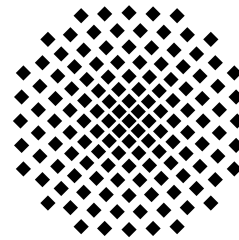




5. Physikalisches Institut



Universität Stuttgart

---

Staatsexamen

# Analogieversuch zur Quantenmechanik mit Wasserwellen

FELIX STREICH  
MAT.-NR. 2558136

18. Oktober 2016

Prüfer: Prof. Dr. Tilman Pfau  
Betreuer: Dr. Robert Löw



---

## Erklärung der Selbständigkeit

---

Ich erkläre, dass ich die Arbeit selbständig angefertigt und nur die angegebenen Hilfsmittel benutzt habe. Alle Stellen, die dem Wortlaut oder dem Sinn nach anderen Werken, gegebenenfalls auch elektronischen Medien, entnommen sind, sind von mir durch Angabe der Quellen als Entlehnung kenntlich gemacht. Entlehnungen aus dem Internet sind durch Angabe der Quelle und des Zugriffsdatums sowie dem Ausdruck der ersten Seite belegt; sie liegen zudem für den Zeitraum von 2 Jahren entweder auf einem elektronischen Speichermedium im PDF-Format oder in gedruckter Form vor.

Stuttgart, den 18.10.2016

Felix Streich





---

# Inhaltsverzeichnis

---

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Physikalische Grundlagen</b>	<b>3</b>
2.1	Physik der Wasserwellen . . . . .	3
2.1.1	Lineare Wellentheorie . . . . .	4
2.1.2	Nichtlineare Wellentheorie . . . . .	8
2.2	Quantenmechanische Grundlagen . . . . .	9
2.2.1	Postulat 1: Wellenfunktionen . . . . .	9
2.2.2	Heisenberg'sche Unschärfe . . . . .	10
2.2.3	Operatoren . . . . .	12
2.2.4	Postulat 2: Schrödingergleichung . . . . .	13
2.3	Quantenmechanische Beschreibung des Wasserstoffatoms . . . . .	15
2.3.1	Lösung der Azimutalgleichung . . . . .	17
2.3.2	Lösung der Polargleichung . . . . .	17
2.3.3	Lösung der Radialgleichung . . . . .	18
2.3.4	Rydberg-Atome . . . . .	22
2.4	Didaktischer Hintergrund . . . . .	23
2.4.1	Bildungsstandards . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Experimentelle Aufbauten und Konstruktionen</b>	<b>25</b>
3.1	Prototyp 1 . . . . .	27
3.2	Prototyp 2 . . . . .	29
3.2.1	Veränderung der Flüssigkeit . . . . .	31
3.3	Endgültiger Aufbau . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Messungen</b>	<b>35</b>
4.1	Prototyp 1 . . . . .	35
4.2	Prototyp 2 . . . . .	37
4.2.1	Zentraler Anreger . . . . .	37
4.2.2	Ringförmiger Anreger . . . . .	38
4.3	Endgültiger Aufbau . . . . .	39
4.3.1	Bodenprofil 1 . . . . .	40
4.4	Fehler . . . . .	42

5	Zusammenfassung und Ausblick	43
A	Begleittext zum Experiment	I
B	Baupläne	III
	Literaturverzeichnis	i
	Abbildungsverzeichnis	v
	Tabellenverzeichnis	vii
	Danksagung	ix

# KAPITEL 1

---

## Einleitung

---

Die Quantenmechanik ist faszinierend und gleichzeitig so wenig intuitiv, dass ihre Reichweite selbst von ihren Erfindern angezweifelt wurde. Vielmehr widerspricht sie teilweise sogar unserer Erfahrungswelt. Vor allem ist es für Lehrer kompliziert, Schülerinnen und Schülern eine Theorie zu vermitteln, die in ihrer Umwelt nicht direkt erlebbar ist. Somit bleibt entweder die Möglichkeit auf einer abstrakten, mathematischen Ebene zu verweilen, die vermutlich nur eine geringe Aussicht auf Lernerfolg verzeichnen wird, oder man greift auf Analogien zurück [13].

Analogien sind bereits fester Bestandteil der Physikdidaktik. Sie treten zum Beispiel in der Mechanik (Impuls - Drehimpuls) oder in der Elektronik (Stromkreis - Wasserkreis) auf. Für die Quantenmechanik existieren auch bereits Analogien [19] (quantenmechanische Zustände - stehende Schallwellen), allerdings ist die Anschaulichkeit ohne Hilfsmittel wie PCs häufig nicht gegeben. Mithilfe von Wasserwellen soll in dieser Arbeit eine quantenmechanische Analogie erarbeitet werden, die direkt beobachtbar ist und zuzätzlich auf Probleme der Atomphysik anwendbar ist. Stehende Wasserwellen mit einer nach außen zunehmenden Wellenlänge können genutzt werden, um den Radialteil der Aufenthaltswahrscheinlichkeit darzustellen. Dies soll hier erprobt werden.

Im Kapitel 2 sollen dafür die Grundlagen der Wasserwellenphysik dargestellt werden. Dabei werden zuerst verschiedene Wellentypen charakterisiert um anschließend eine Formulierung für die Wellenlänge in Abhängigkeit der Wassertiefe aufstellen zu können. Außerdem sollen in diesem Kapitel kurz die benötigten Grundlagen der Quantenmechanik, insbesondere der Zustandswahrscheinlichkeit, dargestellt werden, um diese anhand des Wasserstoffatoms beispielhaft anzuwenden. Zuletzt wird ein Einblick in die Didaktik der Quantenmechanik gegeben, um den hier realisierten Versuch einordnen zu können.

Kapitel 3 befasst sich mit den verschiedenen Aufbauten der Prototypen und Schaulversuchs.

Die Messergebnisse, die an den Aufbauten erstellt wurden werden in Kap.4 dargestellt, diskutiert und bewertet.



# KAPITEL 2

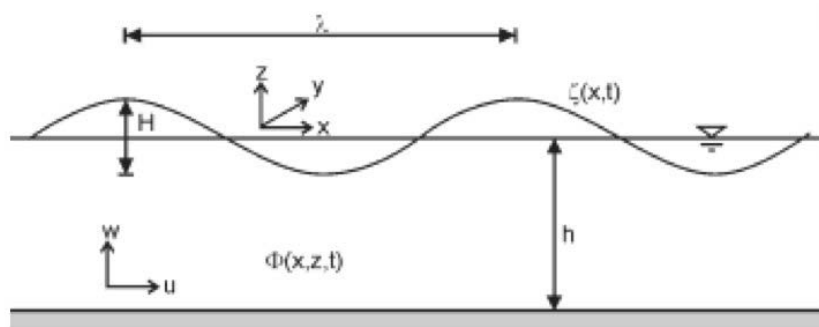
## Physikalische Grundlagen

### 2.1 Physik der Wasserwellen

Wasserwellen sind ein faszinierendes Naturphänomen. Die physikalische Erklärung und vor allem die mathematischen Theorien sind durchaus anspruchsvoll. Daher orientieren sich die folgenden Abschnitte an [18] und [6].

Allgemein kann man Wasserwellen in zwei Kategorien unterteilen [12]:

- Lineare Wellentheorie  
Die Wellen weisen eine geringe Steilheit auf. Das heißt, die Amplitude der Welle ist deutlich geringer als die Wellenlänge.
- Nichtlineare Wellentheorie  
Wellen ab einer gewissen Steilheit lassen sich nicht mehr durch trigonometrische Funktionen beschreiben.



**Abbildung 2.1:** Physikalische Größen zur Beschreibung einer Wasserwelle, entnommen aus [18]

Vereinfacht lässt sich eine Wasserwelle als monochromatische Welle mit der Amplitude  $A$  über der Ruhelage ausdrücken, wie sie in Abb.2.1 dargestellt ist. Es ergibt sich für die Oberflächenauslenkung  $\Psi$ :

$$\Psi = \Psi(\vec{x}, t) = A \cdot \cos(\vec{k}\vec{x} - \omega t + \varphi) \quad (2.1)$$

Mit:

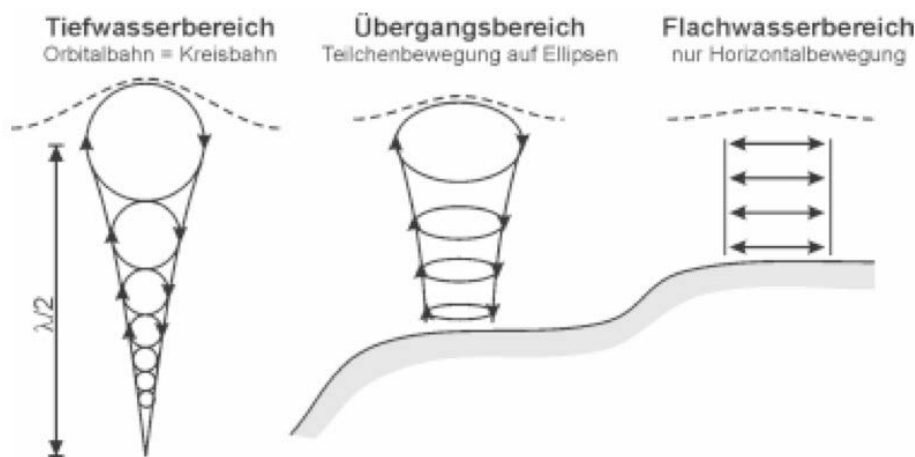
$\vec{k}$ : Wellenzahl  $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}$

$\omega$ : Kreisfrequenz  $\omega = 2\pi \cdot f$

$\varphi$ : Phasenwinkel

$t$ : Zeit

### 2.1.1 Lineare Wellentheorie



**Abbildung 2.2:** Schematische Unterscheidung zwischen linearen Tief- und Flachwasserwellen, entnommen aus [18]

Besonders AIRY [1] und LAPLACE [16] haben eine Formulierung der linearen Wellentheorie entwickelt. Für detailliertere Darstellung über die Entwicklung der Wellentheorie wird auf [5] verwiesen.

Aus Abb. 2.2 lässt sich entnehmen, dass bei linearen Wellen die Wasserteilchen eine geschlossene Bahn durchlaufen. Im Idealfall eines unendlich tiefen Beckens sind diese Bahnen Kreise. Verringert man die Wassertiefe, so kommt es zu einer Wechselwirkung mit dem Boden und die Bahnen werden elliptisch.

Für die Herleitung der Bewegungsgleichung sollen folgende Annahmen und Vereinfachungen getroffen werden:

1. Die Welle soll sich in x-Richtung regelmäßig ausbreiten, die y-Richtung kann vernachlässigt werden.
2. Die Flüssigkeit, in der sich die Welle ausbreitet, soll ideales „trockenes Wasser“ sein. Das heißt reibungs- und viskosefrei, inkompressibel und homogen [6].

Unter den oberen Annahmen ergeben sich die Bewegungsgleichungen nach Euler für die x- und z-Richtung:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_w} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_w} \frac{\partial p}{\partial z} - g \quad (2.3)$$

Mit:

$u$ : x-Komponente der Geschwindigkeit

$w$ : z-Komponente der Geschwindigkeit

$\rho_w$ : Dichte von Wasser

$p$ : Druck

$g$ : Erdbeschleunigung

Außerdem gilt aufgrund der Massenerhaltung und Inkompressibilität des Wasser die Kontinuitätsgleichung [18] in der Form

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.4)$$

Die Reibungsfreiheit des idealen Wassers bedingt, dass die Bewegung der Wasserteilchen ohne Rotation abläuft. Dadurch lässt sich ein skalares Feld  $\Phi$  als Geschwindigkeitspotential definieren durch

$$\vec{v} = \nabla \Phi \quad (2.5)$$

$$(u, w) = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \quad (2.6)$$

Mithilfe von 2.5 und 2.6 lässt sich die Kontinuitätsgleichung 2.4 schreiben als

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.7)$$

für  $-h \leq z \leq \Psi(x, t)$ .

**Randbedingungen** Zur vollständigen Beschreibung der Wellengleichung müssen folgenden Randbedingungen beachtet werden.

Für die vertikale Geschwindigkeit, die der Bewegung der Wasserteilchen an der Oberfläche entspricht, gilt, dass sich kein Teilchen außerhalb der Wasseroberfläche befinden darf:

$$w = \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (2.8)$$

für  $z = \Psi$

Im Rahmen der linearen Theorie mit kleinen Auslenkungen  $\Psi$  kann 2.8 vereinfacht werden zu

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (2.9)$$

für  $z = 0$

Am Boden des Beckens muss die Vertikalgeschwindigkeit  $w$  verschwinden.

$$w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (2.10)$$

für  $z = -h$

Mithilfe dieser Einschränkungen lassen sich die Gleichungen 2.2 und 2.3 zur Bernoulli-Gleichung formulieren, die sowohl für lineare als auch nichtlineare Wellen gilt [4].

$$g\Psi + \frac{1}{2}(u^2 + w^2) + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad (2.11)$$

Unter der Voraussetzung von kleinen Wellenhöhen kann der zweite Term in 2.11 vernachlässigt werden und es ergibt sich die vereinfachte, nach  $\Psi$  umgeformte lineare Bernoulli-Gleichung

$$\Psi = -\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (2.12)$$

Schlussendlich erhält man durch Kombination von 2.9 und 2.12 eine homogene Wellengleichung der Form

$$-\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad (2.13)$$

**Lösung der Wellengleichung** Man findet für 2.7 unter Berücksichtigung von 2.10 und 2.13 eine Lösung für das Geschwindigkeitspotential  $\Phi$ :

$$\Phi = \frac{\omega \cdot A \cdot \cos(k(z+h))}{k \sinh(kh)} \sin(\vec{k}\vec{x} - \omega t + \varphi) \quad (2.14)$$

Allerdings ist 2.14 nur dann eine Lösung der Wellengleichung, wenn für  $\omega$  gilt

$$\omega^2 = gk \cdot \tanh(kh) \quad (2.15)$$

2.15 ist die Dispersionsrelation für Wasserwellen. Daraus lässt sich die Phasengeschwindigkeit  $c$  einer Wasserwelle ableiten zu

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh(kh)} \quad (2.16)$$

Im Folgenden sollen verschiedene Fälle für das Verhältnis  $\frac{\lambda}{h}$  unterschieden und dargestellt werden:



- Ist die Wellenlänge im Vergleich zur Wassertiefe sehr klein, also  $\frac{\lambda}{h} \ll 1$ , so wird das Argument des  $\tanh$  in 2.15 sehr groß, sodass  $\tanh(kh) = \tanh\left(2\pi\frac{h}{\lambda}\right) \approx 1$  gilt. Somit vereinfachen sich 2.15 und 2.16 zu

$$\omega^2 = gk \quad (2.17)$$

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \quad (2.18)$$

Man spricht von der *Tiefwasserapproximation*

- Ist das Verhältnis  $\frac{\lambda}{h} > 20$  [11], hat man also große Wellenlängen bei geringer Wassertiefe, lässt sich für  $\tanh(kh) \approx kh$  schreiben. Die Phasengeschwindigkeit vereinfacht sich dann zu

$$c = \sqrt{g \cdot h} \quad (2.19)$$

Diese *Flachwasserapproximation* besagt, dass in flachen Gewässern die Ausbreitungsgeschwindigkeit unabhängig von der Wellenlänge ist und nur von der Wassertiefe abhängt.

- Zwischen den beiden oben genannten Bereichen gibt es ein Übergangsregime, in dem es zu einem Überlapp aus den oberen Bereichen kommt. Da hier die Ausbreitungsgeschwindigkeit komplizierte Formen annimmt, wird auf eine Formel verzichtet.

Zusammenfassend sind in Tabelle 2.1 die Ergebnisse für Tiefwasser- und Flachwasserwellen aufgeführt.

	Tiefwasserwellen	Flachwasserwellen
Ausbreitungsgeschwindigkeit $c$	$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$	$c = \sqrt{g \cdot h}$

**Tabelle 2.1:** Ausbreitungsgeschwindigkeit von Wasserwellen ohne den Einfluss der Oberflächenspannung

**Einfluss der Oberflächenspannung** Neben der Gravitation, die bisher als einzige Rückstellkraft beachtet wurde, stellt vor allem bei kleinen Wellenlängen und Amplituden die Oberflächenspannung einen weiteren Beitrag [2]. Gleichung 2.15 wird um einen weiteren Term erweitert zu

$$c = \sqrt{\left(\frac{g}{k} + \frac{k\sigma}{\rho}\right) \tanh(kh)} \quad (2.20)$$

mit der Oberflächenspannung  $\sigma$ .

**Zusammenhang zwischen Wassertiefe und Wellenlänge** Bisher wurde ein Zusammenhang zwischen Ausbreitungsgeschwindigkeit und Wellenlänge aufgestellt. Für eine spätere

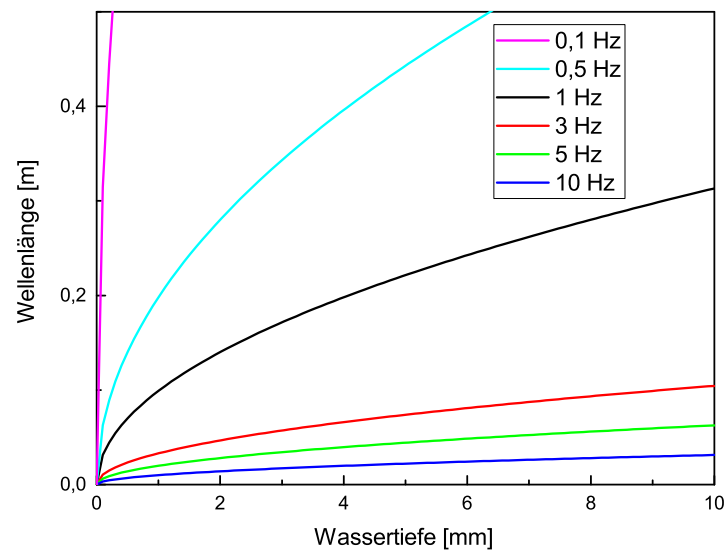
Vergleichbarkeit mit dem Einfluss des Coulombpotentials muss ein Ausdruck der Wellenlänge in Abhängigkeit zur Wassertiefe aufgestellt werden. Dafür verwendet man den Zusammenhang

$$c = \lambda \cdot f \quad (2.21)$$

Damit lässt sich Gleichung 2.20 umstellen zu:

$$\lambda_f(h) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{gh}{f^2} + \frac{\sqrt{h} \sqrt{g^2 h \rho + 16 f^2 \pi^2 \sigma}}{f^2 \sqrt{\rho}}} \quad (2.22)$$

In Abb.2.3 ist der Verlauf der Wellenlänge in Abhängigkeit der Wassertiefe für einige ausgewählte Frequenzen dargestellt.

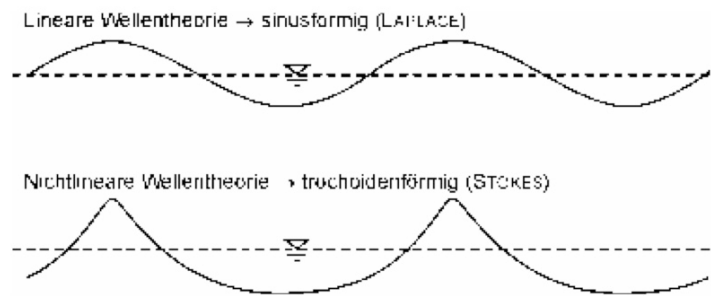


**Abbildung 2.3:** Wasserwellenlänge in Abhängigkeit der Wassertiefe. Die Frequenz wird als Parameter variiert.

### 2.1.2 Nichtlineare Wellentheorie

Grundlage der linearen Wellentheorie ist, dass in 2.11 Terme höherer Ordnung vernachlässigt werden können. Dies lässt sich dadurch rechtfertigen, dass die Wellenhöhe klein ist gegenüber der Wellenlänge. Ist diese Näherung nicht mehr zulässig, muss auf die nichtlineare Wellentheorie zurückgegriffen werden. Diese, von STOKES [23] aufgestellte Näherungslösung entwickelt dabei alle Funktionen nach der Steilheit  $\eta = ka$ .

Als visueller Effekt dieser Nichtlinearität zeigt sich, dass sich die Wellenform bei großer Wassertiefe ändert. Man spricht hier von sogenannten Trochoiden (Abb. 2.4).



**Abbildung 2.4:** Verformung der Wellen durch Einfluss nichtlinearer Effekte, entnommen aus [18]

## 2.2 Quantenmechanische Grundlagen

In diesem Abschnitt sollen Grundlagen der Quantenmechanik erläutert werden, die für das Verständnis der Vorgänge in Atomen nötig sind. Insbesondere ist das die Beschreibung von quantenmechanischen Zuständen als Wellenfunktion.

Die Quantenmechanik baut sich aus Postulaten auf [25]. Es hat sich gezeigt, dass diese Postulate bisher mit keinem Experiment widerlegt werden konnte, sodass man von einer gereiften und gut bestätigten Theorie sprechen kann.

### 2.2.1 Postulat 1: Wellenfunktionen

Zu jedem Teilchen gehört eine quadratintegrale und eindeutige Wellenfunktion  $\Psi(x,t)$ . Diese ist in den meisten Fällen komplex. Durch diese Wellenfunktion wird der *Zustand* des Teilchens oder des Systems vollständig beschrieben.

Dieses erste Postulat benötigt einige Erläuterungen:

- Unter einer quadratintegralen Funktion versteht man Funktionen, für die gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x,t)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x,t)f(x,t) dx < \infty \quad (2.23)$$

wobei  $f^*(x,t)$  die komplex-konjugierte Funktion von  $f(x,t)$  ist.

- Der Ausdruck  $\Psi^*(x,t)\Psi(x,t)dx$  ist reell und gibt die Wahrscheinlichkeit an, ein Teilchen zur Zeit  $t$  im Gebiet  $[x, x + dx]$  aufzufinden. Daher trägt der Ausdruck den Namen *Wahrscheinlichkeitsdichte*.
- Durch die Quadratintegralität ist man in der Lage, die Wellenfunktion zu normieren. Damit wird sichergestellt, dass das Teilchen sich im gesamten Gebiet

irgendwo befindet. Mathematisch lautet diese Aussage

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x,t)\Psi(x,t)dx = 1 \quad (2.24)$$

**Erwartungswert** Gemäß der Wahrscheinlichkeitsrechnung lässt sich der Erwartungswert einer Funktion  $f(x,t)$  folgendermaßen definieren:

$$\langle f(x,t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x,t)f(x,t)\Psi(x,t)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,t) \Psi^*(x,t)\Psi(x,t)dx \quad (2.25)$$

*Anmerkung: Die letzte Umformung in 2.25 ist nur dann möglich, wenn  $f(x,t)$  eine explizite Funktion ist (z.B. Ortsfunktion des Teilchens, potentielle Energie). Handelt es sich um einen Operator, so ist diese Abwandlung nicht möglich.*

**Darstellung im Impulsraum** Analog zur oben beschriebenen Darstellung der Wellenfunktion als Funktion des Ortes des Teilchens, lässt sich dies auch in Abhängigkeit des Impulses  $\vec{p}$  des Teilchens darstellen. Die Definitionen sind dabei absolut identisch und sollen daher an dieser Stelle nicht explizit ausgeschrieben werden. Der Wechsel in den Darstellungen lässt sich mithilfe der Fouriertransformation bewerkstelligen.

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(p) e^{ipx/\hbar} dp \quad (2.26)$$

$$\Phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x) e^{-ipx/\hbar} dx \quad (2.27)$$

## 2.2.2 Heisenberg'sche Unschärfe

Im Gegensatz zur klassischen Mechanik lassen sich in der Quantenmechanik bestimmte Messgrößen gleichzeitig nicht beliebig genau bestimmen. Ist man in der klassischen Physik nur durch die Genauigkeit der Messapparaturen begrenzt, so ist bei gleichzeitiger Messung von z.B. Ort und Impuls die Standardabweichung immer größer als eine für die Quantenmechanik charakteristische Konstante. Dies bezeichnet man als Unschärfe, die sich folgendermaßen definieren lässt

$$\Delta f = \sqrt{\langle (f - \langle f \rangle)^2 \rangle} = \sqrt{\langle f^2 \rangle - \langle f \rangle^2} \quad (2.28)$$

Dies entspricht der Definition einer Standardabweichung.

In der Quantenmechanik ist die Unschärfe nach Heisenberg von fundamentaler Bedeutung. Diese besagt, dass man Ort und Impuls eines Teilchens nicht gleichzeitig messen kann.

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{1}{2} \hbar \quad (2.29)$$

Für die allgemeine Darstellung und Herleitung soll hier auf weitere Literatur verwiesen werden [25].

Eine äquivalente Formulierung von 2.29 setzt Zeit und Energie in Zusammenhang und lautet

$$\Delta t \Delta E \geq \frac{1}{2} \hbar \quad (2.30)$$

**Beispielrechnung** Sei  $\Psi(x)$  die Wellenfunktion eines Teilchens und sei  $|\Psi(x)|^2 = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2a^2}$  eine Gaußverteilung mit charakteristischer Breite  $a$ , so gilt für den Erwartungswert  $\langle x \rangle$

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x) x \Psi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x)|^2 x dx = 0 \quad (2.31)$$

Dies bedeutet, dass das Teilchen sich im Mittel bei  $x = 0$ , also in der Mitte befindet. Somit ergibt sich für die Ortsunschärfe  $\Delta x$

$$\begin{aligned} \Delta x &= \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \\ &= \sqrt{\langle x^2 \rangle} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x) x^2 \Psi(x) dx} \\ &= \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x)|^2 x^2 dx} = a \end{aligned} \quad (2.32)$$

$\Delta x$  entspricht damit genau der Breite  $a$  der Gaußverteilung.

Für den Erwartungswert des Impulses wenden wir die Fouriertransformation 2.27 an und erhalten

$$\Phi(p) = \left( \frac{2a}{\hbar\sqrt{2\pi}} \right)^{1/2} e^{-a^2 p^2 / \hbar^2} \quad (2.33)$$

$$|\Phi(p)|^2 = \frac{2a}{\hbar\sqrt{2\pi}} e^{-a^2 p^2 / \hbar^2} \quad (2.34)$$

Durch Rechnung zeigt sich, dass der Impuls im Mittel verschwindet, also  $\langle p \rangle = 0$  ist und sich somit die Unschärfe vereinfacht zu

$$\Delta p = \sqrt{\langle p^2 \rangle} = \frac{\hbar}{2a} \quad (2.35)$$

Zuletzt setzt man 2.34 in  $\Delta p$  ein. Es zeigt sich, dass dieses Teilchen mit Gaußverteilung gerade die minimale Unschärfe 2.29 erfüllt.

### 2.2.3 Operatoren

In diesem Abschnitt soll kurz die Bedeutung von Operatoren in der Quantenmechanik erläutert werden, um diese anschließend in Kapitel 2.2.4 anzuwenden.

Wie bereits beschrieben lässt sich der Zustand eines Teilchens sowohl im Ortsraum mittels  $\Psi(x)$  oder im Impulsraum mit  $\Phi(p)$  darstellen. Es wird mathematisch eine Erweiterung benötigt, sobald z.B. der Erwartungswert des Impulses in der Ortsdarstellung berechnet werden soll, also

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x) p \Psi(x) dx \quad (2.36)$$

Man kann mithilfe der Fouriertransformation zeigen, dass sich 2.36 umformen lässt in

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x) \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \Psi(x) dx \quad (2.37)$$

Man kann also den Impulsoperator  $\hat{p}$  identifizieren als

$$\hat{p} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \quad (2.38)$$

Analog lässt sich der Ortsoperator herleiten.

**Hamiltonoperator** Aus der klassischen Mechanik ist bereits die Hamiltonfunktion  $H$  bekannt, die in vielen Fällen mit der Gesamtenergie des Systems identisch ist. Für die Berechnung von  $H$  benötigt man im klassischen Fall die verallgemeinerten Koordinaten  $q_k$  sowie die zugehörigen kanonisch konjugierten Impulse  $p_k$ . Hier sollen nun die quantenmechanischen Pendanten eingeführt werden.

Das Teilchen der Masse  $m$  habe die Koordinaten  $x, y$  und  $z$  mit den dazugehörigen Impulsen  $p_x, p_y, p_z$ , die sich berechnen lassen durch

$$p_x = m\dot{x} \quad (2.39)$$

$$p_y = m\dot{y} \quad (2.40)$$

$$p_z = m\dot{z} \quad (2.41)$$

Somit lässt sich die kinetische Energie des Teilchens berechnen zu

$$E_{kin} = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) \quad (2.42)$$

Die zugehörige Hamiltonfunktion für das Teilchen in einem Potential  $V(x, y, z)$  lautet

$$H = E + V = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V(x, y, z) \quad (2.43)$$

Den zugehörigen Operatorausdruck  $\hat{H}$  erhalten wir, indem wir für die Impulse die zugehörigen Operatoren nach 2.38 einsetzen

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left( \frac{\hbar}{i} \right)^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + V(x,y,z) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(x,y,z) \quad (2.44)$$

Zuletzt soll eine kurze Übersicht über die wichtigsten Operatoren der Quantenmechanik gegeben werden.

phys. Größe	klassisch	q.-m. Operator
Ortsvektor	$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$	$\hat{\vec{r}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
Impulsvektor	$\vec{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$	$\hat{\vec{p}} = \frac{\hbar}{i} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$
Hamiltonfkt.	$H = E = \frac{p^2}{2m} + V(x,y,z)$	$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(x,y,z)$
Drehimpuls	$\vec{L} = \begin{pmatrix} yp_z - zp_y \\ zp_x - xp_z \\ xp_y - yp_x \end{pmatrix}$	$\hat{\vec{L}} = \frac{\hbar}{i} \begin{pmatrix} y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \\ z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \\ x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}$

**Tabelle 2.2:** Wichtige quantenmechanische Operatoren im Vergleich zu ihren klassischen Größen

### 2.2.4 Postulat 2: Schrödingergleichung

Bisher wurde immer davon ausgegangen, die Wellenfunktion eines Teilchens zu kennen, um anschließend Erwartungswerte zu berechnen. Das Auffinden einer Wellenfunktion wird mit der Schrödingergleichung, benannt nach Erwin Schrödinger, ermöglicht<sup>1</sup>. 1926 stellte er folgende Differentialgleichung auf, die es ermöglicht  $\Psi$  zu bestimmen [22]. Damit ist die Schrödingergleichung für die Quantenmechanik gleichbedeutend wie die Newton'schen Bewegungsgleichungen für die klassische Mechanik.

$$\hat{H}\Psi(x,y,z,t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(x,y,z,t)}{\partial t} \quad (2.45)$$

2.45 heißt *zeitabhängige Schrödingergleichung*. Ist  $\Psi(x,y,z,t)$  eine Lösung von 2.45, so ist  $\Psi(x,y,z,t)$  die Wellenfunktion zum gesuchten Problem.

Befindet sich das Teilchen mit der Masse  $m$  in einem Potential  $V(x,y,z,t)$ , so lautet

<sup>1</sup> Erwin Schrödinger: österreich. Physiker \*12.08.1887, †04.01.1961, Nobelpreis 1933

die zeitabhängige Schrödingergleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi(x,y,z,t) + V(x,y,z,t)\Psi(x,y,z,t) = i\hbar\frac{\partial\Psi(x,y,z,t)}{\partial t} \quad (2.46)$$

**Stationäre Lösung** Von besonderem Interesse für die weitere Arbeit sind Lösungen, die nicht von der Zeit abhängig sind. Anders ausgedrückt ist in diesen Zuständen die Wahrscheinlichkeit  $\Psi^*(x,t)\Psi(x,t)dx$  das Teilchen zwischen  $x$  und  $x + dx$  anzutreffen nicht explizit von der Zeit abhängig.

Als Beispiel soll hier eine ebene, harmonische Materiewelle, wie zum Beispiel eine Wasserwelle, der Form

$$\Psi(x,t) = A e^{i(px - Et)/\hbar} \quad (2.47)$$

genommen werden. Es wird der Einfachheit in einer Dimension gerechnet. Die Verallgemeinerung auf drei Dimensionen ändert die Form der Physik nicht. Der allgemeine Ausdruck für einen stationären Zustand lautet

$$\Psi(x,t) = u(x) e^{-iEt/\hbar} \quad (2.48)$$

mit  $E = E_{kin} + V(x,t)$  der Gesamtenergie des Systems.

Setzt man 2.48 in die Gleichung 2.45 ein, so sieht man, dass  $u(x)$  nur eine Ortsfunktion ist und sich die Schrödingergleichung schreiben lässt als

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta u(x,y,z) + V(x,y,z)u(x,y,z)\right) e^{-iEt/\hbar} = u(x) i\hbar \frac{\partial}{\partial t} e^{-iEt/\hbar} \quad (2.49)$$

Unter der zusätzlichen Annahme, dass das Potential zeitunabhängig ist, wird die Gesamtenergie  $E$  konstant und 2.49 vereinfacht sich zu

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta u(x) + V(x)u(x) = Eu(x) \quad (2.50)$$

Ein Teilchen ist also in einem stationären Zustand, wenn das Potential zeitlich konstant ist. 2.50 heißt dann *zeitunabhängige Schrödingergleichung*. Im Dreidimensionalen lautet diese

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta u(x,y,z) + V(x,y,z)u(x,y,z) = Eu(x,y,z) \quad (2.51)$$

Zuletzt sollen die Lösungen  $\Psi(x,y,z,t)$  und  $u(x,y,z,t)$  im stationären diskutiert werden:

- Die Lösungen müssen normierbar sein. Dies ist durch die Homogenität und Linearität der Schrödingergleichung 2.45 einfach zu bewerkstelligen, da nur mit einem Normierungsfaktor multipliziert werden muss. Wir wählen diesen Faktor



so, dass in Übereinstimmung mit 2.24 gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x,t)\Psi(x,t)dx = 1 \quad (2.52)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^*(x)u(x)dx = 1 \quad (2.53)$$

- Aus dieser Überlegung der Normierbarkeit folgt, dass die Lösung im Verhalten gegen  $\pm\infty$  schnell genug gegen 0 abfallen muss.
- Eine sehr entscheidende Eigenschaft der Lösungen ist, dass sie dem Superpositionsprinzip gehorchen müssen. Da die Schrödingergleichung linear und homogen ist, können auch Linearkombinationen von Lösungen wieder Lösungen sein. Wenn  $\Psi_1$  und  $\Psi_2$  Lösungen sind, so ist  $\Psi = \alpha\Psi_1 + \beta\Psi_2$  auch eine Lösung. Dies gilt auch für  $u(x)$ .

## 2.3 Quantenmechanische Beschreibung des Wasserstoffatoms

In diesem Abschnitt soll die Quantenmechanik aus Kapitel 2.2 auf das Wasserstoffatom (H-Atom) angewendet werden. Das H-Atom nimmt man aus zwei Gründen. Erstens ist es das einzige Atom, das vollständig analytisch lösbar ist [20]. Zum anderen sind so genannte Rydberg-Atome (siehe 2.3.4) in erster Näherung wie Wasserstoffatome zu behandeln.

Eine erste klassische Lösung wurde bereits mit dem BOHRschen Atommodell erreicht. So konnte man damit die Existenz von Elektronenbahnen bezüglich einer Hauptquantenzahl  $n$  erklären. Aber andere Effekte ließen sich nach wie vor nicht beschreiben. Hier setzt nun die Quantenmechanik an. Gesucht werden also Wellenfunktionen des Elektrons  $\Psi_n$  und dazugehörige Energien  $E_n$ , die sich aus der Schrödingergleichung 2.45 ergeben

$$-\frac{\hbar}{2m}\Delta\Psi_n + V_{el}(r)\Psi_n = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}E_n \quad (2.54)$$

Das hier verwendete Potential  $V_{el}(r)$  ist das radialsymmetrische Coulombpotential des Atomkerns. Zur Lösung soll der Weg der Variablen-Separation gewählt werden [21]. Da das Elektron eine periodische Bewegung um den Kern vollführt, kann die Zeitabhängigkeit folgenderweise abgetrennt werden:

$$\Psi(x,y,z,t) = \Phi(x,y,z) \cdot e^{i\omega_n t} \quad (2.55)$$

Somit wird 2.54 zur zeitunabhängigen Schrödingergleichung des H-Atoms.

$$-\frac{\hbar}{2m}\Delta\Phi + V_{el}\Phi = \hbar\omega_n\Phi = E_n\Phi \quad (2.56)$$

Im nächsten Schritt wird eine Koordinatentransformation nach Kugelkoordinaten durchgeführt. Dementsprechend muss auch der Laplaceoperator  $\Delta$  transformiert werden. Dieser Wechsel ist von Vorteil, da die Wechselwirkung zwischen Kern und Elektron nur vom Abstand der beiden zueinander abhängt. Somit ist eine weitere Separation möglich, bei der die Winkel  $\Theta$  und  $\varphi$  abgetrennt werden.

$$\Phi(r, \Theta, \varphi) = R(r)Y(\Theta, \varphi) \quad (2.57)$$

Formel 2.56 wird mit diesen Umformungen zu

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} R \right) + \frac{2\mu_e}{\hbar^2} (E - V(r))^2 r^2 &= -\frac{1}{R} \left( \frac{1}{\sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left( \sin \Theta \frac{\partial}{\partial \Theta} Y \right) + \frac{1}{\sin^2 \Theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} Y \right) \\ F(r) &= G(\Theta, \varphi) \end{aligned} \quad (2.58)$$

Wie sich erkennen lässt, ist die linke Seite von 2.58 nur vom Radius  $r$  abhängig, während die rechte Seite nur von den Winkeln abhängt. Diese Gleichung ist somit nur dann erfüllt, wenn beide Seiten dieser Gleichung einer Konstante entsprechen, welche festgelegt wird als  $l(l+1)$ . Diese ungewöhnliche Festlegung wird sich später als nützlich erweisen.

Zuletzt soll die Funktion  $Y$  noch separiert werden durch

$$Y(\Theta, \varphi) = T(\Theta)P(\varphi) \quad (2.59)$$

Für die Lösung von 2.58 bedeutet dies

$$\frac{\sin^2 \Theta}{T} \frac{\partial}{\sin \Theta} \left( \sin \Theta \frac{\partial}{\partial \Theta} T \right) + \sin^2 \Theta \cdot l(l+1) = -\frac{1}{P} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} P \quad (2.60)$$

Hier lassen sich die linke und rechte Seite der Gleichung wieder einzeln separieren, sodass ebenso eine Konstante  $m^2$  eingeführt werden kann.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die Ausgangsgleichung 2.54 in drei unabhängige Differentialgleichungen zerfällt, die jeweils nur von einem Parameter abhängen. Diese sind

1. Azimutalgleichung

$$-\frac{1}{P} \frac{d^2}{d\varphi^2} P = m^2 \quad (2.61)$$

2. Polargleichung

$$\frac{\sin^2 \Theta}{T} \frac{d}{d\Theta} \left( \sin \Theta \frac{d}{d\Theta} T \right) + \sin^2 \Theta \cdot l(l+1) = \frac{m^2}{\sin^2 \Theta} \quad (2.62)$$

## 3. Radialgleichung

$$\frac{1}{Rr^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} R \right) + \frac{2\mu_e}{\hbar^2} \left( E - V(r) - \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu_e r^2} \right) = 0 \quad (2.63)$$

## 2.3.1 Lösung der Azimutalgleichung

Eine äquivalente Schreibweise von 2.61 lautet

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} P + m^2 P = 0 \quad (2.64)$$

Diese Differentialgleichung lässt sich in dieser Form sofort integrieren und es zeigt sich, dass der folgende Lösungsansatz 2.61 löst.

$$P = \alpha e^{im\varphi} + \beta e^{-im\varphi} \quad (2.65)$$

Dieser allgemeine Ansatz erzeugt keine physikalisch sinnvollen Lösungen. Setzt man zum Beispiel  $\alpha = \beta$ , so erhält man

$$P = 2\alpha \cos m\varphi \quad (2.66)$$

Wäre dies eine korrekte Lösung, so müsste die Elektronendichte von  $\varphi$  abhängen, was im Zentralfeld der Coulombwechselwirkung nicht sein darf. Daher wird als sinnvolle Lösung

$$P_m(\varphi) = \alpha e^{im\varphi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} \quad (2.67)$$

angenommen. Man wählt  $\alpha$  aufgrund der Normierungsbedingung. In 2.67 ist  $m$  die *magnetische Quantenzahl*. Sie kann Werte  $0, \pm 1, \pm 2, \dots$  annehmen.

## 2.3.2 Lösung der Polargleichung

Betrachtet man Gleichung 2.62, so lässt sich erkennen, dass es sich hierbei um LEGENDRE-Differentialgleichungen handelt, deren Lösung die zugeordneten LEGENDRE-Polynome  $P_l^m(\cos \Theta)$  sind.

$$P_l^m = \frac{(-1)^m}{2^l l!} \sqrt{(1 - \cos^2 \Theta)^m} \frac{d^{l+m}}{(d \cos \Theta)^{l+m}} (\cos^2 \Theta - 1)^{l+m} \quad (2.68)$$

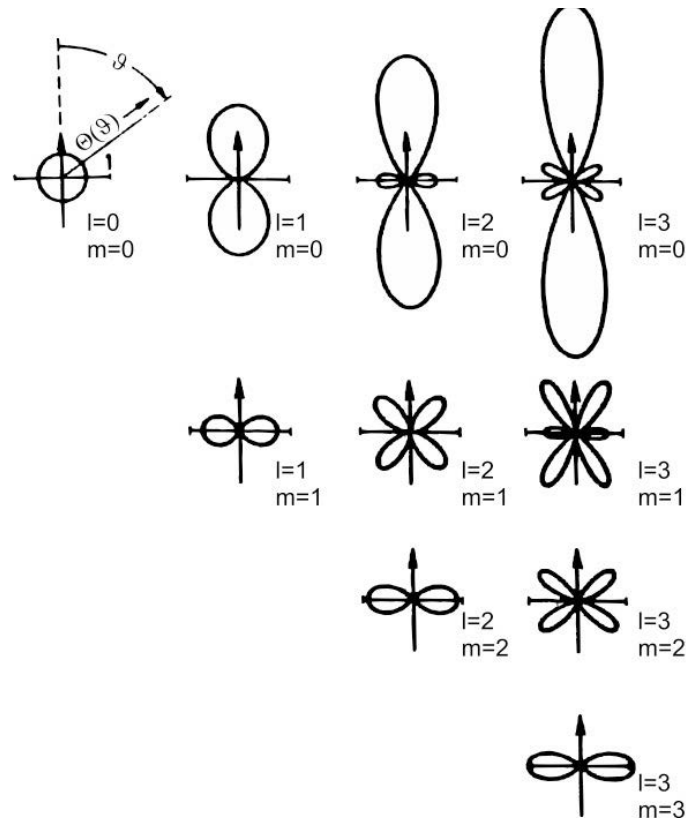
$$P_l^0 = P_l = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{(d \cos \Theta)^l} (\cos^2 \Theta - 1)^l \quad (2.69)$$

mit  $-l \leq m \leq l$ ,  $l = 0, 1, 2, \dots$

Kombiniert man nun die beiden normierten Lösungen der Azimutgleichungen und

Polargleichung, so erhält man die Winkelabhängigkeit der Schrödingergleichung

$$Y_{l,m} = T \cdot P = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} \cdot \sqrt{\frac{2l+1}{2} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \Theta) \quad (2.70)$$



**Abbildung 2.5:** Darstellung der Winkelabhängigkeit der Aufenthaltswahrscheinlichkeit, entnommen aus [20]

### 2.3.3 Lösung der Radialgleichung

Zuletzt soll die Lösung der Radialgleichung erarbeitet werden. Diese hat für die spätere Anwendung innerhalb der Wellenwanne eine entscheidende Bedeutung, da der Radialteil mithilfe der Wellen dargestellt werden kann.

Zu lösen ist also Gleichung 2.63, wofür zuerst die Asymptoten für  $r \rightarrow \infty$  und  $r \rightarrow 0$ .

Dafür werden drei Umformungen vorgenommen.

$$R(r) = u(r) \quad (2.71)$$

$$V'(r) = \frac{2\mu_e}{\hbar} V(r) \quad (2.72)$$

$$A = \frac{2\mu_e}{\hbar^2} E = \begin{cases} -k^2 & \text{für } E < 0 \\ k^2 & \text{für } E > 0 \end{cases} \quad (2.73)$$

Mit obigen drei Gleichungen entsteht folgende vereinfachte Radialgleichung

$$\frac{d^2}{dr^2} u + \left( A - V'(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) u(r) = 0 \quad (2.74)$$

$r \rightarrow \infty$  In diesem Grenzfall wird  $A \gg V$  und  $A \gg \frac{l(l+1)}{r^2}$  und 2.74 zu

$$\frac{d^2}{dr^2} u + A \cdot u(r) = 0 \quad (2.75)$$

Für ein gebundenes Elektron, wie es im Atom vorliegt, ist  $E < 0$  und somit auch  $A < 0$ . Die zugehörige Lösung lautet

$$u(r) = c_1 e^{kr} + c_2 e^{-kr} \quad (2.76)$$

Die Wellenfunktion muss für das Elektron im Unendlichen verschwinden, was bedeutet, dass  $c_1 = 0$  sein muss. Daher ist

$$u(r) \sim e^{-kr} \quad (2.77)$$

$r \rightarrow 0$  Lassen wir  $r$  gegen 0 gehen, so gilt  $\frac{l(l+1)}{r^2} \gg V'(r)$  und  $\frac{l(l+1)}{r^2} \gg A$ , sodass 2.74 sich schreibt als

$$\frac{d^2}{dr^2} u - \frac{l(l+1)}{r^2} u(r) = 0 \quad (2.78)$$

Die Lösung dieser Gleichung muss ein Polynom der Form  $u(r) \sim r^{l+1}$  sein.

Fasst man beide Grenzfälle zusammen, so muss die Lösung  $R(r)$  ein Produkt aus beiden Grenzlösungen sein

$$R(r) = \frac{u(r)}{r} \sim \frac{e^{-kr}}{r} \sum c_i r^\nu \quad (2.79)$$

Als nächsten Schritt wird dieser Lösungsansatz nun in 2.63 eingesetzt, wobei erneut folgende Vereinfachungen verwendet werden

$$\rho = 2kr \quad (2.80)$$

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{r} \quad (2.81)$$

$$B = -\frac{\mu Ze^2}{\hbar^2} \quad (2.82)$$

2.79 schreibt sich somit als

$$R(r) = R(\rho) = e^{Q/2} \sum_0^{\infty} a_\nu \rho^{\nu+\mu} = e^{Q/2} v(\rho) \quad (2.83)$$

Diese Vereinfachungen sollen nun in 2.63 eingesetzt werden. Dies führt bei  $E < 0$  zu

$$\frac{d^2}{d\rho^2} R + \frac{2}{\rho} \frac{d}{d\rho} R + \left( -\frac{1}{4} + \frac{B}{k\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} \right) R = 0 \quad (2.84)$$

2.83 wird in 2.84 eingesetzt. Dies ergibt

$$\frac{d^2}{d\rho^2} v + \frac{d}{d\rho} v \left( \frac{2}{\rho} - 1 \right) + \left( \frac{1}{\rho} \left( \frac{B}{k} - 1 \right) - \frac{l(l+1)}{\rho^2} \right) v = 0 \quad (2.85)$$

Setzt man zuletzt noch  $v(\rho)$  in die soeben erhaltene Funktion, so ergibt sich

$$\sum_0^{\infty} a_\nu (\nu + \mu)(\nu + \mu - 1) \rho^{\nu+\mu-2} + \left( \frac{2}{\rho} - 1 \right) \sum_0^{\infty} a_\nu (\nu + \mu) \rho^{\nu+\mu-1} + \dots \sum_0^{\infty} a_\nu \rho^{\nu+\mu} = 0 \quad (2.86)$$

Diese Gleichung ist dann erfüllt, wenn trivialerweise alle Koeffizienten der jeweiligen  $\rho^\lambda$  verschwinden. Dies führt auf eine Gleichungssystem, aus dem man die  $a_\nu$  und  $\mu$  bestimmen kann. Setzt man  $\nu = 0$ , so folgt aus 2.86:

$$a_0 \mu(\mu - 1) + 2a_0 \mu - l(l+1)a_0 = 0 \quad (2.87)$$

Es ergeben sich zwei Lösungen unter der Voraussetzung  $a_0 \neq 0$

$$\mu(\mu + 1) = l(l+1) \Rightarrow \mu_1 = l \quad \text{und} \quad \mu_2 = -(l+1) \quad (2.88)$$

Allerdings divergiert  $v$  hier bei  $\mu_2$  für  $\rho \rightarrow 0$  sodass nur  $\mu = l$  als physikalisch sinnvoll übrig bleibt. Für Potenzen höherer Ordnung wird folgende Bestimmungsgleichung verwendet:

$$a_\nu (\nu + 1)(\nu + l - 1) + 2a_\nu (\nu + l) - a_{\nu-1} (\nu + l - 1) + \left( \frac{B}{k} - 1 \right) a_{\nu-1} - a_\nu l(l+1) = 0 \quad (2.89)$$

Die  $a_\nu$  ergeben sich dann aus folgender Rekursionsformel

$$a_\nu = a_{\nu-1} \frac{\nu + l - \frac{B}{k}}{\nu(\nu + 2l + 1)} \quad (2.90)$$

Die Bestimmung der  $a_0$  folgt zuletzt aus der Normierungsbedingung. Mit  $a_0, a_\nu, \mu$  ist  $v(\rho)$  eindeutig bestimmt.  $v$  muss dabei ein endliches Polynom sein, damit die Radialfunktion 2.63 normierbar ist, d.h. im Unendlichen verschwindet. Es existiert also ein  $\nu_{max} = n_r$ , ab dem alle Koeffizienten verschwinden. Es muss also gelten:

$$\nu_{max} + l - \frac{B}{k} = n\nu_{max} + l - n = 0 \quad (2.91)$$

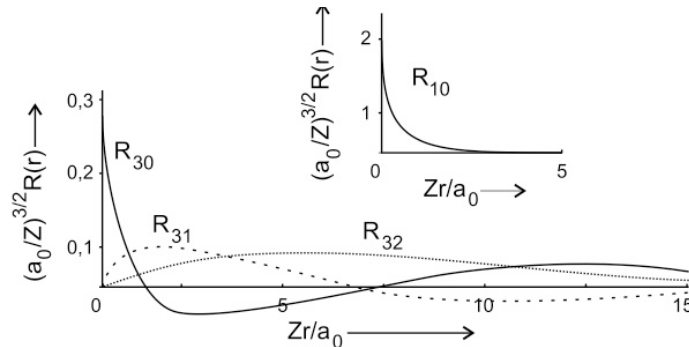
$n$  ist eine positive ganze Zahl und heißt *Hauptquantenzahl*,  $l$  ist die *Drehimpulsquantenzahl* mit der Bedingung  $l \leq n - 1$ . Mit 2.80-2.82 erhält man die Energieeigenwerte  $E_n$  zur Hauptquantenzahl  $n$  durch

$$E_n = -\frac{\hbar^2}{2\mu_e} k_n^2 = -\frac{\mu_e Z^2 e^4}{2\hbar^2} \frac{1}{n^2} \quad (2.92)$$

Aus der Rekursionsformel ergibt die LAGUERRE-Polynome, die hier aufgrund ihrer Komplexität nicht dargestellt werden sollen. Mithilfe dieser lässt sich die Radialfunktion darstellen als

$$R_{n,l}(r) = N_{n,l} r^l e^{-k(n)r} L_{n-1}^{2l+1}(2k(n)r) \quad (2.93)$$

mit  $k(n) = k_n = \frac{n\hbar^2}{\mu_e Z e^2}$  und  $N_{n,l}$  ein Normierungsfaktor.

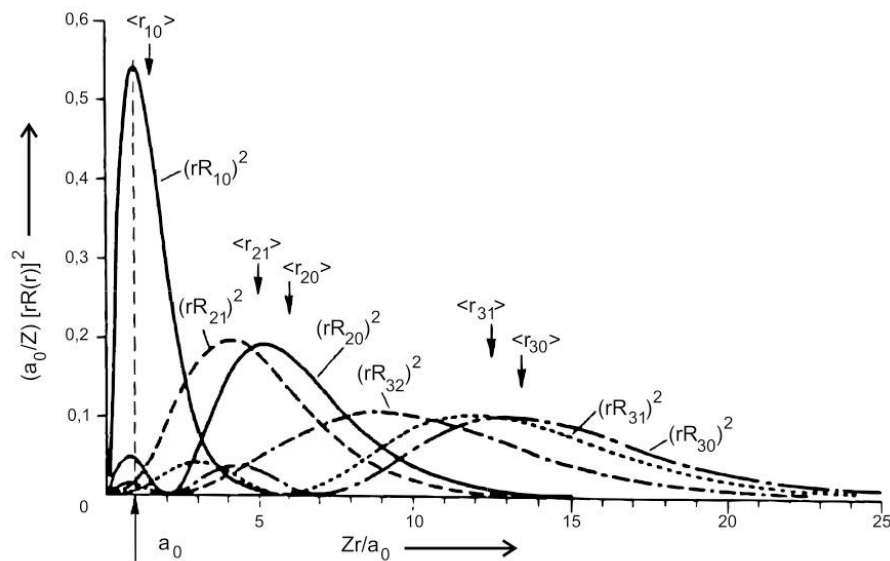


**Abbildung 2.6:** Die Radialwellenfunktion in Einheiten des BOHRschen Radius, entnommen aus [20]

Die Gesamtwellenfunktion wird dann zusammengesetzt zu

$$\Phi_{n,l,m}(r, \Theta, \varphi) = R_{n,l}(r) P_l^m(\cos \Theta) e^{im\varphi} \quad (2.94)$$

Somit bekommt man schlussendlich eine Verteilung für das Elektron im Wasserstoffatom, welche in Abb.2.7 visualisiert ist.



**Abbildung 2.7:** Auftreffwahrscheinlichkeit des Elektrons im Wasserstoffatom in Einheiten des Bohrschen Radius. Die Wahrscheinlichkeit bei  $r = 0$  und  $r \rightarrow \infty$  ist 0, entnommen aus [20].

### 2.3.4 Rydberg-Atome

Zuletzt soll kurz auf eine besondere Klasse von Atomen eingegangen werden, sogenannte *Rydberg-Atome*. Bei diesen Atomen befindet sich ein Elektron in einem besonders stark angeregten Energieniveau. Damit bekommt dieses Atom eine Größe, bei der man in das Übergangsgebiet von Quantenmechanik und klassischer Physik kommt. Daher sind die Eigenschaften, die Rydbergatome mitbringen, von hohem Interesse für die Forschung [7].

Wird das äußerste Elektron in diesen hoch angeregten Zustand gebracht, was gleichbedeutend ist mit einer großen Hauptquantenzahl  $n$ , bekommt man ein wasserstoffähnlichen Zustand. Dabei wird der Atomkern von den inneren Elektronen abgeschirmt und somit die Coulombwechselwirkung abgeschwächt.

Künstliche Rydbergatome wurden bisher mit einer Hauptquantenzahl  $n$  bis zu 100 erzeugt. Dabei kann eine Lebensdauer von bis zu 1s erreicht werden.

Nach BOHR sind die Atomradien  $r \propto n^2$ , wohingegen der Abstand zwischen Energieniveaus mit  $E_n \propto n^{-3}$  abnimmt [8]. Abschließend sollen die Eigenschaften von Rydbergatomen in Tabelle 2.3 zusammengefasst werden.



	Allgemein	Rydberg-Atom
Größe	$d = a_0 n^2$	$10^3 \text{Å}$
Bindungsenergie	$E_n = -\frac{R}{n^2}$	$10^{-2} \text{eV}$
Übergangsenergie $\Delta n = 1$	$\Delta E = \frac{2R}{n^3}$	$10^{-3} \text{eV} = 10 \text{cm}$
Lebensdauer	$\tau \propto n^3$	$30 \cdot 10^{-6} \text{s}$

**Tabelle 2.3:** Eigenschaften von Rydbergatomen [8]

## 2.4 Didaktischer Hintergrund

Die Quantenphysik als eines der jüngeren Teilgebiete der Physik besitzt zum einen eine gewisse Faszination, da sie wunderbare Experimente zum Erklären benötigt [14]. Zum anderen ist sie aufgrund ihres mathematischen Grades an Komplexität äußerst abschreckend. Mit diesem Dilemma muss man auch in der schulischen und außerschulischen Ausbildung zurecht kommen, zumal hier eine, den unteren Schulklassen bedingte, Pfadabhängigkeit erzeugt wird, nämlich die der Anschaulichkeit [19]. Diese Anschaulichkeit geht in der Quantenmechanik, sowie in der Atomphysik, verloren. Daher ist es für Physikdidaktiker nach wie vor eine Herausforderung hier ein Konzept zu entwickeln, das auf der einen Seite die Theorie korrekt wiedergibt und auf der anderen Seite Schülerinnen und Schüler (aber auch StudentInnen) nicht abschreckt. Als eine Möglichkeit der Darstellung soll hier kurz das Konzept des *Karlsruher Physikkurs* (KPK) vorgestellt werden [10].

Die Idee hinter diesem alternativen Ansatz ist, dass das Elektron eine Art Stoff mit kontinuierlicher Dichte um den Atomkern bildet. Dies lässt sich aus der Schrödinger-Gleichung 2.54 herleiten, indem zwei neue Gleichungen definiert werden

$$\rho := \Psi^* \Psi \quad (2.95)$$

$$\vec{j} := \frac{\hbar}{2mi} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) \quad (2.96)$$

Mit diesem Satz an Gleichungen lässt sich eine Kontinuitätsgleichung für Ladung und Masse formulieren

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \text{div } \vec{j}_e = 0 \quad (2.97)$$

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \text{div } \vec{j}_m = 0 \quad (2.98)$$

Diese Elektronenmasse soll *Elektronium* genannt werden. Die Dichte des Elektroniums ist proportional zum Absolutquadrat  $|\Psi|^2$  der Wellenfunktion und dient somit als Relation zur Auftreffwahrscheinlichkeit des Elektrons im Atom. Für mehr Informationen siehe [10].

An dieser Stelle greift nun die Idee der Wellenwanne an. Die Flüssigkeit darin stellt

das Elektronium dar, dass aufgrund der Wellenbewegung verschiedene Dicken aufweist. In diesem Bild ist also die Schichtdicke verbunden mit  $|\Psi|^2$ . Es wird sich später zeigen, dass mit der Schichtdickedifferenz ein Helligkeitsunterschied ist.

### 2.4.1 Bildungsstandards

Die Bildungsstandards des Landes Baden-Württemberg sehen die Atomphysik und Quantenmechanik als festen Teil des Curriculum vor. Insbesondere ist das Feld der Quantenphysik ein gesonderter Schwerpunkt im Bereich der Sekundarstufe II [3]. Exemplarisch soll hier eine Stelle herausgegriffen werden

„11. Struktur der Materie

Die Schülerinnen und Schüler können

- Teilchenmodelle an geeigneten Stellen anwenden und kennen deren jeweilige Grenze
- die Struktur der Materie auf der Basis einer quantenphysikalischen Modellvorstellung beschreiben[...]

Inhalte: Atomhülle, Energiequantisierung, Folgerungen aus der Schrödinger Gleichung“[3]

Dies sind die inhaltlichen Richtlinien für den Unterricht der Sekundarstufe II, Schwerpunkt Quantenphysik, die sowohl im 2-stündigen, wie auch 4-stündigen Kurs angeboten werden sollen.

# KAPITEL 3

---

## Experimentelle Aufbauten und Konstruktionen

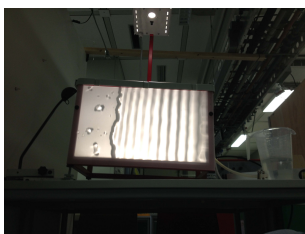
---

Durch Vorüberlegungen zu diesem Projekt sollten folgende Punkte geklärt werden:

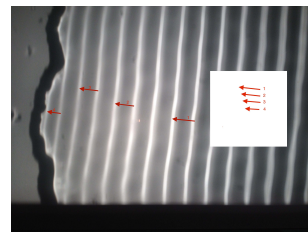
- Wie groß kann, bzw. muss die Wellenwanne sein, damit ein sichtbares Resultat möglich ist?
- Wie muss ein Wellenanreger geformt sein und wo muss dieser sitzen, damit sich stehende Wellen ausformen?
- Welche Bereiche der Wassertiefe sind zugelassen, um noch in einem Flachwasserbereich zu liegen?

Dafür wurden zu Beginn zwei Prototypen gebaut, um die Fragen zu beantworten. Anschließend wurden aus diesen Ergebnissen ein endgültiger Aufbau konsturiert. In diesem Kapitel sollen die 3 Wellenwannen in ihrer Konstruktion dargestellt werden. Die Ergebnisse der Messungen finden sich in Kapitel 4.

Zuerst wurde die in Kap. 2.1 aufgestellte Theorie, dass die Wellenlänge mit zunehmender Wassertiefe zunimmt, qualitativ überprüft. Anhand einer schräggestellten quadratischen Wellenwanne konnte die grundlegende Richtigkeit der Theorie (vgl. Kap. 2.1.1) bestätigt werden. Dies ist in Abb. 3.1 und 3.2 zu erkennen. Die roten Pfeile geben die Wellenlänge an ausgewählten Stellen wieder. Vergleicht man die Länge der Pfeile (siehe roter Kasten), so erkennt man deutlich die Abnahme.

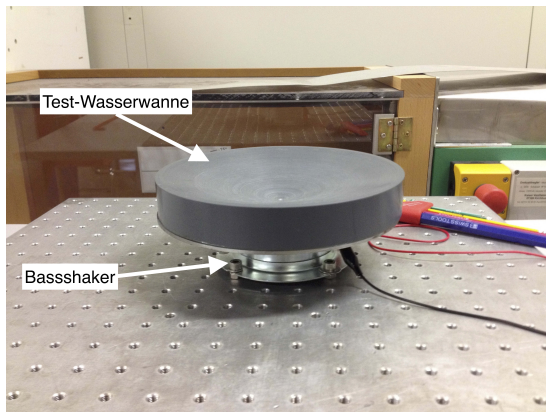


**Abbildung 3.1:** Schiefe Wellenwanne zur qualitativen Überprüfung der Theorie

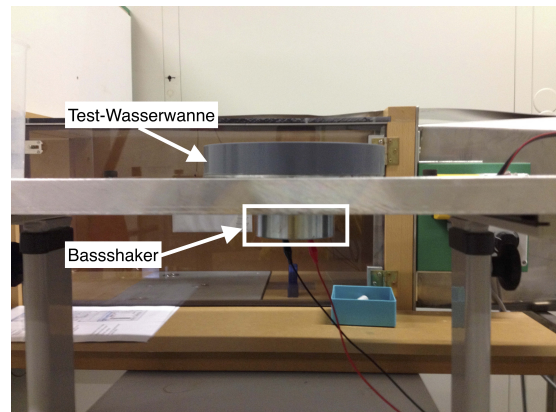


**Abbildung 3.2:** Aufnahmen zur Überprüfung der Theorie. Die Wassertiefe nimmt von links nach rechts zu.

Zudem wurde ein weiterer Prototyp aufgebaut, mit dem eine indirekte Anregung als Möglichkeit ausgeschlossen wurde. Mithilfe eines Bassverstärkers der Firma ROCK WOOD wurde in zwei verschiedenen Aufbauten einmal die Wellenwanne und zum anderen die gesamte Konstruktion in Schwingung gebracht. Abb. 3.3 und Abb. 3.4 zeigen die beiden Aufbauten.

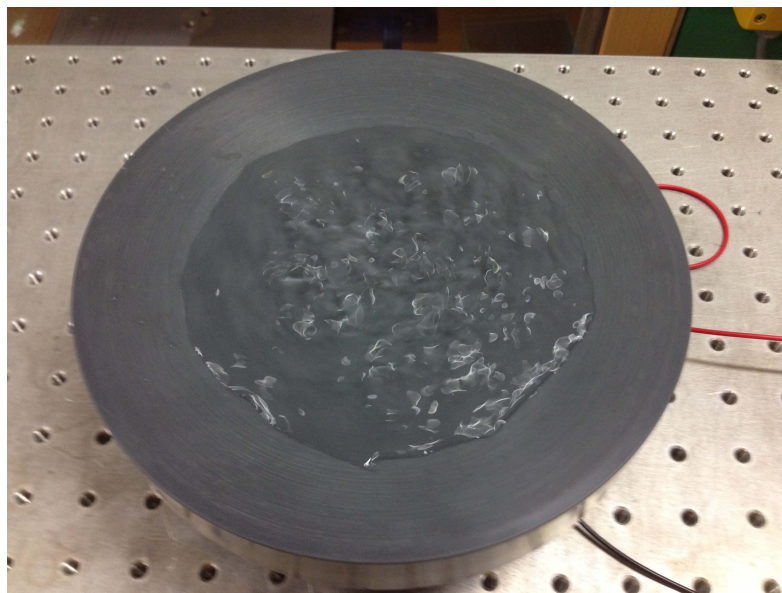


**Abbildung 3.3:** Testaufbau 1: indirekte Wellenanregung. Das Wasserbecken wird von unten in Schwingung versetzt.



**Abbildung 3.4:** Testaufbau 2: Die gesamte Anlage wird in Schwingung gebracht, indem der Shaker an der Unterseite angebracht wurde.

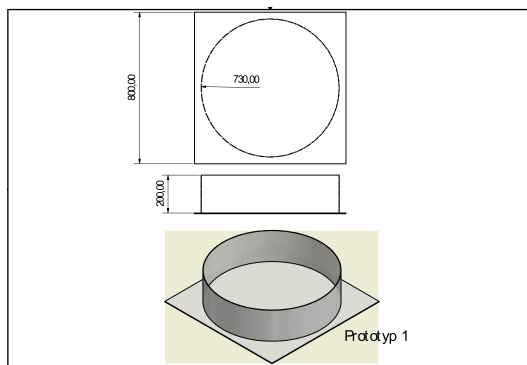
Es zeigte sich, dass keine saubere Vibration erzeugt werden konnte. Die verschiedenen Resonanzfrequenzen der Bauteile verhinderten eine kreisförmige Wellenausbreitung, wie in Abbildung 3.5 zu sehen ist.



**Abbildung 3.5:** Ergebnis des Testaufbaus. Die vielen Resonanzfrequenzen der Bauteile verursachen Verzerrungen der Kreisschwingungen.

## 3.1 Prototyp 1

In einem ersten Versuch wurde aufgrund der Rahmenbedingung von großen Wellenlängen ( $\lambda/h \geq 20$ ) eine möglichst große Wellenwanne konstruiert. Eine weitere Randbedingung war der Glasboden, der aufgrund der Verfügbarkeit in der Glaswerkstatt auf 800x800 mm beschränkt ist. Daher wurde der Rand aus zwei Plexiglasplatten geformt und verklebt (Abb.3.7). Folglich wurde folgender Aufbau gemäß Abb. 3.6 erstellt.



**Abbildung 3.6:** Konstruktionsplan zum Prototyp 1, bestehend aus einer Glasplatte und einem Rahmen aus Plexiglas.

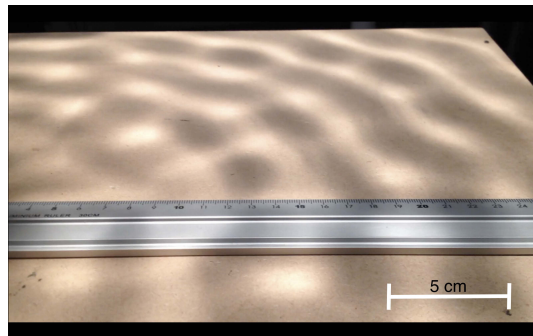


**Abbildung 3.7:** Verkleben der Plexiglasplatten zum Rand.

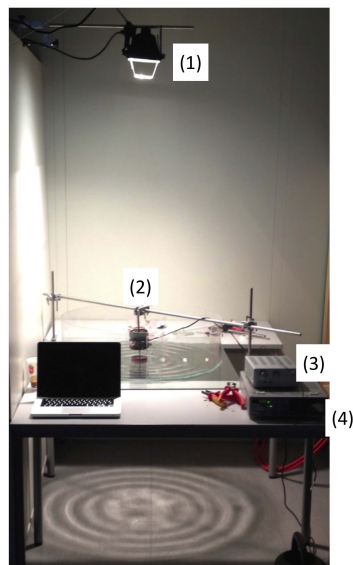
Zusätzlich zum oben beschriebenen Aufbau wurde ein zentraler Anreger implementiert. Betrieben wird dieser durch einen Vibrationsanreger der Firma FREDERIKSEN, welcher wiederum durch einen Frequenzgenerator gesteuert wird. Die Amplitude wird über einen 40W Verstärker eingestellt. Der schematische und reale Aufbau ist Abb. 3.9 zu entnehmen. Die Wellenlänge lässt sich am Schirm unterhalb der Wellenlänge ablesen (Abb. 3.8).

Zur Wellenanregung musste die ideale Form des zentralen Anregers ermittelt werden. Zur Auswahl standen drei verschiedene Formen, vgl. Abb. 3.10.

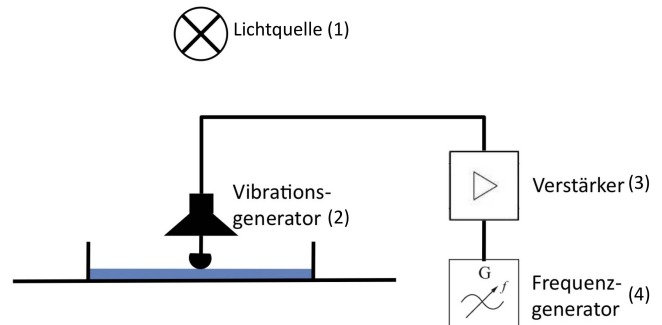
Anreger 1 konnte aufgrund der kleinen Grundfläche nicht die gewünschte Verdrängung erzeugen. Anreger 2 besitzt zwar die gewünschte Fläche, allerdings erzeugte die große horizontale Fläche eine zu große Oberflächenkraft, die den Anreger aus seiner Halterung zieht. Anreger 2 kombiniert die Vorteile der anderen Beiden und konnte so bei einer zentralen Anregung als optimal ermittelt werden. Zum einen konnte eine Wellenform mit großen Amplituden erzeugt werden. Zum anderen waren keine großen Oberflächenkräfte zu erkennen. Daher wurden alle Messungen mit dem zentralen Anreger 3 durchgeführt.



**Abbildung 3.8:** Schattenwurf des betriebenen Wellenbeckens. Der ermittelte Abbildungsfaktor  $k$  beträgt  $k=1,14$



(a)



(b)

**Abbildung 3.9:** (a) realer Aufbau des Prototyp 1 mit Wellenerreger. (b) schematischer Aufbau des Prototyp 1



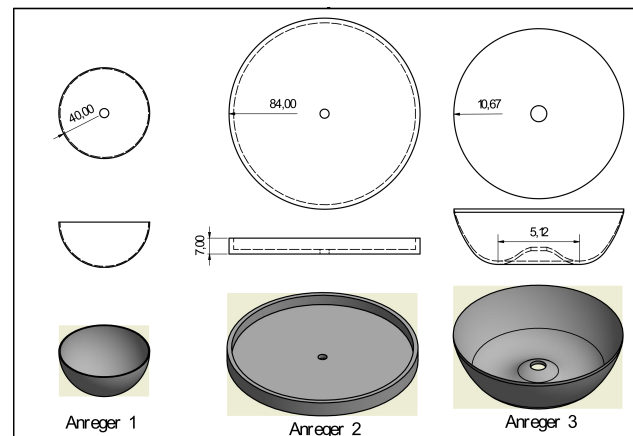


Abbildung 3.10: Drei verschiedene Anregerformen zur Erzeugung von radialen Wellen.

## 3.2 Prototyp 2

Auch der zweite Prototyp ist ein rundes Wellenbecken mit ebenem Boden. Allerdings wurde ein deutlich kleinerer Durchmesser von 19cm gewählt. Der Aufbau ist in Abbildung 3.11 zu sehen.

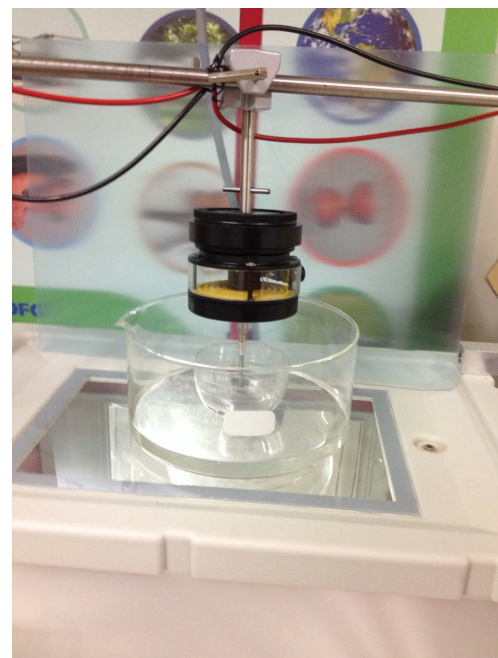
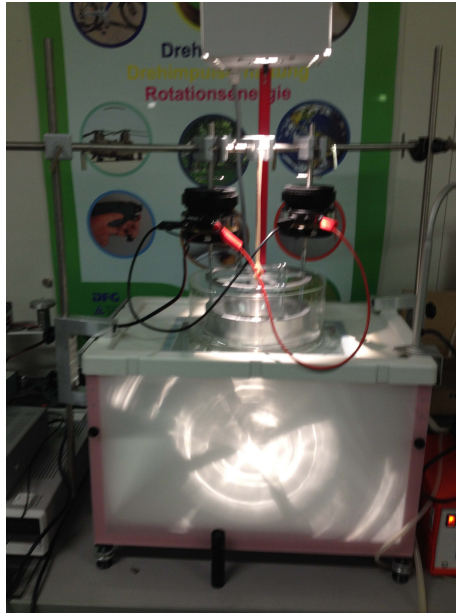


Abbildung 3.11: Prototyp 2 mit zentralem Anreger. Aufgebaut auf einer Wellenwanne der Firma LEYBOLD

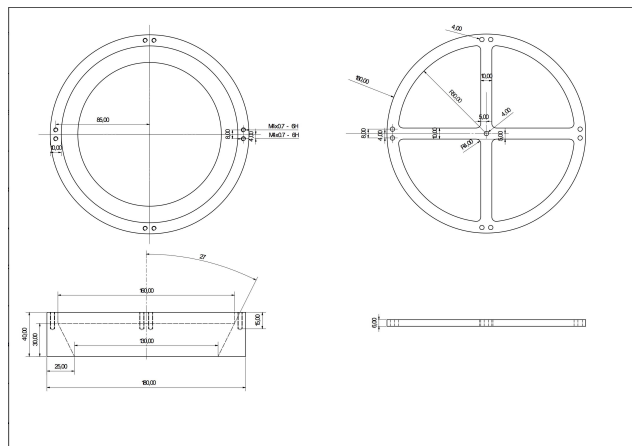
Zusätzlich wurde neben dem zentralen Anreger ein ringförmiger Anreger, der entlang des Randes der Wellenwanne verläuft konstruiert und getestet. Ziel war es mit diesem Anreger eine bessere Symmetrie zu erzeugen, sowie den Dämpfungseffekten entgegenzuwirken, die bisher die Ausbildung von stehenden Wellen verhindert hatten.

Den Aufbau mit dem ringförmigen Anreger ist in Abb.3.12 zu sehen.



**Abbildung 3.12:** Aufbau des Prototyp 2 mit ringförmigen Anreger

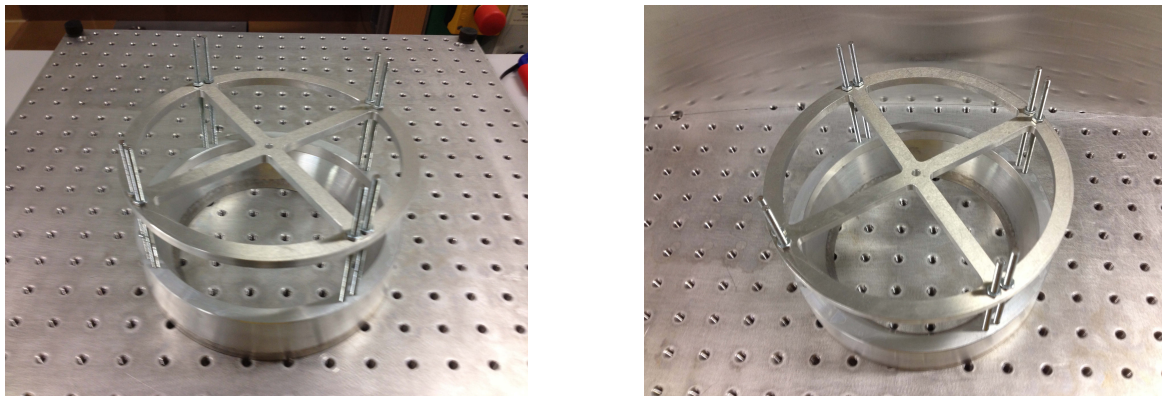
Der ringförmige Anreger wurde nach dem Plan in Abb. 3.13 in der Mechanikwerkstatt hergestellt. Das Bauteil ist in Abb. 3.14 dargestellt.



**Abbildung 3.13:** Konstruktionsplan des ringförmigen Anregers

Wie man erkennen kann, werden hier zwei Vibrationsanreger verwendet. Um eine radiale Wellenform zu erzeugen sind diese Beiden in Phase. Zu einem späteren Zeitpunkt lässt sich dies auch umstellen, um andere Wellenformen und damit andere Atomzustände darstellen zu können.





**Abbildung 3.14:** Ringförmiger Aufhänger

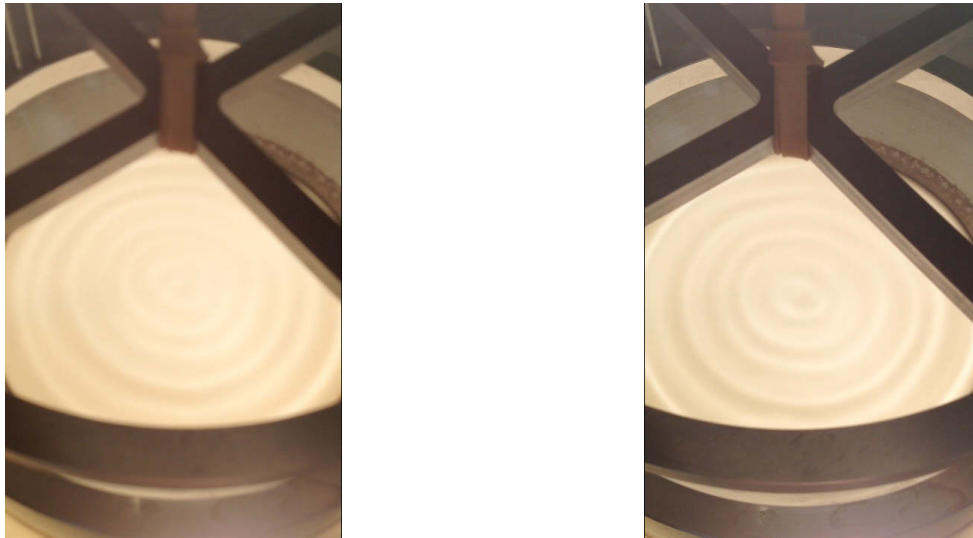
**Zusammenfassung Prototypen** In Tab. 3.1 sind die Eckdaten der zwei Prototypen nochmals zusammengefasst.

	Durchmesser	Form	Anreger	Vibrationsgeneratoren	Wellenart	Abbildungsfaktor $k$
Prototyp 1	73 cm	rund, ebener Boden	zentral	1	laufend	1,14
Prototyp 2.1	19 cm	rund, ebener Boden	zentral	1	laufend	1,65 [17]
Prototyp 2.2	19 cm	rund, ebener Boden	ringförmig	2	stehend	1,65

**Tabelle 3.1:** Eckdaten der Prototyp-Aufbauten

### 3.2.1 Veränderung der Flüssigkeit

Die bisherigen Aufbauten waren so konzipiert, dass die Wellen durch den Boden als Schattenwurf beobachtet wurden. Dies hatte den Vorteil, dass man diesen Schatten ungestört beobachten und sehr einfach ausmessen kann. Die überwiegenden Nachteile sind allerdings, dass ein Abbildungsfaktor eingeführt werden muss, um die tatsächliche Wellenlänge zu erhalten. Dabei ist es aufgrund der Optik der Lichtquelle nicht klar, ob dieser global konstant ist. Außerdem ist durch die Anreger und Vibrationsgeneratoren die Lichtdurchlässigkeit sehr eingeschränkt. Daher wurde der grundlegende Aufbau so abgeändert, dass versucht wird, die Wellen direkt im Becken soweit sichtbar zu machen. Dies ist erreichbar, indem eine Flüssigkeit verwendet wird, die das Licht stärker streut um damit bei einer höheren Breite des Flüssigkeitsschicht ein deutlicher Helligkeitsunterschied entsteht. Der Effekt ist bekannt als Tyndall-Effekt. Möglich wird dies mit Emulsionen, wie Milch. Daher wurde der Prototyp 2 testweise mit Milch gefüllt und von unten beleuchtet. Das Ergebnis ist sehr vielversprechend, wie man in den Abb.3.15 sehen kann. Daher wurde für die endgültige Version des Experiments dieser Ansatz gewählt.



**Abbildung 3.15:** Wellen in Milch. Darstellung ist von oben sehr gut sichtbar.

### 3.3 Endgültiger Aufbau

Nach den vorangegangenen Prototypen und den damit verbundenen Messungen (vgl. Kap. 4) wurden die Ergebnisse in die Erstellung des endgültigen Aufbau eingearbeitet. Dies sind:

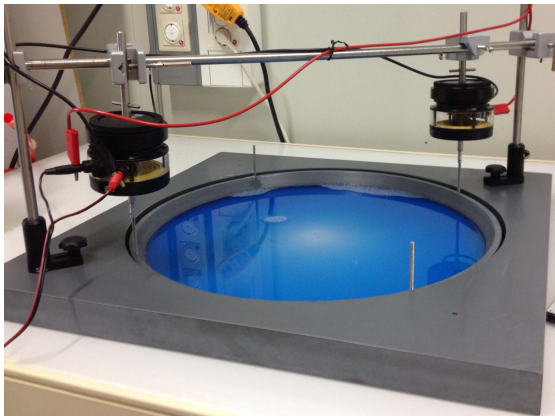
- Ein ringförmiger Anreger
- Eine maximale Tiefe von ca. 12 mm
- Eine Durchmesser von mindestens 40 cm
- Eine Emulsion für Sichtbarkeit von oben

Diese Bedingungen wurden in folgendem Aufbau beachtet. Der Aufbau ist in Abb. 3.16 und Abb. 3.17 dargestellt. Er besteht aus insgesamt 3 Teilen: Zum einen einem festen Rahmen, sowie einem Wellenring als Anreger (Abb. 3.18). Außerdem wurden zwei verschiedene Böden mit unterschiedlichen Profilen hergestellt 3.20.

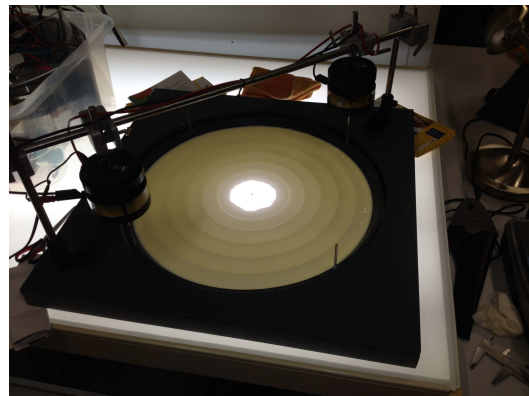
Das ganze Experiment steht auf dem bereits vorhandenen Leuchttisch des Schülerlabors, sodass von unten eine gleichmäßige und großflächige Beleuchtung gewährleistet ist (Abb. 3.17). Der Wellenring wird wie Prototyp 2 (siehe Kap. 3.2) von 2 Vibrationsgeneratoren angetrieben. Es können zwei weitere zusätzlich montiert werden um eine größere Stabilität zu erzeugen.

Zusätzlich zum Wellenring wurde ein zentraler Wellenanreger hergestellt, der die aus der Mitte laufende reflektierte Welle unterstützen soll. Dieser ist in Abb. 3.19 zu sehen.

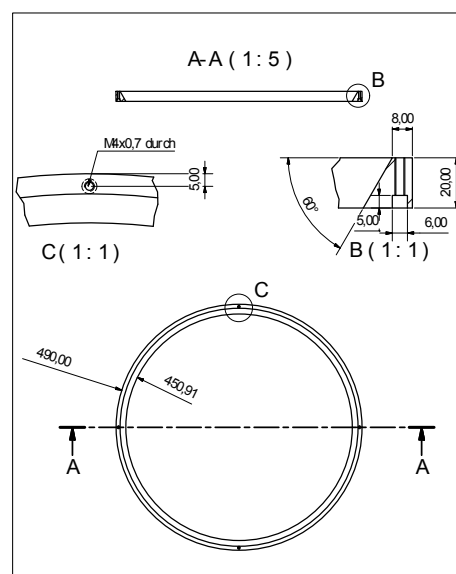
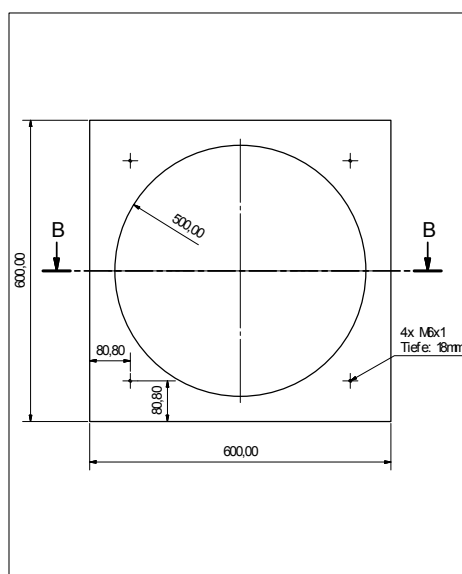
Zusätzlich wurden für die Wellenwanne zwei verschiedene Böden gefräst (Abb. 3.20). Beide weisen ein lineares Profil auf, das aufgrund der Einfachheit bei der Herstellung



**Abbildung 3.16:** Realer Aufbau des endgültigen Experiments. Hier mit gefärbtem Wasser gefüllt



**Abbildung 3.17:** Realer Aufbau des endgültigen Experiments. Hier mit Milch gefüllt, in der Mitte ohne Flüssigkeit.



**Abbildung 3.18:** Konstruktionspläne für den Rahmen (links) und den Anreger (rechts), Ausführliche Pläne im Anhang

gewählt wurde. Sie unterscheiden sich zum einen in ihrer Steilheit und absoluten Tiefe. Außerdem besitzt der zweite Boden in der Mitte ein Plateau, auf dem der oben genannte zusätzliche Anreger arbeiten kann.

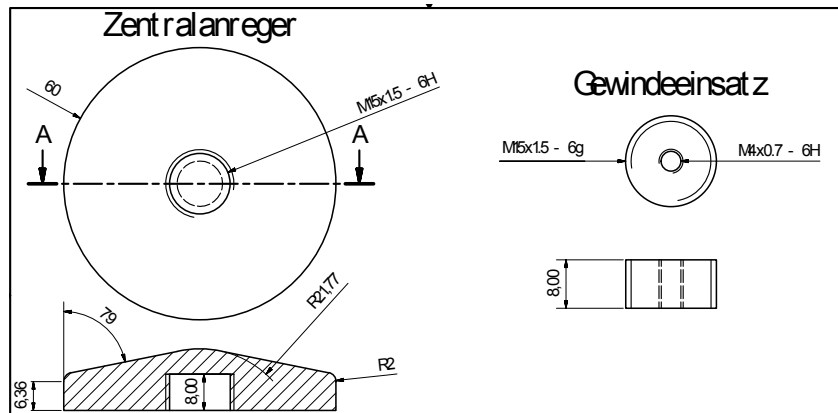


Abbildung 3.19: Konstruktionsplan für einen zusätzlichen zentralen Anreger im endgültigen Experiment

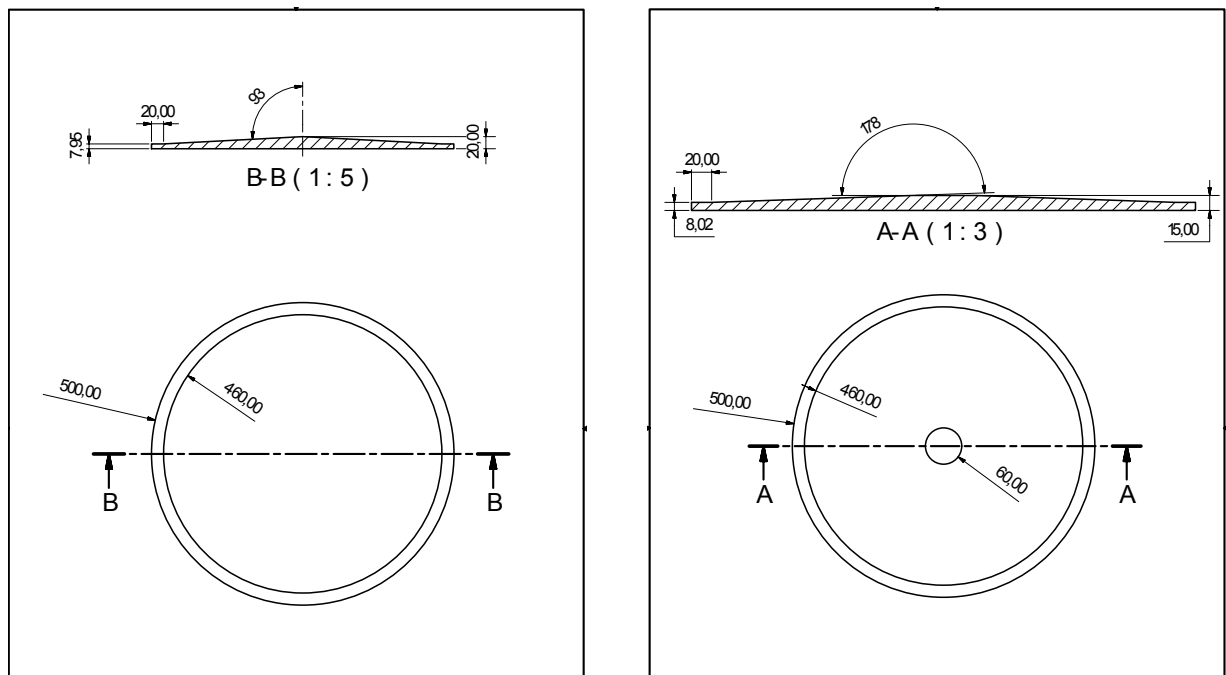


Abbildung 3.20: Zwei Profile für den Boden der Wellenwanne.

# KAPITEL 4

---

## Messungen

---

Nachdem die einzelnen experimentellen Aufbauten in Kapitel 3 vorgestellt und erläutert wurden, sollen hier nun die Ergebnisse der einzelnen Messungen präsentiert werden. Im Anschluss werden diese interpretiert und bewertet.

Da die Prototypen über einen ebenen Boden verfügten, wurde die gesamte Wassermenge im Becken, sowie anschließend die Frequenz variiert. Erst beim endültigen Aufbau (Abschnitt 4.3) konnte darauf verzichtet werden.

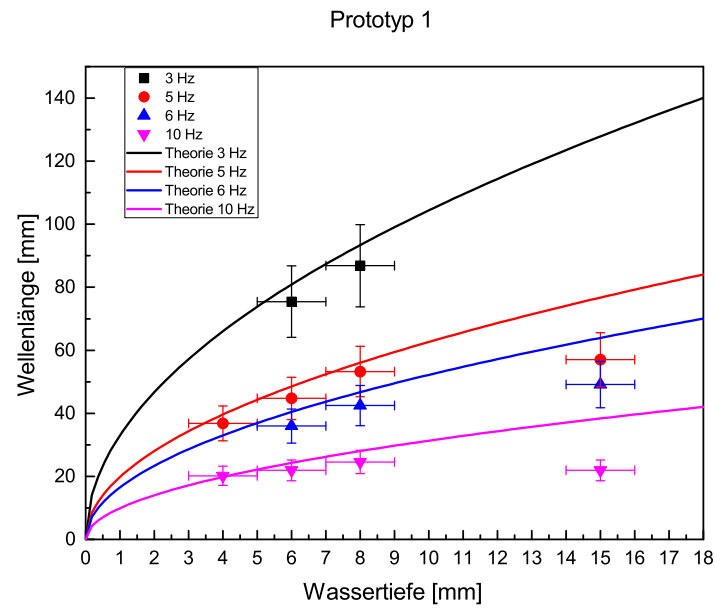
### 4.1 Prototyp 1

In einer ersten Messreihe wurden an diesem Prototyp bei 8 verschiedenen Frequenzen über 4 verschiedene Wassertiefen gemessen. Die Wassertiefe wurde dabei mithilfe eines Messschiebers bestimmt. Die Wellenlänge wurde auf dem Schirm abgelesen (vgl. Abb. 3.8) und mithilfe des vorher ermittelten Abbildungsfaktors  $k$  (siehe Tab. 3.1) in die tatsächliche Wellenlänge umgerechnet. Die Ergebnisse sind Abb. 4.1 zu entnehmen.

Zusätzlich zu den Messwerten wurden die theoretischen Werte, wie sie sich aus Gleichung 2.22 ergeben, eingezeichnet. Außerdem konnte ein Fehler ermittelt werden, der als Fehlerkreuz eingezeichnet ist. Die ausführliche Fehlerdiskussion steht in Kap. 4.4.

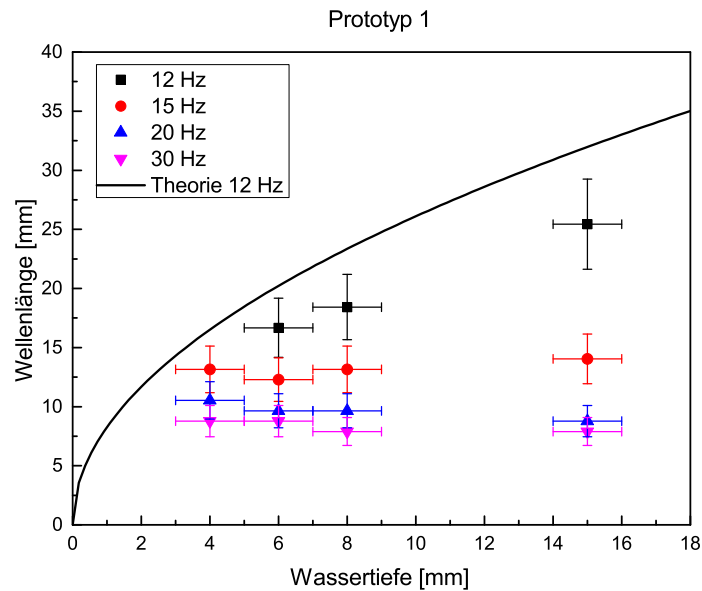
Wie laut Theorie zu erwarten war, stimmt das Messergebnis bei kleineren Frequenzen innerhalb der Fehlertoleranz mit dem theoretischen Wert überein. Dies lässt sich hauptsächlich auf zwei Punkte zurückführen. Zum einen kann in diesem Bereich die Wellenlänge deutlich besser bestimmt werden. Zum anderen ist das Randkriterium  $\lambda/h \geq 20$  erfüllt, womit diese Wellen im Flachwasserbereich liegen. Allerdings sieht man auch, dass trotz niedrigen Frequenzen die Messwerte bei Wassertiefen von ca. 15mm stärker von der Theorie abweichen. Auch dies ist auf das Flachwasserkriterium zurückzuführen.

Bei den hohen Frequenzen in Abb. 4.2 ist eine deutliche Abweichung von der Theorie festzustellen. Mit Ausnahme der 12 Hz-Messreihe liegen die Wellenlängen eher in einem konstanten Bereich. Es liegt keine Wassertiefenabhängigkeit mehr vor. Die Wellen befinden sich vollständig im Tiefwasserregime und folgen daher dem Zusammenhang



**Abbildung 4.1:** Messergebnisse des ersten Prototyps bei geringen Frequenzen

2.18, der einzig eine Abhängigkeit von der Frequenz aufweist. Daher wurde hier auf einen Vergleich mit der Theorie verzichtet.



**Abbildung 4.2:** Messergebnisse des ersten Prototyps bei hohen Frequenzen

Als Ergebnis für diesen Prototypen lässt sich festhalten, dass die Theorie in einem Bereich von bis zu ca. 12 Hz und einer gleichzeitigen Wassertiefe von bis zu 10 mm gilt. Für Werte darüber verlässt man das Flachwasserregime und die Wellenlänge nimmt

einen der Frequenz entsprechenden konstanten Wert an. Der größte Nachteil an diesem Prototyp war jedoch, dass sich keine stehenden Wellen einstellten. Dies lag an einer zu geringen Amplitude und gleichzeitig zu hohen Dämpfung des Rands. Somit konnte an den Wänden nicht genug reflektiert werden, damit sich durch Überlagerung stehende Wellen ausbilden konnten. Auch konnte keine größere Amplitude angeregt werden, da hier die geringe Wassertiefe begrenzend wirkte.

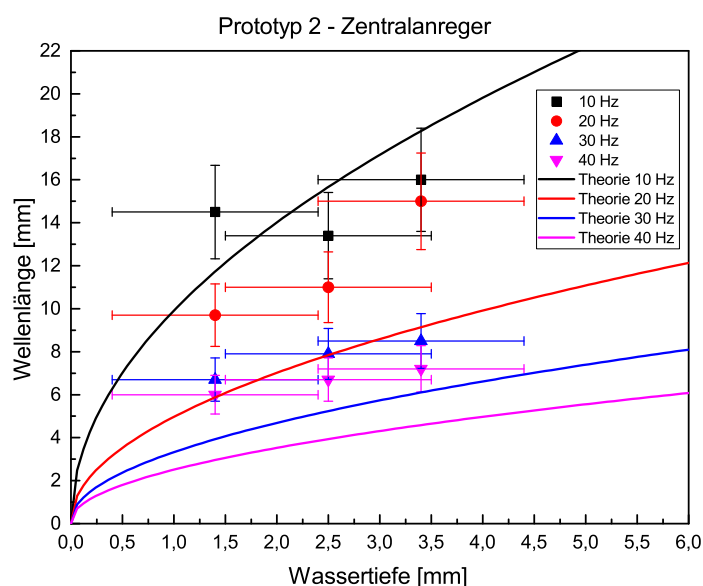
## 4.2 Prototyp 2

Wie auf Abb. 3.12 zu sehen ist, lässt sich der Schattenwurf des Wellenbildes auf dem Schirm ablesen. Auch hier muss ein Abbildungsfaktor beachtet werden. Laut dem Hersteller der verwendeten Hilfswellenwanne von LEYBOLD wird ein Faktor von  $k = 1,65$  durch die Optik erzeugt [17].

Es wurden zwei Messreihen aufgenommen: Einmal mit den zentralen Anreger, der auch bei Prototyp 1 verwendet wurde. Bei der zweiten Reihe wurde der ringförmige Anreger benutzt (siehe Abb. 3.12).

### 4.2.1 Zentraler Anreger

Mithilfe des zentralen Anregers wurden insgesamt 4 verschiedene Frequenzen bei 3 Wassertiefen aufgezeichnet. Die Ergebnisse sind hier in Abb. 4.3 dargestellt.



**Abbildung 4.3:** Messergebnisse des zweiten Prototyps mit einem zentralen Anreger

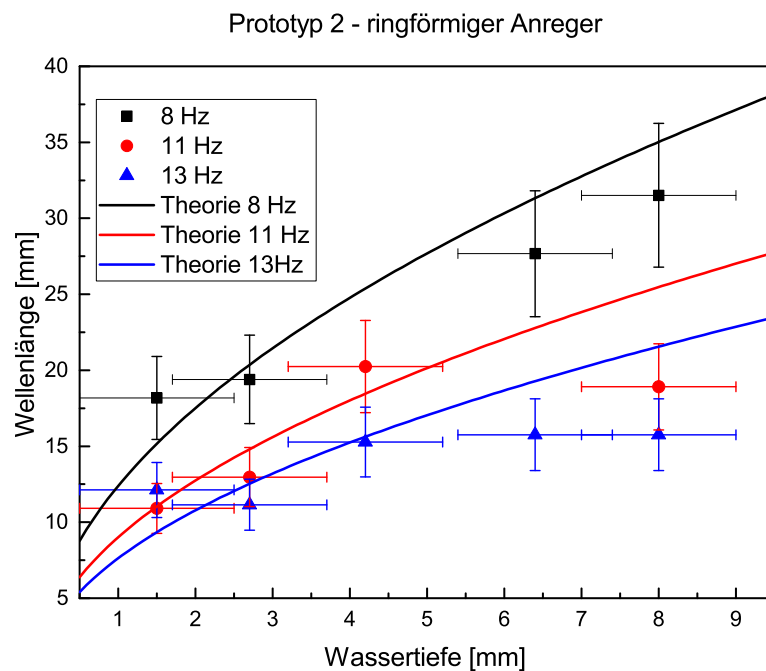
Diese Messreihe hatte als Ziel, das allgemeine Verhalten innerhalb des kleineren Wellenbeckens zu erforschen. Daher ist es hier keine Überraschung, dass für die hohen

Frequenzen die Übereinstimmung zur Theorie nicht gegeben ist. Dennoch zeigt sich trotzdem auch bei Frequenzen  $\geq 12\text{Hz}$ , dass sich die Wellenlänge noch deutlich ändert und das Teifwasserregime sich erst ab  $30\text{ Hz}$  einstellt. Dies war nach der Messreihe in Kap. 4.1 nicht zu erwarten.

Viel mehr überraschte allerdings, dass auch bei dem kleinen Becken die Dämpfung am Beckenrand zu groß war, als das sich stehende Wellen entwickeln konnten.

#### 4.2.2 Ringförmiger Anreger

Der ringförmige Anreger wurde entwickelt, aufgrund der bisher fehlenden stehenden Wellen. Damit wurde zudem eine größere Symmetrie erzeugt, da die Positionierung des Anregers innerhalb des Beckens nicht so exakt vorgenommen werden musste, wie es bei dem zentralen Anreger der Fall war. Die Messergebnisse sind auch hier wieder getrennt nach niedrigen und hohen Frequenzen in Abb.4.4 und Abb.4.5 aufgeteilt.

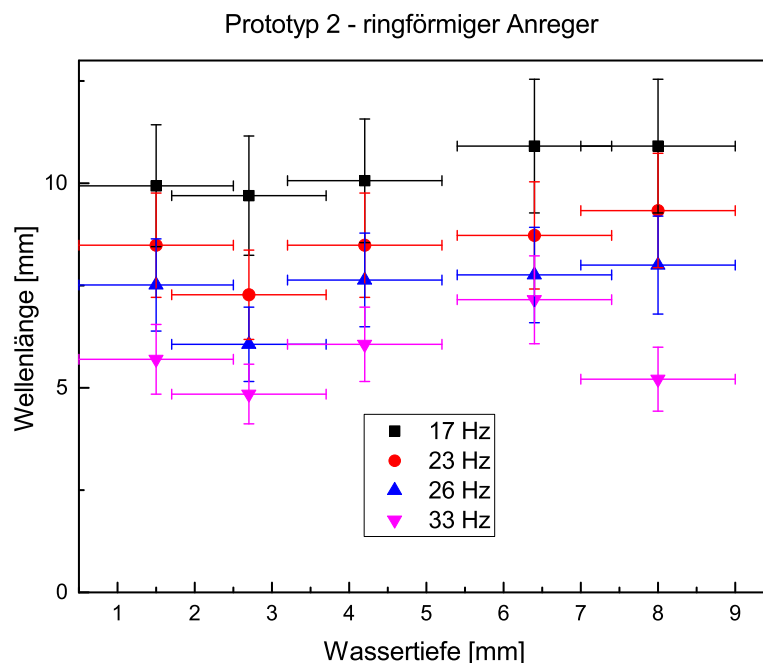


**Abbildung 4.4:** Messergebnisse des zweiten Prototyps mit einem ringförmigen Anreger bei niedrigen Frequenzen

Die bisherigen Ergebnisse der vorangegangenen Messreihen werden durch die Ergebnisse in Abb.4.4 und Abb.4.5 auch für stehende Wellen bestätigt. Die einzige neue Erkenntnis ist, dass bereits bei einer Frequenz von  $\geq 11\text{Hz}$  die Abweichungen von der Theorie so groß sind, dass sie nicht mehr im Rahmen der Messgenauigkeit liegen. Eine Erklärung dafür konnte nicht gefunden werden.

Für die hohen Frequenzen gilt analog zu Kap. 4.1, dass diese außerhalb des Flachwasserregimes liegen und somit keine Wassertiefenabhängigkeit mehr aufweisen.





**Abbildung 4.5:** Messergebnisse des zweiten Prototyps mit einem ringförmigen Anreger bei hohen Frequenzen

**Ergebnisse der vorbereitenden Experimente** Aus den oberen Messreihen lassen sich folgende Ergebnisse für den endgültigen Aufbau ableiten:

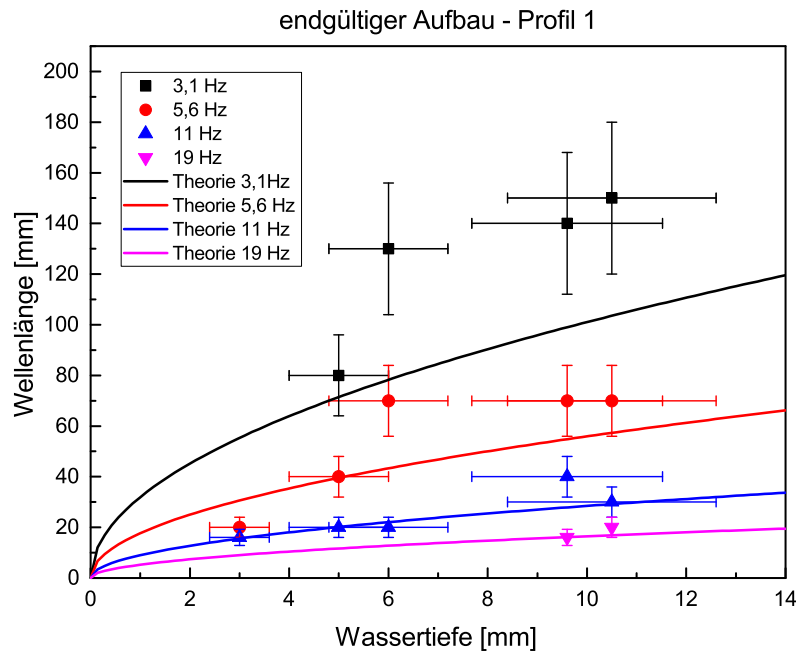
- Mit einem ringförmigen Anreger lassen sich stehende Wellen realisieren, da hier genug Reflexion für eine Überlagerung von ein- und auslaufender Welle erzeugt wird.
- Für einen Frequenzbereich von  $0 < f \leq 12\text{Hz}$  gibt es eine gute Übereinstimmung mit der Theorie. Außerdem sind in diesem Bereich die Wellenlängenunterschiede deutlich darstellbar.
- Bis zu einer Wassertiefe von ca 10mm ist ebenso eine gute Übereinstimmung mit der Theorie festzustellen.
- Der Durchmesser der Wellenwanne muss definitiv deutlich größer als 20 cm sein, da ansonsten bei geringen Frequenzen nicht genug Wellenläufe in das Becken passen. Die obere Grenze, die sich am Durchmesser des ersten Prototyps orientiert, sollte kleiner als die dort verwendeten 73 cm sein.

### 4.3 Endgültiger Aufbau

Im Unterschied zu den vorherigen Messungen wird hier mit Milch als Flüssigkeit gearbeitet. Damit verbunden wird die Welle direkt abgelesen und gemessen.

### 4.3.1 Bodenprofil 1

Für ein erstes Bodenprofil sind die Ergebnisse zum einen in Abb.4.6 dargestellt. Zum anderen sind Aufnahmen der Messung in Abb.4.7 aufgeführt.



**Abbildung 4.6:** Messergebnisse des endgültigen Aufbaus

Wie man dem Diagramm entnehmen kann, sind die Werte für die niedrigen Frequenzen stark von den theoretischen Werten abweichend. Erst ab einer Frequenz von 11 Hz liegen die Werte in Übereinstimmung mit der Theorie. Vermutlich ist die Wellenlänge bei den niedrigen Frequenzen so groß, dass im Verlauf eines Wellenzuges die Wassertiefe so stark ändert, dass die Messwerte dadurch verfälscht werden. Je kleiner die Wellenlänge bei steigenden Frequenzen wird, desto geringer ist der Höhenunterschied über einen Wellenzug. Bei 11 Hz und einer mittleren Wellenlänge von 20 mm ist bei diesem Profil nur ein Höhenunterschied von  $20\text{mm} \cdot \cos(87^\circ) = 1,046\text{ mm}$  und kann somit über eine Welle als konstant angenommen werden. Da für 11 Hz das beste Ergebnis erzeugt wurde, soll dies nochmals einzeln dargestellt werden. Diese hatten die besten Übereinstimmung mit der Theorie, allerdings ist die Längendifferenz zwischen den einzelnen Wassertiefen zu gering. Der Effekt ist leider nicht mit bloßem Auge zu erkennen. Zudem konnten auch hier wieder keine stehenden Wellen realisiert werden. Die Größe des Beckens und die geringe Wassertiefe in der Mitte sind hier hinderlich. Als Lösung für beide genannten Probleme wurde ein zweites Bodprofil erstellt, sowie ein Aufbau mit einem zusätzlichen zentralen Anreger aufgebaut.

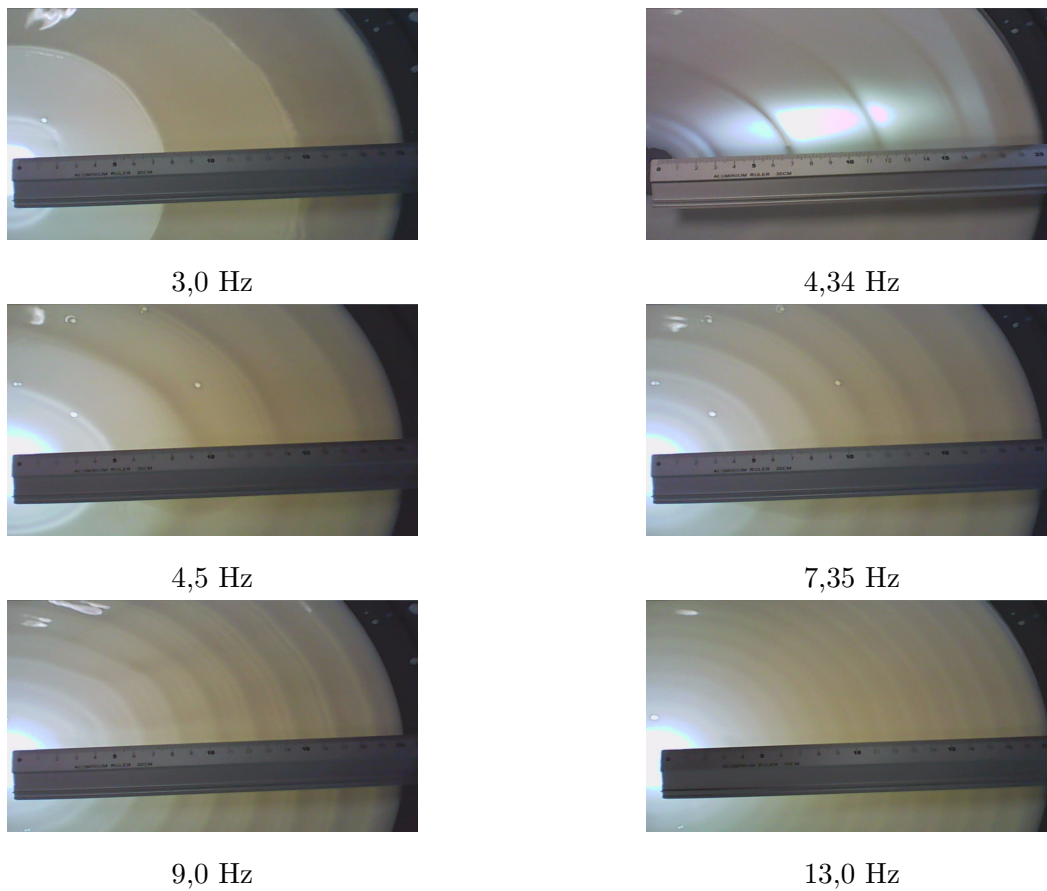


Abbildung 4.7: Aufnahmen vom Messprozess am endgültigen Aufbau

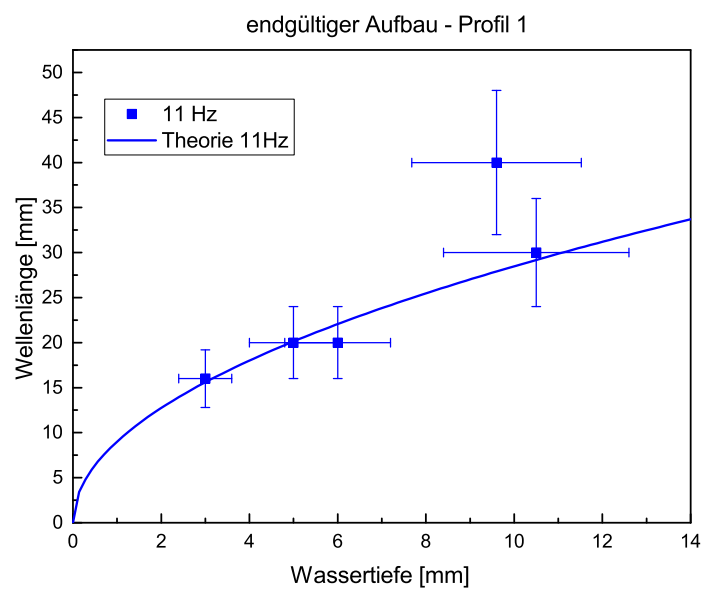


Abbildung 4.8: Messergebnis bei 11 Hz des endgültigen Aufbaus

## 4.4 Fehler

Während des Messprozesses treten Fehler einerseits aufgrund von Ungenauigkeiten der Messgeräte auf, andererseits ist auch der Messprozess an sich fehlerbehaftet. Die verwendeten Messgeräte sind ein Messschieber, sowie ein Lineal bzw. Maßband. Laut Angaben auf den Geräten sind hier folgende Fehler anzunehmen:

	Fehler
Messschieber	0,02 mm
Lineal	0,5 mm
Maßband	0,5 mm

**Tabelle 4.1:** Messfehler der verwendeten Messinstrumente

Bei dieser Messung treten zwei fehlerbehaftete Größen auf. Dies ist einmal die Wassertiefe, die mithilfe des Messschiebers bestimmt wird. Zum anderen ist dies die Wellenlänge.

**Wassertiefe** Die Messung der Wassertiefe wird zum einen durch die Fehler des Messschiebers bewirkt, wobei dieser verschwindend gering ist. Viel deutlicher fällt die elektromagnetische Anziehung zwischen Wasser und Messschieber ins Gewicht, die dafür sorgt, dass sich das Wasser am Messschieber hochzieht und somit eine verfälschte Wassertiefe angegeben wird. Häufig fällt diese dann zu groß aus. Die Abweichungen sind unabhängig von der Wassertiefe, sodass ein Fehler von  $\Delta h = 1\text{mm}$  bei allen Messungen verwendet wurde.

**Wellenlänge** Auch bei der Wellenlänge sind Messgerätsfehler zu beachten, die deutlich größer sind als bei der Wassertiefe. Zusätzlich ist der Abbildungsfaktor  $k$  eine fehlerbehaftete Größe, da nicht angenommen werden kann, dass dieser über den gesamten Schirm konstant ist. Hier wird ein Fehler von 2% angenommen. Durch schräges Ablesen, unzureichende Ausleuchtung und schlechte Wellenanregung kommt zusätzlich ein Fehler von 10% hinzu, womit sich ein relativer Gesamtfehler von 12% einstellt.

Die Fehler sind wie bereits erwähnt in den Schaubildern in Kap. 4 mit diesen Werten eingetragen. Diese Toleranzen sind für die Form der Messung, ohne elektronische oder mechanisch ausgereifte Hilfsmittel akzeptabel und liefern ausreichend Toleranz um die Ergebnisse als korrekt wiedergeben zu können.

# KAPITEL 5

---

## Zusammenfassung und Ausblick

---

Ziel dieser Arbeit war es, ein Schauversuch aufzubauen, der mithilfe von Wasserwellen ein Analogon zum Wasserstoffatom und dessen Elektronenzuständen darstellen soll. Der Vorteil dieses Versuchs ist, dass mithilfe des schrägen Bodens und der sich damit ändernden Wellenlänge die Aufenthaltswahrscheinlichkeit für höhere Anregungszustände gut darstellen lassen.

Hierfür wurden mehrere vorläufige Prototypen zusammengestellt, mit denen die lineare Wellentheorie nach AIRY [1] überprüft wurde, um anschließend die richtigen Parameter (Durchmesser, Tiefe, Bodenprofil, Anregerform) für das endgültige Schauexperiment herauszufinden. Erfolgreich wurden zwei Prototypen ausgemessen. Zusätzlich wurde eine Möglichkeit gefunden mithilfe von Lichtstreuung in einer Emulsion die Wellen direkt zu beobachten, ohne einen Umweg über eine Projektion zu nehmen.

Das endgültige Experiment erfüllt die Rahmenbedingungen der abnehmenden Wellenlänge. Allerdings waren die Unterschiede nicht groß genug, als dass mit dem Auge dieser wahrnehmbar wären. Daher wurde der zweite Boden nach Abb. 3.20 erstellt. Aufgrund von Liefer- und Produktionsverzögerungen konnte dieser nicht mehr ausgemessen werden, aber man kann zuversichtlich sein, dass sich die Sichtbarkeit verbessert. Als alternative Flüssigkeit (bisher wurde Milch als Emulsion verwendet) soll in Zukunft eine mineralölbasierte Emulsion<sup>1</sup> verwendet werden. Diese hat die gleichen Eigenschaften wie Milch, ohne dass Lebensmittel verschwendet werden und auf Haltbarkeit geachtet werden muss.

Allerdings muss man auch auf die Grenzen der Analogie hinweisen. Das Potential, das im Atom vorliegt, verläuft anders herum als das Profil der Wasserwanne. Das Coulombpotential wird zum Rand hin immer flacher. Dennoch ist das grundsätzliche Bild zwischen Wellen und Radialfunktion überzeugend.

Auf diesen Ergebnissen aufbauend soll mithilfe zusätzlicher Vibrationsgeneratoren auch andere Anregungsmoden dargestellt werden. Bisher sind nur radialsymmetrische Moden möglich ( $l=0$ ). Die Vereinbarkeit mit dem didaktischen Modell des Elektroniums ist dabei nur eine Möglichkeit die Wellenwanne zu verwenden. Ein Begleittext dazu findet

---

1 Kühlschmiermittel Fabakool 502 der Firma FABACHEMIE

sich im Anhang. Weitere Analogien wie z.B. zu elektromagnetischen Wellen [9], zu dispersiven Bewegungsvorgänge [24] oder zur Akustik [15] sind möglich und können in Zukunft entwickelt werden.

# ANHANG A

---

## Begleittext zum Experiment

---

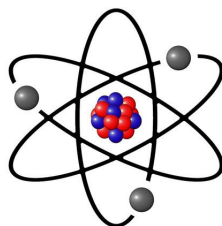
### Die Atomhülle, oder: Wo befindet sich das Elektron?

Wie du sicherlich weißt, sind alle Dinge aus Atomen aufgebaut. Damit sind Atome der kleinste Baustein von Materie. Und wenn sogar winzig kleine Bakterien und Staubkörnchen aus Millionen von Atomen bestehen, kannst du dir vorstellen, dass ein Atom sehr sehr klein ist. Physiker sagen: „Ein Atom hat einen Durchmesser von ungefähr  $10^{-10}$  m.“ Das ist ein 10-Milliardstel Meter, oder als Zahl:

0,0000000001 m

Das lässt sich natürlich mit keinem Mikroskop der Welt sichtbar machen. Und daher weiß man auch nicht so genau, wie es in einem Atom eigentlich aussieht.

Dennoch haben Physiker sich Gedanken gemacht, wie so ein Atom aufgebaut sein könnte. Dafür haben sie, gestützt von Versuchen, ein Modell entwickelt, das besagt, dass es einen **Atomkern** in der Mitte und eine **Atomhülle** drum herum gibt. In der Atomhülle laufen die Elektronen auf Bahnen um den Atomkern, in etwa so:

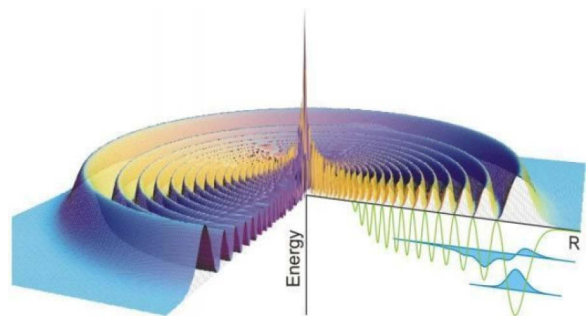
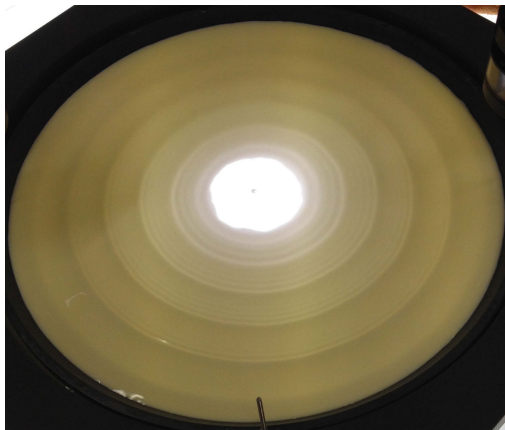


**Dieses Bild hat sich als falsch herausgestellt.**

Da Elektronen so klein sind, benötigt man eine besondere Form der Physik, um sagen zu können, was sie machen und wie sie sich verhalten: Die **Quantenmechanik**. Eine Aussage der Quantenmechanik ist es, dass man den Ort, an dem sich das Elektron befindet, nicht bestimmen kann. Man kann nur mithilfe einer Psi-Funktion ( $\Psi$ ) Aussagen über die Antreffwahrscheinlichkeit machen. Daher stellt man sich das Atom eher so vor:

„In der Mitte sitzt der Atomkern, die Atomhülle wird von einem Stoff ausgefüllt, den wir **Elektronium** nennen. Die  $\Psi$ -Funktion beschreibt dabei die Dichte des Elektroniums und damit die Wahrscheinlichkeit, dort ein Elektron zu finden. Je dichter, desto wahrscheinlicher.“

Mithilfe des Experiments kannst du dir die Dichte des Elektroniums einmal anschauen. Stell dir dazu vor, dass in der Mitte der Atomkern sitzt. Der schräge Boden soll dabei die Wechselwirkung zwischen Atomkern und Elektronium verdeutlichen. Du siehst im Prinzip einen Schnitt durch das Atom, so als ob du eine Kugel halbiert. Wenn man das Experiment jetzt anschaltet, so entsteht ein Bild, das ungefähr so aussieht:



Auf der linken Seite siehst du die Computerlösung für das Elektronium<sup>1</sup>. Siehst du die Ähnlichkeit?

Genau: Je weiter du nach außen kommst, desto breiter werden die hellen Streifen. Das bedeutet, der Ring, in dem das Elektron sich befinden kann, wird breiter.

Man kann also Zusammenfassen:

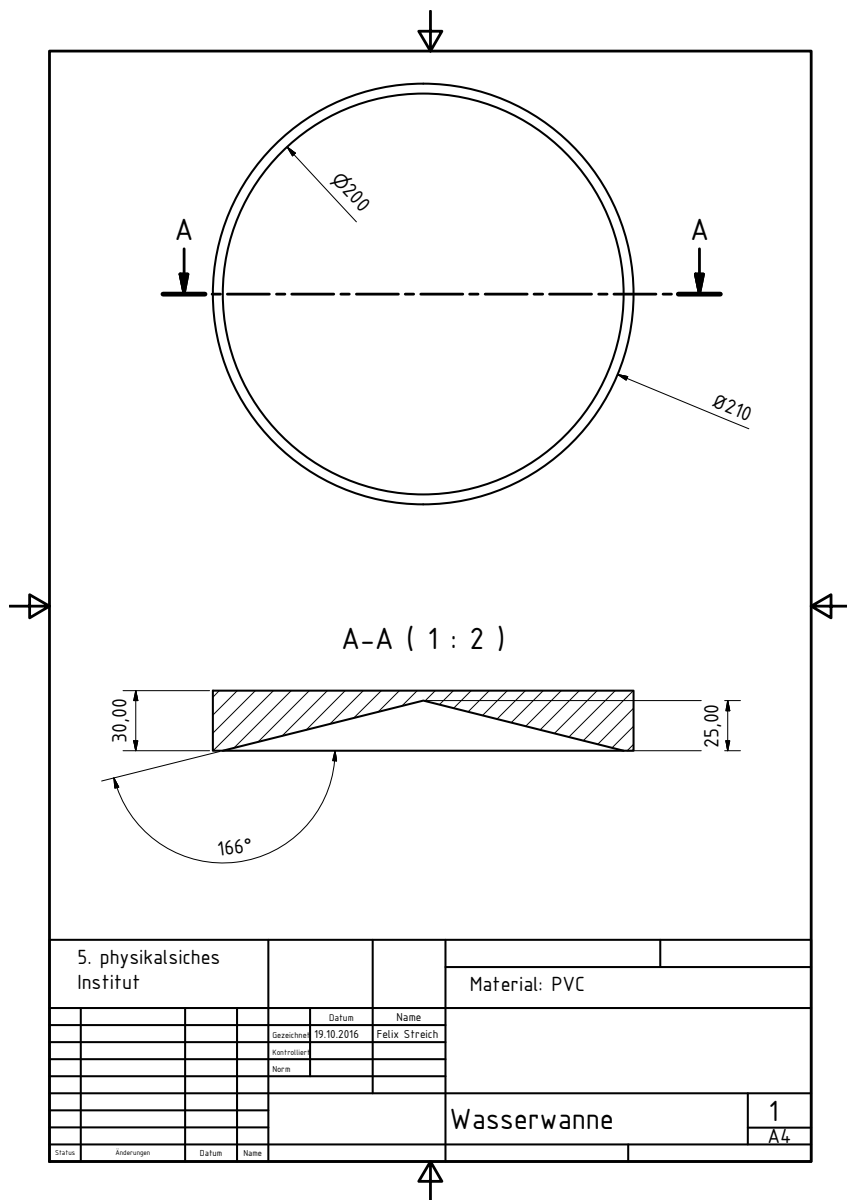
**Die Dichte des Elektroniums, also dort wo die Flüssigkeit in der Wellenwanne heller ist, zeigt dir an, wo sich wahrscheinlich ein Elektron befindet. Den genauen Ort kannst du wegen der Quantenmechanik nicht wissen.**

<sup>1</sup> Bildquelle: <https://www.sciencedaily.com/releases/2009/05/090507130439.htm>

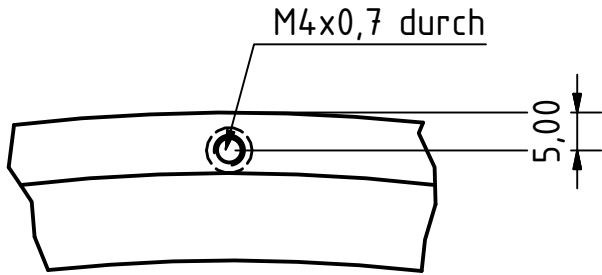
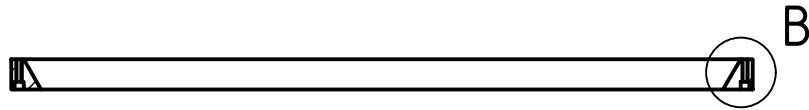


# ANHANG B

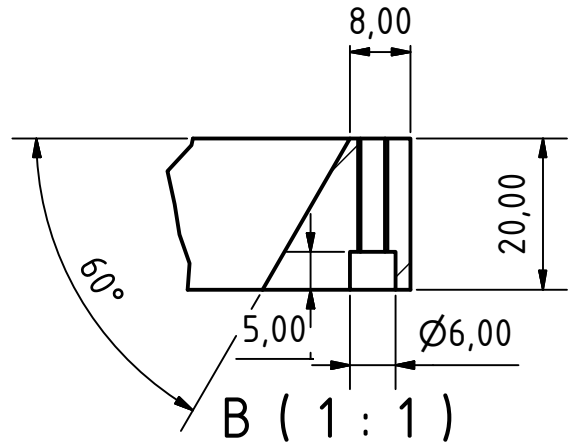
## Baupläne



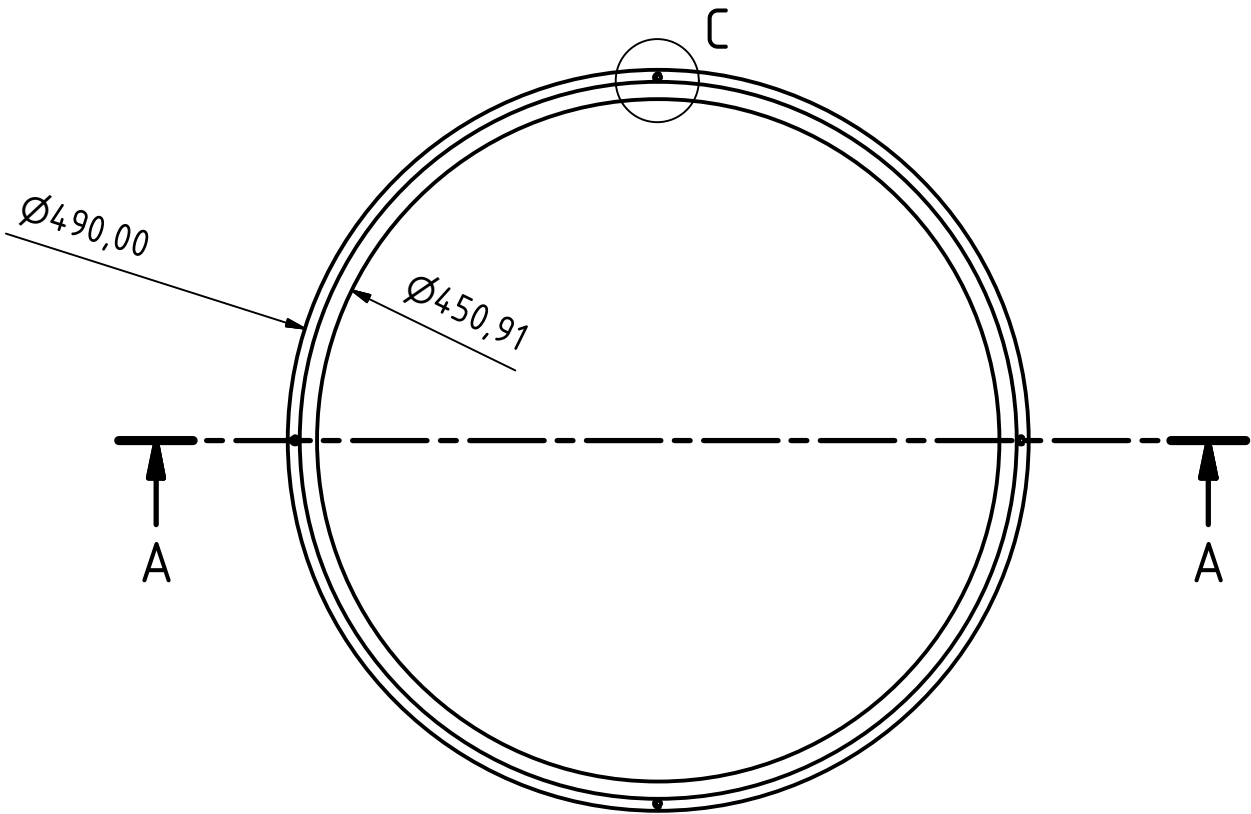
A-A ( 1 : 5 )



C ( 1 : 1 )



B ( 1 : 1 )



5. physikalisches  
Institut

Material: PVC

Maßstab: 1:5

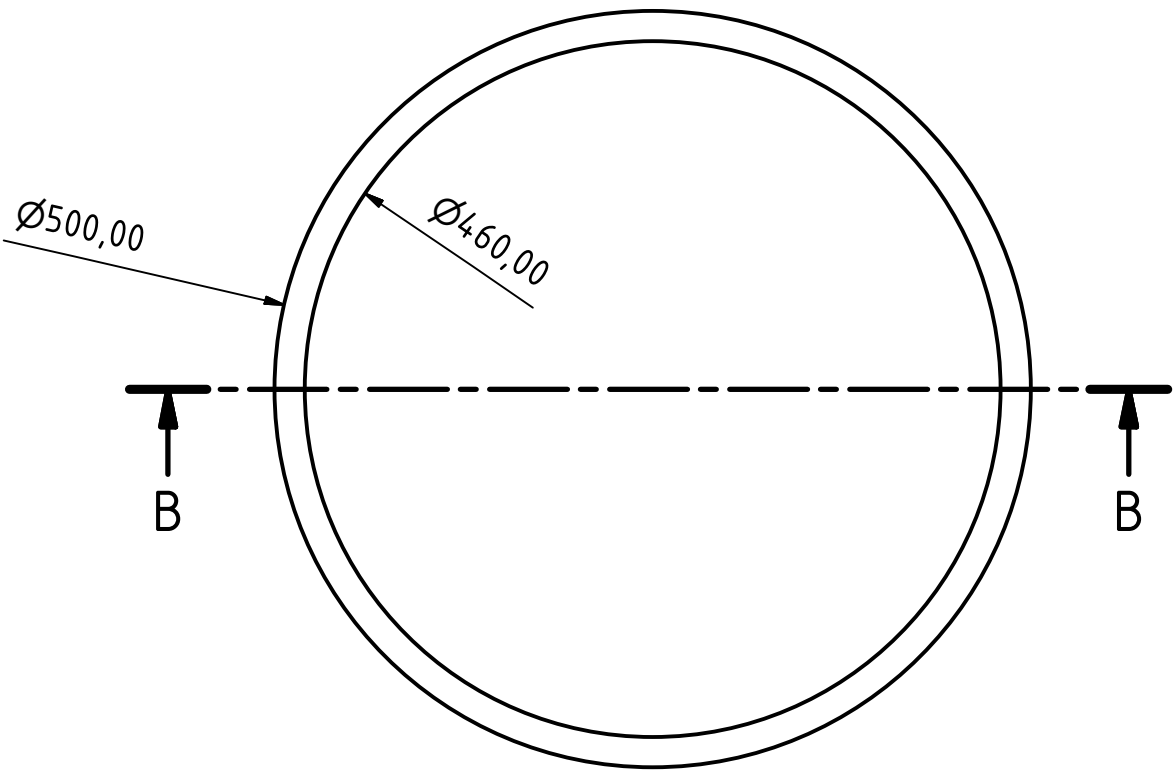
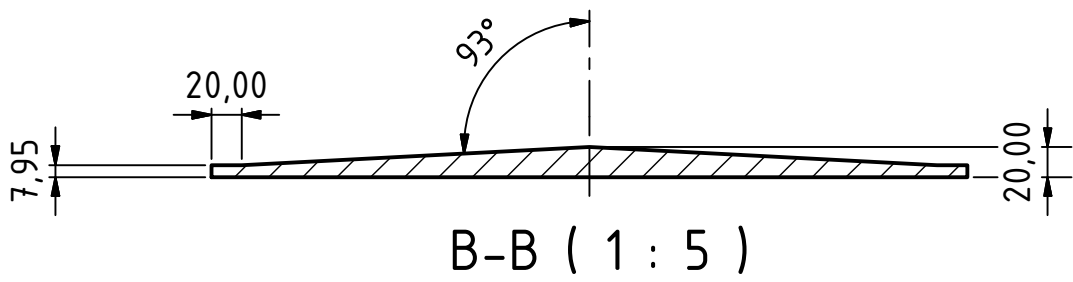
	Datum	Name
Gezeichnet	12.08.2016	Felix Streich
Kontrolliert		
Norm		

Wellenwanne Anreger

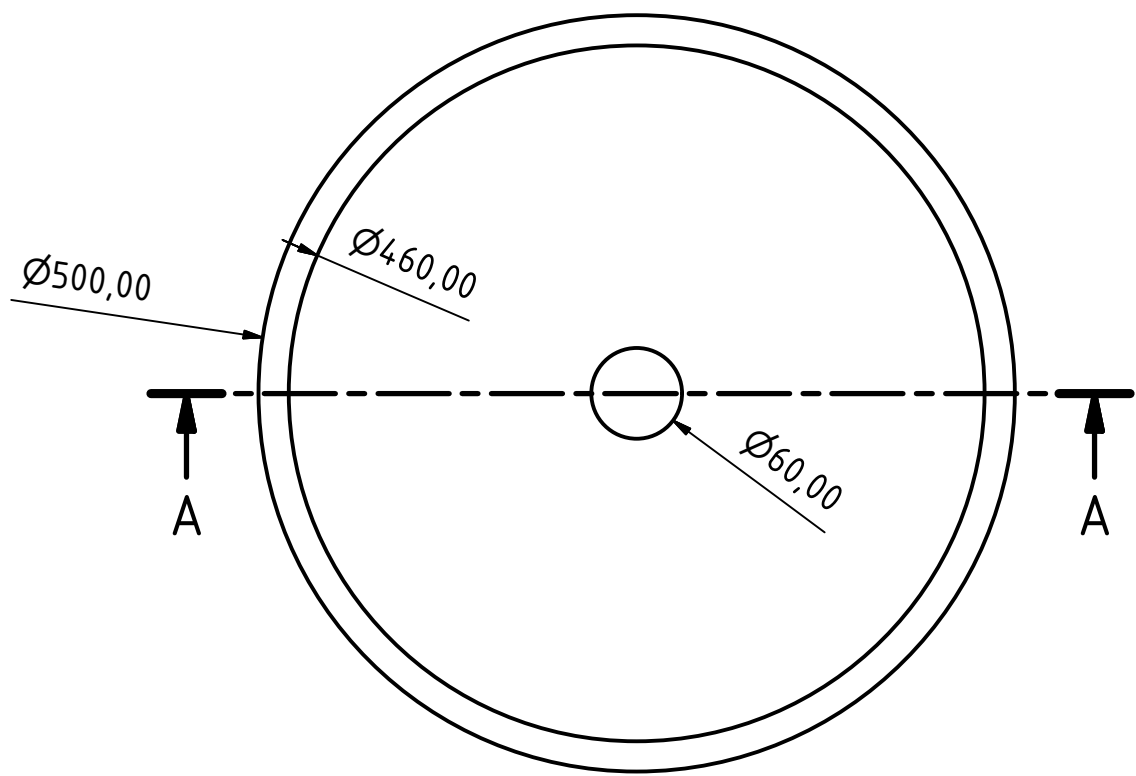
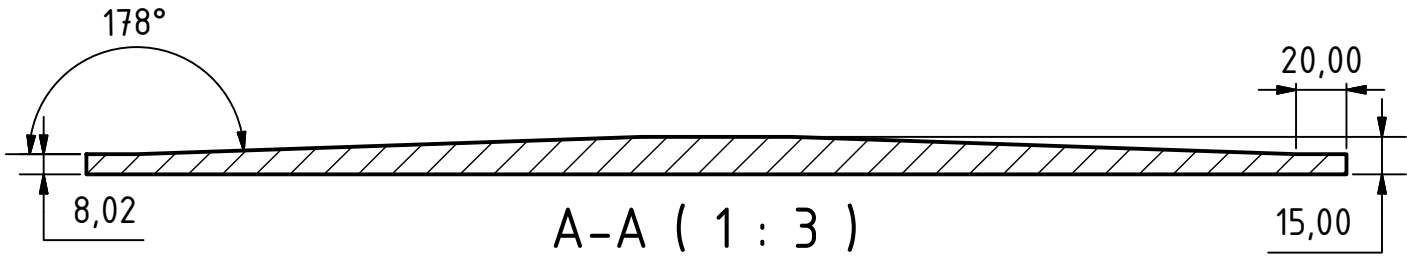
Anreger\_55

1  
A4

Status	Änderungen	Datum	Name

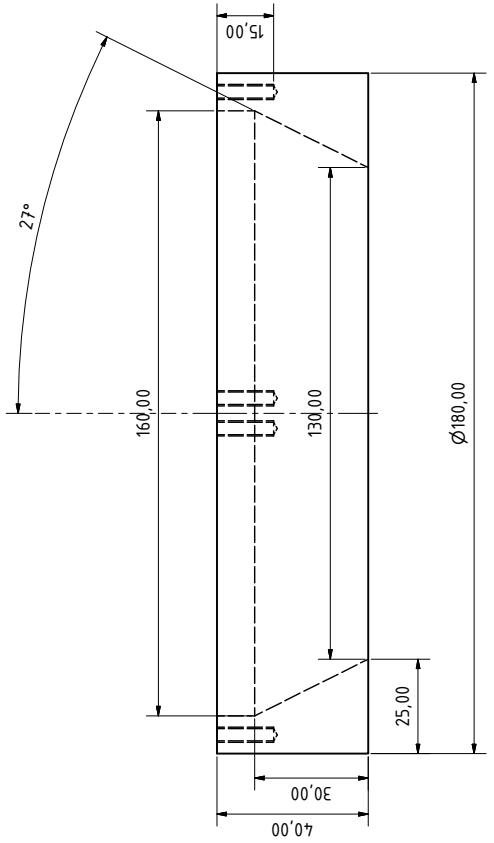
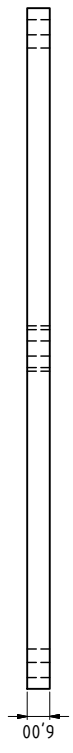
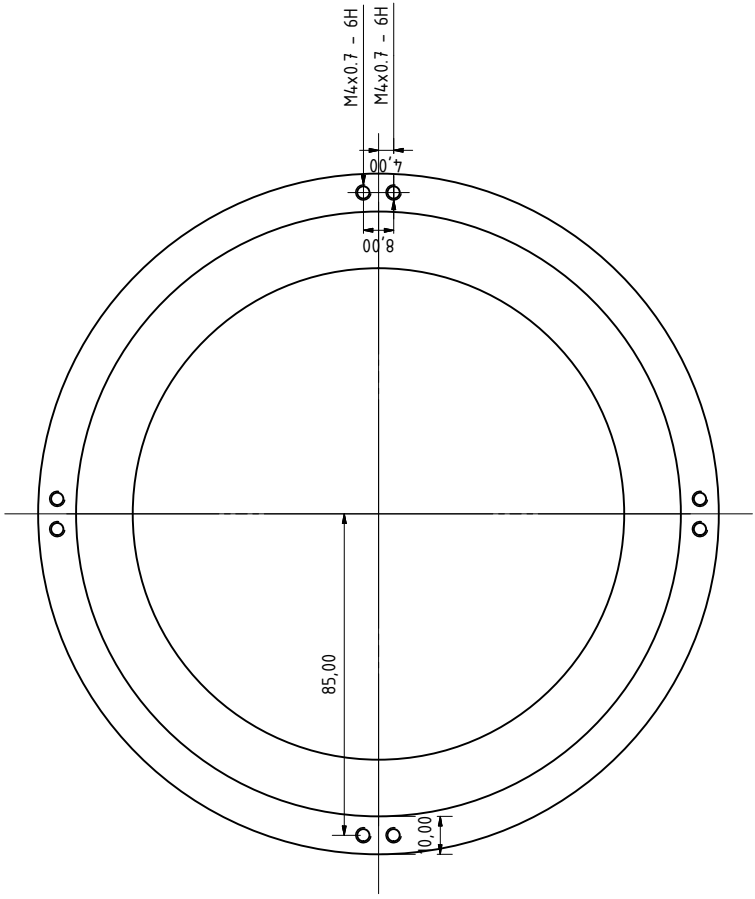
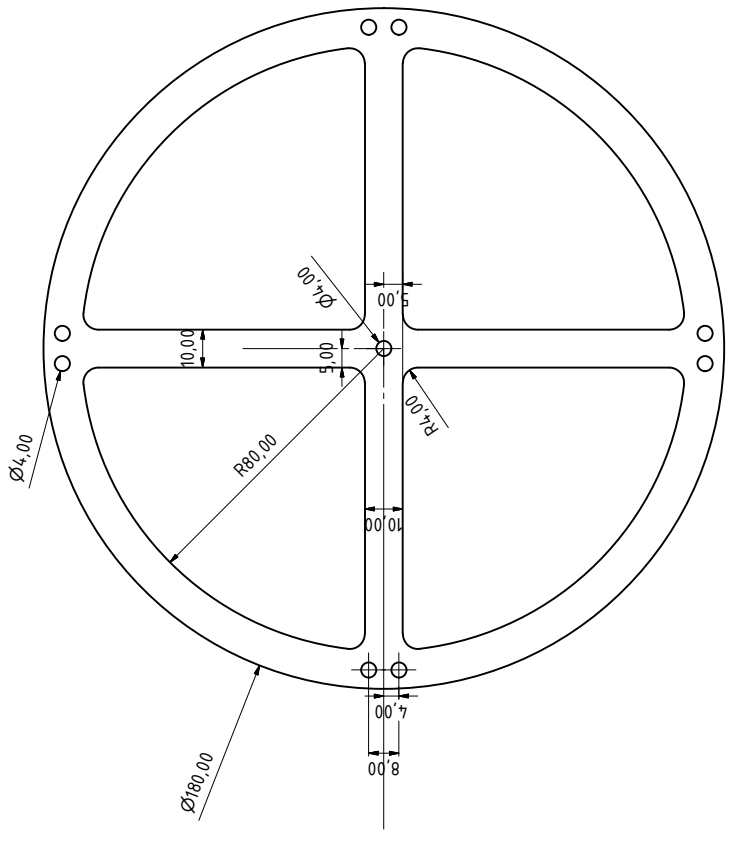


5. physikalisches Institut						Material: Makrolon klar Maßstab: 1:5		
			Datum	Name	Wellenwanne Boden			
			Gezeichnet	12.08.2016				Felix Streich
			Kontrolliert					
			Norm					
				EinsatzKegel_55			1	
							A4	
Status	Änderungen	Datum	Name					



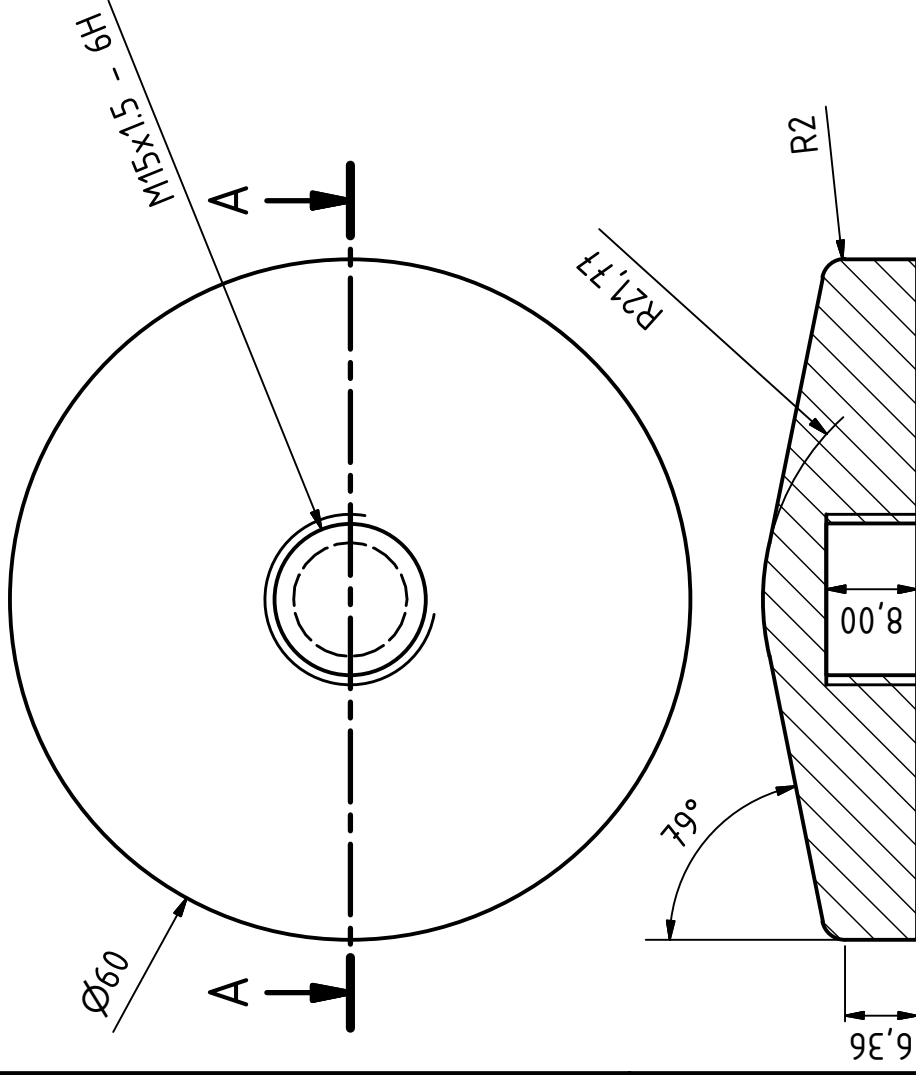
5. physikalisches Institut				Material: PC klar		Maßstab: 1:5	
			Datum	Name		Wellenwanne Boden Version 2	
		Gezeichnet	04.10.2016	Felix Streich			
		Kontrolliert					
		Norm					
				EinsatzKegel_V2		1	
						A4	
Status	Änderungen	Datum	Name				



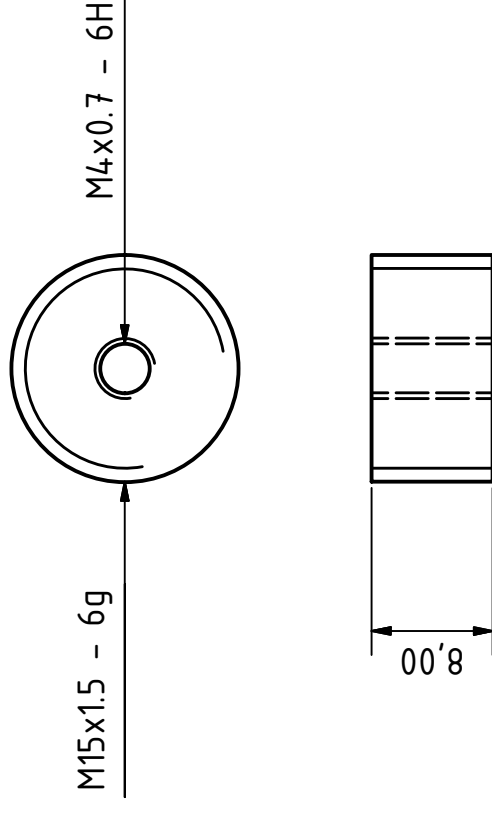


5. physikalisches Institut		Name		Material: Aluminium	
		Datum			
		30.08.2016			
		Name		Aufhängung_d18cm	
		Blatt		1	
		Blatt		A2	

# Zentralanreger



# Gewindeinsatz



A-A ( 1,5 : 1 )

5. physikalisches  
Institut

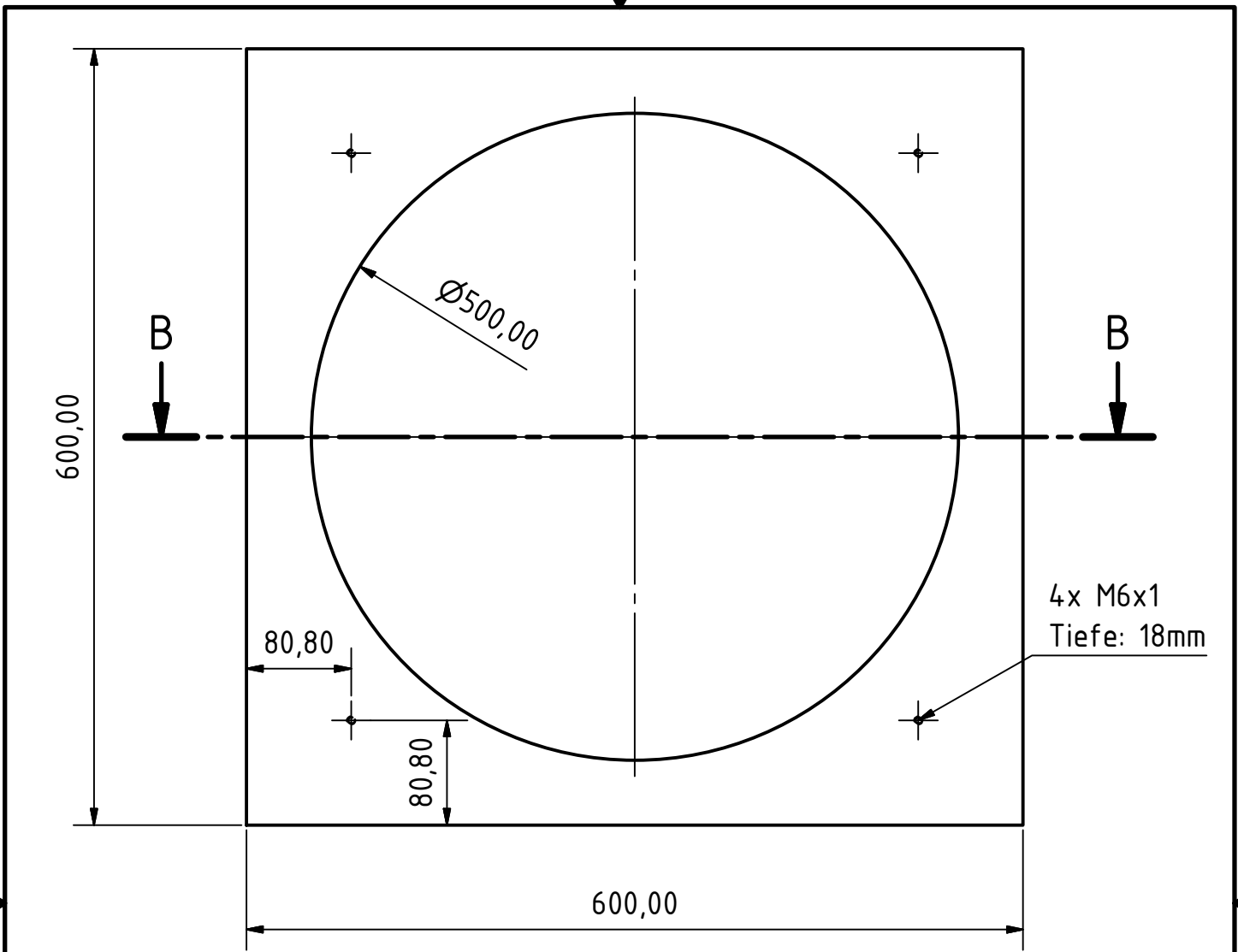
Gezeichnet		Datum		Name	
Felix Streich		17.10.2016		Felix Streich	
Kontrolliert					
Norm					

Material: PVC, Aluminium

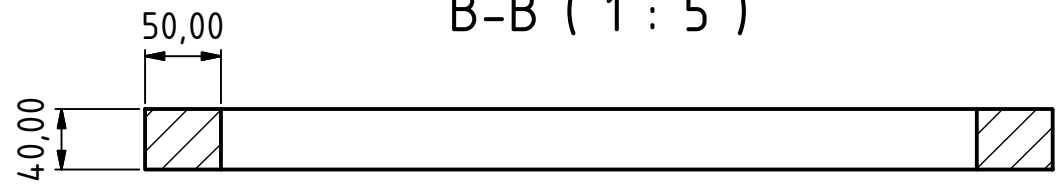
Zentralanreger

1  
A4

Status	Änderungen	Datum	Name



B-B ( 1 : 5 )



5. physikalisches Institut						Material: PVC Maßstab: 1:10		
				Datum	Name	Wellenwanne Rahmen		
				Gezeichnet	12.08.2016			Felix Streich
				Kontrolliert				
				Norm				
							rahmen__id55	1
								A4
Status	Änderungen	Datum	Name					





---

## Literaturverzeichnis

---

- [1] AIRY, G. B.: Tides and waves. In: *Encyclopaedia metropolitana* (1841) (Zitiert auf den Seiten 4 and 43)
- [2] ANDERS, S. : *Rund um das Wasser - ein physikalischer Streifzug*. Springer-Verlag, 2013 (Zitiert auf Seite 7)
- [3] BADEN-WÜRTTEMBERG, K.-M. : *Bildungsstandards für Physik*. [http://www.bildung-staerkt-menschen.de/service/downloads/Bildungsstandards/Gym/Gym\\_Ph\\_bs.pdf](http://www.bildung-staerkt-menschen.de/service/downloads/Bildungsstandards/Gym/Gym_Ph_bs.pdf), Abruf: 05.10.2016 (Zitiert auf Seite 24)
- [4] BERNOULLI, D. : *Hydrodynamica sive de viribus et motibus fluidorum commentarii*. Johann Reinhold Dulsecker, 1738 (Zitiert auf Seite 6)
- [5] CRAIK, A. : The origins of water wave theory. In: *Annual review of fluid mechanics* 36 (2004), Nr. 1, S. 1 (Zitiert auf Seite 4)
- [6] CRAWFORD, F. S.: *Schwingungen und Wellen, Band 3 der Reihe Berkeley-Physik-Kurs*. Vieweg, Braunschweig, 1989 (Zitiert auf den Seiten 3 and 4)
- [7] GALLAGHER, T. F.: *Rydberg atoms*. Bd. 3. Cambridge University Press, 2005 (Zitiert auf Seite 22)
- [8] HAKEN, H. ; WOLF, H. C.: *Atom-und Quantenphysik - Eine Einführung in die experimentellen und theoretischen Grundlagen*. Springer Verlag, Berlin, 1980 (Zitiert auf den Seiten 22, 23, and vii)
- [9] HECK, L. : *Experimentelle Untersuchungen an Wasserwellen zwecks Herstellung von Analogien zu elektromagnetischen Strahlungsvorgängen*. 1929 (Zitiert auf Seite 44)
- [10] HERRMANN, F. : *Der Karlsruher Physikkurs: Ein Lehrbuch für den Unterricht in Sekundarstufe 2 [Band 1-5]*. Aulis, 2005 (Zitiert auf Seite 23)
- [11] HUBER, A. : *Grenzen der Froud'schen Ähnlichkeit bei der Nachbildung flacher Wasserwellen im hydraulischen Modell*. Bd. 21. Versuchsanstalt für Wasserbau, Hydrologie und Glaziologie an der Eidgenössischen Technischen Hochschule, 1976 (Zitiert auf Seite 7)

- [12] JOHNSON, R. : *A modern introduction to the mathematical theory of water waves*. Bd. 19. Cambridge university press, 1997 (Zitiert auf Seite 3)
- [13] KRAUSE, E. : Analogien im Physikunterricht - Warum Analogien in der Physik mehr sind als nur allgemeine heuristische Prinzipien. In: *PhyDid B-Didaktik der Physik-Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung* (2014) (Zitiert auf Seite 1)
- [14] KÜBLBECK, J. ; MÜLLER, R. : *Die Wesenszüge der Quantenphysik: Modelle, Bilder, Experimente*. Aulis-Verlag Deubner, 2002 (Zitiert auf Seite 23)
- [15] KUPERUS, M. : On the analogy of sound waves and shallow water waves. In: *Astronomy and Astrophysics* 12 (1971), S. 85 (Zitiert auf Seite 44)
- [16] LAPLACE, P. S.: Suite des recherches sur plusieurs points du systeme du monde (XXV–XXVII). Mém. Présentés Acad. R. In: *Sci. Inst. France* (1776), S. 542–552 (Zitiert auf Seite 4)
- [17] LEYBOLD DIDATIC GMBH (Hrsg.): *Gebrauchsanweisung für Wellenwanne mit Motorstroboskop*. Leybold Didatic GmbH, Juli 1997 (Zitiert auf den Seiten 31 and 37)
- [18] MAI, S. ; PAESLER, C. ; ZIMMERNMANN, C. : *Wellen und Seegang an Küsten und Küstenbauwerken mit Seegangatlas der Deutschen Nordseeküste*. [http://www.dr-smai.de/Literatur/Geb-4/80\\_fi\\_heft\\_90a\\_mai\\_cpa\\_zi.pdf](http://www.dr-smai.de/Literatur/Geb-4/80_fi_heft_90a_mai_cpa_zi.pdf). Version: 2004, Abruf: 08.08.2016 (Zitiert auf den Seiten 3, 4, 5, 9, and v)
- [19] MARSCH, C. : Unterrichtsvorschlag: Eine Reise durch das Wasserstoffatom. In: *PhyDid A-Physik und Didaktik in Schule und Hochschule* 2 (2006), Nr. 5, S. 135 – 141 (Zitiert auf den Seiten 1 and 23)
- [20] MAYER-KUCKUK, T. : *Atomphysik: Eine Einführung*. Springer-Verlag, 2013 (Zitiert auf den Seiten 15, 18, 21, 22, and v)
- [21] SCHMIDT-BÖCKING, H. : *Einführung in die Atomphysik*. <http://user.uni-frankfurt.de/~dweiss/Dateien/Skripte/atom.pdf>, Abruf: 11.10.2016 (Zitiert auf Seite 15)
- [22] SCHRÖDINGER, E. : Quantisierung als Eigenwertproblem. In: *Annalen der Physik* 385 (1926), Nr. 13, S. 437–490 (Zitiert auf Seite 13)
- [23] STOKES, G. G.: On the theory of oscillatory waves. In: *Trans Cambridge Philos Soc* 8 (1847), S. 441–473 (Zitiert auf Seite 8)
- [24] STRÖBEL, B. : Demonstration and study of the dispersion of water waves with a computer-controlled ripple tank. In: *American Journal of Physics* 79 (2011), Nr. 6, S. 581–590 (Zitiert auf Seite 44)

- 
- [25] ZÜRICH, E. : *Physik iV: Einführung in die Quantenmechanik*. [http://qudev.ethz.ch/content/courses/phys4/phys4\\_fs11/Skript-PhysikIV.pdf](http://qudev.ethz.ch/content/courses/phys4/phys4_fs11/Skript-PhysikIV.pdf), Abruf: 05.10.2016 (Zitiert auf den Seiten 9 and 11)



---

## Abbildungsverzeichnis

---

2.1	Physikalische Größen zur Beschreibung einer Wasserwelle, entnommen aus [18] . . . . .	3
2.2	Schematische Unterscheidung zwischen linearen Tief- und Flachwasserwellen, entnommen aus [18] . . . . .	4
2.3	Wasserwellenlänge in Abhängigkeit der Wassertiefe. Die Frequenz wird als Parameter variiert. . . . .	8
2.4	Verformung der Wellen durch Einfluss nichtlinearer Effekte, entnommen aus [18] . . . . .	9
2.5	Darstellung der Winkelabhängigkeit der Aufenthaltswahrscheinlichkeit, entnommen aus [20] . . . . .	18
2.6	Die Radialwellenfunktion in Einheiten des BOHRschen Radius, entnommen aus [20] . . . . .	21
2.7	Auftreffwahrscheinlichkeit des Elektrons im Wasserstoffatom in Einheiten des Bohrschen Radius. Die Wahrscheinlichkeit bei $r = 0$ und $r \rightarrow \infty$ ist 0, entnommen aus [20]. . . . .	22
3.1	Schiefe Wellenwanne zur qualitativen Überprüfung der Theorie . . . . .	25
3.2	Aufnahmen zur Überprüfung der Theorie. Die Wassertiefe nimmt von links nach rechts zu. . . . .	25
3.3	Testaufbau 1: indirekte Wellenanregung. Das Wasserbecken wird von unten in Schwingung versetzt. . . . .	26
3.4	Testaufbau 2: Die gesamte Anlage wird in Schwingung gebracht, indem der Shaker an der Unterseite angebracht wurde. . . . .	26
3.5	Ergebnis des Testaufbaus. Die vielen Resonanzfrequenzen der Bauteile verursachen Verzerrungen der Kreisschwingungen. . . . .	26
3.6	Konstruktionsplan zum Prototyp 1, bestehend aus einer Glasplatte und einem Rahmen aus Plexiglas. . . . .	27
3.7	Verkleben der Plexiglasplatten zum Rand. . . . .	27
3.8	Schattenwurf des betriebenen Wellenbeckens. Der ermittelte Abbildungsfaktor $k$ beträgt $k=1,14$ . . . . .	28
3.9	(a) realer Aufbau des Prototyp 1 mit Wellenerreger. (b) schematischer Aufbau des Prototyp 1 . . . . .	28
3.10	Drei verschiedene Anregerformen zur Erzeugung von radialen Wellen. . . . .	29

---

3.11	Prototyp 2 mit zentralem Anreger. Aufgebaut auf einer Wellenwanne der Firma LEYBOLD . . . . .	29
3.12	Aufbau des Prototyp 2 mit ringförmigen Anreger . . . . .	30
3.13	Konstruktionsplan des ringförmigen Anregers . . . . .	30
3.14	Ringförmiger Aufhänger . . . . .	31
3.15	Wellen in Milch. Darstellung ist von oben sehr gut sichtbar. . . . .	32
3.16	Realer Aufbau des endgültigen Experiments. Hier mit gefärbtem Wasser gefüllt . . . . .	33
3.17	Realer Aufbau des endgültigen Experiments. Hier mit Milch gefüllt, in der Mitte ohne Flüssigkeit. . . . .	33
3.18	Konstruktionspläne für den Rahmen (links) und den Anreger (rechts), Ausführliche Pläne im Anhang . . . . .	33
3.19	Konstruktionsplan für einen zusätzlichen zentralen Anreger im endgültigen Experiment . . . . .	34
3.20	Zwei Profile für den Boden der Wellenwanne. . . . .	34
4.1	Messergebnisse des ersten Prototyps bei geringen Frequenzen . . . . .	36
4.2	Messergebnisse des ersten Prototyps bei hohen Frequenzen . . . . .	36
4.3	Messergebnisse des zweiten Prototyps mit einem zentralen Anreger . . . . .	37
4.4	Messergebnisse des zweiten Prototyps mit einem ringförmigen Anreger bei niedrigen Frequenzen . . . . .	38
4.5	Messergebnisse des zweiten Prototyps mit einem ringförmigen Anreger bei hohen Frequenzen . . . . .	39
4.6	Messergebnisse des endgültigen Aufbaus . . . . .	40
4.7	Aufnahmen vom Messprozess am endgültigen Aufbau . . . . .	41
4.8	Messergebnis bei 11 Hz des endgültigen Aufbaus . . . . .	41

---

## Tabellenverzeichnis

---

2.1	Ausbreitungsgeschwindigkeit von Wasserwellen ohne den Einfluss der Oberflächenspannung . . . . .	7
2.2	Wichtige quantenmechanische Operatoren im Vergleich zu ihren klassi- schen Größen . . . . .	13
2.3	Eigenschaften von Rydbergatomen [8] . . . . .	23
3.1	Eckdaten der Prototyp-Aufbauten . . . . .	31
4.1	Messfehler der verwendeten Messinstrumente . . . . .	42





---

## Danksagung

---

Folgenden Personen muss Dank ausgesprochen werden, denn ohne diese wäre die Arbeit nicht zustande gekommen.

- Vielen Dank an Prof. Tilman Pfau für die Möglichkeit diese Arbeit an seinem Institut zu erstellen,
- ebenso an Dr. Robert Löw für seine Betreuung dieser Staatsexamensarbeit,
- Karin Otter für die Organisation im Schülerlabor, sowie allen Kollegen, die regelmäßig Klassen betreuen,
- den Mitarbeitern der Mechanikwerkstatt, namentlich Herrn Faißler, für die Herstellung der Wellenwanne und ihre Geduld mit meinen Plänen.
- Meiner Familie und meiner Freundin für ihre Unterstützung und Ermahnungen, sich hinzusetzen und was zu machen.
- Meinen Kommilitonen, woimmer sie inzwischen gelandet sind für die gemeinsame Zeit im Studium.