

Abbildung durch Linsen (LIN)

Fakultät für Physik der Ludwig-Maximilians-Universität München
Praktikum für Zahnmediziner*innen
(25. AUGUST 2023)

MOTIVATION UND VERSUCHSZIELE

Die *geometrische Optik* beschreibt die Ausbreitung des Lichts in Form von Lichtstrahlen, d.h. unter Vernachlässigung seiner Wellennatur. Voraussetzung für die Anwendung der geometrischen Optik ist, dass die optischen Elemente (Blenden, Spiegel, Prismen oder Linsen) groß im Vergleich zur Wellenlänge des Lichts sind. Linsen sind die Grundbausteine vieler optischer Instrumente, z.B. Lupe, Mikroskop oder Fotoapparat. Ziel dieser Versuche ist es, dass Sie die grundlegenden Abbildungsvorgänge bei Linsen verstehen und diese auf das Auge anwenden können.

Contents

I. Teilversuche	2
II. Physikalische Grundlagen	2
II.1 Elektromagnetische Wellen	2
II.2 Reflexion und Brechung	2
II.3 Totalreflexion	4
II.4 Optische Linsen und Bildkonstruktion	5
1. Brechung am Prisma	5
2. Optische Achse (OA)	6
3. Brennpunkt (F)	6
4. Brennweite (f)	6
5. Brennebene	6
6. Gegenstands- und Bildweite	7
7. Dünne Linsen	7
8. Dicke Linsen	7
9. Bildkonstruktionen	7
II.5 Die Abbildungsgleichung für eine Linse	9
II.6 Linsensysteme	10
II.7 Das Auge	10
1. Optischer Aufbau des Auges	10
2. Brechung an einer sphärischen Grenzfläche zweier Medien	11
3. Abbildung durch eine Linse zwischen zwei verschiedenen Medien	12
4. Kenngrößen des Auges	12
5. Adaption	13
6. Akkommodation und Fehlsichtigkeit	13
II.8 Linsenfehler	14
1. Sphärische Aberration	14
2. Chromatische Aberration	14
3. Astigmatismus	14
III. VR-Simulationsversuche	15
III.1 Grundlegender Abbildungsvorgang	15
III.2 Akkommodation der Linse	15
III.3 Adaption der Pupille	15
IV. Realversuche	16
IV.1 Versuchsaufbau und Geräte	16
IV.2 Untersuchung einer astigmatischen Linse	16
IV.3 Untersuchungen am Augenmodell	17
IV.4 Auswertung	17

I. TEILVERSUCHE

1. VR-Simulationsversuche
2. Untersuchung einer astigmatischen Linse
3. Untersuchungen am Augenmodell

II. PHYSIKALISCHE GRUNDLAGEN

II.1 Elektromagnetische Wellen

Licht ist eine *elektromagnetische Welle*. Eine solche Welle besteht aus einem elektrischen (E -) und einem magnetischen (B -)Wechselfeld gleicher Frequenz, die immer senkrecht zueinander in Phase schwingen. Elektromagnetische Wellen sind transversal, d.h. die Felder stehen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Welle. Ein Spezialfall einer solchen Welle ist in Abb. 1 dargestellt.

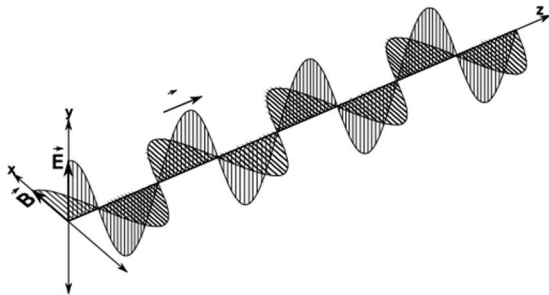


Abb. 1: Spezialfall einer transversalen elektromagnetischen Welle. Der Pfeil in z -Richtung zeigt die Ausbreitungsrichtung der Welle.

Bei einer elektromagnetischen Welle schwingt – anders als bei Wasser- oder Schallwellen – keine Materie, weshalb elektromagnetische Wellen kein Medium zur Ausbreitung benötigen. Licht von den Sternen gelangt auch durch das Vakuum des Weltraums ungehindert zur Erde. Allgemein gilt für jede Art von Wellen:

$$v = \lambda \cdot f \quad (1)$$

wobei v = Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle, λ = Wellenlänge, f = Frequenz (vgl. Versuche SIG und SON).

Speziell für eine elektromagnetische Welle ist die Frequenz f eine charakteristische Konstante, welche die Energie – die „Farbe“ des Lichtes – angibt. Elektromagnetische Wellen haben auch Eigenschaften von Teilchen. Diese Teilchen bezeichnet man als Photonen. Die Energie eines Photons hängt dabei von der Frequenz der zugehörigen Welle ab:

$$E = h \cdot f, \quad (2)$$

wobei $h = 6,6262 \cdot 10^{-34}$ J·s das Planck'sche Wirkungsquantum ist.

Im Vakuum bewegt sich eine elektromagnetische Welle unabhängig von λ mit der Lichtgeschwindigkeit $c_0 = 2,9979 \cdot 10^8$ m/s $\approx 3 \cdot 10^8$ m/s. Bewegt sich die Welle in einem Medium fort, so ist Frequenz in allen Medien gleich. Ihre Ausbreitungsgeschwindigkeit und damit auch ihre Wellenlänge sind jedoch abhängig vom Medium. Beschreibt man eine elektromagnetische Welle durch λ ohne weitere Angabe, so geht man vom Ausbreitungsmedium Vakuum oder Luft ($c_0 \approx v_{\text{Luft}}$) aus. Der sichtbare Wellenlängenbereich reicht etwa von 400 nm bis 800 nm (Abb. 2). Es ist üblich, auch die angrenzenden Wellenlängen, nämlich die Infrarot- und die Ultraviolettstrahlung, als Licht zu bezeichnen.

II.2 Reflexion und Brechung

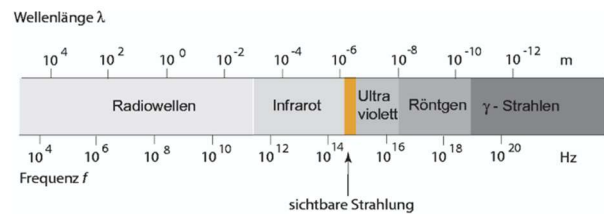


Abb. 2: Das Spektrum der elektromagnetischen Strahlung. Die Wellenlängen sind für die Ausbreitung der Strahlung im Vakuum angegeben.

Trifft ein Lichtstrahl auf eine ebene Grenzfläche zwischen zwei transparenten Medien, so wird er in der Regel teilweise reflektiert und teilweise dringt er in das Medium ein (Abb. 3).

Für die Reflexion gilt das *Reflexionsgesetz*:

Einfallswinkel = Reflexionswinkel

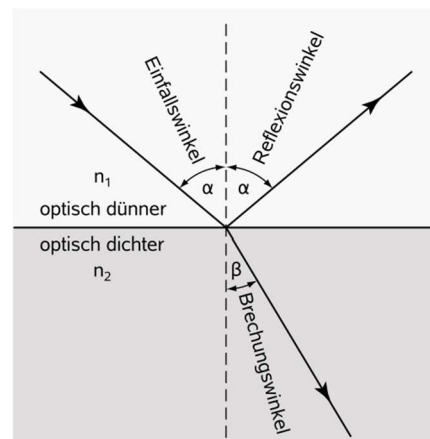


Abb. 3: Reflexions- und Brechungsgesetz. n_1 und n_2 sind die Brechzahlen der beiden Medien. α und β sind der Einfallswinkel bzw. der Brechungswinkel.

Dabei werden die Winkel relativ zur Flächennormalen und nicht zur Fläche selbst gemessen, weil das Reflexionsgesetz damit auch für gekrümmte Flächen (z.B. Linsen oder Augenspiegel) sinnvoll formuliert ist. Beim Eindringen in das Medium ändert das Licht seine Richtung. Wie stark dies passiert, beschreibt die Brechzahl n . Sie ist eine Materialkonstante. Diesen Zusammenhang beschreibt das von Snellius (1580-1626) empirisch gefundene Brechungsgesetz. Snellius stellte fest, dass das Verhältnis der Sinuswerte von Einfallswinkel α und Brechungswinkel β an einer gegebenen Grenzfläche stets dieselbe Zahl liefert:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \text{const.} = \frac{n_2}{n_1} \quad (3)$$

n_1 und n_2 sind die Brechzahlen der beiden Medien.

Die allgemeine Formulierung des Brechungsgesetzes ist:

$$n_1 \cdot \sin \alpha = n_2 \cdot \sin \beta . \quad (4)$$

Löst man Gl. 4 nach $\sin \beta$ auf, bekommt man:

$$\sin \beta = \frac{n_1}{n_2} \cdot \sin \alpha . \quad (5)$$

Gilt $n_2 > n_1$, so nennt man Medium 2 optisch dichter als Medium 1. Dann ist der Brechungswinkel β kleiner als der Einfallswinkel α . Der einfallende Strahl wird zum Lot hin gebrochen, wie in Abb. 3 dargestellt. Wasser ist z. B. optisch dichter als Luft und Glas optisch dichter als Wasser. Der Brechungsindex für Luft weicht (unter normalen Bedingungen) nur sehr wenig von dem des Vakuums ab und wird oft diesem näherungsweise gleichgesetzt:

$$n_{\text{Luft}} = 1,0003 \approx n_{\text{Vakuum}} = 1 .$$

Die Hintergründe der Brechung werden im Folgenden genauer erläutert:

Im Wellenbild des Lichtes nach Huygens (1629-1695) ist der Brechungsindex n eines Mediums definitionsgemäß gleich dem Verhältnis der Ausbreitungsgeschwindigkeiten:

$$n = \frac{\text{Ausbreitungsgeschw. im Vakuum}}{\text{Ausbreitungsgeschw. im Medium}} = \frac{c_0}{v} . \quad (6)$$

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen in optisch dichteren Medien ist stets kleiner als in optisch dünneren, damit sind Brechungsindizes von Medien stets > 1 . Da der Brechungsindex vom Medium abhängt, ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer elektromagneti-

schen Welle in verschiedenen Medien unterschiedlich.

Nimmt man die Wellenvorstellung zu Hilfe, so lässt sich zunächst das Reflexionsgesetz gemäß Abb. 4 folgendermaßen erklären: Man betrachtet ein einfallendes Bündel ebener Wellen geeigneter Breite, einen Strahl (vgl. Abb. 4).

Die Pfeile in Abb. 4 zeigen in die Fortpflanzungsrichtung der Welle. Die Linien gleicher Phase nennt man Wellenfronten. Sie stehen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Welle. Zwei benachbarte Wellenfronten haben zueinander den Abstand λ_1 .

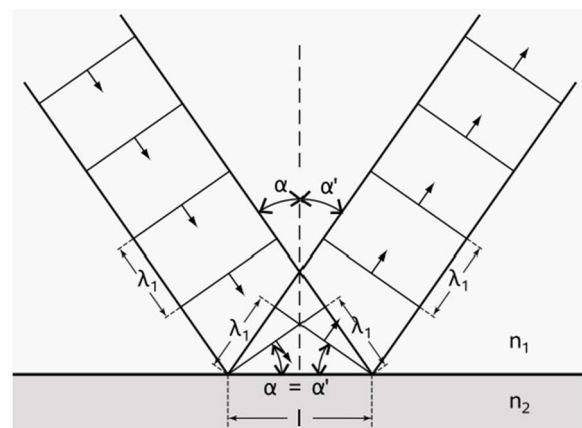


Abb. 4: Reflexion im Wellenbild.

Während in Abb. 4 die letzte Wellenfront gerade noch die Strecke λ_1 bis zur Grenzfläche zurücklegt, breitet sich die reflektierte Welle im gleichen Medium mit gleicher Geschwindigkeit aus. Die Wellenlänge ändert sich bei der Reflexion nicht, da die Strahlung im selben Medium bleibt. Die kurzen Katheten der beiden rechtwinkligen Dreiecke an der Grenzfläche sind gleich lang und zwar gleich der Wellenlänge λ_1 im Medium 1.

Die Dreiecke stimmen in allen drei Seiten paarweise überein und sind somit kongruent. Damit wird aber auch $\alpha = \alpha'$. Ferner sind α und α' in den Dreiecken auch gleich dem Einfalls- bzw. Reflexionswinkel gemäß Abb. 3 (Paare aufeinander senkrecht stehender Schenkel liefern gleiche Winkel.).

Analog kann man mit Hilfe des Wellenmodells auch die Lichtbrechung gemäß Abb. 5 erklären. Während dort die letzte Wellenfront im optisch dünneren, oberen Medium gerade noch die Strecke λ_1 bis zur Grenzfläche zurücklegt, breitet sich die Welle im optisch dichteren, unteren Medium schon mit kleinerer Geschwindigkeit aus. Die Wellenlänge wird folglich verkürzt auf λ_2 .

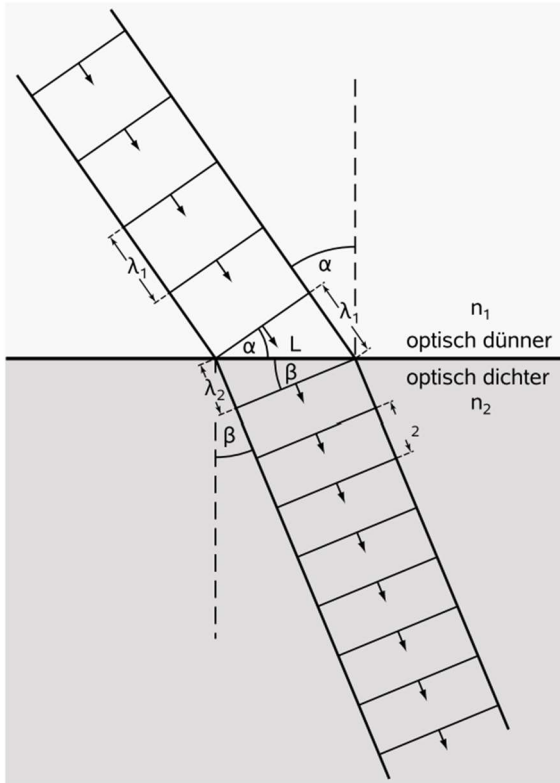


Abb. 5: Lichtbrechung im Wellenbild.

Für die beiden rechtwinkligen Dreiecke an der Grenzfläche gilt in diesem Fall gemäß der Sinus-Definition:

$$\sin \alpha = \frac{\lambda_1}{L} \quad \text{und} \quad \sin \beta = \frac{\lambda_2}{L}$$

Dividiert man diese Gleichungen durcheinander, so erhält man:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \quad (7)$$

Wegen Gl. 1 folgt mit Gl. 6 unmittelbar das Brechungsgesetz gemäß Gl. 3:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1/f}{v_2/f} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{v_1 c_0}{v_2 c_0} = \frac{c_0/v_2}{c_0/v_1} = \frac{n_2}{n_1}$$

Dass die Frequenz sich bei Lichtbrechung nicht ändert, ist eine Folge des Energieerhaltungssatzes (vgl. Gl. 2); eine Frequenzänderung wäre gleichbedeutend mit einer Energieänderung. Allerdings hängt der Brechungsindex n eines Mediums von der Wellenlänge des einfallenden Lichtes ab. Folglich ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes abhängig von der Wellenlänge. Im Gegensatz zum sichtbaren Licht breiten sich Röntgen- und γ -Strahlen in Materie nahezu mit Vakuumlichtgeschwindigkeit aus, es findet also fast keine Brechung statt.

II.3 Totalreflexion

In Abb. 3 und Abb. 5 ist der Brechungswinkel β stets kleiner als der Einfallswinkel α : der Lichtstrahl wird beim Eintritt in das optisch dichtere Medium zum Lot hin gebrochen. Umgekehrt liegen die Verhältnisse, wenn der Strahl vom optisch dichteren Medium 2 kommend ins optisch dünnere Medium 1 gebrochen wird. Dann ist $\beta > \alpha$ (vgl. Abb. 6).

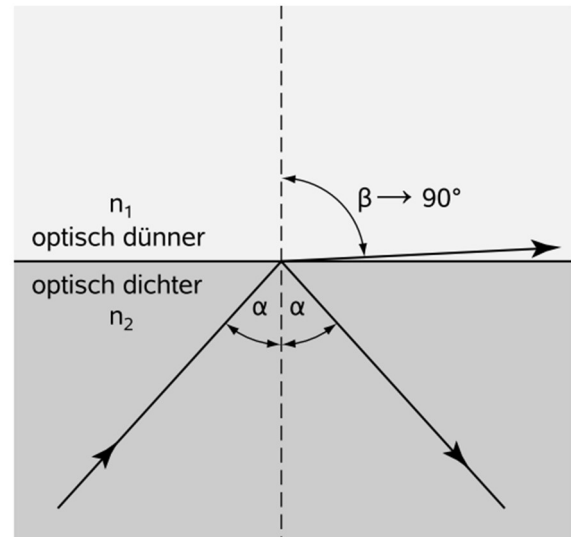


Abb. 6: Zur Totalreflexion

Größer als 90° kann der Brechungswinkel nicht werden. Denjenigen Einfallswinkel α_T im dichteren Medium, bei dem $\beta = 90^\circ$ wird, bezeichnet man als Grenzwinkel der Totalreflexion. Beim Grenzwinkel der Totalreflexion gilt $\sin \beta = 1$. Für $\alpha > \alpha_T$ gibt es keinen gebrochenen Strahl mehr, der gesamte einfallende Strahl wird reflektiert. Aus Gl. 3 folgt:

$$\sin \alpha_T = n_1/n_2 \quad (8)$$

Für Luft ($n_1 = 1$) reduziert sich Gl. 8 auf:

$$\sin \alpha_T = 1/n_2$$

Totalreflexion tritt also nur beim Übergang vom optisch dichteren zum optisch dünneren Medium auf. Lichtleiter und Endoskop sind Anwendungsbereiche dieses Phänomens. Ein Lichtleiter aus Glas bewirkt, dass Licht auch „krumme“ Wege gehen kann, siehe Abb. 7a. Eine gebogene Glasfaser mit hohem Brechungsindex leitet Licht durch wiederholte Totalreflexion (mit geringem Intensitätsverlust) ans Faserende. Licht kann so praktisch jeden gewünschten Ort erreichen und z.B. das Innere des Magens beleuchten.

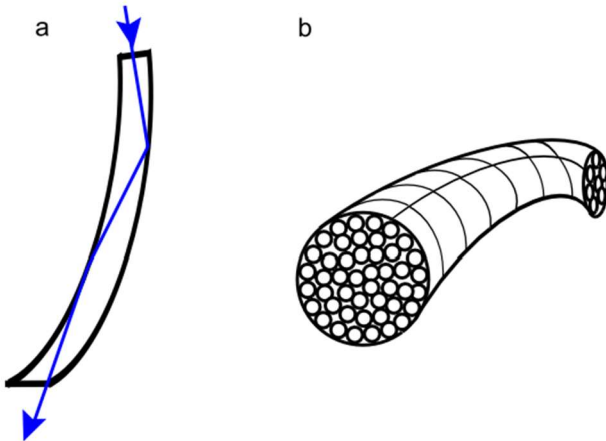


Abb. 7: a) Lichtleiter aus Glas; b) Optisches Kabel

Umgekehrt ist es in der Endoskopie möglich, die innere Magenoberfläche abzubilden. Dazu verwendet man sehr feine Glasfasern.

Man umgibt sie mit einem dünnen Mantel aus einem Material mit niedrigerem Brechungsindex (optische Isolation) und fasst möglichst viele zu einem ganzen Bündel zusammen. Ein solches biegsames Kabel (vgl. Abb. 7b) führt man z.B. nahe an die Magenschleimhaut ein. In jede einzelne Faser gelangt dann nur Licht von einer winzigen Stelle der Schleimhaut. Das Faserbündel liefert ein Raster von Bildpunkten, wodurch die entsprechende Magenoberfläche am anderen Kabelende sichtbar wird. Je feiner die Glasfasern sind, umso besser ist das Auflösungsvermögen und damit die Bildqualität. Die Tatsache, dass der Winkel der Totalreflexion und damit der Brechungsindex einer Substanz gut zu bestimmen ist, wird beim Abbe-Refraktometer ausgenutzt. Stoffgemische wie ätherische Öle und Fette lassen sich damit charakterisieren. Beimengungen, Verfälschungen und Verderbenheit können zu einer Veränderung der Brechzahl führen. Bei Glycerol ist aufgrund des Brechungsindex eine schnelle quantitative Bestimmung des Wassergehalts möglich, weil n_{Glycerol} mit zunehmendem Wassergehalt abnimmt.

II.4 Optische Linsen und Bildkonstruktion

Optische Linsen sind durchsichtige Körper aus einer das Licht brechenden Substanz, die von gekrümmten Flächen begrenzt werden. Man kann sie sich in Näherung aus Prismen zusammengesetzt denken (vgl. Abb. 10).

Man unterscheidet verschiedene Typen von Linsen, siehe Abb. 8.

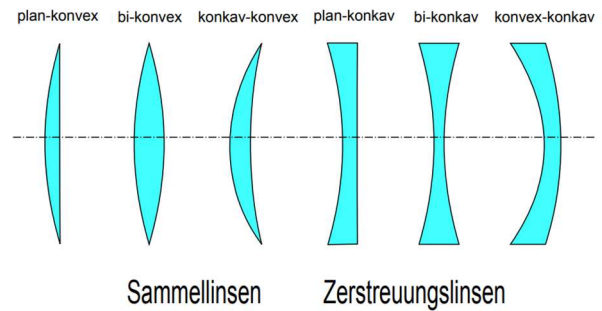


Abb. 8: Schnittbilder von elementaren Linsentypen.

Etwas zusammengefasst/vereinfacht gilt:

- Sammellinsen oder Konvexlinsen: in der Linsenmitte dicker als am Rand
- Zerstreuungslinsen oder Konkavlinsen: in der Linsenmitte dünner als am Rand

1. Brechung am Prisma

Der Strahlengang eines Lichtbündels (Strahl), der aus der Luft kommend unter einem Einfallswinkel α_1 auf ein Dreikant-Prisma mit Prismenwinkel φ trifft, ist in Abb. 9 gezeigt.

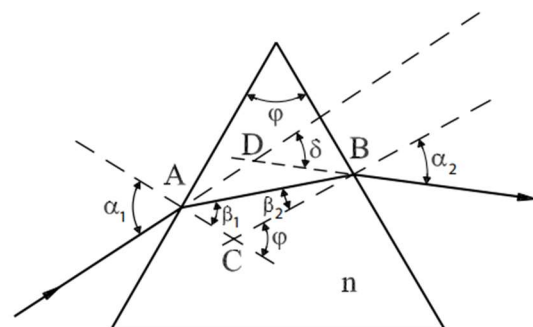


Abb. 9: Brechung am Prisma.

An der Grenzfläche zwischen der Luft (Brechzahl 1) und dem Prisma (Brechzahl $n > 1$) findet Brechung statt, d. h. der Strahl wird unter einem Winkel β_1 gebrochen. Dabei gilt das Brechungsgesetz von Snellius:

$$\sin \beta_1 = \frac{1}{n} \sin \alpha_1 . \quad (9)$$

Der einfallende Strahl wird dabei zum Lot hin gebrochen.

Weiter trifft der Strahl auf die nächste Prismenoberfläche unter dem Winkel $\beta_2 = \varphi - \beta_1$ (Berechnung über Winkelsumme im Dreieck CBA). Dort

wird der Strahl wieder gebrochen und verlässt das Prisma unter dem Winkel α_2 . Weil hier aber das Licht vom optisch dichteren ins optisch dünnere Medium übertritt, wird der einfallende Strahl vom Lot weggebrochen. Man sieht, dass der Lichtstrahl an den beiden Grenzflächen in gleicher Richtung abgelenkt wird. Mit geometrischen Überlegungen ergibt sich die gesamte Ablenkung δ (Ablenkwinkel) zu:

$$\delta = \alpha_1 + \alpha_2 - \varphi.$$

Brechungsindizes optischer Medien sind wellenlängenabhängig. Man nennt dies Dispersion. Im Normalfall ist die Brechzahl für blaues Licht einige Prozent größer als für rotes (normale Dispersion).

Diesen Effekt benutzt man, um das weiße Sonnenlicht an einem Prisma in seine Spektralfarben, nämlich Rot, Orange, Gelb, Grün, Blau und Violett, zu zerlegen. Auch die blaue Farbe des Himmels ist auf dieses Phänomen zurückzuführen.

Rechenaufgabe 1: Berechnen Sie die gesamte Ablenkung δ eines Dreikant-Prismas mit $\varphi = 60^\circ$ und Brechzahl $n = 1,5$, wenn das Licht aus der Luft kommend unter dem Einfallswinkel $\alpha_1 = 30^\circ$ auf das Prisma trifft.

Um den Strahlengang an Linsen nachzuvollziehen, denkt man sich die Linsen als Zusammensetzung von Prismen (Abb. 10).

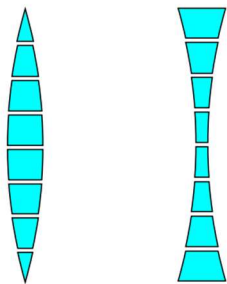


Abb. 10: Bei einer Konvex- oder Sammellinse (links) sind die Prismen so gestaltet, dass sie alle Strahlen eines parallelen Lichtbündels in einem Punkt vereinigen (Konvergenz). Bei der Konkav- oder Zerstreuungslinse (rechts) wird ein paralleles Lichtbündel so zerstreut, dass die Lichtstrahlen von einem vor der Linse liegenden Punkt herzukommen scheinen (Divergenz).

2. Optische Achse (OA)

Linsen sind durch Kugelflächen begrenzt. Verbindet man die Mittelpunkte dieser Kugeln, so erhält man die optische Achse (vgl. Abb. 11). Zur optischen Achse parallele Strahlen bezeichnet man als *Parallelstrahlen*.

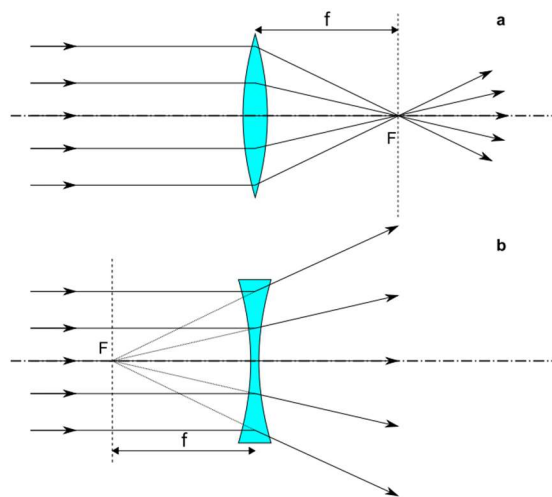


Abb. 11: Brechung von Parallelstrahlen an einer Sammellinse (a) und an einer Zerstreuungslinse (b).

3. Brennpunkt (F)

Bei einer Sammellinse werden Parallelstrahlen hinter der Linse in einem Punkt, dem Brennpunkt F, vereinigt (Abb. 11 a). Bei einer Zerstreuungslinse verlaufen sie nach Durchgang durch die Linse derart divergent auseinander, als würden sie von einem Punkt vor der Linse, dem Brennpunkt F, ausgehen (Abb. 11 b).

4. Brennweite (f)

Unter der Brennweite f versteht man den Abstand des Brennpunktes von der Linse, (vgl. Abb. 11). Bei Zerstreuungslinsen setzt man f als negative Größe in allen Formeln für numerische Berechnungen ein.

5. Brennebene

Verläuft ein Bündel paralleler Strahlen nicht mehr parallel zur OA wie in Abb. 11, sondern trifft es schräg auf die Linse auf (vgl. Abb. 12), so werden die Strahlen bei einer Sammellinse nicht mehr im Brennpunkt, sondern in einem Punkt auf der so genannten Brennebene vereinigt, siehe Abb. 12a. Die Brennebene ist dabei die Ebene durch den Brennpunkt, die auf der OA senkrecht steht. Bei einer Zerstreuungslinse verlaufen sie entsprechend divergent auseinander, als würden sie von einem Punkt in der Brennebene herkommen, siehe Abb. 12b.

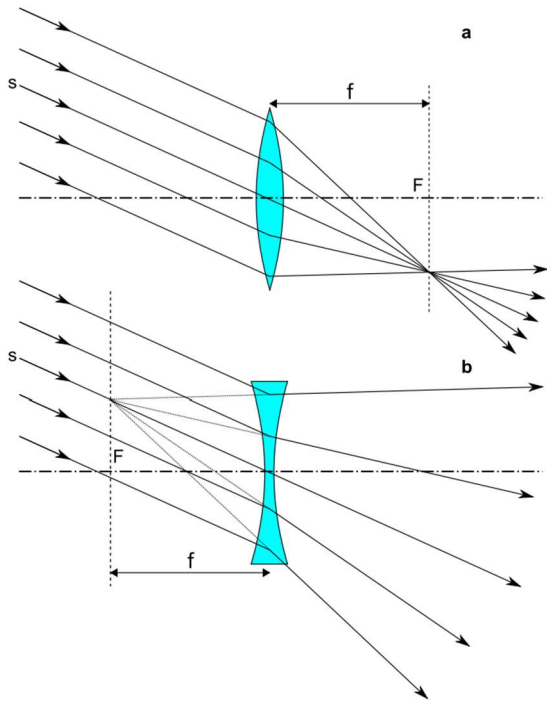


Abb. 12: Brechung schräg einfallender paralleler Strahlen an einer Sammellinse (a) und an einer Zerstreuungslinse (b). Die Brennebenen sind mit gepunkteten Linien vermerkt.

6. Gegenstands- und Bildweite

Fällt Licht von einem Gegenstand auf eine Linse, so entsteht im Regelfall ein Bild. Art, Größe und Lage des Bildes hängt von der Form der Linse und vom Abstand des Gegenstandes von der Linse ab. Den Abstand des Gegenstandes von der Linse bezeichnet man als *Gegenstandsweite* g , den Abstand des Bildes von der Linse als *Bildweite* b . Als Abstände sind g und b stets positiv. G bezeichnet die Größe des Gegenstands (Gegenstandsgröße), B die Größe des Bildes (Bildgröße), siehe Abb. 13.

7. Dünne Linsen

Linsen, deren „Eigendicke“ in Richtung der OA im Vergleich zur Brennweite vernachlässigt werden kann, werden als dünne Linsen bezeichnet. Die Eigendicke wird dann als Messunsicherheit bei der Bestimmung von Gegenstandsweite g , Bildweite b und bei direkter Messung der Brennweite f - etwa mit Hilfe paralleler Strahlenbündel - betrachtet. In Abb. 8 sind verschiedene Linsentypen skizziert. Man kann nur bei bikonvexen Sammellinsen und bikonkaven Zerstreuungslinsen g , b , bzw. f exakt von der „Mitte“, also der „Mittellebene“ (Hauptebene), ausmessen. Fast alle Brillengläser sind weder bikonvex noch bikonkav.

8. Dicke Linsen

Dicke „Linsen“ sind in der Praxis vor allem ganze abbildende Systeme, wie photographische Objektive, Mikroskopobjektive und Okulare, bei denen die „Dicke“ die Brennweite oft sogar übersteigt. Direktmessungen von g und b wären leicht mit 100% Messunsicherheit (oder mehr) behaftet. Anders als in diesem Versuch lassen sich dann Brennweiten nicht mehr durch relativ einfache Gleichungen bestimmen.

9. Bildkonstruktion

Abb. 13 und Abb. 14 entnimmt man leicht den charakteristischen Verlauf dreier Strahlen, die von dem gleichen Objektpunkt stammen. Mit ihnen lässt sich das Bild konstruieren.

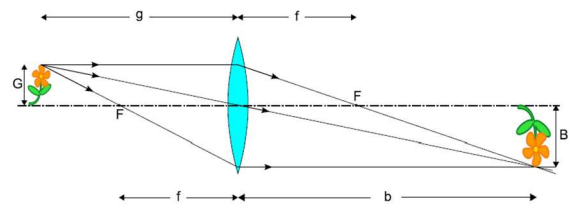


Abb. 13: Bildkonstruktion einer dünnen Sammellinse. Das Bild ist reell, vergrößert und umgekehrt.

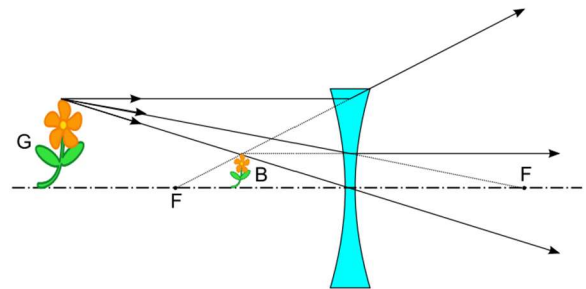


Abb. 14: Bildkonstruktion einer dünnen Zerstreuungslinse. Das Bild ist virtuell, verkleinert und aufrecht.

Der Mittelpunkt- oder Zentralstrahl geht ohne Richtungsänderung durch die Linse hindurch. In der „Mitte“ jeder Linse sind die begrenzenden Flächen ja fast parallel, wie bei einer Fensterscheibe! Der Strahl wird nur ein wenig parallel versetzt. Betrachtet man die Linse als „dünn“, so vernachlässigt man genau diese Parallelverschiebung, vgl. Strahl s in Abb. 12a und Abb. 12b.

- Ein Parallelstrahl wird bei Sammellinsen stets zum Brennpunkt hin gebrochen. Bei Zerstreuungslinsen ist die Brechung so, als käme er vom rückwärtigen Brennpunkt. Alle einfallenden Strahlen in Abb. 11a und Abb. 11b sind Parallelstrahlen.

- Ein Brennstrahl bei einer Sammellinse kommt von ihrem Brennpunkt. Er verläuft hinter der Linse stets als Parallelstrahl (vgl. Abb. 13). Bei der Zerstreuungslinse sind Brennstrahlen die Strahlen, die bei unverändertem Durchgang durch die Linse durch den Brennpunkt laufen würden. Sie werden zu Parallelstrahlen (vgl. Abb. 14). Da optische Strahlengänge grundsätzlich umkehrbar sind, kann man alle gebrochenen Strahlen in Abb. 11a auch als Brennstrahlen betrachten.

Um das Bild des gesamten Gegenstands zu konstruieren, müsste man das Bild eines jeden Gegenstandspunktes konstruieren. Wenn der Gegenstand Symmetrien besitzt, werden diese bei der Bildkonstruktion berücksichtigt, um den Arbeitsaufwand zu reduzieren. In der Regel reicht es, einzelne geeignete Punkte zu konstruieren.

Jede dünne Linse hat zwei Brennpunkte, die symmetrisch zu beiden Seiten der Hauptebene auf der OA liegen. Statt bei Bildkonstruktionen eine dünne Linse (wie wir) zu „malen“, zeichnet man oft auch nur die Hauptebene als senkrechte Gerade. Abb. 13 illustriert beispielhaft die Bildkonstruktion bei einer Sammellinse. Um hier das Bild sichtbar zu machen, muss man es mit einem Schirm auffangen. Man spricht von einem reellen Bild. Entsprechend zeigt Abb. 14 die Bildkonstruktion an einer Zerstreuungslinse. Da die Lichtstrahlen durch eine Konkavlinse immer zerstreut werden, kann sie kein reelles Bild liefern. Die Strahlen rechts hinter der Linse in der Abb. 14 scheinen einem Betrachter dort alle vom oberen Blütenblättchen des (verkleinerten) Bildes der kleinen Blume zu kommen. Dieses Bild kann nicht mit einem Schirm aufgefangen werden. Es handelt sich um ein *virtuelles* Bild.

Auch Sammellinsen können virtuelle (vergrößerte) Bilder erzeugen, wenn die Gegenstandsweite kleiner als die Brennweite ist (Lupe).

Bildkonstruktionen, wie sie hier durchgeführt wurden, geben zwar Bildort und Bildgröße richtig wieder, entsprechen aber in der Regel nicht dem tatsächlichen Verlauf der abbildenden Strahlenbündel (vgl. Abb. 15). Dieser ist auch durch Ein- und Austrittspupille bestimmt. Eine Pupille ist der gemeinsame Querschnitt aller an der Abbildung beteiligten Lichtbündel. Er heißt für die „dingseitigen“ Lichtbündel Eintrittspupille, für die „bildseitigen“ Austrittspupille. In Abb. 15 begrenzt die undurchsichtige Linsenfassung ding- und bildseitige Bündel; sie wirkt daher als Eintritts- und Austrittspupille.

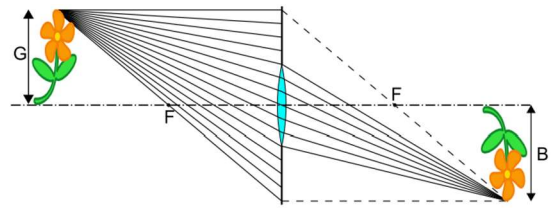


Abb. 15: Tatsächlicher Verlauf der abbildenden Strahlenbündel. Die Bündelbegrenzung spielt eine entscheidende Rolle beim Bau von optischen Instrumenten. Beim Mikroskop etwa bestimmt sie das Auflösungsvermögen. Die genaue Kenntnis der Begrenzung der Lichtbündel durch Pupillen ist für alle optischen Apparate unerlässlich. Oft sitzen Blenden so, dass ein für die Bildkonstruktion notwendiger Strahl im Bündel nicht mehr real enthalten ist: Brennstrahl bzw. Parallelstrahl in Abb. 15. Bei einer Bildkonstruktion darf und muss dieser dann stets als Hilfslinie, wie in Abb. 15, hinzugefügt werden. Schließlich ist nicht immer der tatsächliche Strahlengang so eindeutig wie in Abb. 15, in der das von einem bekannten Gegenstand ausgehende Lichtbündel wieder in einem bestimmten Bildpunkt direkt gesammelt wird. Auch dann, wenn ein beliebiges Lichtbündel (vgl. Abb. 16) auf eine Linse bekannter Brennweite trifft, lässt sich sein weiterer Verlauf wie gehabt konstruieren: Man ermittelt unabhängig voneinander den Verlauf der beiden das Bündel begrenzenden Randstrahlen, indem man paarweise den jeweils parallelen Mittelpunktstrahl als Hilfslinie hinzufügt. Die Linienpaare müssen sich in der Brennebene schneiden, womit man den weiteren Verlauf der Randstrahlen hinter der Linse und damit den des ganzen Bündels kennt (grauer Bereich in Abb. 16).

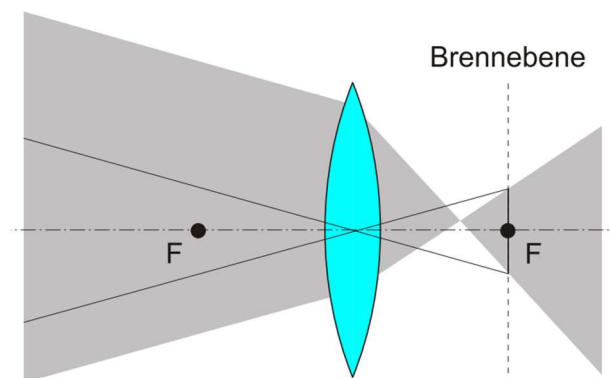


Abb. 16: Bestimmung des Strahlenverlaufs im Fall eines beliebigen Lichtbündels.

Rechenaufgabe 2: Ein pfeilförmiges Objekt (\rightarrow), das parallel zur optischen Achse orientiert ist und bei dem sich die Gegenstandsweiten aller seiner Punkte zwischen f und $2f$ befinden, wird von einer Sammellinse abgebildet. Konstruieren Sie das Bild des Pfeils. (Die Pfeilspitze muss auch korrekt abgebildet sein.)

II.5 Die Abbildungsgleichung für eine Linse

Reduziert man die Bildkonstruktion von Abb. 13 auf ihr geometrisches „Gerippe“, so bleibt Abb. 17 übrig.

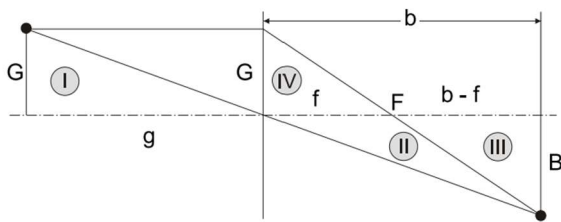


Abb. 17: Zur Herleitung der Abbildungsgleichung.

Das Dreieck I und das Dreieck, das aus II und III besteht, haben gleiche Winkel, sind also ähnlich. Sie stimmen deshalb auch in den Verhältnissen korrespondierender Seiten überein. Damit lässt sich die Formel für den sog. *Abbildungsmaßstab* ablesen:

$$\frac{B}{G} = \frac{b}{g}. \quad (10)$$

Bildgröße zu Gegenstandsgröße verhält sich wie Bildweite zu Gegenstandsweite.

Nun sind aber auch die beiden Dreiecke III und IV ähnlich (übereinstimmend in allen Winkeln). Das liefert:

$$\frac{G}{f} = \frac{B}{b-f}. \quad (11)$$

Aus Gl. 10 und Gl. 11 folgt

$$\frac{g}{bf} = \frac{1}{b-f}.$$

Dies ist offenbar eine Beziehung, die einen direkten Zusammenhang zwischen Gegenstandsweite g , Bildweite b und Brennweite f herstellt: die sog. *Abbildungsgleichung (Linsengleichung)*.

Nach einigen einfachen algebraischen Umformungen erscheint sie in der bekannten Form:

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}. \quad (12)$$

Die Herleitung der Abbildungsgleichung haben wir für eine Sammellinse durchgeführt. Gl. 12 gilt auch für Zerstreuungslinsen, man muss aber berücksichtigen, dass die Brennweite f und die Bildweite b negativ sind, weil diese sich auf der Gegenstandsseite der Linse befinden. Mit Hilfe der Gleichung (10) für den Abbildungsmaßstab und der Linsengleichung (12) kann man einfach optische Systeme analysieren.

Rechenaufgabe 3: Ein quadratisches Dia mit der Seitenlänge $G = 40,0$ mm soll auf eine quadratische Leinwand mit der Fläche $S = 1,00$ m² projiziert werden; dabei soll die gesamte Leinwandfläche bedeckt sein. Für die Abbildung wird eine Linse der Brennweite $f = 100$ mm verwendet. Berechnen Sie die dazu erforderliche Bildweite b und Gegenstandsweite g .

Lösung: Mit Gleichung (10) bekommt man eine Beziehung zwischen den gesuchten und den bekannten Größen:

$$\frac{B}{G} = \frac{b}{g}. \quad (10)$$

In dieser Gleichung gibt es drei Unbekannte, nämlich B , b und g . Es werden also noch zwei Gleichungen benötigt, um diese Unbekannten bestimmen zu können. Die Bildgröße erhält man über die gegebene quadratische Fläche S der Leinwand:

$$S = B^2 \Rightarrow B = \sqrt{S}$$

Als dritte Gleichung wird die Linsengleichung (12) verwendet:

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}. \quad (12)$$

Das ergibt ein Gleichungssystem mit drei Gleichungen und drei Unbekannten. Solche Gleichungssysteme löst man, indem man eine der Gleichungen (z. B. Gl. (10)) nach einer der Unbekannten (z.B. nach b) auflöst und das Ergebnis

$$b = B \cdot g / G$$

in Gl. (12) einsetzt:

$$1/f = 1/g + G/(B \cdot g).$$

Nun nach g auflösen: $g = \frac{G+B}{B} \cdot f = \frac{g+\sqrt{S}}{\sqrt{S}} \cdot f$.

Hier sind alle Größen bekannt. Setzt man sie ein, so erhält man $g = 0,104$ m. Nach dem Einsetzen dieses Wertes in den Ausdruck für b (siehe oben), errechnet man für $b = 2,60$ m. Hiermit ist die Aufgabe gelöst und die Ergebnisse sind mit der richtigen Anzahl signifikanter Ziffern angegeben.

II.6 Linsensysteme

Stellt man zwei (dünne) Linsen der Brennweite f_1 und f_2 mit gemeinsamer OA direkt hintereinander auf, so erhält man ein Linsensystem. Wie groß wird die Brennweite dieser Kombination?

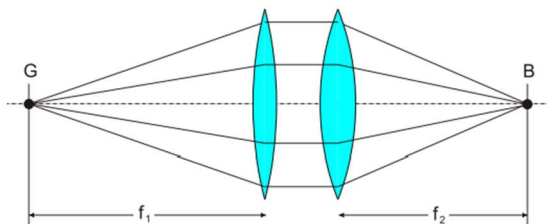


Abb. 18: Tatsächlicher Verlauf der abbildenden Strahlenbündel bei einem Linsensystem.

In Abb. 18 sind zwei verschiedene Sammellinsen in geringfügigem Abstand gezeichnet, damit man den dazwischenliegenden, parallelen Strahlengang besser verfolgen kann. Befindet sich im Brennpunkt der ersten Linse (links) eine kleine Glühbirne, so werden die von ihr ausgehenden Strahlen nach Durchgang durch die linke Linse zu Parallelstrahlen. Diese werden bei Durchgang durch die rechte Linse in ihrem Brennpunkt vereinigt. f_1 entspricht hierbei also der Gegenstandsweite g der Linsenkombination und f_2 ihrer Bildweite b . Für die Gesamtbrennweite f des Systems liest man deshalb ganz einfach aus Gl. 12 ab:

$$\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f}. \quad (13)$$

Das Rechnen mit den Reziprokwerten in Gl. 13 ist der Praxis aber recht umständlich. Man definiert deswegen in der Optik die sog. *Brechkraft* einer Linse in Vakuum (bzw. Luft mit Brechungsindex $n = 1$) als

$$D = \frac{1}{f}. \quad (14)$$

Allgemein wird die Brechkraft als der Quotient aus dem Brechungsindex n des umgebenden Mediums und der Brennweite der Linse definiert:

$$D = \frac{n}{f}. \quad (15)$$

Für Sammellinsen ist die Brechkraft positiv, für Zerstreuungslinsen negativ. Gemessen wird sie in Dioptrien: $1 \text{ dpt} = 1/\text{m}$. Eine Brillenlinse mit einer Brennweite von 1 m hat demnach die Brechkraft 1 Dioptrie; eine Linse mit 0,25 m Brennweite 4 Dioptrien usw. Gemäß Gl. 13 kann man die Brechkraft direkt addieren, was bequem ist und in der Brillenoptik zum täglichen Brot gehört.

$$D = D_1 + D_2. \quad (16)$$

Jede der Einzellinsen in Abb. 18 könnte man von vorne herein auch als System (mit bekannter Brennweite) auffassen, für das seinerseits Gl. 16 wieder gilt. Damit lässt sich die Gleichung für mehrere (eng) hintereinander gestellte Linsen verallgemeinern:

$$D = D_1 + D_2 + D_3 + \dots \quad (17)$$

Rechenaufgabe 4: Drei dünne Linsen der Brennweiten $f_1 = 2,0$ cm, $f_2 = 3,0$ cm und $f_3 = -1,2$ cm, werden zu einem System kombiniert. Wie groß wird die Gesamtbrennweite? Durch welches einfachere optische Element könnte man das System ersetzen?

II.7 Das Auge

1. Optischer Aufbau des Auges

Der optische Aufbau des Auges ist in Abb. 19 skizziert.

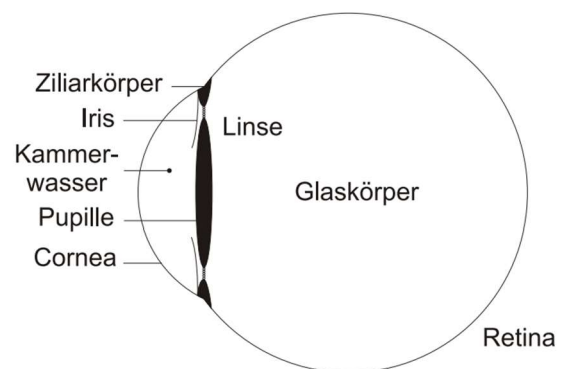


Abb. 19: Optischer Aufbau eines Auges.

Der Abbildungsvorgang auf die Netzhaut wird durch drei Elemente mit unterschiedlichen Brechungsindizes bewerkstelligt:

- Hornhaut mit Kammerwasser
- Linse
- Glaskörper

Die Linse kann durch Kontraktion ihre äußeren Krümmungsradien und damit die Gesamtbrennweite verändern, was die Akkommodation (s.u.) ermöglicht. (Beim Projektor regelt man bei starrer Glasoptik die Gegenstandsweite, bei der Kamera die Bildweite zum Zweck der optimalen Abbildung.)

Die Iris begrenzt das einfallende Lichtbündel (Adaptation) und damit die auf die Retina einfallende Menge an Strahlungsleistung (Helligkeit). Die Iris verändert das Auflösungsvermögen nicht. Dieses ist in der Struktur der Netzhaut festgelegt und beträgt beim normalen Auge ca. 1 Bogenminute, also $1/60$ Grad. Der Vollmond erscheint uns unter einem Winkel von (tatsächlich nur!) 30 Bogenminuten. Wir sind daher in der Lage, die größeren „Mare“ als dunkle Flecken zu erkennen, nicht aber die Krater. Die größten unter ihnen liegen nur knapp unter 1 Bogenminute und können deswegen schon mit einem Opernglas erkannt werden. Dies ist (bei ca. Halbmond) ein guter Augentest.

Wir werden im Folgenden sehen, dass der größte Teil der Brechkraft des (menschlichen) Auges - etwa $2/3!$ - von der Cornea übernommen wird. Aus diesem Grund wollen wir das Abbildungsverhalten einer sphärischen Trennfläche zwischen zwei optischen Medien verschiedener Brechungsindizes (n_0 und n_1) quantitativ genauer untersuchen (vgl. Abb. 20).

2. Brechung an einer sphärischen Grenzfläche zweier Medien

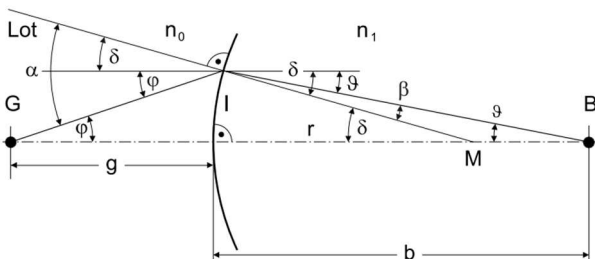


Abb. 20: Abbildungsverhalten einer sphärischen Grenzfläche.

In Abb. 20 geht vom Gegenstandspunkt G auf der OA ein Strahl aus, der nach der Brechung an der Grenzfläche die OA im Bildpunkt B wieder trifft. M ist der Krümmungsmittelpunkt der Kugelfläche und die Verlängerung des gezeichneten Radius, somit ein Lot auf die Fläche.

Wendet man das Snellius'sche Brechungsgesetz dort an, so gilt für den Strahl:

$$n_0 \cdot \sin \alpha = n_1 \cdot \sin \beta. \quad (18)$$

Einfallswinkel α und Brechungswinkel β , über die man zunächst gar nichts weiß, lassen sich aber durch drei Hilfswinkel ausdrücken: $\alpha = \varphi + \delta$ und $\beta = \delta - \vartheta$. Der Trick der Sache und damit auch der Gültigkeitsbereich des Ergebnisses besteht nun darin, dass man sich auf „achsennahe Strahlen“, also kleine Blendenöffnungen beschränkt. Wer die Herleitung nicht kennt, hält Gl. 20 meist für „absolut gültig“ und könnte sie falsch benutzen. In Abb. 20 bedeutet besagte Näherung, dass man das Stück der sphärischen Fläche noch als „Gerade“ betrachtet, die senkrecht auf der OA steht. Man liest dann sofort aus drei rechtwinkligen Dreiecken an der OA, in denen diese Gerade als Kathete auftaucht, definitionsgemäß ab:

$$\begin{aligned} \tan \varphi &= \frac{l}{g}, \\ \tan \delta &= \frac{l}{r}, \\ \tan \vartheta &= \frac{l}{b}. \end{aligned}$$

Wegen der Achsennähe sind die Winkel φ , δ und ϑ sämtlich „klein“, d.h. $\leq 10^\circ$. Man kann deswegen die folgende Näherung anwenden:

$$\tan \alpha \approx \sin \alpha \approx \alpha. \quad (19)$$

Der erste Schritt gilt, da der Cosinus für kleine Winkel fast 1 ist. Der zweite ist mathematisch komplexer. Er gilt nur, wenn der Winkel im Bogenmaß ausgedrückt wird. Auch noch beim Winkelwert 10° betragen die Unterschiede nur ca. 1%. Das Snellius'sche Brechungsgesetz (Gl. 18) reduziert sich dann auf:

$$n_0 \cdot \alpha = n_1 \cdot \beta$$

bzw., wenn man die Winkelwerte gemäß oben auch entsprechend genähert einsetzt:

$$n_0 \left(\frac{l}{g} + \frac{l}{r} \right) = n_1 \left(\frac{l}{r} - \frac{l}{b} \right).$$

Wenige elementare Umformungen liefern schließlich das gewünschte Resultat:

$$\frac{n_0}{g} + \frac{n_1}{b} = \frac{n_1 - n_0}{r}. \quad (20)$$

Rückt der Gegenstandspunkt G in Abb. 20 nach links ins Unendliche, so geht hier n_0/g gegen Null. Die einfallenden Strahlen werden nahezu parallel zur OA und b wird mit der (bildseitigen) Brennweite f definitionsgemäß zusammenfallen. Aus Gl. 20 folgt dann für die Brechkraft der sphärischen Fläche, die im Auge als Cornea realisiert ist:

$$D_{\text{Cornea}} = \frac{n_1}{f_{\text{Cornea}}} = \frac{n_1 - n_0}{r} \quad (21)$$

3. Abbildung durch eine Linse zwischen zwei verschiedenen Medien

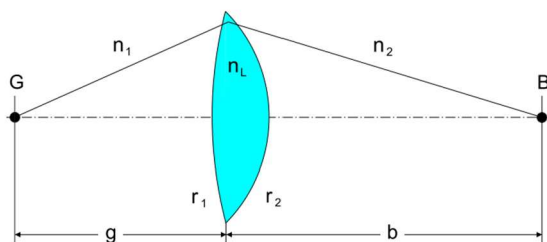


Abb. 21: Abbildungsvorgang im Auge. Der Krümmungsradius der ersten sphärischen Fläche ist $r_1 > 0$. Der Krümmungsradius der zweiten sphärischen Fläche ist $r_2 < 0$.

Die Linse im Auge ist links und rechts von zwei verschiedenen optischen Medien begrenzt (vgl. Abb. 21). Der Abbildungsvorgang durch sie lässt sich damit quantitativ untersuchen. Die für die dünne Linse gültige Abbildungsgleichung

$$\frac{n_1}{g} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_L - n_1}{r_1} + \frac{n_L - n_2}{r_2} \quad (22)$$

kann man analog zum Vorgehen bei Gl. 20 herleiten (nur langwieriger) oder einfach sinngemäß durch Addition der Brechkraften zweier sphärischer Flächen gemäß Gl. 21 begründen. Man stellt sich die Linse als vertikal durchgeschnitten vor: Der linke Teil hat die Brechkraft:

$$D_1 = \frac{n_L - n_1}{r_1}$$

Der rechte Teil hat die Brechkraft:

$$D_2 = \frac{n_L - n_2}{r_2}$$

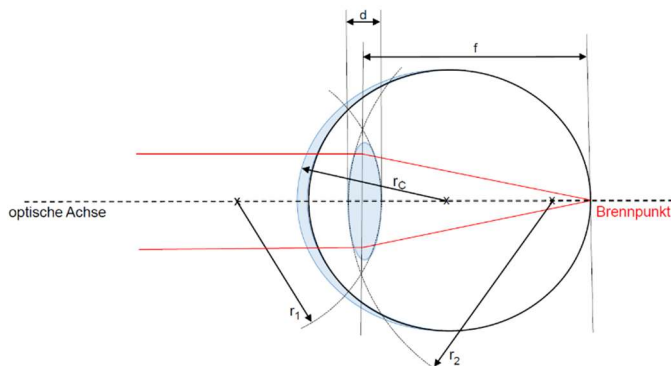
Addition von D_1 und D_2 liefert die Gesamtbrechkraft der Linse:

$$D_L = \frac{n_L - n_1}{r_1} + \frac{n_L - n_2}{r_2} \quad (23)$$

Diese sogenannte Linsenschleiferformel folgt aber auch aus der Gl. 22, wenn man wieder g gegen unendlich gehen lässt.

Achtung: Konvexe sphärische Flächen haben positiven Krümmungsradius, konkave sphärische Flächen haben negativen Krümmungsradius!

4. Kenngrößen des Auges



Für das Auge gelten folgende Mittelwerte:

- Krümmungsradius der Cornea $r_C = (7,8 \pm 0,1) \text{ mm}$
- Krümmungsradien der Linse $r_1 = (6,0 \pm 0,1) \text{ mm}$
 $r_2 = (10,0 \pm 0,1) \text{ mm}$
- Brechzahl der Linse $n_L = (1,416 \pm 0,001)$
- Brechzahl der Kammerwassers und des Glaskörpers $n_1 = n_2 = (1,333 \pm 0,0001)$
- Brechzahl der Luft $n_0 = (1,000 \pm 0,0001)$
- Brechkraft der Cornea $D_C = 42,7 \text{ dpt}$
- Brechkraft der Linse $D_L = 22,1 \text{ dpt}$

Rechenaufgabe 5: Berechnen Sie die Brechkraft der Cornea, die Brechkraft der Linse und die Gesamtbrechkraft des Auges mitsamt deren Unsicherheiten.

Lösung: Die Brechkraft der Cornea ergibt sich aus

$$D_C = (n_1 - n_0)/r_C = (1,333 - 1,000)/(0,0078 \text{ m}) = 42,692 \text{ dpt.}$$

Um die Unsicherheit von D_C zu bestimmen, berechnet man die relative Unsicherheit

$$\Delta D_C / D_C = \Delta(n_1 - n_0)/(n_1 - n_0) + \Delta r_C / r_C$$

Mit $\Delta(n_1 - n_0) = \Delta n_1 + \Delta n_0 = 0,001 + 0,001 = 0,002$ ist

$$\Delta D_C / D_C = 0,002/0,333 + 0,1/7,8 =$$

$$= 0,006 + 0,01282 = 0,018827$$

$$\Delta D_C = 0,018827 \cdot D_C = 0,8037 \text{ dpt} \approx 0,9 \text{ dpt}$$

Hier wurde die Unsicherheit auf eine signifikante Stelle aufgerundet. Endgültig bekommt man nach der Anpassung des Ergebnisses an die Unsicherheit

$$D_C = (42,7 \pm 0,9) \text{ dpt.}$$

Die Brechkraft der Linse ergibt sich aus

$$D_L = (n_L - n_1)/r_1 + (n_L - n_2)/r_2 = \\ = (1,416 - 1,333)/(0,0100 \text{ m}) + \\ (1,416 - 1,333)/(0,0060 \text{ m}) = 22,133 \text{ dpt.}$$

Nach einer analogen Berechnung (wie oben) bekommt man für die Unsicherheit der Brechkraft der Linse $D_L = (22,1 \pm 0,9) \text{ dpt.}$ Damit folgt für die Gesamtbrechkraft:

$$D_{\text{Gesamt}} = D_C + D_L \approx (65 \pm 2) \text{ dpt.}$$

Hier wurde erneut die Gesamtunsicherheit (als Summe der Unsicherheiten der beiden Summanden berechnet) auf eine signifikante Stelle aufgerundet und die Stellenzahl des Ergebnisses an die Gesamtunsicherheit angepasst.

5. Adaption

Die Anpassung des Linsendurchmessers an die vorherrschenden Lichtverhältnisse der Umwelt wird als *Adaptation* bezeichnet. Durch die Veränderung der Pupillengröße können die Abbildungsqualitäten auf der Retina verbessert werden. Die Veränderung des Pupillendurchmessers kann wie folgt berechnet werden:

$$\Delta r = k \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

Hierbei beschreibt Δr die Änderung des Pupillendurchmessers, k eine individuelle Konstante, I die Lichtintensität und I_0 die Referenzlichtstärke.

6. Akkommodation und Fehlsichtigkeit

Bei der Abbildung eines Gegenstands im menschlichen Auge entsteht das Bild auf der Netzhaut. Die Bildweite b bleibt also konstant, aber die Gegenstandsweite g ist für jeden Gegenstand unterschiedlich. Um ein scharfes Bild auf der Netzhaut zu bekommen, muss die Abbildungsgleichung (Gl. 12) erfüllt werden. Bei veränderbarer Gegenstandsweite und fester Bildweite muss sich die Brennweite des Auges für jede Gegenstandsweite verändern. Diese Anpassung der Brennweite des Auges nennt man *Akkommodation*. Die Akkommodation wird von der Augenlinse mit Hilfe des Ziliarmuskels und der Zonulafasern erreicht. Es werden dabei die Krümmungsradien der elastischen Augenlinse verändert und damit ihre Brennweite f_{Linse} . Bei der Anpassung des Auges auf einen Gegenstand, der sich sehr weit weg befindet, ist der Ziliarmuskel entspannt und die Zonulafasern sind angespannt, Die

Augenlinse ist dann gedehnt und abgeflacht, die Linsenschleiferformel (Gl. 23) liefert eine Verkleinerung der Brechkraft der Linse (Vergrößerung von f_{Linse}). Bei der Anpassung auf einen Gegenstand, der sich in der Nähe befindet, wird der Ziliarmuskel angespannt und die Zonulafasern werden entspannt, was zu einer Wölbung der Linse führt. Die Krümmungsradien der Linse werden dabei verkleinert, was eine Vergrößerung der Brechkraft der Linse (Verkleinerung von f_{Linse}) bedeutet.

Die beiden Grenzen der Akkommodation werden Fernpunkt und Nahpunkt genannt. Der Nahpunkt ist der Punkt, dessen Gegenstandsweite $g = s_N$ der kleinste Abstand ist, bei dem der Gegenstand scharf auf der Netzhaut abgebildet werden kann. Der Fernpunkt hat die größte Gegenstandsweite $g = s_F$, bei der der Gegenstand noch scharf auf der Netzhaut abgebildet werden kann. Beim normalsichtigen Auge liegt der Fernpunkt im Unendlichen. Der Nahpunkt verändert sich mit dem Alter. Bei Jugendlichen ist der Nahpunkt $s_N = 10 \text{ cm}$ vom Auge entfernt. Bei sechzigjährigen Personen erhöht sich die Entfernung deutlich. Aus s_F und s_N wird die *Akkommodationsbreite* bestimmt.

$$X = \frac{1}{s_N} - \frac{1}{s_F}, [X] = \text{dpt}$$

Eine Fehlsichtigkeit des Auges liegt vor, wenn die Abbildung eines Gegenstands nicht auf der Netzhaut liegt. Ist die Brennweite eines Auges zu groß, d.h. seine Brechkraft zu klein, so würden die Bilder erst hinter der Retina entstehen. Man bezeichnet ein solches Auge als weitsichtig (*hyperop*). Zur Beseitigung dieses Augenfehlers verwendet man Konvexlinsen als Brillengläser. Gerade umgekehrt ist es bei der Kurzsichtigkeit (*Myopie*). In diesem Fall ist die Brennweite des Auges zu klein, d.h. seine Brechkraft zu groß, so entstehen die Bilder vor der Retina. Die Kurzsichtigkeit kann durch Vorschaltung einer Konkavlinse korrigiert werden. Auch die altersbedingte Weitsichtigkeit (*Presbyopie*) kann durch Verwendung einer Sammellinse korrigiert werden. Die Brechkraft der Linse, die für die Korrektur der Fehlsichtigkeit erforderlich ist, wird grob nach Gl. 16 bestimmt.

$$D_{\text{Brille}} = D_{\text{Gesamt}} - D_{\text{Auge}}$$

Der graue Star ist eine Trübung der Augenlinse, durch die nur noch wenig Licht ins Auge fällt. Die Behandlung ist die Entfernung der Augenlinse. Früher übernahm eine sog. „Starbrille“ die Funktion der Linse, ihre Brechkraft liegt größenordnungsmäßig um 15 dpt. Durch die sehr hohe Brechkraft

fällt eine solche Brille durch extreme Dicke auf. Das Sichtfeld ist eingeschränkt, sie ermöglicht aber genaues Sehen. Heute implantiert man stattdessen oft eine künstliche Linse, die sog. Intraokularlinse.

II.8 Linsenfehler

1. Sphärische Aberration

Als sphärische Aberration bezeichnet man die Erscheinung, dass Randstrahlen bei Linsen zu stark gebrochen werden, d.h. in kürzerem Abstand die optische Achse schneiden.

Die Größe der sphärischen Aberration charakterisiert man durch die Differenz Δf der Brennweiten von Zentral- und Randstrahlen. Bei gleicher Gegenstandsweite g wird die Bildweite im Fall der Randstrahlen offensichtlich kleiner (vgl. Abb. 22).

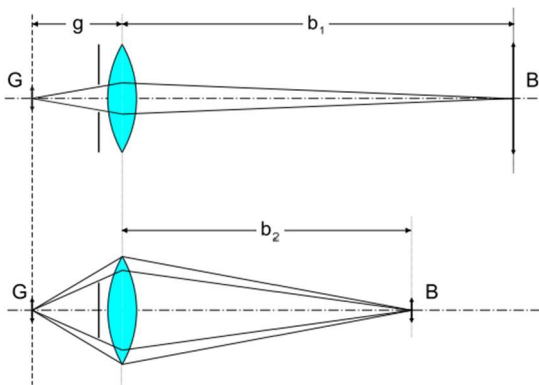


Abb. 22: Sphärische Aberration.

Mit Hilfe der (gemessenen) Werte b_1 und b_2 liefert Gl. 12 direkt $\Delta f = f_1 - f_2$. Die sphärische Aberration tritt bei allen Linsen mit Kugelflächen auf. Ist die Iris weit geöffnet, führt dies beim Auge zu wachsenden Unschärfen, was das Erkennen mühsamer macht: Schlechtes Dunkelsehen. Dass man bei guter Beleuchtung schärfer sieht, liegt also primär an der geringeren sphärischen Aberration, nicht an der größeren Helligkeit, die das Auge ja gerade über die Iris nachregelt.

2. Chromatische Aberration

Der zweite klassische „Linsenfehler“, die chromatische Aberration, besteht darin, dass die Brechungsindizes wellenlängenabhängig sind und damit Bild- und Brennweiten unterschiedlich für verschiedenfarbiges Licht sind (Abb.23). Auch dies führt zu Unschärfen der Abbildung. Sie sind erheblich (1,8 dpt: violett-rot) im Auge, werden vom

Gehirn im Rahmen der „Bildverarbeitung“ jedoch perfekt „weggerechnet“!

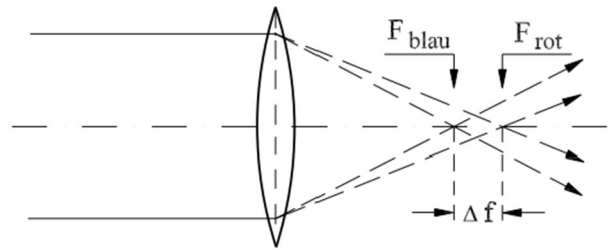


Abb. 23: Chromatische Aberration.

3. Astigmatismus

Wir sind bisher von der Idealvorstellung ausgegangen, dass die Augenlinse durch Kugelflächen begrenzt wird. In der Realität ist das jedoch nicht der Fall, vielmehr sind die Krümmungsradien jeder der beiden Flächen in zwei senkrecht zueinander verlaufenden Schnittebenen stets mehr oder weniger verschieden. Das hat zur Folge, dass ein achsenparalleles Lichtbündel nicht mehr durch einen einzigen Brennpunkt verläuft (vgl. Abb. 24). Die unterschiedlichen Krümmungsradien entsprechen zwei verschiedenen Brennweiten je nachdem, ob man parallel einfallende Strahlen in der Horizontal- oder Vertikalebene betrachtet. In Abb. 24 ist die Brennweite im ersten Fall (f_1) kleiner als im zweiten. Während das Horizontalbündel im Abstand f_1 von der Linse schon maximal eingeschnürt ist, hat das Vertikalbündel dort noch eine Ausdehnung größer als 0.

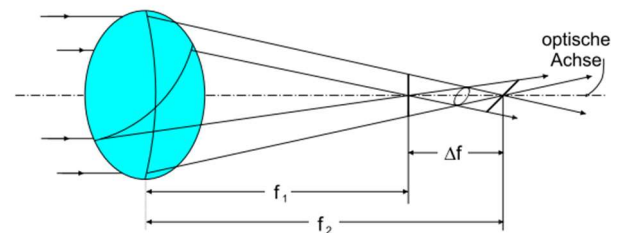


Abb. 24: Entstehung des Astigmatismus.

Man beobachtet statt eines Brennpunktes im Abstand f_1 eine senkrechte „Brennlinie“ und im Abstand f_2 entsprechend eine waagrechte Linie. Durch die Brennweitendifferenz $\Delta f = f_2 - f_1$ kann man die Größe des Astigmatismus kennzeichnen. Korrigiert wird der Astigmatismus des Auges durch ein Brillenglas mit gleich großem astigmatischem Fehler, das jedoch genau um 90° verdreht in das Brillengestell montiert werden muss, um eine Kompensation des Fehlers zu erreichen. Ist der astigmatische Fehler des Auges gering ($f_2 > \Delta f < f_1$),

so wird eine zwischen f_1 und f_2 liegende Distanz für das Sehen im Unendlichen vom Gehirn ausgewählt. Die Sehschärfe ist aber herabgesetzt. Ist der Fehler größer, dann pendelt die Augenlinse zwischen den beiden Brennlinien hin und her, um verwertbare Daten weiterliefern zu können, während das Gehirn permanent mittelt. Das ist jedoch anstrengend, ermüdend und verursacht u.a. Kopfschmerzen, die typischen subjektiven Symptome bei stärkerem Astigmatismus. In der Praxis auf der optischen Bank kann man den Astigmatismus einer Linse dadurch messen, dass man eine punktförmige Lichtquelle (Lochblende) im Endlichen auf einen Schirm abbildet. Die beiden Positionen der orthogonalen „Bildlinien“ legen zwei Wertepaare g_1 und b_1 , bzw. g_2 und b_2 fest, die mit Hilfe von Gl. 12 entsprechend f_1 und f_2 ergeben.

III.VR-SIMULATIONSVERSUCHE

Sie werden im Rahmen der VR-Simulation durch die Aufgaben geleitet. Mithilfe der Anwendung sollen dabei verschiedene Multiple-Choice-Fragen beantwortet werden. Im Folgenden werden die Ziele der einzelnen Versuche erläutert.

III.1 Grundlegender Abbildungsvorgang

Mit dieser Aufgabe sollen Sie das Verständnis für den grundlegenden Abbildungsvorgang im Auge zu vertiefen. Als Vorwissensaktivierung werden die Grundlagen zur Gegenstandsweite, Bildweite und Brennweite sowie zu den physikalischen Vorgängen abgefragt. Im weiteren Verlauf gehen wir genauer auf den dioptrischen Apparat ein.

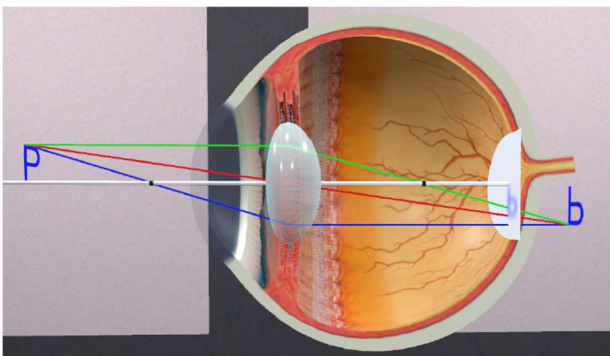


Abb. 25: Strahlengang durch das VR-Augenmodell

III.2 Akkommodation der Linse

Weiterführend erweitern wir das Wissen über die Akkommodation. Zu Beginn ist die automatische Akkommodation eingestellt. Sie prüfen qualitativ, welche anatomischen Bestandteile aktiv an der Akkommodation beteiligt sind. Sie verschieben einen Gegenstand auf der optischen Achse und beobachten dabei die auftretende Veränderung im Auge. Im weiteren Verlauf steuern Sie die Akkommodation manuell.

III.3 Adaption der Pupille

Diese Aufgabe visualisiert die Adaptation der Pupille. Sie beschreiben die Pupillenreaktion anhand verschiedener Lichtintensitäten sowie die Reaktion auf erhöhte bzw. verminderte Lichtintensität auf der Retina. Zunächst ist die Adaptation manuell einstellbar. Sie variieren den Pupillenradius und beobachten, wie sich das Abbild auf der Retina bei fester Lichtintensität verändert. Mithilfe des Reglers verstellen Sie die Lichtintensität des Gegenstands und registrieren die daraus resultierenden Anpassungen.

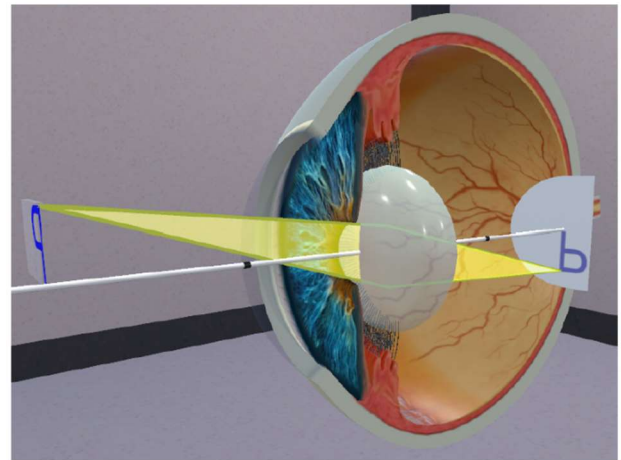


Abb. 26: Lichtkegel im VR-Augenmodell

IV. REALVERSUCHE

IV.1 Versuchsaufbau und Geräte

Optische Bank mit Reitern, Lichtquelle, Justier-
nadel, Schirm (vgl. Abb. 26), Linse mit
Astigmatismus (LA); Augenmodell (Plexiglasgefäß
mit sphärischer Fläche, vgl. Abb. 27 und 28), dazu
Linse, Schirm (=Netzhautmodell); Probiergläser mit
Halterung, Rollmaßband.

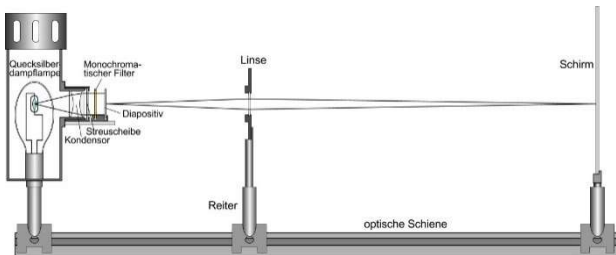


Abb. 26: Optische Bank schematisch

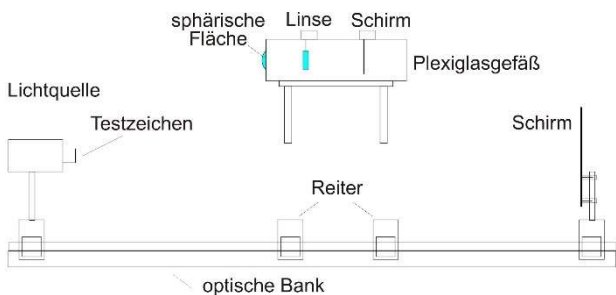


Abb. 27: Augenmodell schematisch

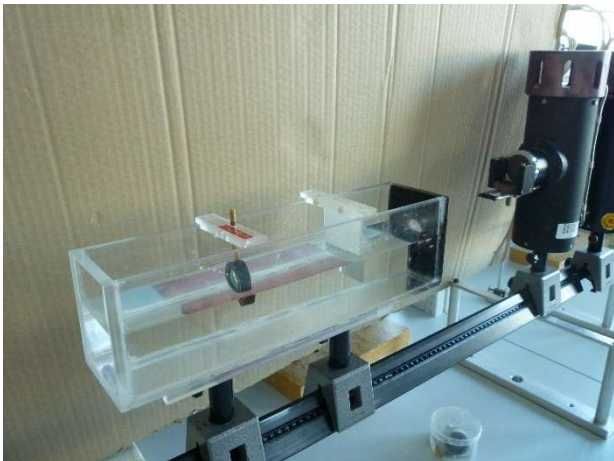


Abb. 28: Aufbau zum Augenmodell

IV. 2 Untersuchung einer astigmatischen Linse

1. Kurzbeschreibung

Sie bestimmen die Brennweiten einer astigmatischen Linse. Dazu betrachten Sie eine horizontale und vertikale Lochblende. Über die Positionen, bei denen sich ein horizontal bzw. vertikal scharfes Bild ergibt, berechnen Sie die horizontale und vertikale Brennweite.

2. Messgrößen und Durchführung

Hinweis: Die Formel $1/f = 1/g + 1/b$ gilt auch bei Vertauschung der Werte für die Bildweite b und die Gegenstandsweite g (vgl. Abb. 29). Es gibt also zwei Linsenpositionen mit scharfen Bildern. Eine mit einem lichtschwachen, großen Bild und eine mit einem lichtstarken, kleinen Bild. Sie betrachten letztere.

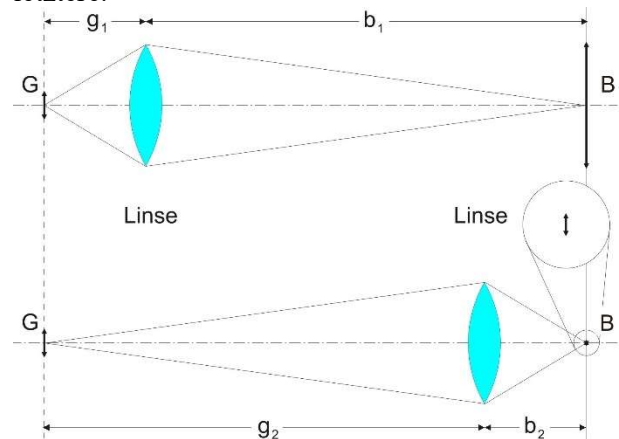


Abb. 29: Vergrößerte (oben) und verkleinerte (unten) Abbildung bei unterschiedlichen Linsenpositionen

- Verwenden Sie die Linse mit der Buchstabenkennzeichnung LA und einer Zahl dahinter. Notieren Sie sich die Nummer der Linse.
- Setzen Sie die kleine kreisförmige Blende in den Diahalter vor die Lichtquelle.
- Schieben Sie dazu die Linse vom Gegenstand weg, bis Sie eine der Bildlinien der Lochblende (in bestmöglicher Qualität) auf dem Schirm beobachten. Bestimmen Sie die Linsenposition.
- Verschieben Sie die Linse weiter von der Lichtquelle weg, bis die dazu senkrechte Bildlinie auf dem Schirm möglichst gut zu beobachten ist und notieren Sie wiederum die Linsenposition.

IV.3 Untersuchungen am Augenmodell

1. Kurzbeschreibung

Am Augenmodell untersuchen Sie die Abbildung im Auge. In einer simulierten Staroperation entfernen Sie die Augenlinse. Es bleibt nur noch die Brechkraft der sphärischen Fläche (Cornea). Experimentell suchen Sie eine passende Starbrille. Anschließend erzeugen Sie mit der sphärischen Fläche allein ein Bild und bestimmen ihre Brechkraft.

2. Messgrößen und Durchführung

Der Teilversuch gliedert sich in drei Arbeitsschritte:

1. Aufbau des Augenmodells

- Als Testzeichen soll bei den folgenden Experimenten die gerahmte, mit Löchern versehene Alufolie verwendet werden.
- Das Plexiglasgefäß wird mit Hilfe zweier Reiter auf der optischen Bank fest aufgestellt und zwar so, dass die sphärische Fläche ca. 30 bis 40 cm vom Testzeichen (= Gegenstand) entfernt ist (vgl. Abb. 28).
- Die Höhe der Wanne wird unter Verwendung der Justiernadel so eingestellt, dass die Mitte der sphärischen Fläche genauso hoch ist wie die Mitte des Testzeichens.
- Nun wird das „Auge“ präpariert: Füllen Sie destilliertes Wasser in das Gefäß und setzen Sie eine Linse (hängend) direkt hinter der sphärischen Fläche ein.
- Suchen Sie dann die Position der kleinen Mattscheibe im Wasser hinter der Linse auf, an der die Abbildung am besten erscheint. Das entspricht der Position der Netzhaut. Jetzt messen Sie für diese Anordnung Gegenstandsweite g_1 und Bildweite b_1 mit Hilfe des Metermaßstabes. Als Bezugspunkt wählen Sie die Mitte zwischen der sphärischen Fläche und der Linse.

2. Ausführung einer „Staroperation“

- Entnehmen Sie die Linse aus dem Gefäß (ohne Narkose). Das Bild wird unscharf.
- Verpassen Sie nun dem Modellauge eine Starbrille. Suchen Sie aus dem Sortiment von „Probiergläsern“ eine passende „Brille“ heraus, die vor die sphärische Fläche

gehalten die Wirkung der „herausoperierten“ Linse in etwa ersetzt.

- Notieren Sie den Dioptrienwert (er steht am Griff).

3. Brechkraft der sphärischen Fläche

- Entfernen Sie nun die Starbrille.
- Verschieben Sie die kleine Mattscheibe im Modell weiter nach hinten, bis die Abbildung wieder optimal ist.
- Notieren Sie die neue Bildweite b_2 und die neue Gegenstandsweite g_2 . Beachten Sie, dass die sphärische (Wasser-) Fläche allein ausreicht, um ein scharfes Bild in unserer Wanne zu erzeugen.
- Wenn Sie die Messungen beendet haben, entleeren Sie bitte das Augenmodell und räumen auf.

IV.4 Auswertung

1. Untersuchung einer astigmatischen Linse

- Ermitteln Sie unter Verwendung von Gl. 12 die Brennweiten f_1 und f_2 für die beiden Lichtbündel in den orthogonalen Ebenen (ohne Betrachtung der Messunsicherheit).
- Bestimmen Sie den Astigmatismus der Linse.

2. Untersuchungen am Augenmodell

Nach Gl. 15 und 16 kann man die Brechkraft der sphärischen Fläche so berechnen:

$$D = n_0/g + n_1/b$$

Führen Sie diese Berechnung mit $n_0 = 1$ für Luft und $n_1 = 1,33$ für Wasser (ohne Betrachtung der Messunsicherheit) zweimal durch und zwar:

- für das „vollständige Auge“, also das optische System „sphärische Fläche + „Linse in Wasser“ unter Verwendung von g_1 und b_1 . Dieses Vorgehen beinhaltet eine Näherung.
- für das „staroperierte Auge“ unter Verwendung von g_2 und b_2 .
- Welcher prozentuale Anteil der Gesamtbrechkraft fällt in unserem Modell danach der Glaslinse in Wasser zu?

- Vergleichen Sie das Ergebnis mit Ihrer „Probierbrille“. Macht es Sinn, dass Sie gerade diese gewählt haben?
- Berechnen Sie ohne Unsicherheit aus den Daten des letzten Versuchs den Krümmungsradius der sphärischen Fläche in unserem Augenmodell mit Hilfe von Gl. 21.