

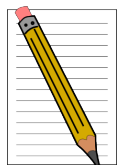
## Linsen und Linsensysteme

Sie werden hier die Brennweiten von Linsen und Linsensystemen bestimmen und dabei lernen, wie Brillen, Teleobjektive und andere optische Geräte funktionieren.

Sie werden feststellen, dass bei diesem Versuch Unsicherheiten auftreten, wann ein Bild wirklich scharf ist. Dementsprechend messen Sie unterschiedliche Weiten  $g$  und  $b$ , auch wenn Sie die immer dieselbe Linse verwenden. *Keine* physikalische Messung ist jemals zu 100% exakt! Mithilfe der Fehlerrechnung gelangen Sie in dieser Situation jedoch zu erstaunlich guten Ergebnissen.

### Schriftliche VORbereitung:

- Beweisen Sie die Abbildungsgleichung (1) mit den Strahlensätzen.
- In welcher Gegenstandsweite  $g$  muss der Gegenstand bei einer Konvexlinse aufgestellt werden, damit gilt:  $G < B$ ,  $G = B$ ,  $G > B$ . Wie groß ist jeweils die Bildweite  $b$ ?
- Konstruieren Sie maßstabsgetreu das Bild eines Gegenstandes ( $G = 1\text{ cm}$ ) für eine Konvexlinse  $f = 3\text{ cm}$  und  $g_1 = 4\text{ cm}$  und  $g_2 = 2\text{ cm}$ , für eine Konkavlinse  $f = -3\text{ cm}$  und  $g_1 = 2\text{ cm}$ . Berechnen Sie die Bildgrößen und Bildweiten in den Fällen.
- Beschreiben Sie den Begriff virtuelles Bild am Beispiel einer Lupe.



# 1 Dünne Linsen

## 1.1 Die Linsengleichungen

Bei dünnen Linsen kann man die Brechung an den beiden Linsenoberflächen durch eine einzige an der Linsenmitte ersetzen. Das Bild eines Gegenstandes lässt sich stets mit den drei ausgezeichneten Strahlen konstruieren: *Parallel-, Mittelpunkt- und Brennpunktstrahl*.

Mit dem Strahlensatz zeigen Sie

$$\text{die Abbildungsgleichung } \frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \text{ und den Abbildungsmaßstab } \gamma = \frac{B}{G} = \frac{b}{g}. \quad (1)$$

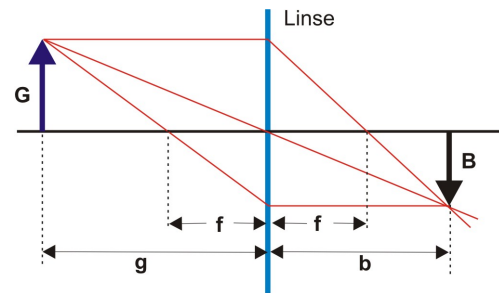


Abb. 1: Strahlengang bei dünnen Linsen

## 1.2 Einfache Messung der Brennweite einer Konvexlinse

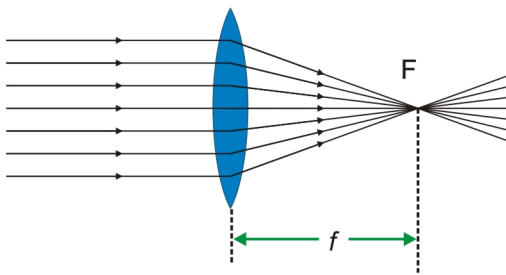


Abb. 2: Der schnelle Weg zur Brennweite

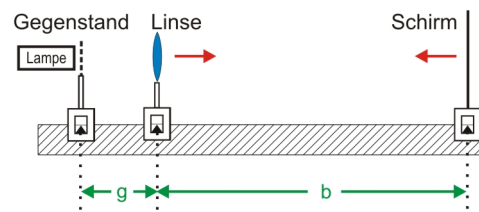


Abb. 3: Linse und Schirm müssen verschoben werden

(M1) Der schnellste Weg, die Brennweite einer Konvexlinse zu bestimmen. Sie bilden dazu einen möglichst weit entfernten Gegenstand ab (paralleles Lichtbündel) und messen dann direkt die Brennweite  $f = b$ . Ermitteln Sie so zunächst die ungefähren Brennweiten der beiden Konvexlinsen am Arbeitsplatz.

(M2) Genauer gelingt die Bestimmung der Brennweite in einer Messreihe. Bilden Sie dazu einen Gegenstand (im Versuch ist das ein Dia mit einem Kreuzgitter) mit einer der Konvexlinsen auf den Schirm für 6 verschiedene Abstände  $g$  scharf ab (Abbildung 3). Messen Sie jeweils  $g$  und  $b$ .

(A1) Berechnen Sie die Brennweite  $f$  mit der Abbildungsgleichung (1) als Mittelwert mit Angabe der Messunsicherheit (das ist die Messabweichung vom Mittelwert).

(A2) Stellen Sie Ihre Messwerte wie in Abbildung 4 grafisch dar. Tragen Sie dazu die gemessenen  $b$ -Werte auf der Ordinate auf, die  $g$ -Werte auf der Abszisse und verbinden Sie zusammengehörige Punkte durch eine Gerade. Die Koordinaten des gemeinsamen Schnittpunkts sind gleich der Brennweite. Begründen Sie diese Vorgehensweise.

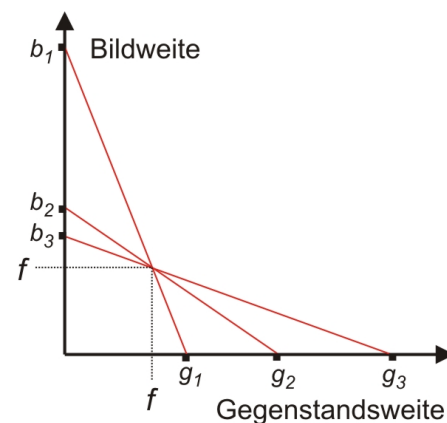


Abb. 4: Aus dieser Darstellung liest man ab:  $(g - f) : f = f : (b - f) = g : b$ . Das lässt sich in die Abbildungsgleichung (1) umformen

### 1.3 Messung der Brennweite mit dem Besselverfahren

Ein systematischer Fehler ist dadurch bedingt, dass man die Linsenmitte auf der optischen Schiene nie genau feststellen kann. Man kann diesen Fehler mit dem Besselverfahren ([Abbildung 5](#)) vermeiden: Gegenstand und Schirm bleiben bei diesem Verfahren fest stehen (Abstand  $e$ ) und man erzeugt zunächst in Position *I* ein vergrößertes Bild ( $B_I$ ) und dann durch Verschieben der Linse um  $d$  in der Position *II* ein verkleinertes ( $B_{II}$ ). Da nach der Abbildungsgleichung  $g_I = b_{II}$  und  $b_I = g_{II}$  gilt, erhält man hier die Brennweite aus:

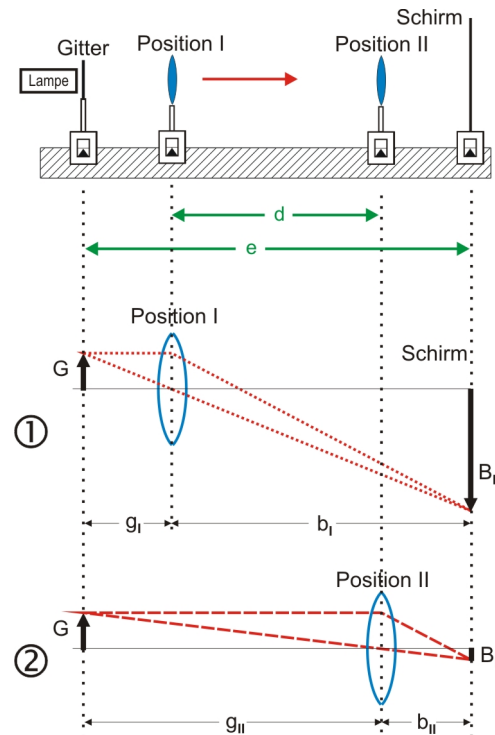
$$\left. \begin{array}{l} b + g = e \\ b - g = d \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} b = \frac{e+d}{2} \\ g = \frac{e-d}{2} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{4e}{e^2 - d^2} \quad (2)$$

(M3) Benutzen Sie bitte die selbe Konvexlinse wie in 1.2. Der Versuch gelingt nur für einen festen Abstand  $e > 4f$ .

(M4) Erzeugen Sie die beiden scharfen Bilder und messen Sie die Verschiebung  $d$ , jeder von Ihnen dreimal – für die Mittelwertbildung.

(M5) Messen Sie den festen Abstand  $e$ , jeder einmal.

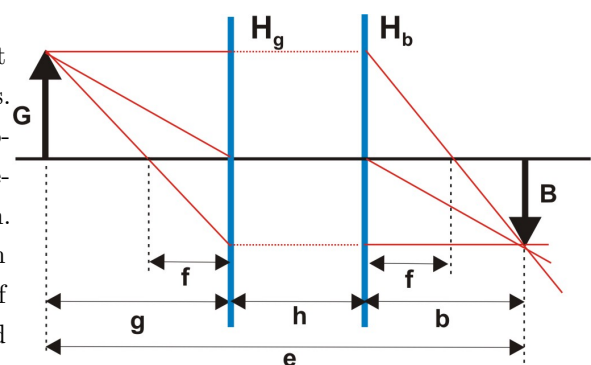
(A3) Bestimmen Sie die Brennweite  $f$  nach [Gleichung 2](#) mit den Mittelwerten von  $d$  und  $e$ . Berechnen Sie die Messunsicherheiten.



**Abb. 5:** Zum Besselverfahren: Gemessen wird nur der feste Abstand  $e$  und die Verschiebung  $d$  der Linse an einer beliebigen Kante des optischen Reiters. Die tatsächliche Lage der Linse muss man nicht bestimmen

## 2 Dicke Linsen oder komplette Linsensysteme

Bei dicken Linsen oder bei System aus mehreren Linsen reicht eine einzige Brechungsebene für die Konstruktion nicht aus. Man kann aber in diesen Fällen die Brechung an allen Linsenoberflächen durch die Brechung an lediglich zwei Brechungsebenen, den Hauptebenen ( $H_g$  und  $H_b$  in [Abbildung 6](#)), ersetzen. Dies sind zwei Ebenen, die sich kongruent ineinander abbilden (und die es bei jedem System gibt). Der tatsächliche Verlauf der Strahlen durch das Linsensystem wird „übergangen“ und gedanklich parallel zwischen den Hauptebenen versetzt.



**Abb. 6:** Abbildungskonstruktion mit Hauptebenen

Die Bildkonstruktion wird dann mit den drei ausgezeichneten Strahlen wie bei dünnen Linsen ausgeführt. Bezieht man  $g$ ,  $b$  und  $f$  auf die zugehörige Hauptebene, so gelten auch hier wieder [Gleichung 1](#) und [Gleichung 2](#).

## 2.1 Die Konstruktion der Hauptebenen

Die Bildkonstruktion mit diesen Hauptebenen ist recht einfach. Etwas aufwändiger ist es, die Lage der Hauptebenen und Brennweiten zu bestimmen.

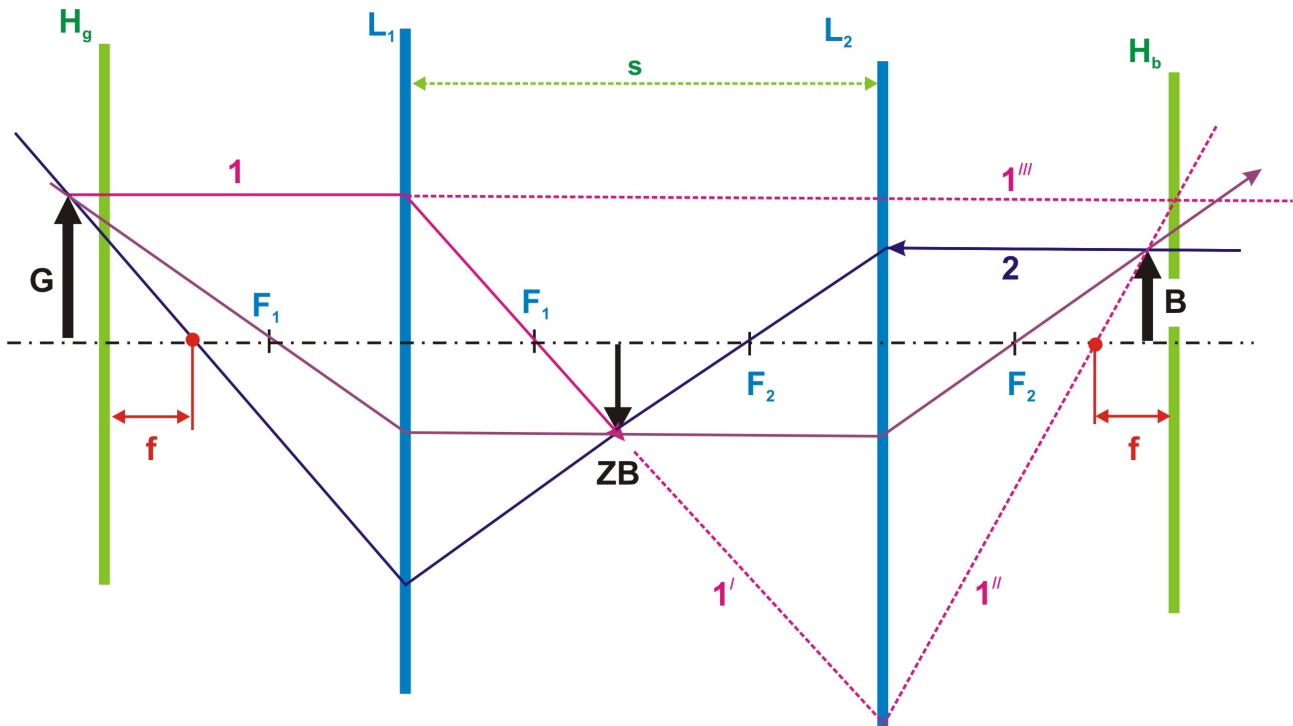


Abb. 7: Konstruktion der Hauptebenen; Quelle: Bergmann-Schäfer

Das Verfahren dazu lässt sich anhand von [Abbildung 7](#) verfolgen. Sie sehen die Skizze eines Systems aus zwei Konvexlinsen im Abstand  $s$ . Der Gegenstand  $G$  wird durch die Linse  $L_1$  in das Zwischenbild  $ZB$  abgebildet und dieses mittels  $L_2$  in das Bild  $B$ .

Verfolgen Sie den Parallelstrahl 1 von links durch beide Linsen. Sie erhalten die Strahlen  $1'$  und  $1''$ .

- Der Schnittpunkt der Verlängerung des einfallenden Parallelstrahls 1 ( $= 1'''$ ) mit  $1''$  bestimmt die Lage der bildseitigen Hauptebene  $H_b$ .
- Der Schnittpunkt von  $1''$  mit der optischen Achse ist der bildseitige Brennpunkt  $F$  des Systems.

Hauptebene  $H_g$  und Brennpunkt  $F$  auf der Gegenstandsseite erhalten Sie analog, indem Sie den von rechts einfallenden Parallelstrahl 2 verfolgen.

## 2.2 Berechnung der Brennweiten

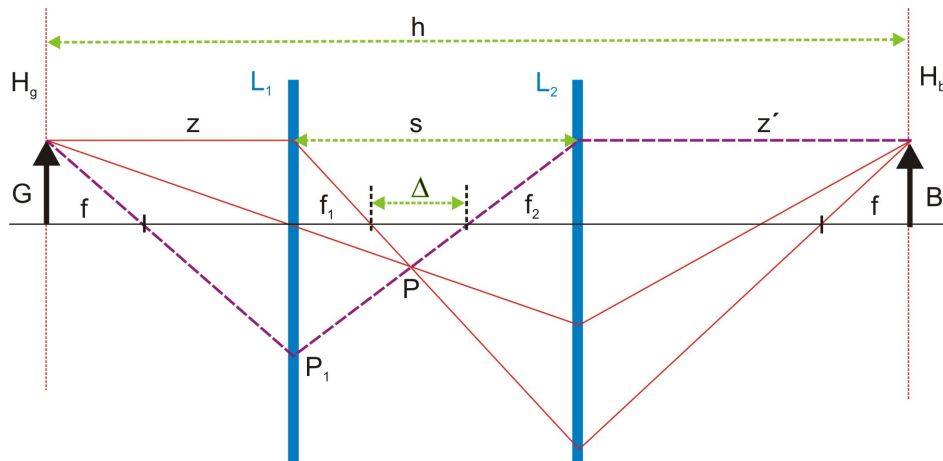


Abb. 8: Zur Berechnung der Brennweiten; Quelle: Bergmann-Schäfer

Dieses Vorhaben gelingt bei einem solchen System am einfachsten, wenn man gedanklich den Gegenstand in eine der Hauptebenen legt (Abbildung 8) und ihn mit den Linsen abbildet:

$$\text{Für Strahlen, die von } P \text{ ausgehen, gilt: } \frac{f_1}{z} = \frac{\Delta}{s} = \frac{s}{h} \text{ mit } s = \Delta + f_1 + f_2 \quad (3)$$

$$\text{und für die, die von } P_1 \text{ ausgehen, gilt: } \frac{z - f}{z} = \frac{s - f_2}{s} \quad (4)$$

$$\text{Aus Gleichung 3 folgt } z = \frac{s \cdot f_1}{\Delta} \text{ und } h = \frac{s^2}{\Delta} = \frac{s^2}{s - f_1 - f_2} \quad (5)$$

$$\text{und damit aus Gleichung 4: } f = z \cdot \frac{f_2}{s} = \frac{f_1 f_2}{\Delta} \text{ und schließlich } \frac{1}{f} = \frac{\Delta}{f_1 f_2} = \frac{s}{f_1 f_2} - \frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2}.$$

Übliche Konvention: Brennweiten rechts von  $H_g$  bzw. links von  $H_b$  zählen negativ. Um dieser Konvention zu folgen, ersetzen Sie nun noch  $f$  durch  $-f$  und erhalten das Endergebnis:

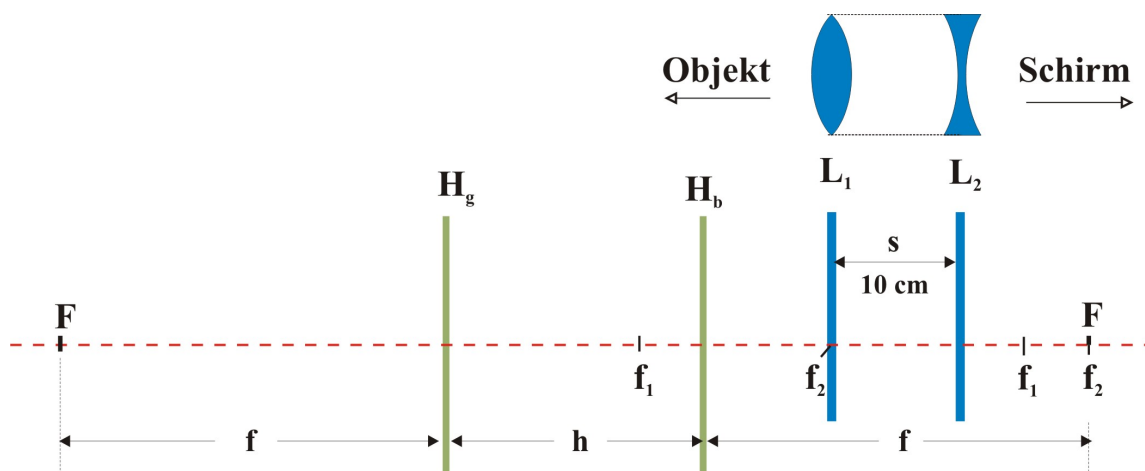
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{s}{f_1 f_2} \quad (6)$$

### 3 Versuche mit einem Teleobjektiv

Ein Fotoapparat mit einem normalen Objektiv ( $f = 50 \text{ mm}$ ) erzeugt von einem weit entfernten Baum ( $g = 1 \text{ km}$ ,  $G = 10 \text{ m}$ ) nur ein sehr kleines Bild (Wie groß ist  $B_{50}$ ?). Man könnte ein größeres Bild erhalten, wenn man als Objektiv eine Linse größerer Brennweite ( $f = 200 \text{ mm}$ ) benutzen würde ( $B_{200}$ ?). Dies hätte aber einen unhandlich langen Vorsatz zur Folge. Man umgeht das Problem mit einem Linsensystem (Teleobjektiv), das folgende Eigenschaften besitzt:

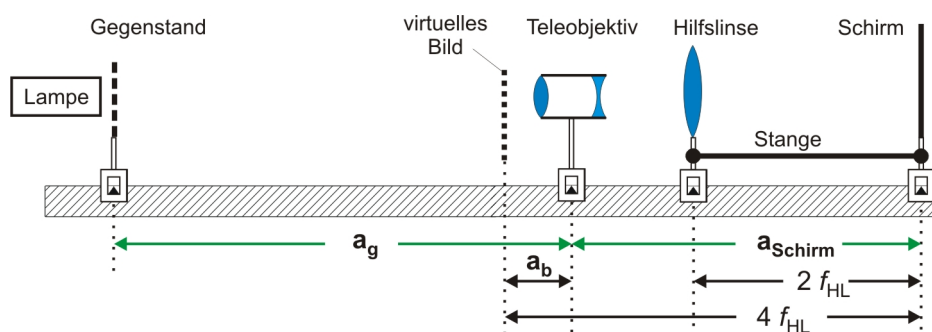
- große Brennweite
- bildseitiger Brennpunkt kurz hinter der letzten Linse.

Als Modell eines solchen Teleobjektivs benutzen Sie im Versuch ein Linsensystem wie in [Abbildung 9](#) mit:  $f_1 = 15 \text{ cm}$  für  $L_1$  und  $f_2 = -10 \text{ cm}$  für  $L_2$ ;  $s > 10 \text{ cm}$ .



**Abb. 9:** Teleobjektiv im Versuch: Mit  $s = 10 \text{ cm}$  hat dieses Linsensystem eine Brennweite von  $30 \text{ cm}$  (doppelt so groß wie  $f_1$ ).

#### 3.1 Messung des Abstandes $h$ der Hauptebenen



**Abb. 10:** Da es in der Auswertung nur auf die Differenz  $a_g - a_b$  ankommt, können Sie zur Messung von  $a_g$  von einer beliebigen Kante des Teleobjektivs ausgehen. Auf die gleiche Kante müssen Sie dann auch die Messung von  $a_b$  beziehen.

Beide Hauptebenen bilden sich kongruent aufeinander ab. Nur wenn der Gegenstand genau in der Hauptebene  $H_g$  liegt, sind Gegenstand und Bild gleich groß ([Abbildung 8](#)). Das liefert die Idee für diese Messung: Für verschiedene Scharf-Stellungen des Bildes bestimmen Sie jeweils den Abbildungsmaßstab  $\gamma = \frac{B}{G}$  durch Auszählen der Bildgröße  $B$ . Dort wo  $\gamma = 1$  ist, muss der Gegenstand in der Hauptebene  $H_g$  und das Bild in der Hauptebene  $H_b$  liegen.

Bei feststehendem Teleobjektiv mit den beiden Linsen aus [Abbildung 9](#) bestimmen Sie für verschiedene Positionen des Gegenstandes ([Abbildung 10](#)):

(M6) den Abstand  $a_g$  Teleobjektiv zum Gegenstand (5 mm-Raster)

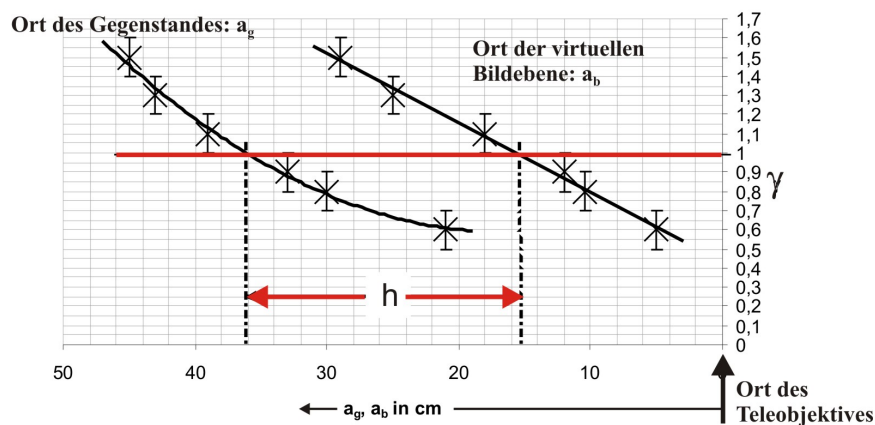
(M7) den Abstand  $a_{\text{Schirm}}$  Teleobjektiv zum Schirm

(M8) den Abbildungsmaßstab  $\gamma = \frac{B}{G}$  durch Auszählen der Bildgröße  $B$  auf dem Schirm (mm-Papier).

Das virtuelle Bild können Sie nicht direkt beobachten. Um dessen Lage, den Abstand  $a_b$ , zu bestimmen, benutzen Sie hier eine Hilfslinse der Brennweite  $f_{HL} = 25 \text{ cm}$  ([Abbildung 10](#)). Diese Hilfslinse wird mit einer Stange starr an den Schirm im Abstand  $2f_{HL}$  gekoppelt, beide lassen sich dann nur noch gemeinsam verschieben. Damit können Sie das virtuelle Bild als ein größengleiches und reelles Bild auf dem Schirm abbilden und aufsuchen. Der Abstand  $a_b$  ergibt sich daher aus:  $a_b = 4f_{HL} - a_{\text{Schirm}} = 100 \text{ cm} - a_{\text{Schirm}}$ .

### Hinweise zur Durchführung

- Der Versuch lässt sich leichter durchführen, wenn der Abstand  $s$  der beiden Linsen etwas mehr als 10 cm beträgt.
- Beginnen Sie die erste Messung mit  $a_g \approx 45 \text{ cm}$ . Notieren Sie  $a_g$ ,  $a_{\text{Schirm}}$  und  $\gamma$ . Nähern Sie für die nächsten Messungen die Lampe (Gegenstand) etwas dem weiterhin feststehenden Teleobjektiv und suchen Sie durch Verschieben von Hilfslinse mit Schirm das virtuelle Bild auf.
- Führen Sie je 3 Messungen für  $\gamma < 1$  und  $\gamma > 1$  durch.



**Abb. 11:** Der gesuchte Hauptebenenabstand  $h$  ergibt sich für  $\gamma = 1$  aus  $h = a_g - a_b$ .

(A4) Tragen Sie den gemessenen Abbildungsmaßstab  $\gamma$  jeweils über den Abständen  $a_g$  und  $a_b$  wie in [Abbildung 11](#) auf. Verbinden Sie die Messpunkte durch Kurven. Die Schnittpunkte dieser Kurven mit der Geraden  $\gamma = 1$  liefern Ihnen die Lagen der Hauptebenen relativ zum Teleobjektiv. Vergleichen Sie den daraus ermittelten Hauptebenenabstand  $h$  mit dem Wert, der sich aus [Gleichung 5](#) ergibt.

### 3.2 Messung der Brennweite des Systems

Die Brennweite des Teleobjektivs mit dem Besselverfahren ergibt sich wegen  $b + g = e - h$  (vgl. [Abbildung 2](#)) hier aus:

$$f = \frac{(e - h)^2 - d^2}{4(e - h)} \quad (7)$$

- (M9) Entfernen Sie bitte die Hilfslinse aus dem vorigen Versuch und stellen Sie den Gegenstand und den Schirm jeweils am Ende der optischen Bank auf. Messen Sie mit dem Besselverfahren bei gleich bleibendem Abstand  $e$  wieder 6-mal den Abstand  $d$ .
- (A5) Bestimmen Sie die Brennweite nach [Gleichung 7](#) als Mittelwert und ihre Unsicherheit (Standardabweichung) und vergleichen Sie sie mit Ihrer Berechnung nach [Gleichung 6](#).

### Literatur

- [1] Walcher, W.(2004): *Praktikum der Physik*, Teubner Verlag, Wiesbaden, DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-322-94128-2>