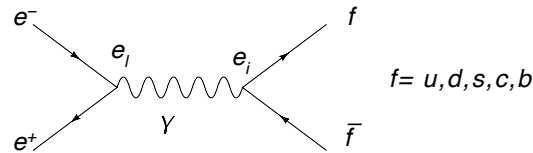
Abb. 6.10 Normierte Winkelverteilung $1/\sigma_0 d\sigma/d\Omega$ als Funktion des Streuwinkels $\cos\Theta^*$ von Myonen im Prozess $\pi p \rightarrow \mu^+\mu^- + X$. Der Winkel Θ^* ist gemessen im Schwerpunktsystem der beiden Myonen.

6.6 Erzeugung von Hadronen in der QED

Zur Untersuchung der Eigenschaften der Hadronen und Quarks eignet sich besonders der Prozess

$$e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen}$$

und als Messgröße das Verhältnis von hadronischem zu leptonischem Wirkungsquerschnitt.



$$R = \frac{\sigma_{e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen}}}{\sigma_{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-}} \quad (6.35)$$

Unter der Annahme, dass man die Produktion von Hadronen durch die Produktion von Quarks mit anschließendem Übergang (Wahrscheinlichkeit 1) der Quarks in Hadronen erklären kann (QCD Faktorisierung), gilt

$$R = \frac{\sigma_{e^+e^- \rightarrow u\bar{u}, d\bar{d}, s\bar{s}, c\bar{c}, b\bar{b}, t\bar{t}}}{\sigma_{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-}} = \frac{\sum_q |\bar{M}_q|^2 dQ_q}{|\bar{M}_\mu|^2 dQ_\mu} \quad (6.36)$$

Bei $\sqrt{s} \approx 30\text{GeV}$ kann man den Z^0 Austausch vernachlässigen gegenüber dem γ -Austausch, so dass R sensitiv ist auf

- die elektrische Ladung der Quarks

6.6 Erzeugung von Hadronen in der QED

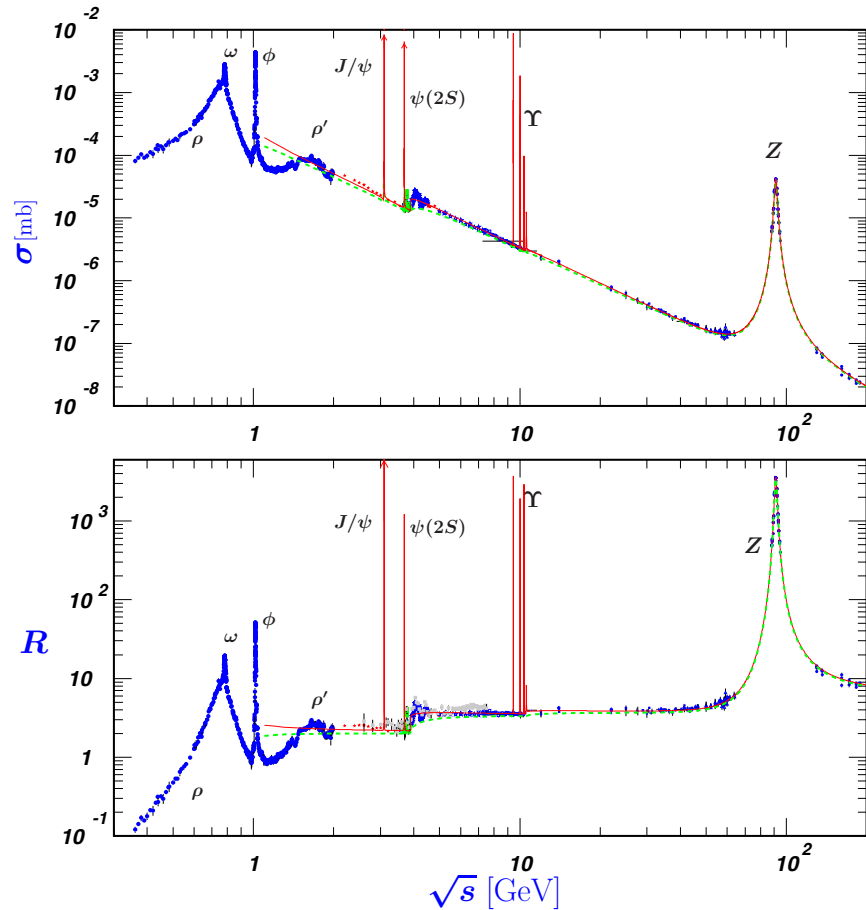


Abb. 6.11 Oben: Wirkungsquerschnitt für $e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen}$ als Funktion der Schwerpunktsenergie. Unten: Verhältnis R der Wirkungsquerschnitte von $e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen}$ und $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$.

- den Spin der Quarks
- die Masse der Quarks

Die Massen gehen unter anderem in das Verhältnis der Phasenraumfaktoren ein,

$$\frac{dQ(m_q)}{dQ(m_\mu)} \approx \frac{dQ(m_q)}{dQ(m_\mu=0)} = \frac{p_f(m_q)}{p_f(m_\mu=0)} = \frac{\sqrt{E^2 - m_q^2}}{\sqrt{E^2}} = \sqrt{1 - \frac{4m_q^2}{s}} \quad (6.37)$$

das schnell gegen 1 geht für $E = \frac{1}{2}\sqrt{s} > m_q$.

Das Matrixelement für Spin 1/2 Quarks ist bis auf die elektrische Ladung gleich dem für Muonen, so dass

$$|M|^2 \sim e_e^2 e_f^2 \quad (6.38)$$

Teilchen	μ	u	d	c	s	b	t
Ladung	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

$\leftarrow 2m_t > \sqrt{s}!$ verboten

Damit folgt

$$R_{QED} = \frac{e_u^2 + e_d^2 + e_s^2 + e_c^2 + e_b^2}{e_\mu^2} = \frac{\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}}{1} = \frac{11}{9} \quad (6.39)$$

Die Messung kann wie folgt interpretiert werden:

- $R \approx$ konstant für $10\text{GeV} \leq \sqrt{s} \leq 30\text{GeV}$. Demnach hat die elektromagnetische WW hat gleiche Struktur für μ und Quarks.
- Die kinematische Schwellen (Stufen) in R treten auf, wenn $\sqrt{s} > 2m_q$, da dann ein neuer Endzustand für Quarks möglich ist.
- Der Wirkungsquerschnitt in Hadronen wird um einen Faktor 3 größer gemessen als nur aufgrund der elektrischen Ladung zu erwarten war. Dies ist verständlich, wenn die Quarks einen inneren Freiheitsgrad (Farbe) besitzen, der in drei Zuständen auftritt, so dass sich die Anzahl der Endzustände entsprechen erhöht (Phasenraum). Für drei Farben folgt

$$R = \frac{33}{9}.$$

Dies ist einer der stärksten Hinweise auf Quarks mit Farbe.

Aus der Messung sind auch folgende Korrekturen ablesbar, da R nicht exact $\frac{33}{9}$ ist.

1. Nahe der kinematischen Schwelle $\sqrt{s} = 2m_q$ für neue Quarks haben die entstehenden Quarks nur wenig kinetische Energie, so dass gebundenen Zustände als Resonanzen angeregt werden können, z.B. $e^-e^+ \rightarrow J/\Psi$ ($J/\Psi = c\bar{c}$ und $\Upsilon = b\bar{b}$). Nahe der Schwelle ist auch der Phasenraum nicht groß genug, so dass die Erzeugung der Quarks und die Hadronisierung nicht unabhängig sind.
2. Der leichte Abfall von R zwischen $\sqrt{s} \approx 15\text{GeV}$ und 30GeV ist ein Beitrag höherer Ordnung durch die starke WW, der nur für Quarks auftritt, so dass

$$R = R_{QED} \left(1 + \frac{\alpha_s}{\pi} + \dots \right) \quad (6.40)$$

Der Wert von $\alpha_s \approx 0.12$ fällt dabei leicht als Funktion der Energie im Prozess.

3. Der Anstieg für $\sqrt{s} \geq 30\text{GeV}$ ist der Beitrag durch Z^0 - Austausch. Da die Kopplung $Z_{\mu\mu}$ nicht gleich derjenigen für $Z_{q\bar{q}}$ ist steigt R , denn der Z^0 Beitrag aufgrund der unterschiedlichen Propagatoren wird größer mit \sqrt{s} .
Propagator:

$$\gamma: \frac{1}{s} \quad Z^0: \frac{1}{s - M_z^2 + \dots} \quad (6.41)$$

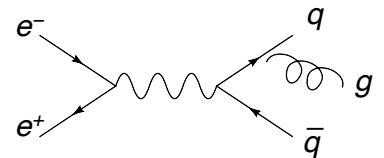


Abb. 6.12
3-Jet-Prozess in der e^+e^- -Streuung.