Kurze Einführung in die Berechnung der Messunsicherheit nach GUM

Stephan Mieke

Physikalisch-Technische Bundesanstalt

Institut Berlin, 8.40

Gliederung

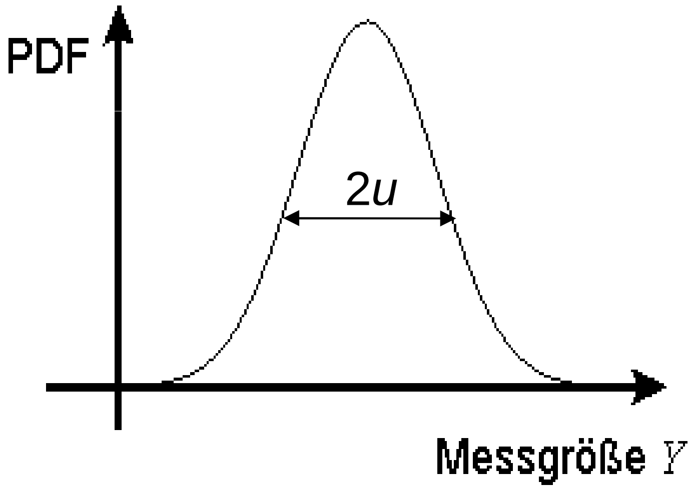
- Einleitung
- Guide to the Expression of Uncertainty (GUM)
- Monte-Carlo-Methode (GUM-S1)
- Resümee

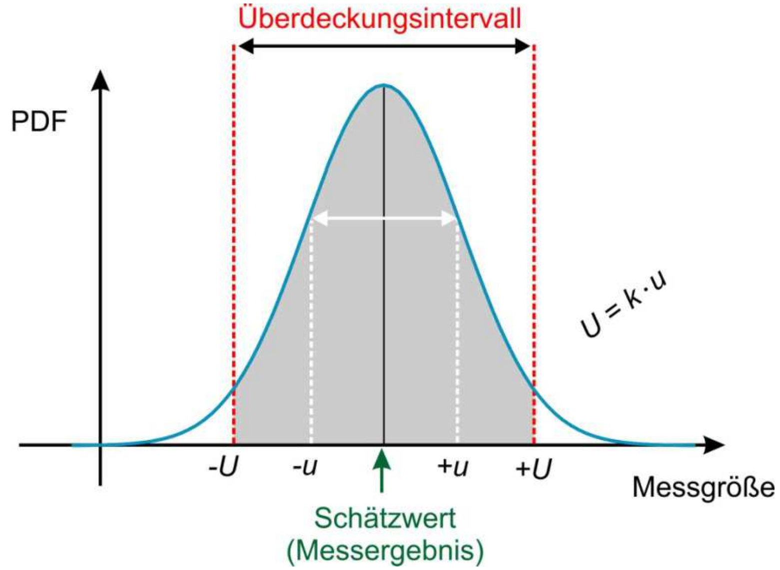
Einleitung

Messunsicherheit, was ist das?

VIM 2.26 Messunsicherheit *u*

nichtnegativer Parameter, der die **Streuung der Werte** kennzeichnet, die der **Messgröße** auf der Grundlage der benutzten Information beigeordnet ist





Wahrscheinlichkeitsverteilung (probability density function, PDF):
Quantitative Beschreibung der Information (Kenntnis) über den Wert der Messgröße („degree of belief“).

Einleitung

Literatur:

- Evaluation of measurement data — An Introduction to the „Guide to the expression of uncertainty in measurement“ and related documents, JCGM 104:2009 (kostenloser Download: http://www.bipm.org/en/publications/guides/gum.html, deutsche Übersetzung: http://www.ptb.de/cms/fachabteilungen/abt8/fb-84/ag-840/publika-840/jcgm-104.html)
- Evaluation of measurement data — Guide to the expression of uncertainty in measurement GUM 1995 with minor corrections, JCGM 100:2008 (kostenloser Download: http://www.bipm.org/en/publications/guides/gum.html)

- DIN V ENV 13005: Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen, Beuth Verlag Berlin, 1999 (deutsche Übersetzung des GUM)
- Evaluation of measurement data – Supplement 1 to the "Guide to the expression of uncer-tainty in measurement" – Propagation of distributions using a Monte Carlo method, JCGM 101:2008
- Evaluation of measurement data – Supplement 2 to the "Guide to the expression of uncertainty in measurement" – Extension to any number of output quantities, JCGM 102:2011 (kostenloser Download der Supplements: http://www.bipm.org/en/publications/guides/gum.html)

- International Vocabulary of Metrology – Basic and General Concepts and Associated Terms, VIM, 3rd edition, JCGM 200:2008 sowie Corrigendum aus 2010 (kostenloser Download: http://www.bipm.org/en/publications/guides/vim.html)
- DIN: Internationales Wörterbuch der Metrologie, 3. Auflage 2010, Beuth Verlag GmbH (deutsche Übersetzung des VIM, korrigierte Fassung 2012)

Einleitung

Literatur:


DEUTSCHER KALIBRIERDIENST DKD

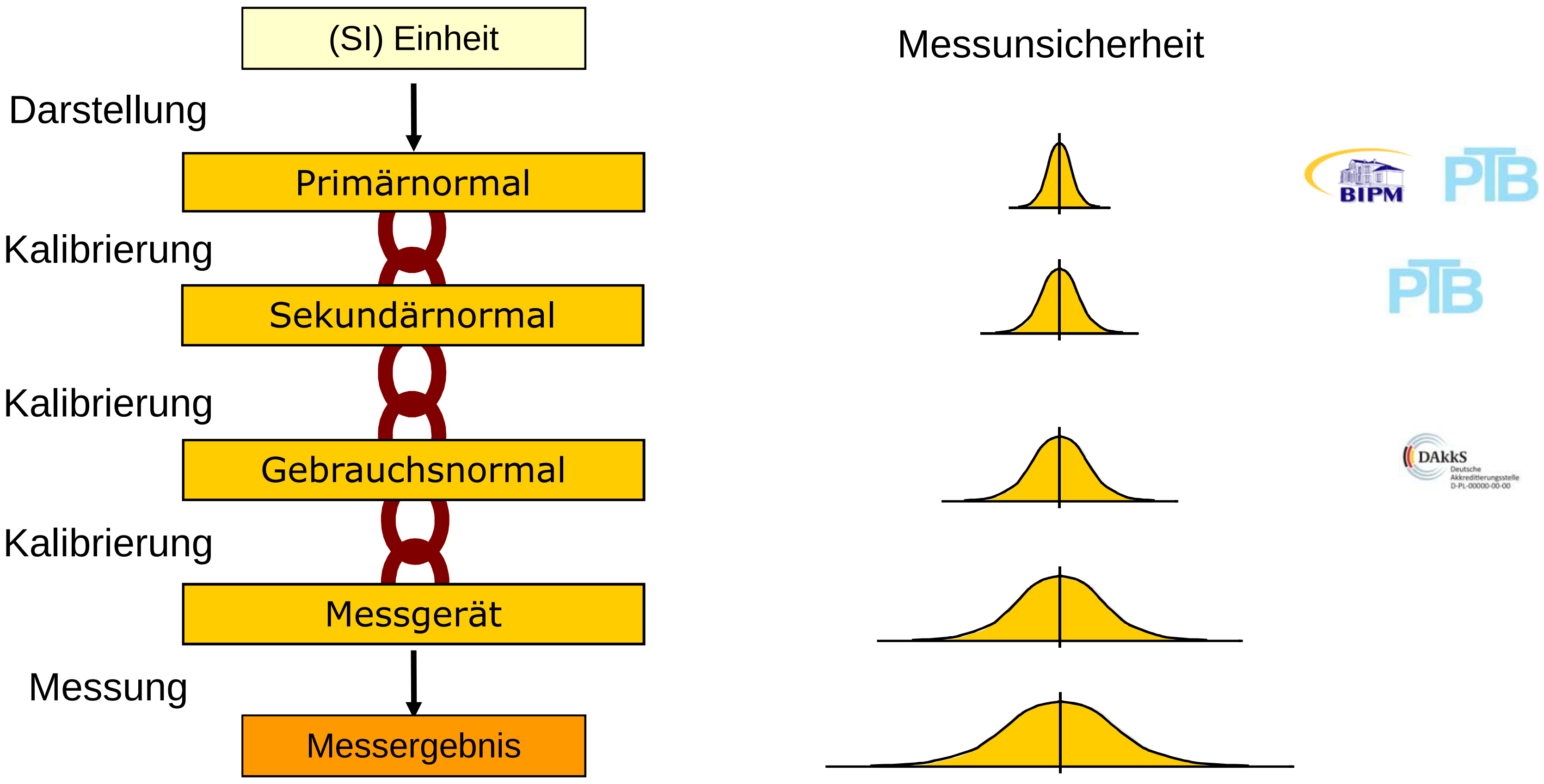
DKD-3 Angabe der Messunsicherheit bei Kalibrierungen

- DKD-3 Angabe der Messunsicherheit bei Kalibrierungen (01/1998)
- DKD-3-E1 Angabe der Messunsicherheit bei Kalibrierungen, Ergänzung 1 - Beispiele (10/1998)
- DKD-3-E2 Angabe der Messunsicherheit bei Kalibrierungen, Ergänzung 2 - Zusätzliche Beispiele (08/2002)
- DKD-4 Rückführung von Mess- und Prüfmitteln auf nationale Normale (01/1998)

(kostenloser Download aller DKD-Dokumente: http://www.dkd.eu/inhalt.php?id=30)

- DIN 1319-3: Grundlagen der Meßtechnik - Teil 3: Auswertung von Messungen einer einzelnen Meßgröße, Meßunsicherheit, Beuth Verlag Berlin, 1996
- DIN 1319-4: Grundlagen der Meßtechnik - Teil 4: Auswertung von Messungen, Meßunsicherheit, Beuth Verlag Berlin, 1999

Einleitung



Quelle: Wolfgang Schmid

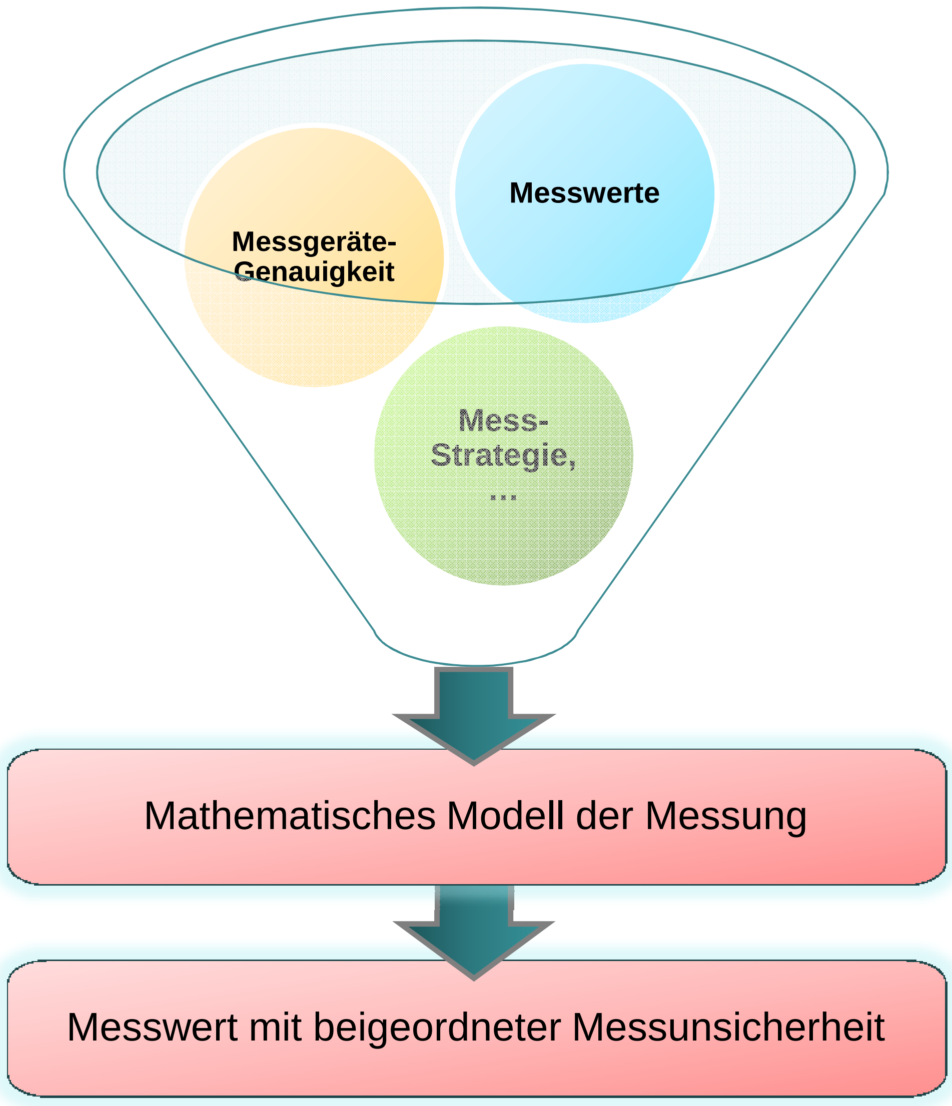
Einleitung

~~wahrer Wert~~

Messwert

Messwert mit Messunsicherheit

Einleitung



X_1

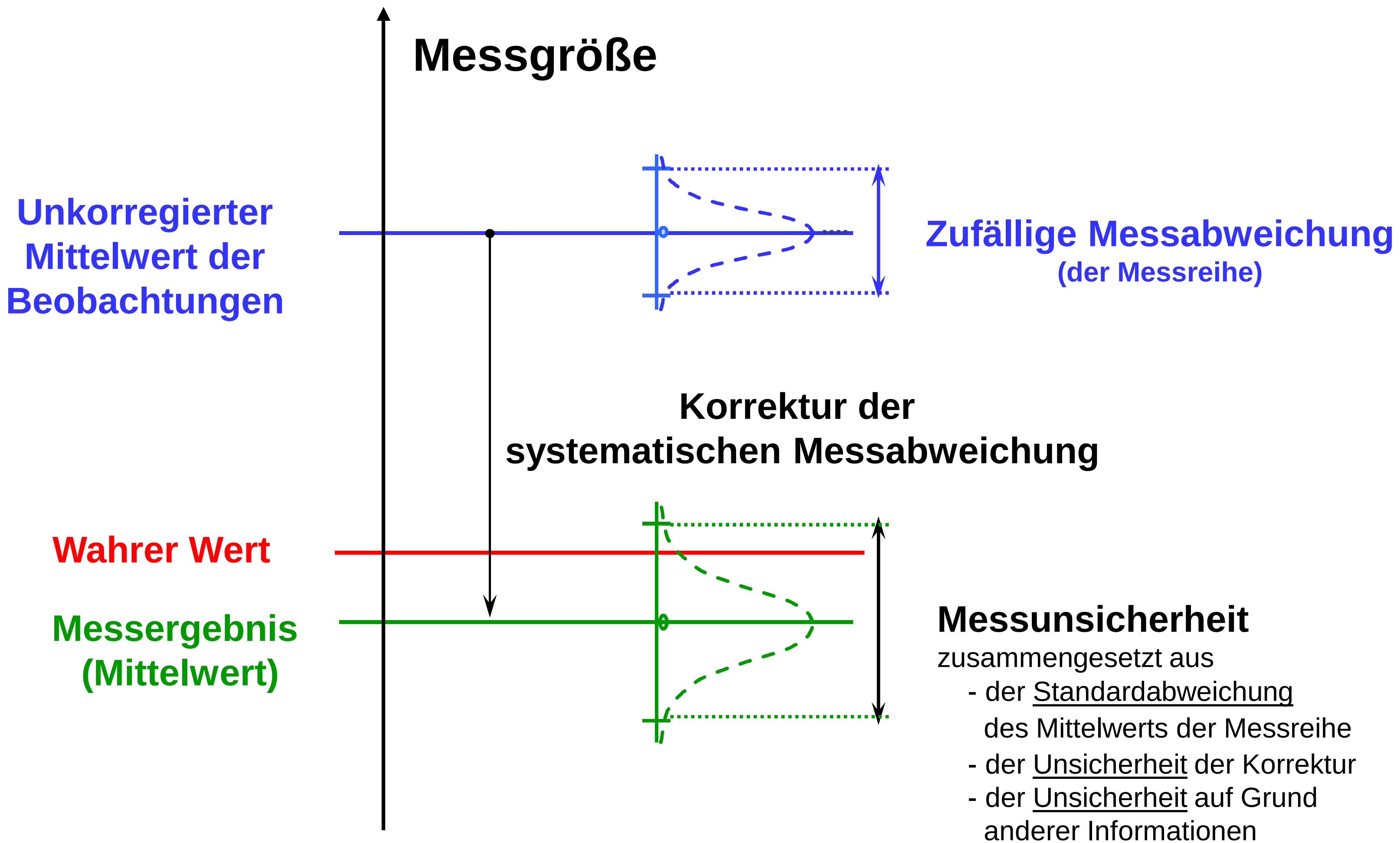
X_2 X_3

...

$$Y = f(X_1, X_2, X_3, \ldots)$$

$$y + U,\ y - U$$

Einleitung



Quelle: CENAM / Euramet

Einleitung

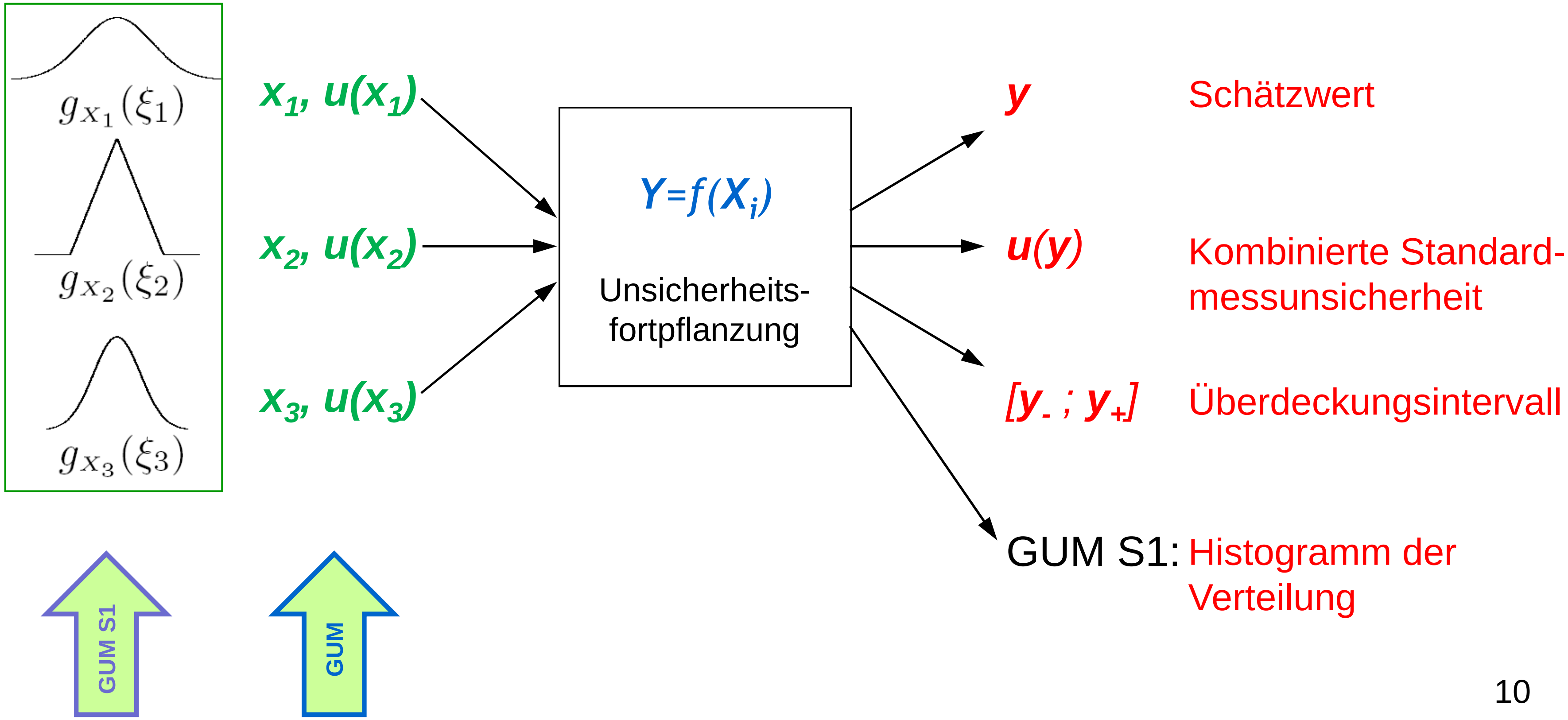
Eingangsgrößen X_i und deren Messunsicherheiten

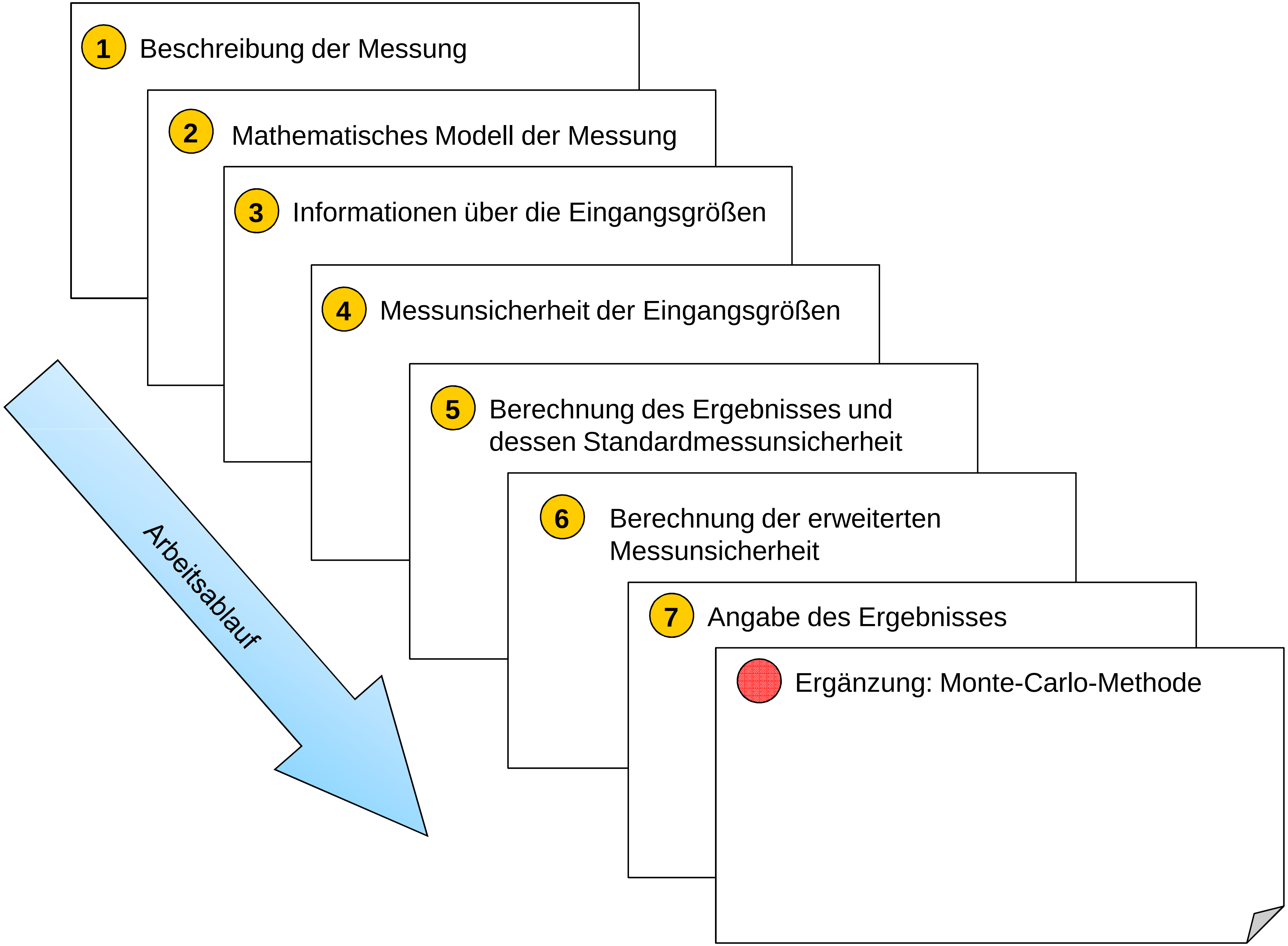
(Eingangsgrößen und deren Standardabweichungen der Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung)

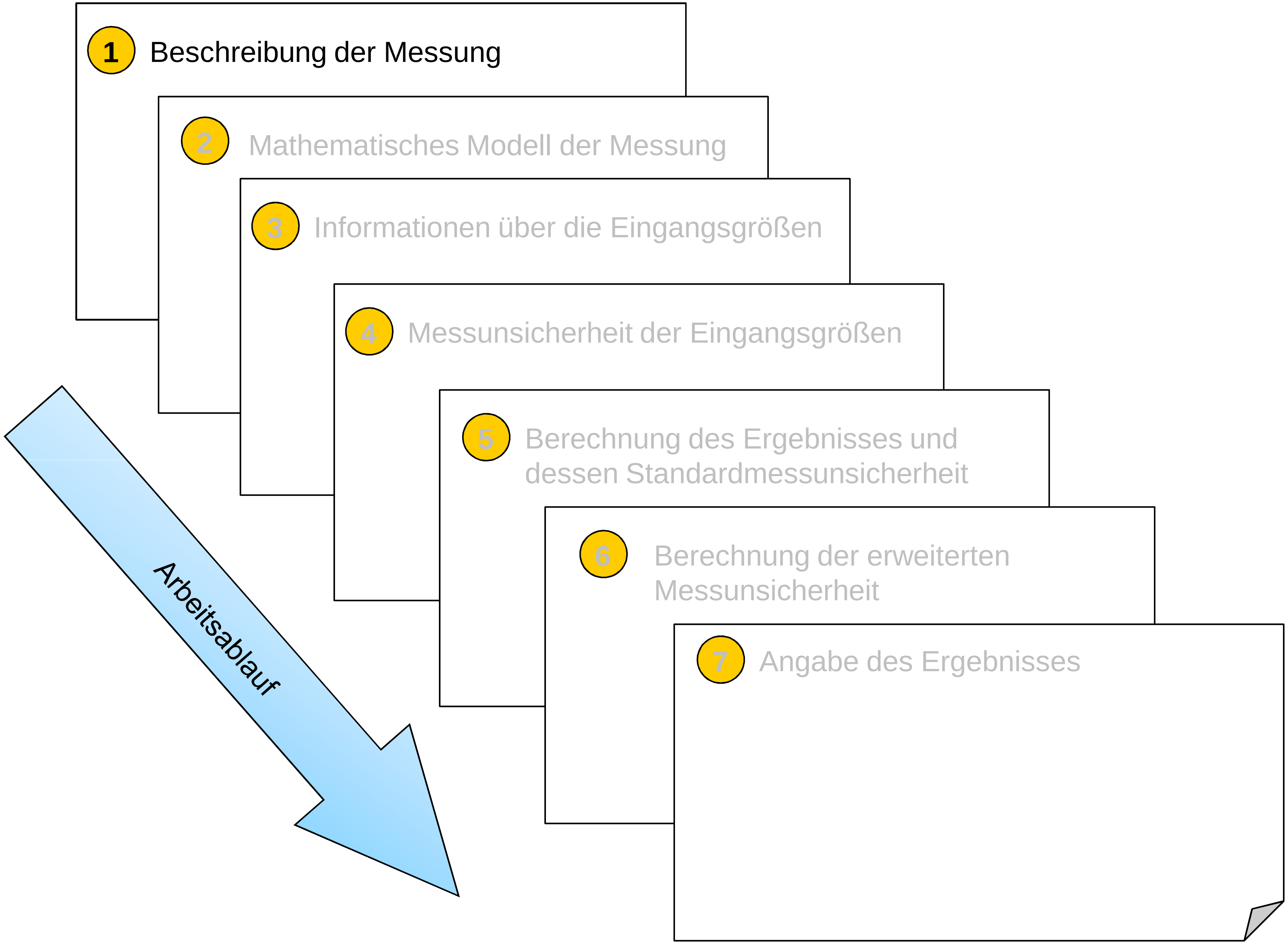
Modell der Messung

Ausgangsgröße Y und Messunsicherheit

(Ausgangsgröße = Messgröße)



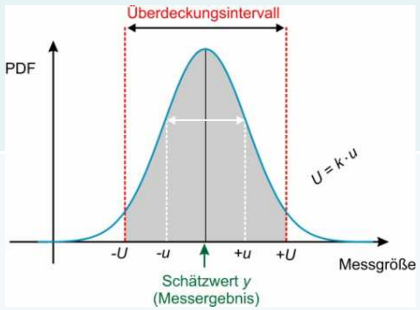

1 Beschreibung der Messung
2 Mathematisches Modell der Messung
3 Informationen über die Eingangsgrößen
4 Messunsicherheit der Eingangsgrößen
5 Berechnung des Ergebnisses und dessen Standardmessunsicherheit
6 Berechnung der erweiterten Messunsicherheit
7 Angabe des Ergebnisses
Ergänzung: Monte-Carlo-Methode
Arbeitsablauf


1 Beschreibung der Messung
2 Mathematisches Modell der Messung
3 Informationen über die Eingangsgrößen
4 Messunsicherheit der Eingangsgrößen
5 Berechnung des Ergebnisses und dessen Standardmessunsicherheit
6 Berechnung der erweiterten Messunsicherheit
7 Angabe des Ergebnisses
Arbeitsablauf

Beschreibung der Messung: zuerst ein paar Definitionen

1

Gegen-stand	Definition (verkürzt)	VIM (Wörterb. d. Metrologie)	Beispiele / Anmerkungen
Größe	Eigenschaft eines Phänomens, eines Körpers oder einer Substanz, …	1.1	Länge, Spannung, Energie, Stoffmengenkonzentration
Größenwert	Zahlenwert und Referenz, die zusammen eine Größe quantitativ angeben	1.19	Masse eines Körpers: 0,152 kg ; Stoffmengenkonz. von L. in einer Plasmaprobe: 5,0 I E / L
Messwert	Größenwert, der ein Messergebnis repräsentiert	2.10	
Mess-ergebnis	Menge von Größenwerten, die einer Messgröße zugewiesen sind, zusammen mit jeglicher verfügbarer relevanter Information	2.9	Ein Messergebnis wird im Allgemeinen als ein einziger Messwert und eine Messunsicherheit ausgedrückt.
Messun-sicherheit	nichtnegativer Parameter [*u*], der die Streuung der Werte kennzeichnet, die der Messgröße auf der Grundlage der benutzten Information beigeordnet ist	2.26	
Über-deckungs-intervall	Intervall [2*U*], das die Menge der wahren Werte einer Messgröße mit einer angegebenen Wahrscheinlichkeit enthält, …	2.36	



Deutsch-englische Fassung des ISO/IEC-Leitfaden 99

PDF: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (probability density function)

1) Messaufgabe und Messgröße
2) Messprinzip
3) Messmethode
4) Messverfahren

Ergebnis von Schritt 1:

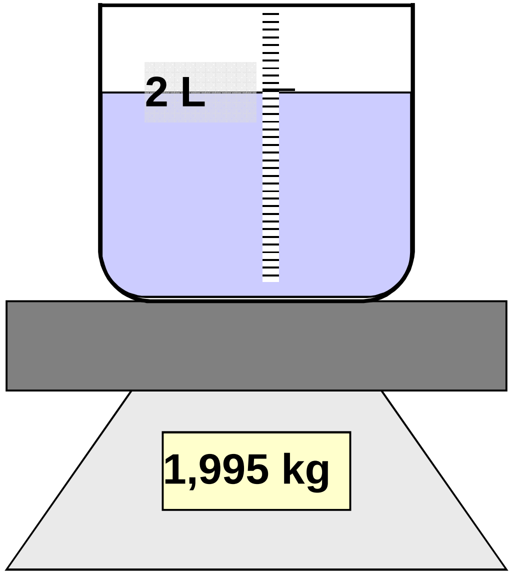
- Identifikation der Messgröße

- bessere Kenntnis und Verständnis des Messverfahrens

1

1 Messaufgabe und Messgröße:

Bestimmung des Volumens *V* eines Bechers mit einem Nennwert von 2 L bei einer Temperatur von 20°C.



2 Messprinzip:

Volumen = Masse / Dichte

3 Messmethode:

Gravimetrische Kalibrierung

4 Messverfahren:

Wiederholtes Füllen des Bechers mit bidistilliertem Wasser und Wiegen der Masse *m* des enthaltenen Wassers

Beispiel: CENAM / Euramet

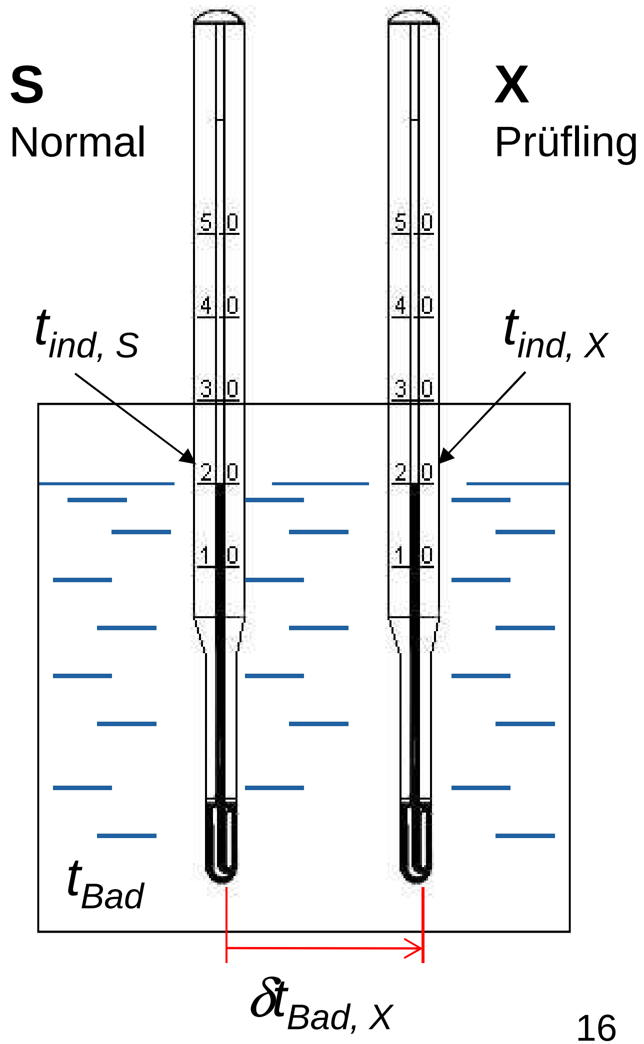
Beschreibung der Messung: Messabweichung eines Thermometers 1

1 Messaufgabe und Messgröße:
Bestimmung der Messabweichung eines Thermometers bei 20°C

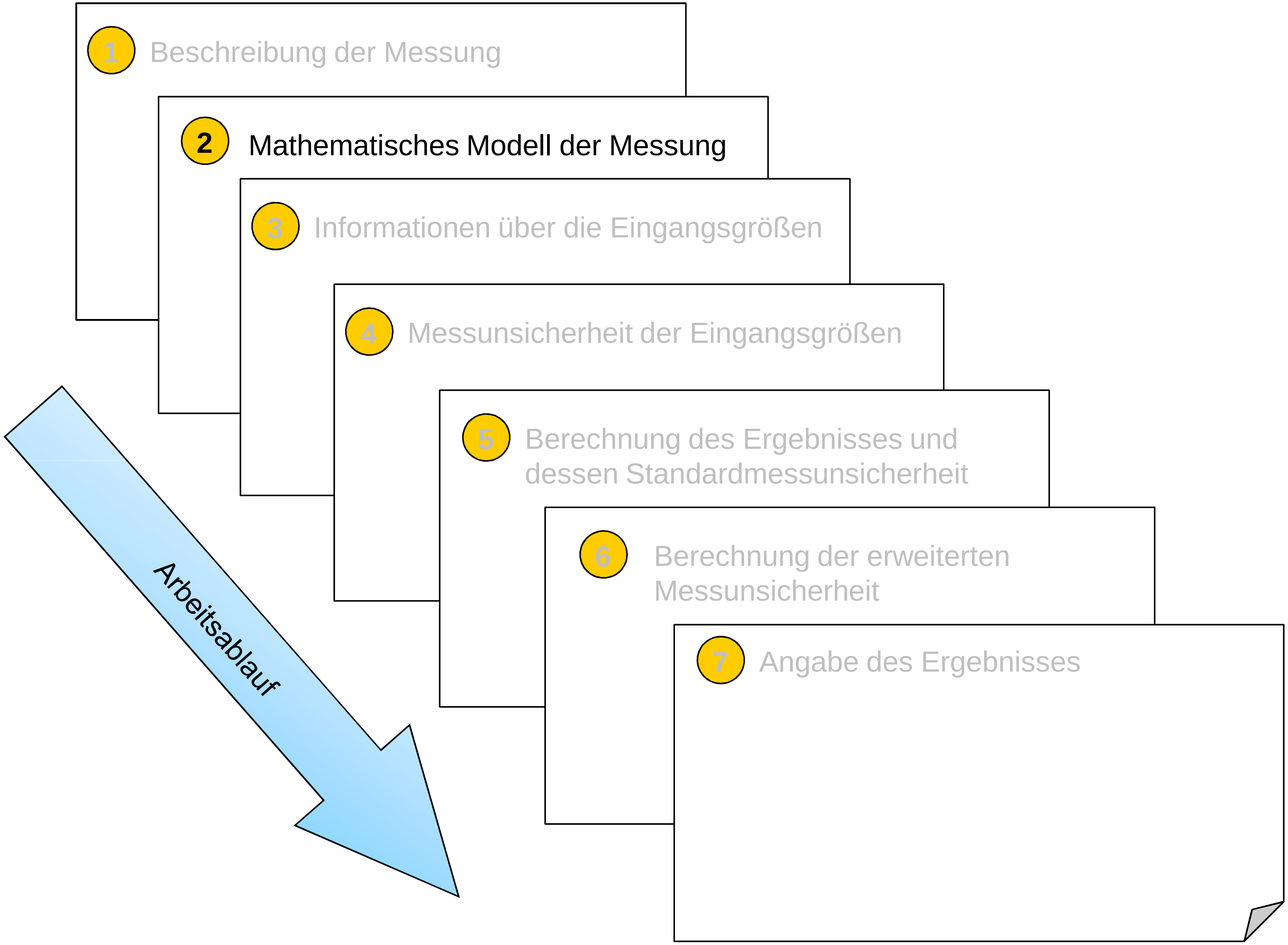
2 Messprinzip:
Messung der Temperatur in einem Medium bekannter Temperatur

3 Messmethode:
Vergleich der Anzeigen zweier Thermometer
(Prüfling {X} und Normal {S})

4 Messverfahren:
Vergleich der Anzeigen beim Eintauchen in einem Wasserbad



Quelle: Bernd R.L. Siebert


1 Beschreibung der Messung
2 Mathematisches Modell der Messung
3 Informationen über die Eingangsgrößen
4 Messunsicherheit der Eingangsgrößen
5 Berechnung des Ergebnisses und dessen Standardmessunsicherheit
6 Berechnung der erweiterten Messunsicherheit
7 Angabe des Ergebnisses
Arbeitsablauf

1) Suchen der Größen, die die Messung beeinflussen könnten
2) Strukturieren und Bewerten der Eingangsgrößen
3) Aufstellen des mathematischen Modells der Messung

Ergebnis von Schritt 2:

- Mathematisches Modell der Messgröße: $Y = f(X_1, X_2, \ldots X_N)$

Formulierung des Modells der Messung (GUM 4.1)

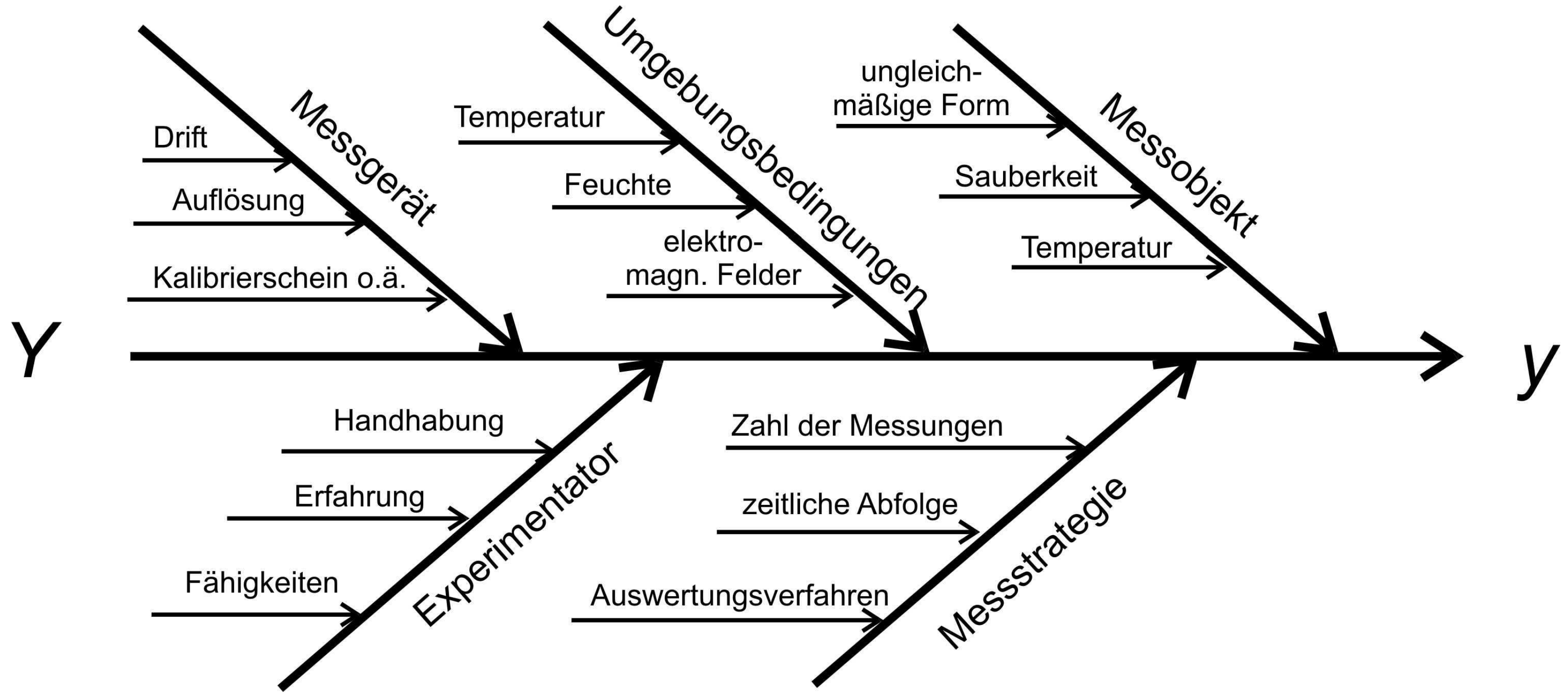
$$Y = f(X_1 , X_2 ..., X_N)$$

Im GUM wird *f* als Funktion angesehen, die alle Größen enthält, die eine signifikante Unsicherheitskomponente zum Messergebnis beitragen können.

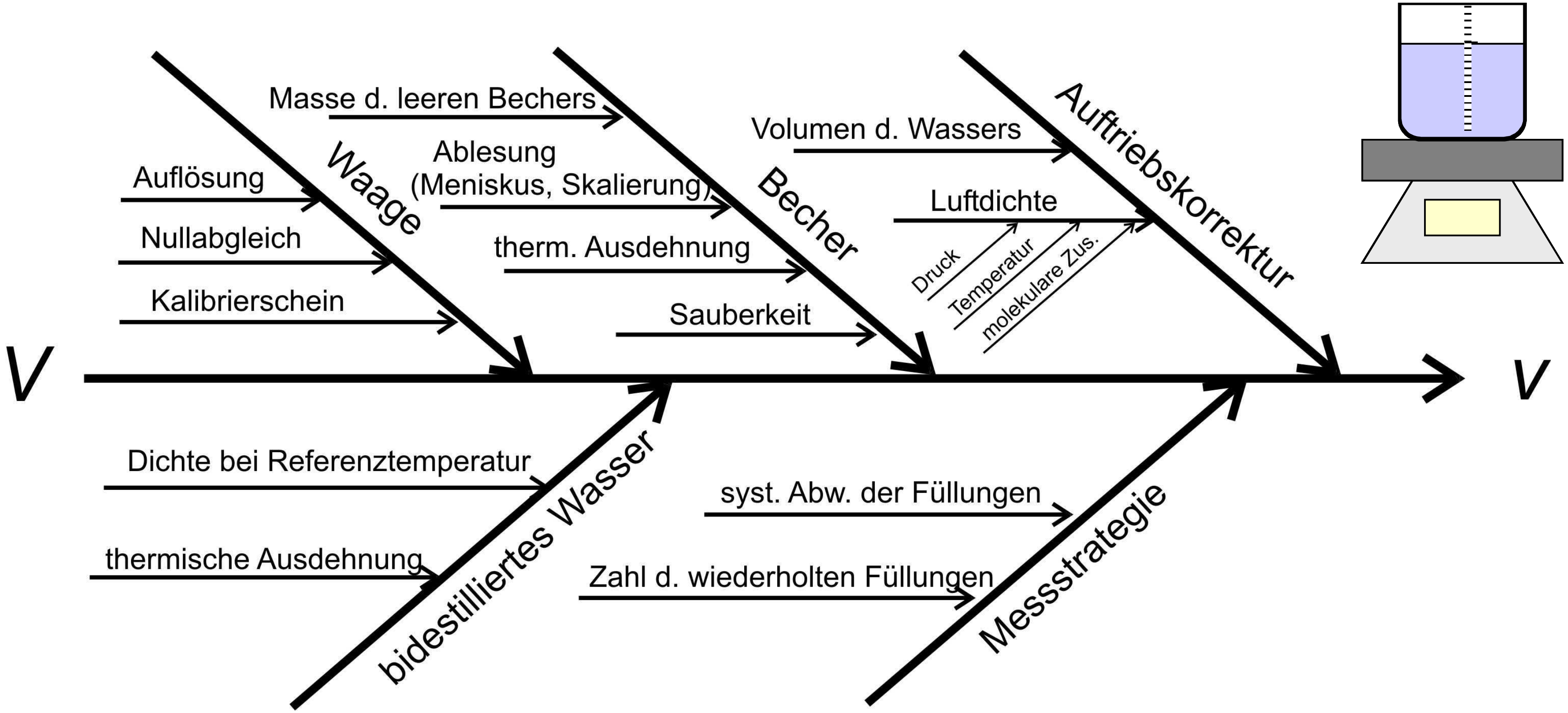
Anmerkungen zur Nomenklatur:

- Eingangsgrößen $X_1 , X_2 ..., X_N$ stehen *rechts* vom Gleichheitszeichen, sie sind Messwertmittelwerte, systematische Abweichungen, Korrekturen usw.
- AusgangsgrößeY steht *links* vom Gleichheitszeichen, sie ist das Ergebniss
- Ein- oder Ausgangsgrößen werden *GROß* geschrieben, deren Schätzwerte (bzw. Erwartungswerte) werden *klein* geschrieben

Ichikawa Diagramm (Beispiel):



Ichikawa Diagramm: Beispiel: Volumenmessung



An alles Denken, nichts vergessen, was zur Messunsicherheit beitragen könnte.

2

Beispiel: Volumenmessung

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{W + B_{air}}{\rho} = \frac{\overline{W} + \Delta W_{cal} + \Delta W_{res} + B_{air}}{\rho}$$

mit

V	Volumen des Bechers
m	Masse des eingefüllten Wassers
W	Netto-Messwert (vermindert um die Masse des leeren Bechers)
ΔW_{Cal}	Messabweichung der Waage (Kalibrierschein-Angabe)
ΔW_{res}	Auflösung der Waage
B_{air}	Korrektur des Luftauftriebs
ρ	Dichte des Wassers

Hinweis:
Diese Gleichung verletzt die Linearitätsforderung des (Standard-)GUM. Praktisch ist das, bei hinreichend kleinen Messunsicherheiten der Eingangsgrößen, ohne Bedeutung. Bei größeren Messunsicherheiten müßte die Berechnung mittels Monte-Carlo-Simulation per Software durchgeführt werden.

Beispiel: Thermometerkalibrierung

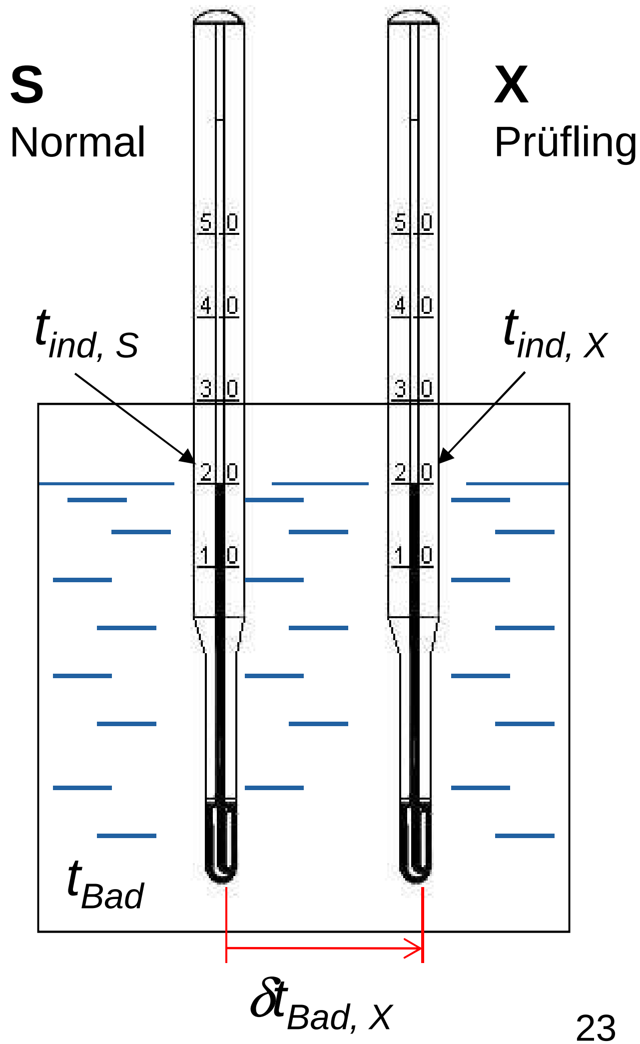
$$t_{ind,S} = t_{Bad} + \Delta t_S$$

$$t_{ind,X} = t_{Bad} + \Delta t_X + \delta t_{Bad,X}$$

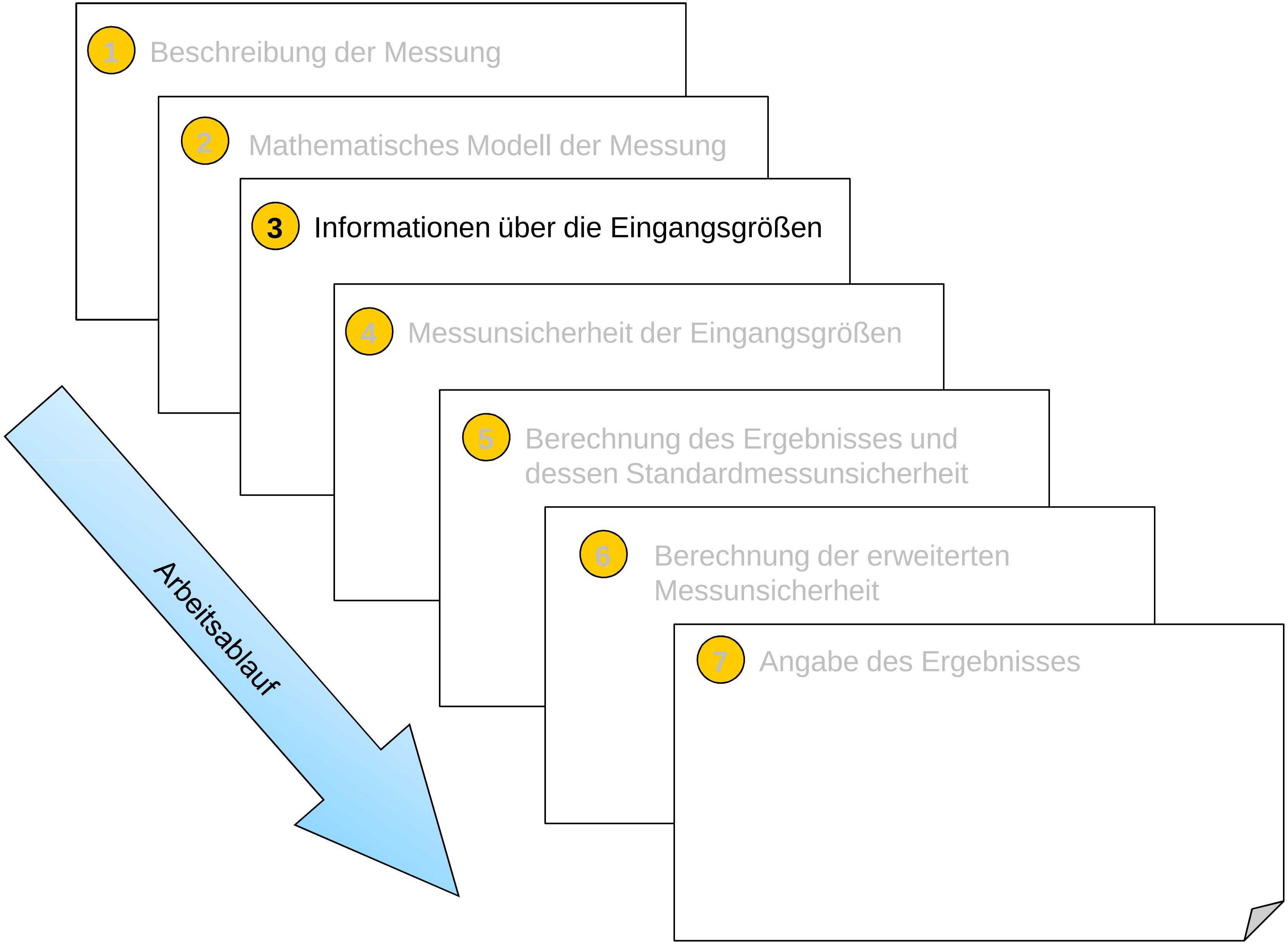
$$\Delta t_X = t_{ind,X} - t_{ind,S} - \delta t_{Bad,X} + \Delta t_S$$

mit

$t_{ind,\,S}$	Anzeige des Normals
$t_{ind,\,X}$	Anzeige des Prüflings
Δt_X	Messabweichung des Prüflings
Δt_S	Messabweichung des Normals
t_{Bad}	eine örtliche Temperatur des Bads
$\delta t_{Bad,\,X}$	Messabweichung auf Grund der verschiedenen Messorte



Quelle: Bernd R.L. Siebert


1 Beschreibung der Messung
2 Mathematisches Modell der Messung
3 Informationen über die Eingangsgrößen
4 Messunsicherheit der Eingangsgrößen
5 Berechnung des Ergebnisses und dessen Standardmessunsicherheit
6 Berechnung der erweiterten Messunsicherheit
7 Angabe des Ergebnisses
Arbeitsablauf

Informationen über die Eingangsgrößen

3

Bestimmung der Messunsicherheiten aller relevanten Eingangsgrößen X_i

- durch Messung

oder

- aus anderen Informationsquellen

Ergebnis von Schritt 3:

Angaben zu jeder Eingangsgröße

- bester Schätzwert
- Informationen dessen Messunsicherheit

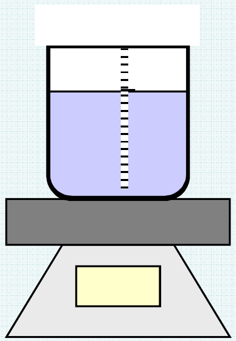
Informationen über die Eingangsgrößen

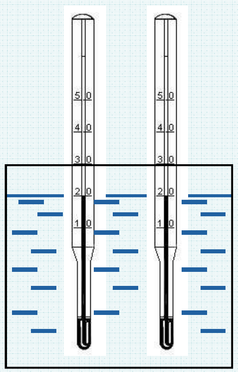
Der beste Schätzwerte x_i einer Eingangsgröße X_i und dessen beigeordnete Standardunsicherheit $u(x_i)$ kann auf zwei verschiedenen Wegen ermittelt werden:

Typ A

wiederholte Messungen

bei gleichen Messbedingungen

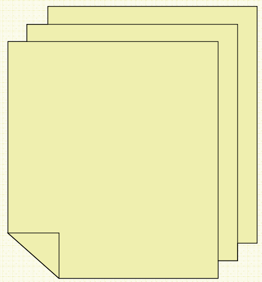




Typ B

Angaben aus anderen Informations-quellen

- Kalibrier- / Eichschein
- Gerätespezifikation
- Literatur
- vorherige Messungen
- usw



GUM 3.3.4

Der Zweck der Klassifizierung nach Typ A und Typ B ist nur, die beiden Arten zur Ermittlung von Unsicherheitskomponenten zu unterscheiden. Beide Methoden beruhen auf Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Die mit beiden Methoden ermittelten Unsicherheitskomponenten werden durch Varianzen oder Standardabweichungen quantitativ bestimmt.

3

Typ A: wiederholte Messungen

- bester Schätzwert: arithmetischer Mittelwert (GUM 4.2.1)

$$\overline{q} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} q_k$$

- Standardunsicherheit: Standardabweichung des Mittelwerts (GUM 4.2.3)

$$u(\overline{q}) = s(\overline{q}) = \frac{s(q_k)}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n}(q_k - \overline{q})^2}$$

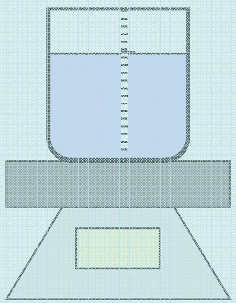
empirische Standardabweichung

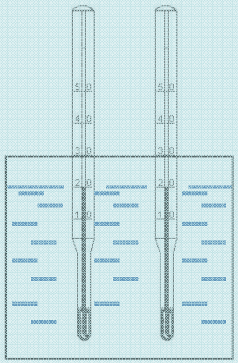
Informationen über die Eingangsgrößen

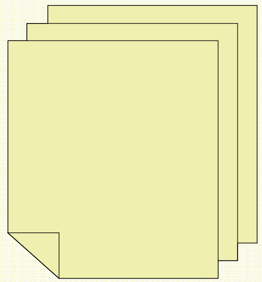
3

Der beste Schätzwerte x_i einer Eingangsgröße X_i und dessen beigeordnete Standardunsicherheit $u(x_i)$ kann auf zwei verschiedenen Wegen ermittelt werden:

Typ A	Typ B
wiederholte Messungen bei gleichen Messbedingungen	**Angaben aus anderen Informationsquellen** • Kalibrier- / Eichschein • Gerätespezifikation • Literatur • vorherige Messungen • usw







Typ B: Angaben aus anderen Informationsquellen

- Eichschein: … die Eichfehlergrenzen werden eingehalten …
- Kalibrierschein: … der Wert der Messgröße beträgt 19,98 °C …

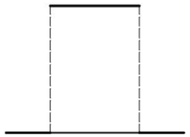
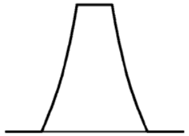
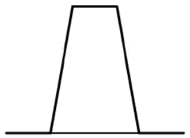
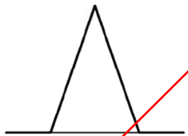
  … die beigeordnete Standardunsicherheit beträgt 0,05 °C …

  … es wurden 5 Vergleichsmessungen durchgeführt …
- Herstellerangabe: … Genauigkeit: 1% der Anzeige + 2 Digits

Informationen über die Eingangsgrößen

3

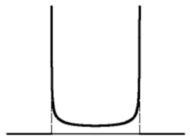
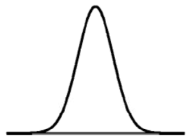
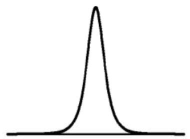
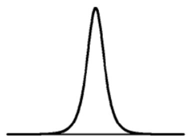
Tabelle 1 — Vorhandene Information und die auf der Grundlage dieser Information zugeordnete Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

verfügbare Information	zugeordnete Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion und Veranschaulichung (nicht maßstäblich)	Unterabschnitt
untere und obere Grenzen a, b	Rechteckverteilung: $\mathrm{R}(a,b)$ 	6.4.2
ungenaue untere und obere Grenzen $a \pm d$, $b \pm d$	kurvenförmige Trapezverteilung: $\mathrm{CTrap}(a,b,d)$ 	6.4.3
Summe zweier Größen mit zugeordneten Rechteckverteilungen mit unteren und oberen Grenzen a_1, b_1 und a_2, b_2	Trapezverteilung: $\mathrm{Trap}(a,b,\beta)$ mit $a = a_1 + a_2$, $b = b_1 + b_2$, $\beta = \lvert(b_1 - a_1) - (b_2 - a_2)\rvert / b - a$ 	6.4.4
Summe zweier Größen mit zugeordneten Rechteckverteilungen mit unteren und oberen Grenzen a_1, b_1 und a_2, b_2 und der gleichen halben Breite $b_1 - a_1 = b_2 - a_2$	Dreiecksverteilung: $\mathrm{T}(a,b)$ mit $a = a_1 + a_2$, $b = b_1 + b_2$ 	6.4.5

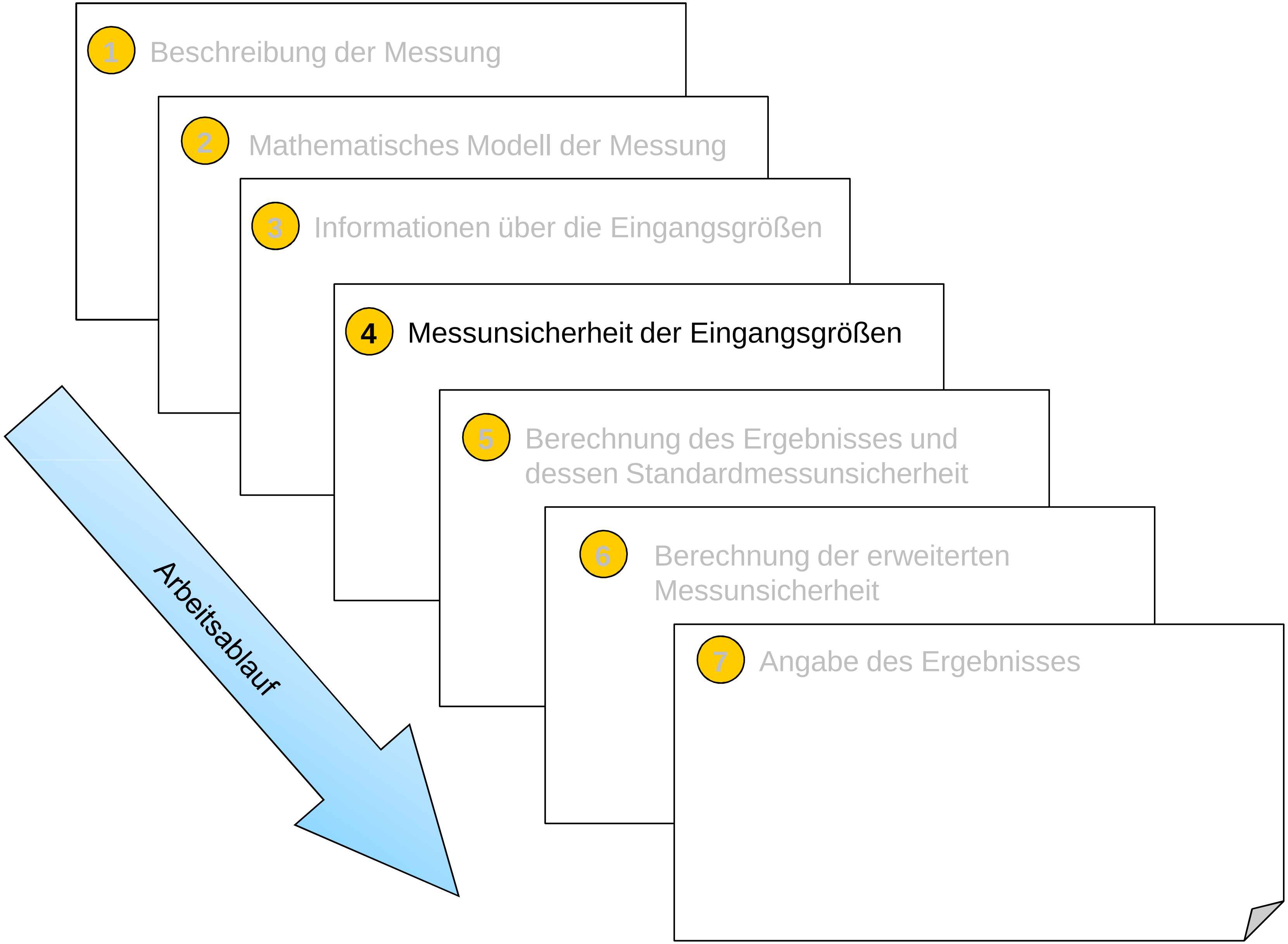
geeichtes Gerät

Gerät mit Kalibrierschein

Gerät mit Kalibrierschein und zusätzlichen Informationen

verfügbare Information	zugeordnete Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion und Veranschaulichung (nicht maßstäblich)	Unterabschnitt
sinusförmige periodische Schwingung zwischen unterer und oberer Grenze a, b	Arcussinus-Verteilung (U-förmig): $\mathrm{U}(a,b)$ 	6.4.6
bester Schätzwert x und beigeordnete Standardunsicherheit $u(x)$	Gauß-Verteilung: $\mathrm{N}(x, u^2(x))$ 	6.4.7
bester Schätzwert $\boldsymbol{x}$ einer Vektorgröße und beigeordnete Unsicherheitsmatrix $U(\boldsymbol{x})$	multivariate Gauß-Verteilung: $\mathrm{N}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{U_x})$	6.4.8
Folge von Anzeigewerten $x_1,\ldots,x_N$, welche unabhängig voneinander als Stichprobe einer Größe, die eine Gauß-Verteilung besitzt, genommen worden sind, mit unbekanntem Erwartungswert und unbekannter Varianz	Skalierte und verschobene t-Verteilung: $t_{n-1}(\bar{x}, s^2/n)$ mit $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i / n$, $s^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 / n - 1$ 	6.4.9.2
bester Schätzwert x, erweiterte Unsicherheit U_p, Erweiterungsfaktor k_p und Anzahl der effektiven Freiheitsgrade ν_{eff}	skalierte und verschobene t-Verteilung: $t_{\nu_{\mathrm{eff}}}(x, (U_p/k_p)^2)$ 	6.4.9.7
bester Schätzwert x einer nicht negativen Größe	Exponentialverteilung: $\mathrm{Ex}(1/x)$ 	6.4.10

Quelle: deutschen Übersetzung des GUM S1


1 Beschreibung der Messung
2 Mathematisches Modell der Messung
3 Informationen über die Eingangsgrößen
4 Messunsicherheit der Eingangsgrößen
5 Berechnung des Ergebnisses und dessen Standardmessunsicherheit
6 Berechnung der erweiterten Messunsicherheit
7 Angabe des Ergebnisses
Arbeitsablauf

1) Typ A :
   Standardunsicherheit bereits als Standardabweichung des Mittelwerts bekannt.

2) Typ B:
   Berechnung der Standardunsicherheiten (d.h.: Standard-abweichungen) aller Eingangsgrößen aus deren angenom-menen Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen nach festen Regeln.

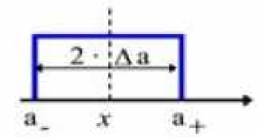
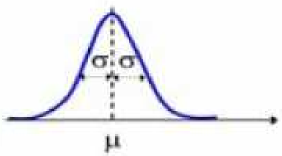
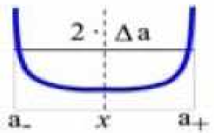
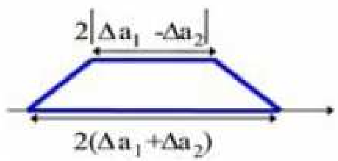
<u>Ergebnis von Schritt 4:</u>

Standardunsicherheiten (bzw. Standardabweichungen) aller Eingangs-größen

4

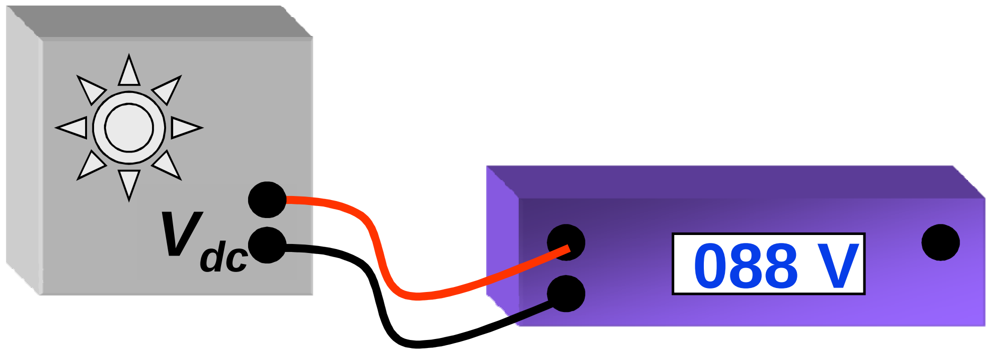
Einschätzen der beteiligten Größen

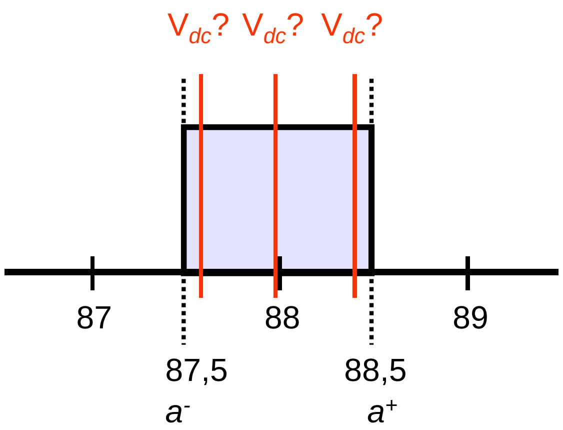
Methode B: Zusammenfassung

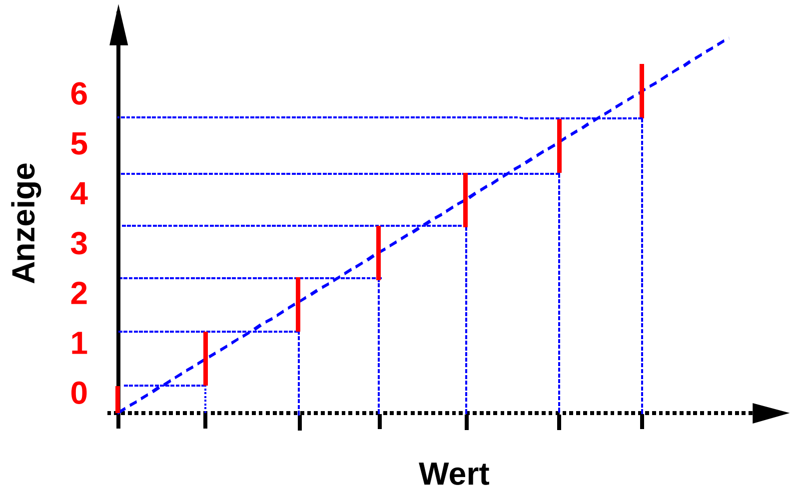
Kenntnisse über die Größe	Resultierende *PDF*		Standardabweichung	
Mögliche Werte sind in einem Intervall enthalten		gleichverteilt	$u_x = \frac{\Delta a}{\sqrt{3}}$	GUM 4.3.7, Gl. (7)
Erwartungswert μ und Standardabweichung σ des Mittelwerts		gaußförmig	$u_x = \sigma$	GUM 4.3.6
Größe ist Funktion $X = \Delta a \cdot \sin\Phi$ Phasenwinkel Φ unbekannt		U-förmig	$u_x = \frac{\Delta a}{\sqrt{2}}$	
Größe ist Summe/ Differenz zweier Größen X_1, X_2; Kenntnisse entspr. rechteckförmigen *PDF*		trapezförmig	$u_x = \frac{\Delta a}{\sqrt{6}}\sqrt{1+\beta^2}$	GUM 4.3.9, Gl. (9)

PDF: probability density function, Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

Auflösung einer numerischen Anzeige: ➔ Rechteckverteilung







Quelle: Euramet

Beispiel:
Volumenmessung

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{W + B_{air}}{\rho} = \frac{\overline{W} + \Delta W_{cal} + \Delta W_{res} + B_{air}}{\rho}$$

- Wiederholte Füllungen: W = 1 992 g, 1 993 g, 1 990 g, 1 996 g, 1 994 g

$$\overline{w} = \frac{1}{5}\sum_{j=1}^{5} w_j = 1993{,}0\ g$$

$$u_A(\overline{w}) = \sqrt{\frac{1}{5\cdot 4}\sum_{j=1}^{5}\left(w_j - \overline{w}\right)^2} = 1{,}0\ g$$

- Waage:

Kalibrierschein: Messabweichung: ΔW_{cal} = - 0,2 g

erweiterte Messunsicherheit: U = 1,2 g (k=2)

→ Standardunsicherheit $u(\Delta W_{cal})$ = 0,60 g

Auflösung: 1 g →

$$u(\Delta W_{res}) = \frac{0{,}5g}{\sqrt{3}} = \frac{1g}{\sqrt{12}} = 0{,}29g$$

Schätzwert: ΔW_{res} = 0 g

4

Beispiel: Volumenmessung

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{W + B_{air}}{\rho} = \frac{\overline{W} + \Delta W_{cal} + \Delta W_{res} + B_{air}}{\rho}$$

Größe X_i	Schätz-wert x_i	Standard-unsicher-heit $u(x_i)$	Verteilung	Empf.-koeff. c_i	Unsicherheits-beitrag $u_i(y)$
W	1993,00 g	1,00 g	Normal		
ΔW_{cal}	- 0,20 g	0,60 g	Normal		
ΔW_{res}	0,00 g	0,29 g	Rechteck		
ρ_{Wasser}					
B_{air}					
V					

Beispiel:
Volumenmessung

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{W + B_{air}}{\rho} = \frac{\overline{W} + \Delta W_{cal} + \Delta W_{res} + B_{air}}{\rho}$$

- Wiederholte Füllungen: *W* = 1 992 g, 1 993 g, 1 990 g, 1 996 g, 1 994 g

$$\overline{w} = \frac{1}{5}\sum_{j=1}^{5} w_j = 1993{,}0\ g$$

$$u_A(\overline{w}) = \sqrt{\frac{1}{5 \cdot 4}\sum_{j=1}^{5}\left(w_j - \overline{w}\right)^2} = 1{,}0\ g$$

- Waage:

Kalibrierschein: Messabweichung: ΔW_{cal} = - 0,2 g

erweiterte Messunsicherheit: *U* = 1,2 g (k=2)

→ Standardunsicherheit $u(\Delta W_{cal})$ = 0,6 g

Auflösung: 1 g →

$$u(\Delta W_{res}) = \frac{0{,}5 g}{\sqrt{3}} = \frac{1 g}{\sqrt{12}} = 0{,}29 g$$

Schätzwert: ΔW_{res} = 0 g

- Dichte des Wassers bei t_{air} = (20 ± 2) ºC : ρ_{Wasser} = ?

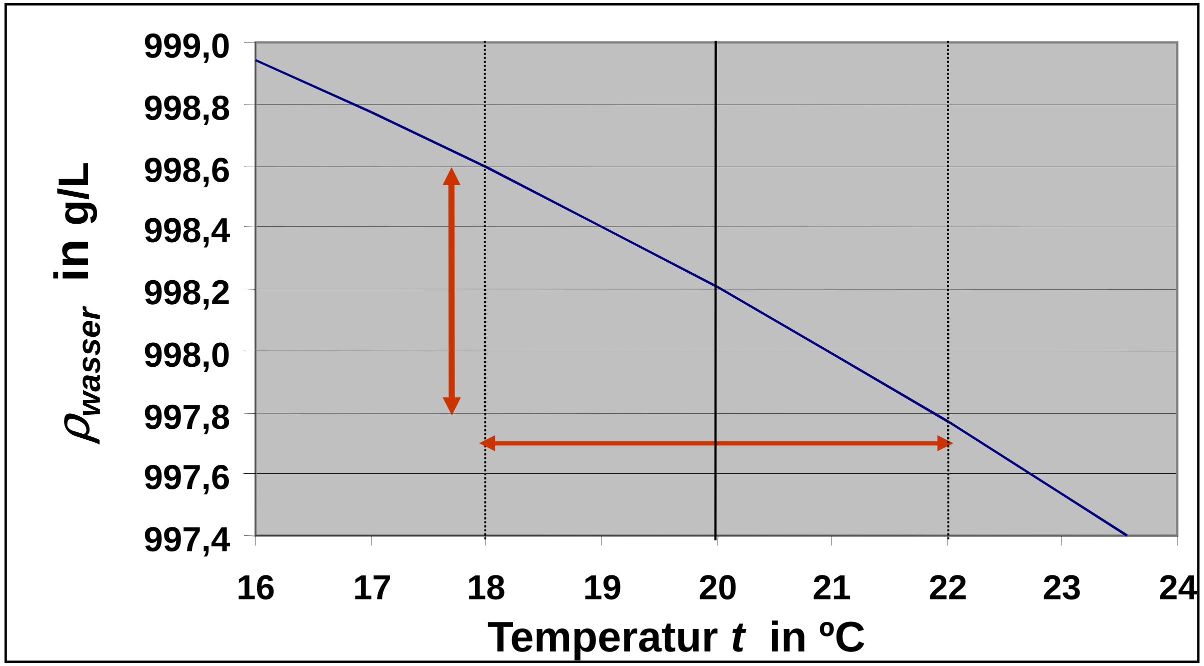
- Auftrieb in Luft bei t_{air} = (20 ± 2)ºC, p_{air} = 1014 hPa ±?, h_r = 50% ±? : B_{air} = ?

Dichte des Wassers:

$$\rho_{Wasser} = 999{,}974\,95\ \frac{g}{L} \cdot \left[1 - \frac{(t - 3{,}983\,035°C)^2 \cdot (t + 301{,}797°C)}{552\,528{,}9(°C)^2 \cdot (t + 69{,}348\,81°C)} \right]$$

t : Temperatur in ºC

Tanaka et al
Metrologia **38** (2001)
p. 301 - 309



Quelle: CENAM

- Dichte des Wassers: t = (20 ± 2) ºC → ρ_{Wasser} = (998,2 ± 0,4) g/L
  → $u(\rho_{Wasser})$ = 0,4 / √3 g/L = 0,23 g/L

Dichte der Luft:

$$\rho_{air} = \frac{p_{air} \cdot 0{,}348\,44\ ^\circ C/hPa + h_r \cdot (0{,}020\,582\ ^\circ C - t_{air} \cdot 0{,}002\,52)}{t_{air} + 273{,}15^\circ C}\ g/L$$

nach EURAMET Calibration Guide 19, eq. (4)

p_{air} Luftdruck
t_{air} Lufttemperatur
h_r relative Feuchte

Dichte der Luft: t_{air} = 20 ºC / p_{air} = 1014 hPa / h_r = 50% $\rightarrow \rho_{air}$ = 1,20 g/L

Unter normalen Bedingungen sollte sich die Dichte der Luft um nicht mehr als ± 5 % ändern (Expertenwissen)

$\rightarrow \rho_{air}$ = (1,20 ± 0,06) g/L

$B_{air} = \rho_{air} \cdot V$ $\rightarrow$ B_{air} = (2,40 ± 0,12) g, Rechteck-Verteilung der Unsicherheit

$\rightarrow$ $u(B_{air})$ = 0,12 / √3 g = 0,07 g

Beispiel: Volumenmessung

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{W + B_{air}}{\rho} = \frac{\overline{W} + \Delta W_{cal} + \Delta W_{res} + B_{air}}{\rho}$$

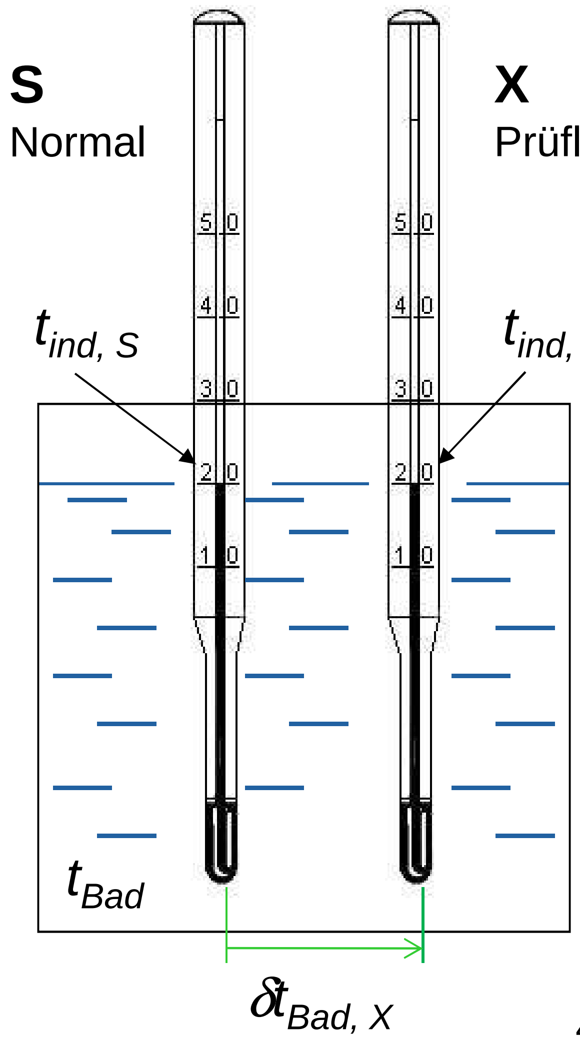
Größe X_i	Schätz-wert x_i	Standard-unsicher-heit $u(x_i)$	Verteilung	Empf.-koeff. c_i	Unsicherheits-beitrag $c_i \cdot u_i$
W	1993,00 g	1,00 g	Normal		
ΔW_{cal}	- 0,20 g	0,60 g	Normal		
ΔW_{res}	0,00 g	0,29 g	Rechteck		
ρ_{Wasser}	998,20 g/L	0,23 g/L	Rechteck		
B_{air}	2,40 g	0,07	Rechteck		
V	1,9988 L				

Beispiel: Thermometerkalibrierung

$$\Delta t_X = t_{ind,X} - t_{ind,S} - \delta t_{Bad,X} + \Delta t_S$$

mit

$t_{ind,\,S}$	Anzeige des Normals
$t_{ind,\,X}$	Anzeige des Prüflings
Δt_X	Messabweichung des Prüflings
Δt_S	Messabweichung des Normals
t_{Bad}	eine örtliche Temperatur des Bads
$\delta t_{Bad,\,X}$	Messabweichung auf Grund der verschiedenen Messorte



Quelle: Bernd R.L. Siebert

- **Messungen (Typ A – Eingangsgröße): Normal**
  (Ablesung im Wechsel mit Prüfling)

n	$t_{ind,\,S}$
1	20,005 °C
2	19,995 °C
3	20,015 °C
4	20,010 °C

Mittelwert: 20,006 °C

Standardunsicherheit: $4{,}27 \cdot 10^{-3}$ °C

Freiheitsgrad : $v = n - 1 = 3$

- **Kalibrierschein (Typ B – Eingangsgröße): Normal**

  Messabweichung: $\Delta t_S = -\,0{,}050$ °C

  erweiterte Messunsicherheit: $U = 0{,}025$ °C (k=2)

  $\rightarrow$ Standardunsicherheit $u(\Delta t_S) = 12{,}5 \cdot 10^{-3}$ °C

  Freiheitsgrad : $v = 50$

- **Messungen (Typ A – Eingangsgröße): Prüfling**
  (Ablesung im Wechsel mit Normal)

n	$t_{ind,\,x}$
1	19,85 °C
2	19,86 °C
3	19,87 °C
4	19,86 °C

Mittelwert: 19,860 °C

Standardunsicherheit: $4{,}08 \cdot 10^{-3}$ °C

Freiheitsgrad : $v = n - 1 = 3$

- **Kenntnis (Typ B – Eingangsgröße): Wasserbad**

  Herstellerangabe:

  maximale radiale Temperaturabweichung im Bad: $\pm 20 \cdot 10^{-3}$ °C

  Verteilungsform: rechteckig,

  Halbweite: $\Delta a = 20 \cdot 10^{-3}$ °C

  $\rightarrow$ Erwartungswert: $\delta t_{Bad,\,X} = 0$ °C

  $\rightarrow$ Standardunsicherheit $u(\delta t_{Bad,\,X}) = \Delta a \,/\, \sqrt{3} = 11{,}55 \cdot 10^{-3}$ °C

Freiheitsgrad:

Definition (GUM C.2.31):

Ganz allgemein die Anzahl der Glieder einer Summe abzüglich der Anzahl der Nebenbedingungen, die für die Glieder dieser Summe gelten.

Beispiel für eine Nebenbedingung:

Mittelwert, bei der Berechnung der Standardabweichung

Effektive Freiheitsgrade (GUM G.4)

Welch-Satterthwaite-Formel:

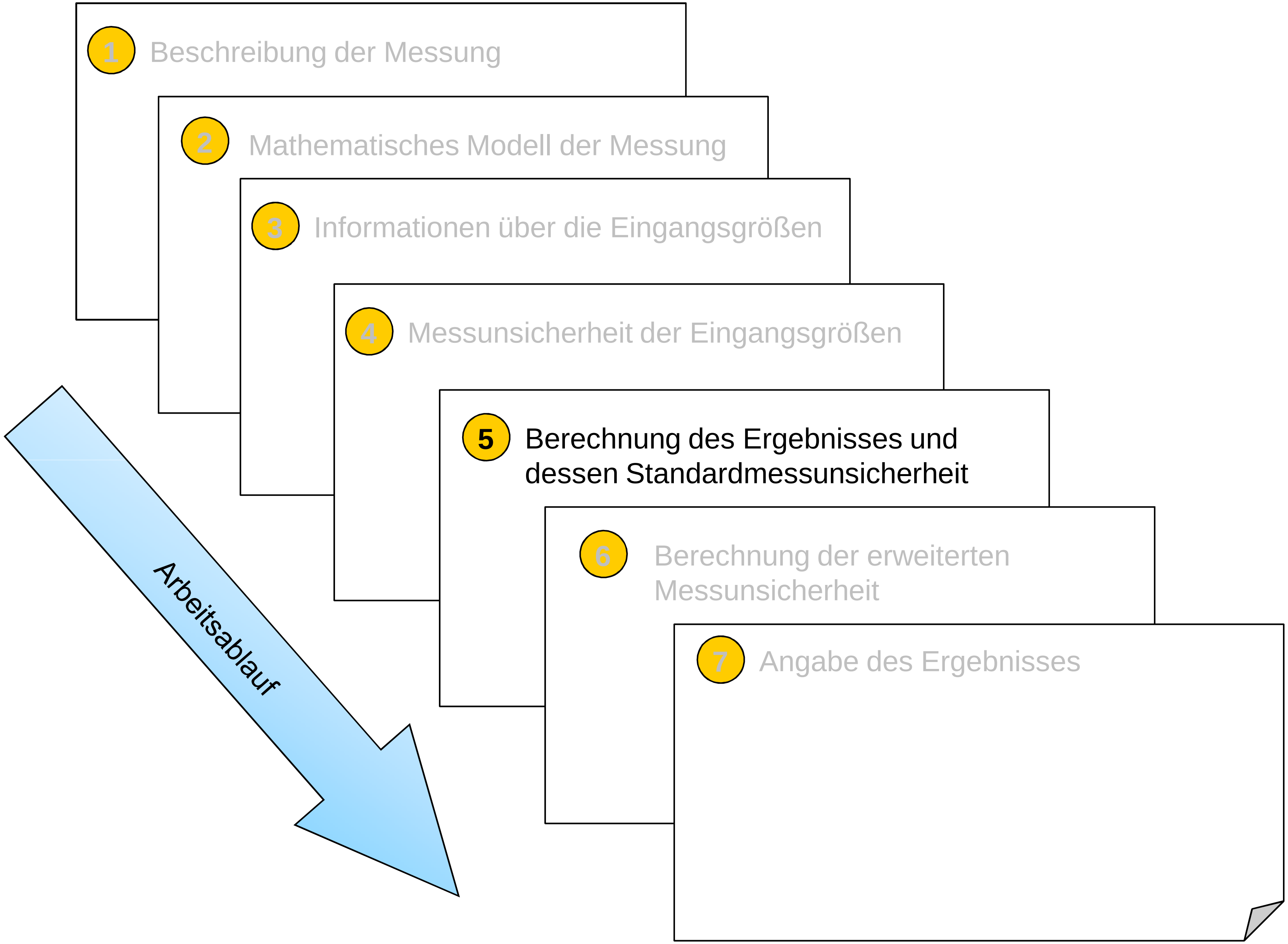
$$\nu_{eff} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^{N} \frac{u_i^4(y)}{\nu_i}}$$

mit

$$\nu_{eff} \leq \sum_{i=1}^{N} \nu_i$$

Beispiel: Thermometerkalibrierung

Größe X_i	Schätz-wert x_i	Standard-unsicher-heit $u(x_i)$	Verteilung	F.-grad ν_i	Empf.-koeff. c_i	Unsicherheits-beitrag $c_i \cdot u_i$
$t_{ind,\,S}$	20,006 °C	$4{,}27 \cdot 10^{-3}$ °C	Normal	3		
$t_{ind,\,X}$	19,860 °C	$4{,}08 \cdot 10^{-3}$ °C	Normal	3		
Δt_S	- 0,050 °C	$12{,}5 \cdot 10^{-3}$ °C	Normal	50		
$\delta t_{Bad,\,X}$	0,000 °C	$11{,}55 \cdot 10^{-3}$ °C	Rechteck	∞		
Δt_X	- 0,196 °C					


1
Beschreibung der Messung
2
Mathematisches Modell der Messung
3
Informationen über die Eingangsgrößen
4
Messunsicherheit der Eingangsgrößen
5
Berechnung des Ergebnisses und dessen Standardmessunsicherheit
6
Berechnung der erweiterten Messunsicherheit
7
Angabe des Ergebnisses
Arbeitsablauf

Ermittlung der kombinierten Standardunsicherheit (GUM 5)

Die Standardunsicherheit eines Messergebnisses (einer Ausgangsgröße) u_c wird aus den Standardunsicherheiten durch Fehlerfortpflanzung berechnet.

Dabei sind 2 Fälle zu unterscheiden:

- unkorrelierte Eingangsgrößen (GUM 5.1) und
- korrelierte Eingangsgrößen (GUM 5.2)

Was sind Korrelationen im Sinne des GUM?

gleiches Zeichen, aber
unterschiedliche Bedeutung!
(Eingangs-/Zufallsgröße)

GUM **5.2 Korrelierte Eingangsgrößen**

5.2.1 Gleichungen (10) und ... sind nur dann gültig, wenn die Eingangsgrößen X_i unabhängig voneinander oder unkorreliert sind (**die Zufallsgrößen**, nicht die physikalischen Größen, die als Invarianten *[unveränderliche Größen]* angenommen werden, siehe 4.1.1, Anmerkung 1). Sind einige X_i signifikant korreliert, so müssen die Korrelationen berücksichtigt werden.

4.1.1, Anmerkung 1:
Zur ökonomischen Gestaltung der Schreibweise wird ... **das gleiche Formelzeichen** für die physikalische Größe und für die Zufallsgröße verwendet, ...
... es wird angenommen, daß die physikalische Größe selbst durch einen im wesentlichen eindeutigen Wert charakterisiert werden kann.

1. Fall: unkorrelierte Eingangsgrößen (GUM 5.1.1)

Die Unsicherheit der Ausgangsgröße (dem Ergebnis) errechnet sich aus den Unsicherheiten der Eingangsgrößen nach

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \left(c_i \cdot u(x_i)\right)^2$$

bzw.

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(c_i \cdot u(x_i)\right)^2}$$

mit c_i : Empfindlichkeitskoeffizient

Durch die Empfindlichkeitskoeffizienten werden die Anteile der Unsicherheiten der Eingangswerte gewichtet.

Berechnung des Ergebnisses und dessen Standardmessunsicherheit 5

Der Empfindlichkeitskoeffizient c_i berechnet sich nach:

$$c_i = \frac{\partial f}{\partial X_i}$$

Durch die partiellen Ableitungen wird das mathematische Modell analysiert nach den Eingangsgrößen, die „potentiell“ die größten Anteile liefern.

Für das Quadrat (die Varianz) der Unsicherheit der Ausgangsgröße ergibt sich:

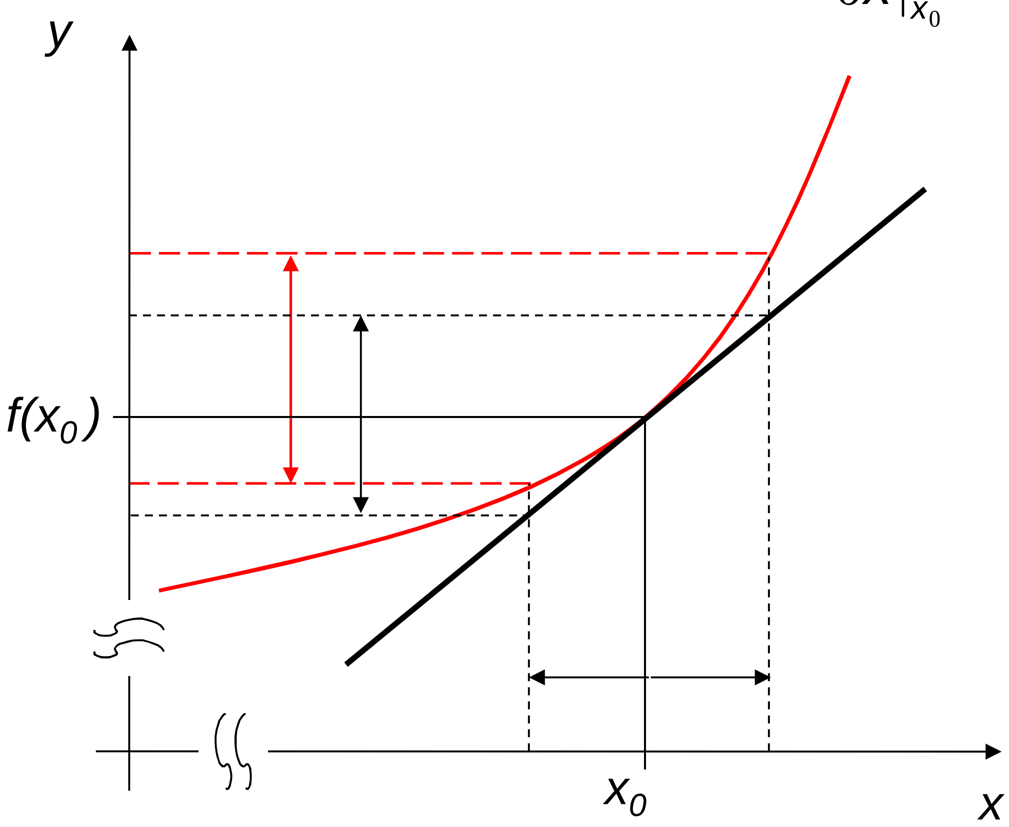
$$\boxed{u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} \right]^2 u^2(x_i)}$$

Hintergrund: Diese Gleichung (und die für den korrelierten Fall) beruht auf einer Näherung erster Ordnung einer Taylor-Reihe von $Y = f(X_1, X_2 ..., X_N)$.

$$\begin{aligned} P_f(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \end{aligned}$$

Taylor-Reihen-Entwicklung für *f*(*x*):

$$f(x) = f(x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0} \cdot \delta x \quad + \frac{1}{2} \cdot \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x_0} \cdot \delta x^2 + \ldots$$



höhere Glieder der Taylor-Reihen-Entwicklung müssen berücksichtigt werden

Alternative: GUM-S1 (MCM)

 2

Beispiel: Volumenmessung

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{W + B_{air}}{\rho} = \frac{\overline{W} + \Delta W_{cal} + \Delta W_{res} + B_{air}}{\rho}$$

mit

V	Volumen des Bechers
m	Masse des eingefüllten Wassers
W	Netto-Messwert (vermindert um die Masse des leeren Bechers)
ΔW_{Cal}	Messabweichung der Waage (Kalibrierschein-Angabe)
ΔW_{res}	Auflösung der Waage
B_{air}	Korrektur des Luftauftriebs
ρ	Dichte des Wassers

Berechnung des Ergebnisses und dessen Standardmessunsicherheit 5

$$V = \frac{\overline{W} + \Delta W_{cal} + \Delta W_{res} + B_{air}}{\rho}$$

$$u_c^{2}(V) = (c_{\overline{W}} \cdot u(\overline{W}))^2 + (c_{\Delta Wcal} \cdot u(\Delta W_{cal}))^2$$

$$+ (c_{\Delta Wres} \cdot u(\Delta W_{res}))^2 + (c_{Bair} \cdot u(B_{air}))^2 + (c_{\rho} \cdot u(\rho))^2$$

Empfindlichkeitskoeffizienten c_i :

$$c_{\overline{W}} = \frac{\partial V}{\partial \overline{W}} = \frac{1}{\rho} \qquad c_{\Delta Wcal} = \frac{\partial V}{\partial \Delta W_{cal}} = \frac{1}{\rho} \qquad c_{\Delta Wres} = \frac{\partial V}{\partial \Delta W_{res}} = \frac{1}{\rho}$$

$$c_{Bair} = \frac{\partial V}{\partial B_{air}} = \frac{1}{\rho} \qquad c_{\rho} = \frac{\partial V}{\partial \rho} = -\frac{\overline{W} + \Delta W_{cal} + \Delta W_{res} + B_{air}}{\rho^2}$$

Berechnung des Ergebnisses und dessen Standardmessunsicherheit 5

Beispiel: Volumenmessung

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{W + B_{air}}{\rho} = \frac{\overline{W} + \Delta W_{cal} + \Delta W_{res} + B_{air}}{\rho}$$

Größe X_i	Schätz-wert x_i	Standard-unsicher-heit $u(x_i)$	Ver-teilung	Empf.-koeff. c_i	Unsicher-heits-beitrag $c_i \cdot u_i$
W	1993,00 g	1,00 g	Normal	0,0010 L/g	0,0010 L
ΔW_{cal}	- 0,20 g	0,60 g	Normal	0,0010 L/g	0,0006 L
ΔW_{res}	0,0 g	0,29 g	Rechteck	0,0010 L/g	0,0003 L
ρ_{Wasser}	998,20 g/L	0,23 g/L	Rechteck	-0,0020 L^2/g	0,0005 L
B_{air}	2,40 g	0,07g	Rechteck	0,0010 L/g	0,0001 L
V	1,9988 L	0,0013 L			

$u_c(y) = 0{,}0013$ L

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(c_i \cdot u(x_i)\right)^2}$$

Berechnung des Ergebnisses und dessen Standardmessunsicherheit 5

Beispiel: Volumenmessung, ergänzt mit Freiheitsgrad und Unsicherheits-Index:

Größe X_i	Schätz-wert x_i	Standard-unsicher-heit $u(x_i)$	Ver-teilung	Frei-heits-grad ν_i	Empf.-koeff. c_i	Unsicher-heits-beitrag $c_i \cdot u_i$	Anteile $(c_i \cdot u_i / u_c)^2$
W	1993,00 g	1,00 g	Normal	4	0,0010 L/g	0,0010 L	$\boxed{60{,}2\ \%}$
ΔW_{cal}	- 0,20 g	0,60 g	Normal	50	0,0010 L/g	0,0006 L	21,7 %
ΔW_{res}	0,00 g	0,29 g	Rechteck	∞	0,0010 L/g	0,0003 L	5,0 %
ρ_{Wasser}	998,20 g/L	0,23 g/L	Rechteck	∞	0,0020 L^2/g	0,0005 L	12,8 %
B_{air}	2,40 g	0,07g	Rechteck	∞	0,0010 L/g	0,0001 L	0,2 %
V	1,9988 L	0,0013 L		10			

Kann man den Wert verbessern? Mehr Messungen, mehr Sorgfalt?

Beispiel: Thermometerkalibrierung

$$\Delta t_X = t_{ind,X} - t_{ind,S} - \delta t_{Bad,X} + \Delta t_S$$

Größe X_i	Schätz-wert x_i	Standard-unsicher-heit $u(x_i)$	Ver-teilung	F.-grad ν_i	Empf.-koeff. c_i	Unsicherheits-beitrag $c_i \cdot u_i$	Anteile $(c_i \cdot u_i / u_c)^2$
$t_{ind,\,S}$	20,006 °C	$4{,}27 \cdot 10^{-3}$ °C	Normal	3	-1	$-4{,}3 \cdot 10^{-3}$ °C	5,6 %
$t_{ind,\,X}$	19,860 °C	$4{,}08 \cdot 10^{-3}$ °C	Normal	3	1	$4{,}1 \cdot 10^{-3}$ °C	5,1 %
Δt_S	- 0,050 °C	$12{,}5 \cdot 10^{-3}$ °C	T-Verteilt	50	1	$12{,}5 \cdot 10^{-3}$ °C	48,2 %
$\delta t_{Bad,\,X}$	0,000 °C	$11{,}55 \cdot 10^{-3}$ °C	Rechteck	∞	-1	$-11{,}6 \cdot 10^{-3}$ °C	41,1 %
Δt_X	- 0,196 °C	0,018 °C		150			

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (c_i \cdot u(x_i))^2}$$

Was sind Korrelationen im Sinne des GUM?

GUM **5.2 Korrelierte Eingangsgrößen**

5.2.1 Gleichungen (10) und ... sind nur dann gültig, wenn die Eingangsgrößen X_i unabhängig voneinander oder unkorreliert sind (die Zufallsgrößen, nicht die physikalischen Größen, die als Invarianten *[unveränderliche Größen]* angenommen werden, siehe 4.1.1, Anmerkung 1). Sind einige X_i signifikant korreliert, so müssen die Korrelationen berücksichtigt werden.

Korrelierte Eingangsgrößen:

Typische Ursachen für die Korrelation der Zufallsgrößen zweier (oder mehrerer) Eingangsgrößen:

- benutzen desselben Messgeräts
- benutzen desselben Normals
- benutzen desselben Referenzwerts
- benutzen derselben Energiequelle

Weil sich die Schwankungen einer Quelle auf mehrere (Eingangs-) Größen auswirken, kommt es zur Korrelation.

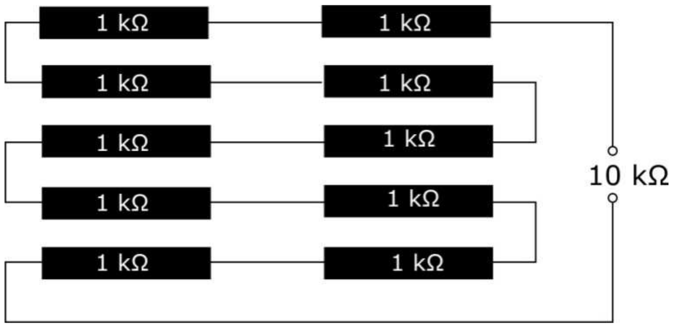
Berechnung des Ergebnisses und dessen Standardmessunsicherheit 5

Beispiel: Bestimmung des Gesamtkohleverbrauchs

Foto: Modelleisenbahn Hamburg e.V. (MEHEV)

Wenn die Gesamtmenge des (Kohle-) Verbrauchs einer Feuerungsanlage aus Einzelmessungen mit stets **derselben Waage** bestimmt wird, sind die Einzelmessungen voneinander abhängig.

Beispiel: Widerstandsreihenschaltung



vgl. GUM , 5.2.2, Anmerkung 1

Wird eine Widerstandsreihenschaltung durch gleiche Einzelwiderstände realisiert, die alle mit **demselben Referenzwiderstand** kalibriert wurden, so wirkt sich die Unsicherheit des Referenzwiderstands auf alle Einzelwiderstände und somit auch auf den Gesamtwiderstand aus.

Berechnung des Ergebnisses und dessen Standardmessunsicherheit 5

Mathematisches Modell: $Y = f\,(X_i)$

GUM 5.2.2 … kombinierte Varianz (GUM, Gl. 13):
(Quadrat der kombinierten Standardunsicherheit)

$$\boxed{u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}u(x_i,x_j) = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}u(x_i,x_j)}$$

unkorrelierter Fall — Mischterme mit Kovarianzen

wobei

x_i und x_j die Schätzwerte der Größen X_i und X_j sind, z.B. der Mittelwert aus wiederholten Messungen oder Literaturwerte

und

$u(x_i,x_j) = u(x_j,x_i)$, d.h. die Abhängigkeiten sind „symmetrisch“.

Berechnung des Ergebnisses und dessen Standardmessunsicherheit 5

Die Kovarianz berechnet sich nach (GUM, Gl. 17)

für die Größen X_i und X_j:

$$u(x_i, x_j) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n} (x_{i,k} - \overline{x}_i)(x_{j,k} - \overline{x}_j)$$

mit den n einzelnen Messwerten $x_{i,k}$ und $x_{j,k}$ der zwei o.g. Größen.

Bei unabhängigen Zufallsgrößen haben Kovarianzen für $i \neq j$

Werte gleich oder nahe Null.

Der Grad der Korrelation von x_i und x_j wird durch den Korrelationskoeffizienten charakterisiert:

$$r(x_i, x_j) = r(x_j, x_i) = \frac{u(x_i, x_j)}{u(x_i)u(x_j)} \quad \text{wobei} \quad -1 \le r(x_i, x_j) \le +1$$

eingesetzt (in GUM, Gl. 13):

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i) u(x_j) r(x_i, x_j)$$

$$\boxed{u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} c_i^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} c_i c_j u(x_i) u(x_j) r(x_i, x_j)}$$

mit den Empfindlichkeitskoeffizienten $c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}; c_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}$

Im **Sonderfall**, dass zwei oder mehr Zufallsgrößen mit $r = +1$ korreliert sind, wie beispielsweise bei Verwendung desselben Messgerätes oder Normals, ergibt sich aus

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i) u(x_j) r(x_i, x_j)$$

$$\Rightarrow \quad u_c^2(y) = \left(\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \cdot u(x_i) \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{N} c_i \cdot u(x_i) \right)^2 \qquad \text{für } r = +1$$

bzw.

$$\boxed{u_c(y) = \left| \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \cdot u(x_i) \right| = \left| \sum_{i=1}^{N} c_i \cdot u(x_i) \right| \qquad \text{für } r = +1}$$

Andere Methoden der Bestimmung:

- Kovarianzen lassen sich auch experimentell ermitteln, z.B. durch Beobachten der zufälligen Schwankungen bei Variation von Umgebungsbedingungen,
- Schätzen der Korrelation auf Grund vorhandener Kenntnisse und Erfahrungen.

Welche Alternativen gibt es zum Rechnen mit Korrelationen?

- man kann versuchen, den Einfluss zu eliminieren durch ein anderes Modell der Messung, indem die Korrelation durch eine eigene zusätzliche Eingangsgröße beschrieben wird; dieses ist beispielsweise möglich, wenn der Temperatureinfluss auf mehrere Eingangsgrößen berechenbar ist, siehe GUM F.1.2.4.

Berechnung des Ergebnisses und dessen Standardmessunsicherheit 5

Foto: Modelleisenbahn Hamburg e.V. (MEHEV)

Wenn die Gesamtmenge des (Kohle-) Verbrauchs einer Feuerungsanlage aus Einzelmessungen mit stets **derselben Waage** bestimmt wird, sind die Einzelmessungen miteinander korreliert.

Masse der Kohle je LKW: 25,0 t,
geeichte Fahrzeugwaage (Eichfehlergrenze: ± 1 %),
Anzahl der Wägungen im Jahr: 5000.

Da ein geeichtes Messgerät benutzt wird, ist von einer rechteckigen Wahrscheinlichkeits-verteilung auszugehen, d.h. $u(x) = a / \sqrt{3}$, mit a als halber absoluten Spanne.

Berechnung des Ergebnisses und dessen Standardmessunsicherheit 5

Daraus ergibt sich:

Masse der Kohle je Fahrzeug: 25,0 t, Anzahl der Wägungen pro Jahr: 5000

$\Rightarrow$ Gesamtmasse: 125000 t

Eichfehlergrenze je Wägung: 0,250 t (1%)

Standardunsicherheit der Einzelwägung $u(m_i)$: 0,144 t (0,577 %)

berechnete kombinierte Standardunsicherheit $u_c(m_{ges})$ der Gesamtmasse m_{ges}

bei Berücksichtigung der Korrelation: 721,7 t (0,577 %) ☑

ohne Berücksichtigung der Korrelation: 10,2 t (0,008 %) ✘

mit Korrelation:

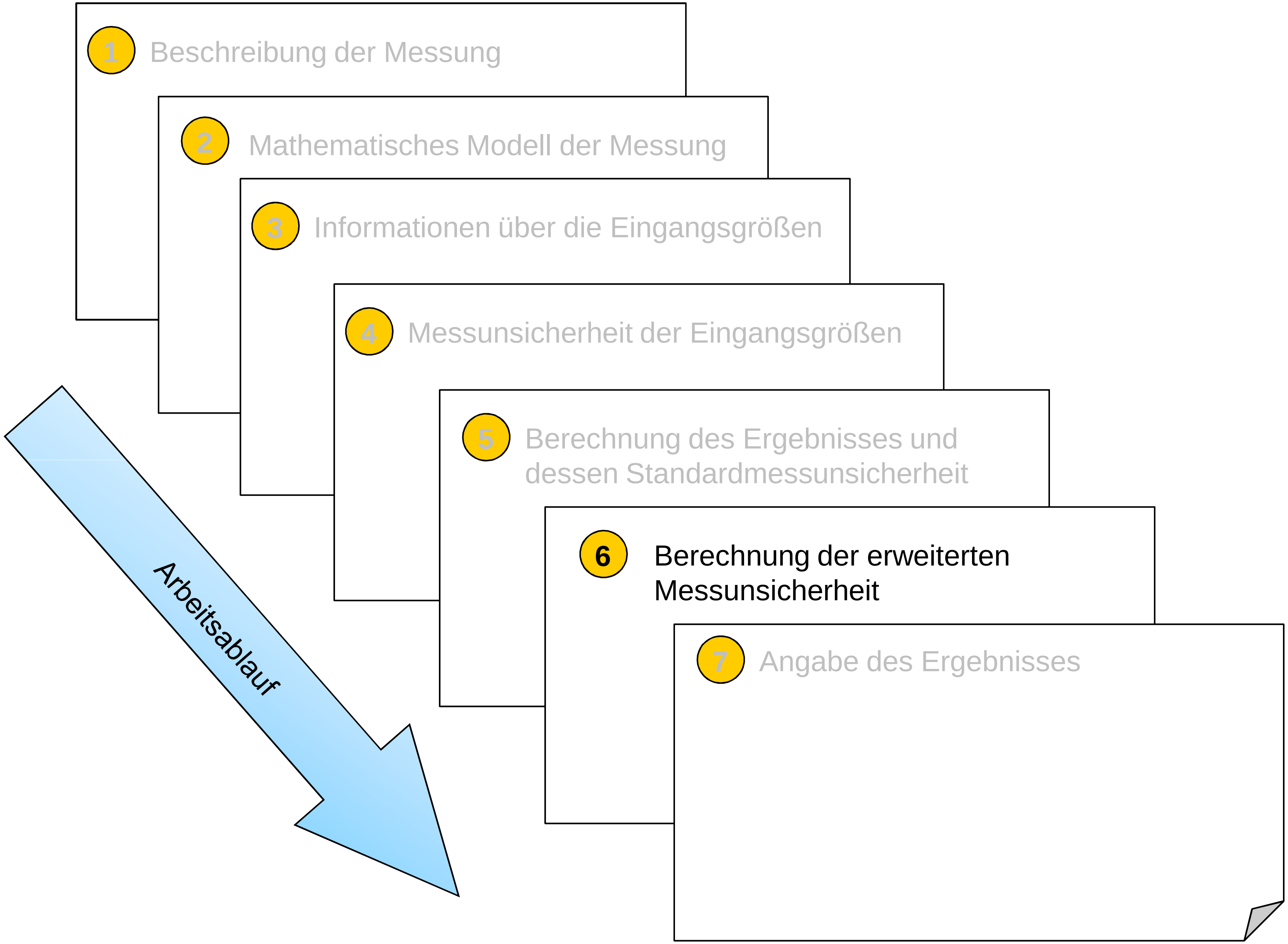
$$u_c(y) = \left| \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \cdot u(x_i) \right| = \left| \sum_{i=1}^{N} c_i \cdot u(x_i) \right| \quad \text{für } r = +1$$

ohne Korrelation:

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot u^2(x_i)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} c_i^2 \cdot u^2(x_i)} \quad \text{für } r = 0$$

Zusammenfassung (Korrelationen):

- der Ausdruck „Korrelation“ bezieht sich auf die Abhängigkeit der Zufallsgrößen nicht auf die Messgrößen,
- Ursache sind unbekannten Schwankungen einer Quelle (Messgerät, Umwelt, …) wirken auf Eingangsgrößen,
- Korrelationen der Zufallsgrößen treten z.B. auf bei Verwendung desselben Messgerätes, Normals oder Referenzwertes,
- aus gemessenen Werten kann der Korrelationskoeffizient *r* bestimmt werden und die Messunsicherheit relativ einfach berechnet werden,
- der Grad der Korrelation muss gegebenenfalls geschätzt oder experimentell ermittelt werden.



1 Beschreibung der Messung
2 Mathematisches Modell der Messung
3 Informationen über die Eingangsgrößen
4 Messunsicherheit der Eingangsgrößen
5 Berechnung des Ergebnisses und dessen Standardmessunsicherheit
6 Berechnung der erweiterten Messunsicherheit
7 Angabe des Ergebnisses
Arbeitsablauf

GUM 6.1.2 Obwohl sich $u_c(y)$ universell zur Angabe eines Messergebnisses verwenden lässt, kann es erforderlich sein, die Unsicherheit in Form eines Bereiches um das Messergebnis anzugeben, von dem erwartet werden kann, dass er einen großen Anteil der Verteilung der Werte umfasst, die der gemessenen Größe sinnvollerweise zugeordnet werden können.
Beispiele finden sich in industriellen, kommerziellen und regulatorischen Bereichen sowie dann, wenn Gesundheits- und Sicherheitsaspekte zum Tragen kommen.

GUM 6.2.1 Jenes zusätzliche Maß der Unsicherheit, das die Forderung erfüllt, einen Bereich gemäß 6.1.2 anzugeben, wird erweiterte Unsicherheit U genannt. Man erhält sie durch Multiplikation der kombinierten Standardunsicherheit $u_c(y)$ mit dem Erweiterungsfaktor k:

$$U = k \cdot u_c(y)$$

Das Ergebnis einer Messung kann dann durch $Y = y \pm U$ ausgedrückt werden. Dabei ist y der beste Schätzwert des der Messgröße Y zugehörigen Wertes und $y - U$ bis $y + U$ ein Bereich, von dem erwartet werden kann, dass er einen großen Anteil der Werte umfasst, die man Y zuordnet.

Berechnung der erweiterten Messunsicherheit

6

Wert des Erweiterungsfaktor bei

Normalverteilung:

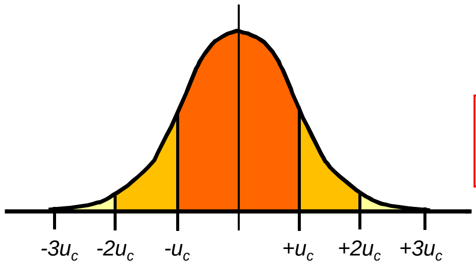


Table G.1 — Value of the coverage factor k_p that produces an interval having level of confidence p assuming a normal distribution

Level of confidence p (percent)	Coverage factor k_p
68,27	1
90	1,645
95	1,960
95,45	2
99	2,576
99,73	3

Rechteckverteilung:

Grad des Vertrauens p (in %)	Erweiterungsfaktor k_p
57,74	1
95	1,65
99	1,71
100	1,73

Zentraler Grenzwertsatz (GUM G.2)

Wenn $Y = c_1 X_1 + c_2 X_2 + ... + c_N X_N = \sum_{i=1}^{N} c_i X_i$ und alle X_i normalverteilt sind, ist die resultierende Faltungsverteilung von *Y* ebenfalls normal.

Selbst wenn die X_i nicht normalverteilt sind, lässt sich die Verteilung von *Y* auf Grund des zentralen Grenzwertsatzes häufig durch eine Normalverteilung annähern.

Voraussetzung ist, dass die X_i voneinander unabhängig sind und $\sigma^2(Y)$ viel größer als die nicht-normalverteilten Einzelkomponenten $c_i^2\,\sigma^2(X_i)$.

Beispiel: Schon die Faltung von 3 rechteckverteilten Größen gleicher Breite lässt sich annähernd durch eine Normalverteilung beschreiben.

Die *t*-Verteilung und Freiheitsgrade (GUM G.3)

Weil in der Praxis nicht die Erwartungswerte und Varianzen der Ein- und Ausgangsgrößen (X_i, Y) vorliegen, sondern nur deren Schätzwerte, erhält man eine bessere Näherung für den Erweiterungsfaktor k_p, wenn dieser nicht aus der Normalverteilung, sondern aus der *t*-Verteilung (oder Student-Verteilung) bestimmt wird:

$$U_p = k_p u_c(y) = t_p(\nu) u_c(y)$$

wobei $t_p(\nu)$ der Wert von t für eine bestimmte Anzahl von Freiheitsgraden ν ist.

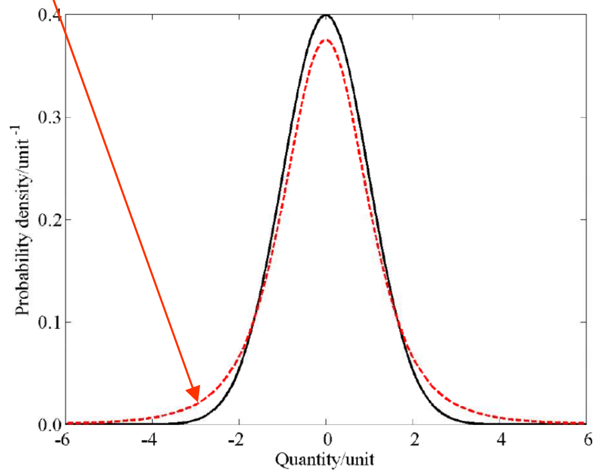
In Tabelle G.2 sind ausgewählte Werte angegeben. Für $\nu \rightarrow \infty$ nähert sich die *t*-Verteilung der Normalverteilung an.

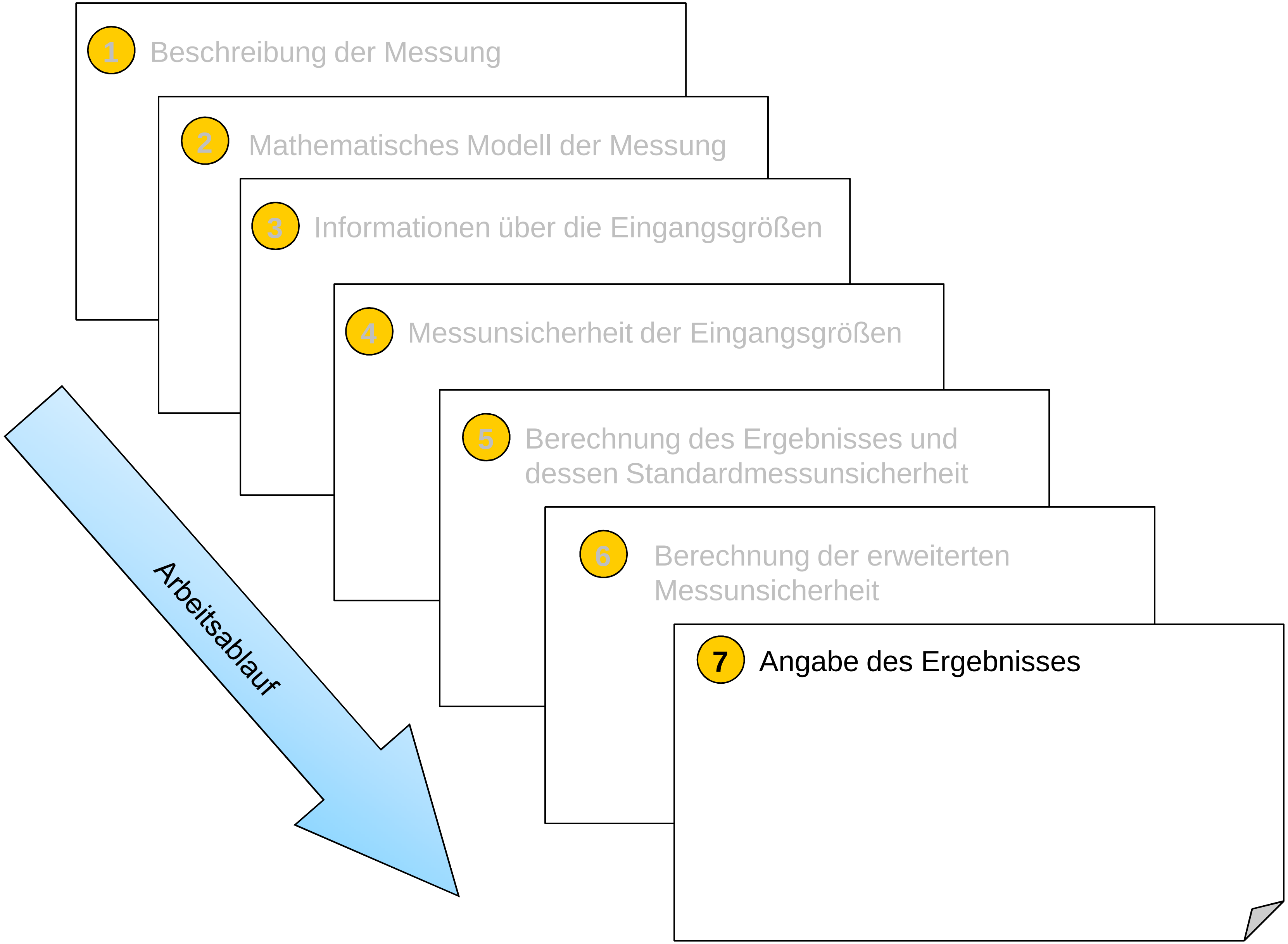
Berechnung der erweiterten Messunsicherheit

Table G.2 — Value of $t_p(\nu)$ from the t-distribution for degrees of freedom ν that defines an interval $-t_p(\nu)$ to $+t_p(\nu)$ that encompasses the fraction p of the distribution

Degrees of freedom	Fraction p in percent					
ν	68,27 [a]	90	95	95,45 [a]	99	99,73 [a]
1	1,84	6,31	12,71	13,97	63,66	235,80
2	1,32	2,92	4,30	4,53	9,92	19,21
3	1,20	2,35	3,18	3,31	5,84	9,22
4	1,14	2,13	2,78	2,87	4,60	6,62
5	1,11	2,02	2,57	2,65	4,03	5,51
6	1,09	1,94	2,45	2,52	3,71	4,90
7	1,08	1,89	2,36	2,43	3,50	4,53
8	1,07	1,86	2,31	2,37	3,36	4,28
9	1,06	1,83	2,26	2,32	3,25	4,09
10	1,05	1,81	2,23	2,28	3,17	3,96
11	1,05	1,80	2,20	2,25	3,11	3,85
12	1,04	1,78	2,18	2,23	3,05	3,76
13	1,04	1,77	2,16	2,21	3,01	3,69
14	1,04	1,76	2,14	2,20	2,98	3,64
15	1,03	1,75	2,13	2,18	2,95	3,59
16	1,03	1,75	2,12	2,17	2,92	3,54
17	1,03	1,74	2,11	2,16	2,90	3,51
18	1,03	1,73	2,10	2,15	2,88	3,48
19	1,03	1,73	2,09	2,14	2,86	3,45
20	1,03	1,72	2,09	2,13	2,85	3,42
25	1,02	1,71	2,06	2,11	2,79	3,33
30	1,02	1,70	2,04	2,09	2,75	3,27
35	1,01	1,70	2,03	2,07	2,72	3,23
40	1,01	1,68	2,02	2,06	2,70	3,20
45	1,01	1,68	2,01	2,06	2,69	3,18
50	1,01	1,68	2,01	2,05	2,68	3,16
100	1,005	1,660	1,984	2,025	2,626	3,077
∞	1,000	1,645	1,960	2,000	2,576	3,000

a) For a quantity z described by a normal distribution with expectation μ_z and standard deviation σ, the interval $\mu_z \pm k\sigma$ encompasses p = 68,27 percent, 95,45 percent and 99,73 percent of the distribution for k = 1, 2 and 3, respectively.




1 Beschreibung der Messung
2 Mathematisches Modell der Messung
3 Informationen über die Eingangsgrößen
4 Messunsicherheit der Eingangsgrößen
5 Berechnung des Ergebnisses und dessen Standardmessunsicherheit
6 Berechnung der erweiterten Messunsicherheit
7 Angabe des Ergebnisses
Arbeitsablauf

GUM 7.1.4

Es sind die erforderlichen Informationen zur Dokumentation eines Messergebnisses vom vorgesehenen Verwendungszweck abhängig, sie sollte i.R. so sein, dass

- die Methoden, die zur Berechnung des Messergebnisses und seiner Unsicherheit aus experimentellen Beobachtungen und Eingangsdaten angewandt wurden, beschrieben sind;
- alle Unsicherheitskomponenten aufgelistet sind und ihre Auswertung vollständig dokumentiert ist;
- die Datenanalyse nachvollziehbar und bei Bedarf eine unabhängige Neuauswertung möglich ist;
- alle bei der Analyse und ihren Quellen verwendeten Korrektionen und Konstanten angegeben sind.

GUM 7.2.3
Bei der Angabe eines Messergebnisses sollte man, wenn die erweiterte Unsicherheit $U = k \cdot u_c(y)$ das Maß für die Unsicherheit ist:

a) vollständig beschreiben, wie die Messgröße Y definiert ist;

b) das Messergebnis in der Form $Y = y \pm U$ angeben;

c) die relative erweiterte Unsicherheit $U / |y|$ angeben und wenn $|y| \neq 0$;

d) den zur Ermittlung von U verwendeten Wert von k angeben (oder zur Erleichterung für den Nutzer des Messergebnisses sowohl k als auch $u_c(y)$);

e) den annähernden Grad des Vertrauens angeben, der dem Bereich $y \pm U$ zugeordnet ist, sowie die Methode seiner Ermittlung;

f) die in GUM 7.2.7 skizzierte Information angeben oder auf eine Publikation verweisen, die diese Information enthält.

GUM 7.2.6 (Rundungsregeln)
Die Zahlenwerte des Schätzwerts *y* und seiner Standardunsicherheit $u_c(y)$ oder erweiterten Unsicherheit *U* dürfen nicht mit einer übermäßigen Stellenanzahl angegeben werden. Es reicht gewöhnlich aus, $u_c(y)$ und *U* […] auf höchstens zwei Stellen anzugeben, obwohl es in manchen Fällen notwendig sein kann, weitere Stellen beizubehalten, um bei nachfolgenden Berechnungen Rundungsabweichungen zu vermeiden.

Werden Endergebnisse angegeben, kann es angebracht sein, Unsicherheiten aufzurunden, statt sie auf die nächste Stelle zu runden. … Korrelationskoeffizienten sind auf drei Stellen genau anzugeben, wenn ihre absoluten Werte nahe bei Eins liegen.

DKD 3 Angabe der Messunsicherheit beim Kalibrieren

6.3 Der Zahlenwert der Messunsicherheit ist mit höchstens zwei signifikanten Stellen anzugeben.
Der Zahlenwert des Messergebnisses ist in der abschließenden Angabe auf die letzte gültige Ziffer im Wert der dem Messergebnis beigeordneten erweiterten Messunsicherheit zu runden. Für das Rundungsverfahren sind die üblichen Regeln für das Runden von Zahlen zu verwenden (nähere Angaben zum Runden finden sich in ISO 31-0:1992, Anhang B). Nimmt der Zahlenwert der Messunsicherheit infolge der Rundung jedoch um mehr als 5 % ab, ist der aufgerundete Wert anzugeben.

Zusammenfassung (GUM)

1. **Beschreibung der Messung**
   (Messmethode, relevante Größen)
2. **Mathematisches Modell der Messung**
   (Ausgangsgröße = Funktion der Eingangsgrößen)
3. **Informationen über die Eingangsgrößen**
   (Typ A oder B, korrelierte oder unkorrelierte Messunsicherheiten)
4. **Ermittlung der Standardmessunsicherheit aller Eingangsgrößen**
   (aus den Messwerten, den Angaben des Kalibrierscheins, der Literatur, älteren Messungen, …)
5. **Berechnung des Ergebnisses und dessen Standardmessunsicherheit**
   (Berechnung der Ausgangsgröße mit kombinierter Standardmessunsicherheit)
6. **Berechnung der erweiterten Messunsicherheit**
   (Angabe des Intervalls, das mit ρ % Wahrscheinlichkeit den wahren Wert enthält)
7. **Angabe des Ergebnisses**
   (Messunsicherheitsbilanz, Möglichkeiten der Verringerung der Messunsicherheit)

Nachdenken → Rechnen nach GUM-Regeln → Interpretieren

Ergänzung: Monte-Carlo-Methode

Einschränkungen seitens des GUM:

- Linearität des Modells
- Annahmen über Verteilungen

GUM S1 *

*) GUM S1: Evaluation of measurement data – Supplement 1 to the "Guide to the expression of uncertainty in measurement“ - Propagation of distributions using a Monte Carlo method, JCGM 101:2008

Ergänzung: Monte-Carlo-Methode

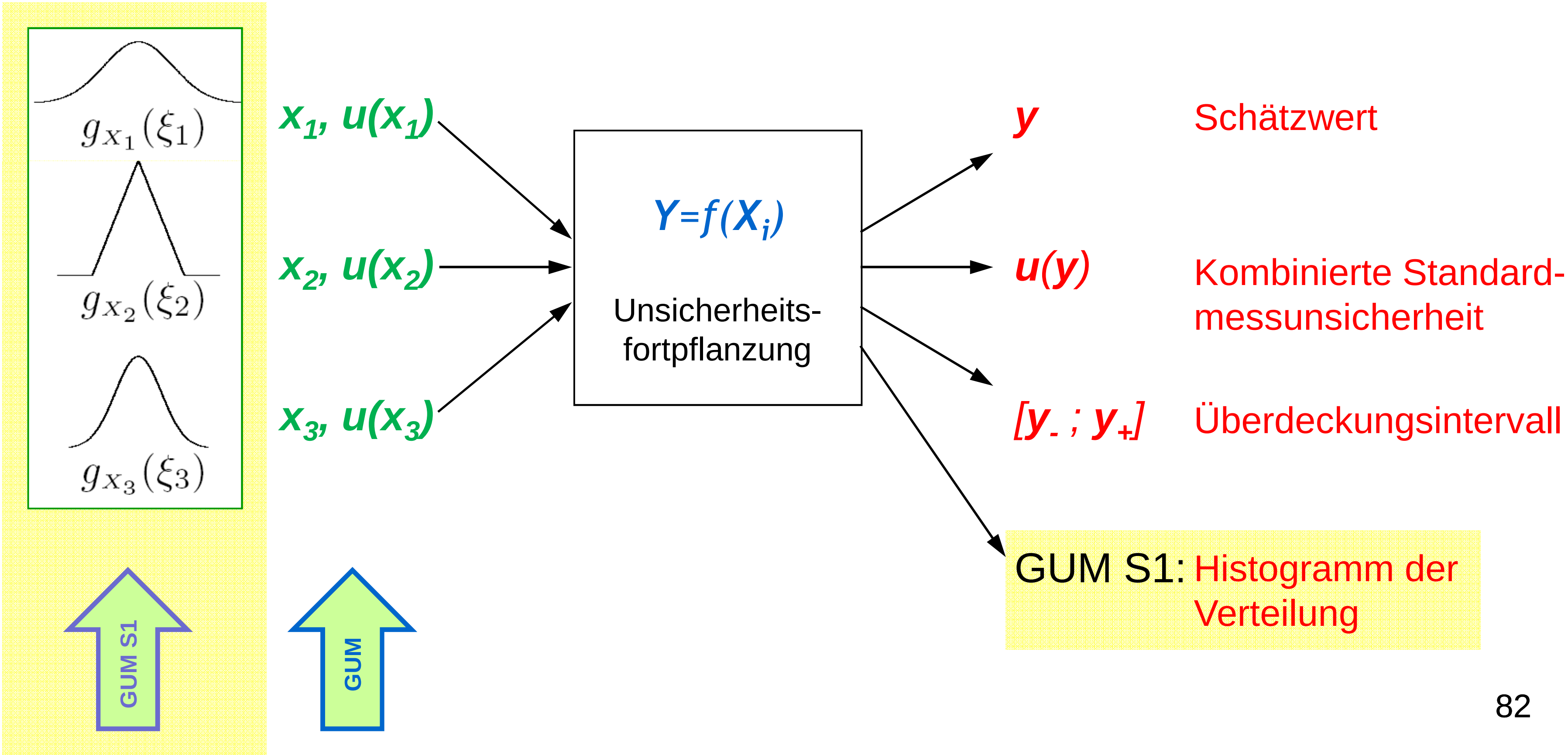
Eingangsgrößen X_i und deren Messunsicherheiten

(Eingangsgrößen und deren Standardabweichungen der Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung)

Modell der Messung

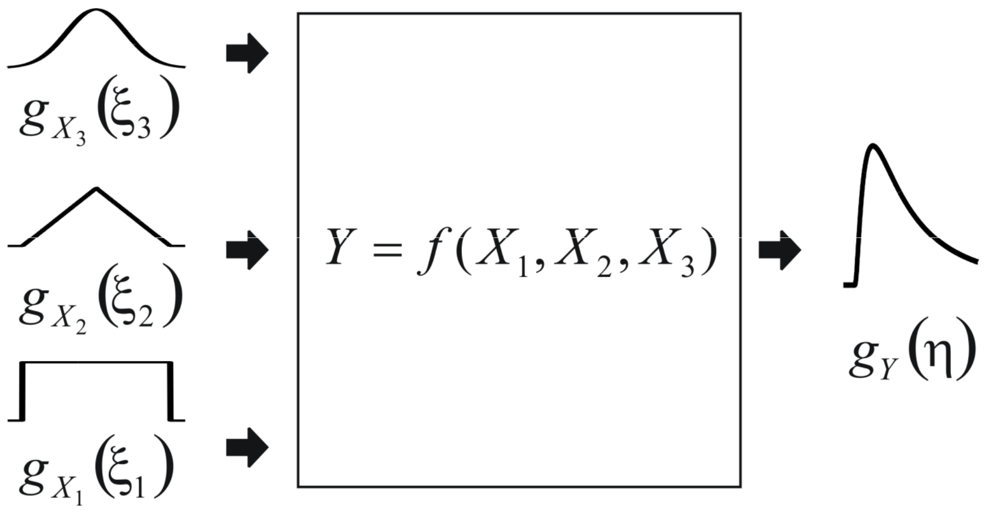
Ausgangsgröße Y und Messunsicherheit

(Ausgangsgröße = Messgröße)



Ergänzung: Monte-Carlo-Methode

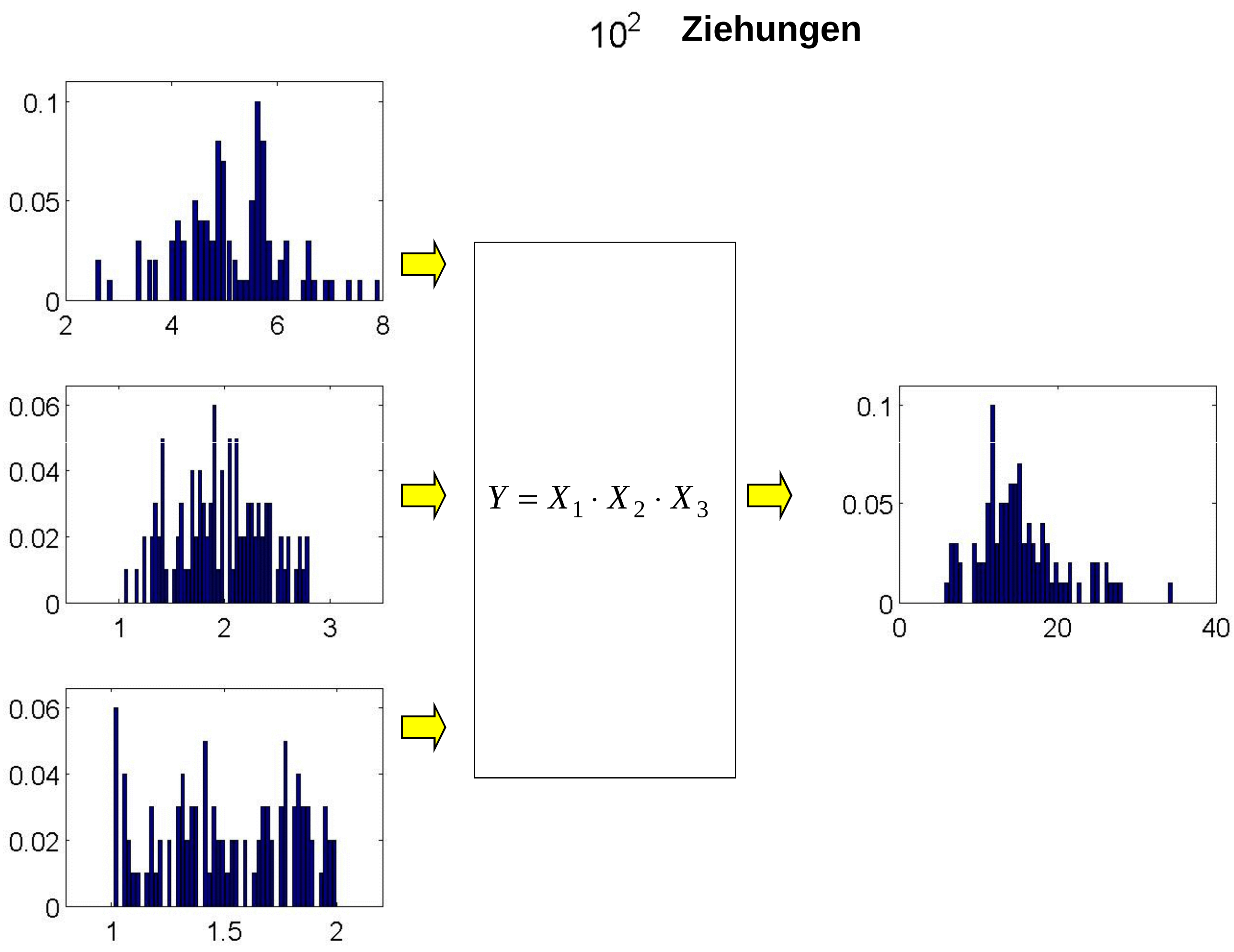
PDFs der Einflussgrößen ⇨ **Modell der Auswertung** ⇨ **PDF der Messgröße**



Methode: Transformation von Zufallsvariablen

Quelle: Gerd Wübbeler

Ergänzung: Monte-Carlo-Methode

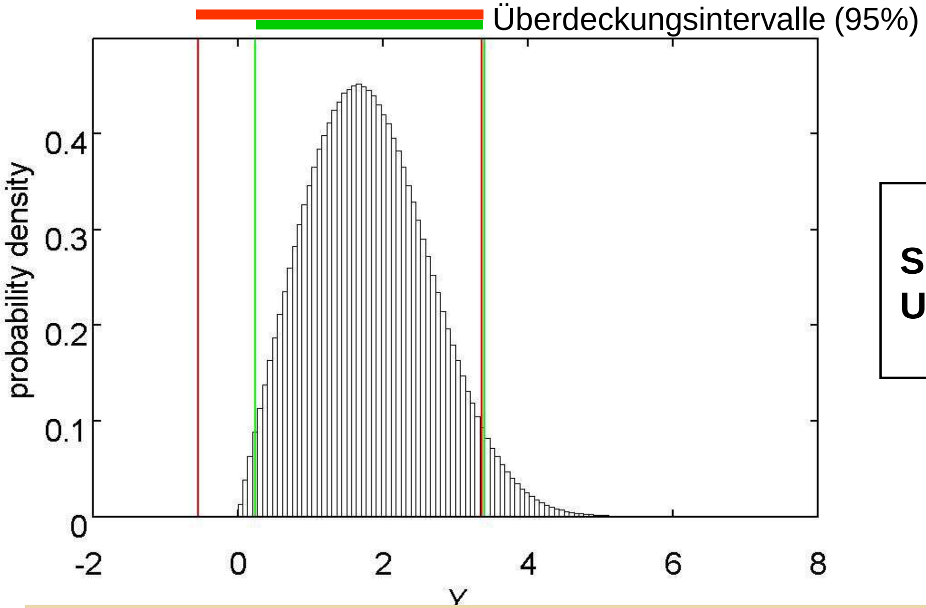


Quelle: Gerd Wübbeler

Ergänzung: Monte-Carlo-Methode

Modell	$Y = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$
Schätzwerte	$x_1 = x_2 = 1$
Unsicherheiten	$u(x_1) = u(x_2) = 1$

⇨ **Gauss-Verteilungen** (unkorreliert)



	GUM	GUM S1
Schätzwert	**1.41**	**1.81**
Unsicherheit	**1.00**	**0.845**

Quelle: Gerd Wübbeler

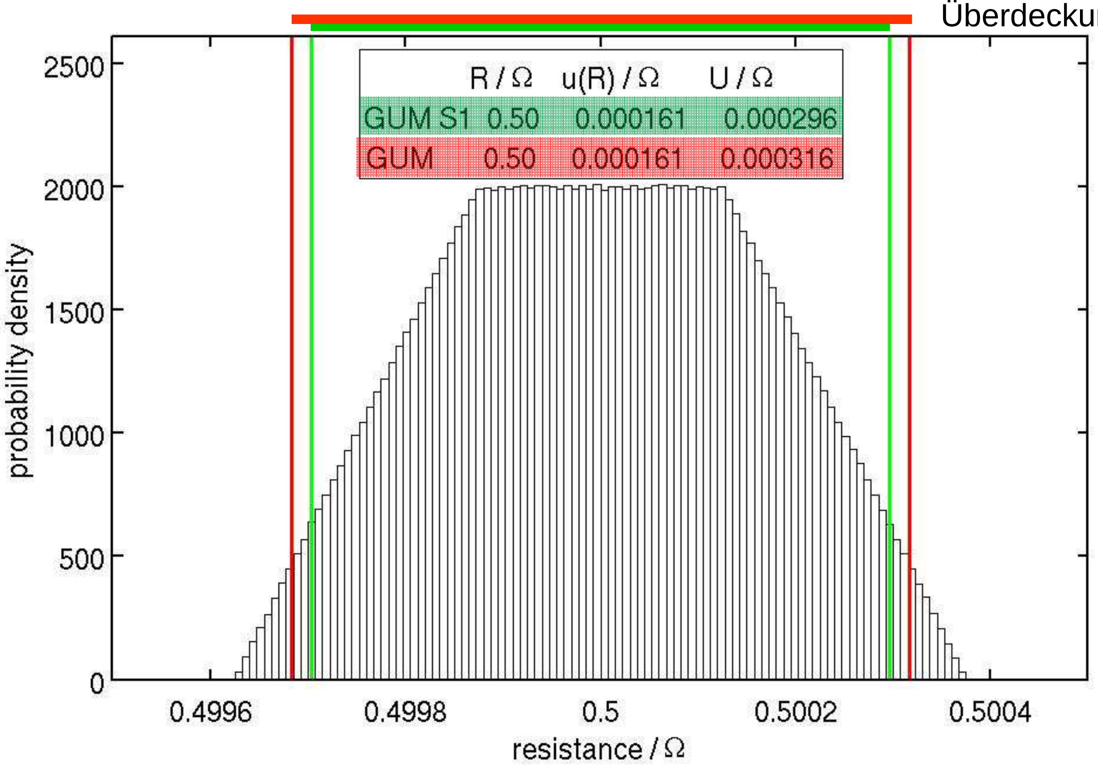
- **Resultate von GUM und GUM S1 können unterschiedlich sein**
- **GUM S1 im Zweifelsfall verbindliche MU Methode**

Ergänzung: Monte-Carlo-Methode

Modell	$R = U / I$
Schätzwerte	1 V und 2 A
Unsicherheiten	$\frac{0.001}{\sqrt{12}}\,\mathrm{V}, \quad \frac{0.001}{\sqrt{12}}\,\mathrm{A}$

⇨ **Rechteckverteilungen**
(unkorreliert)

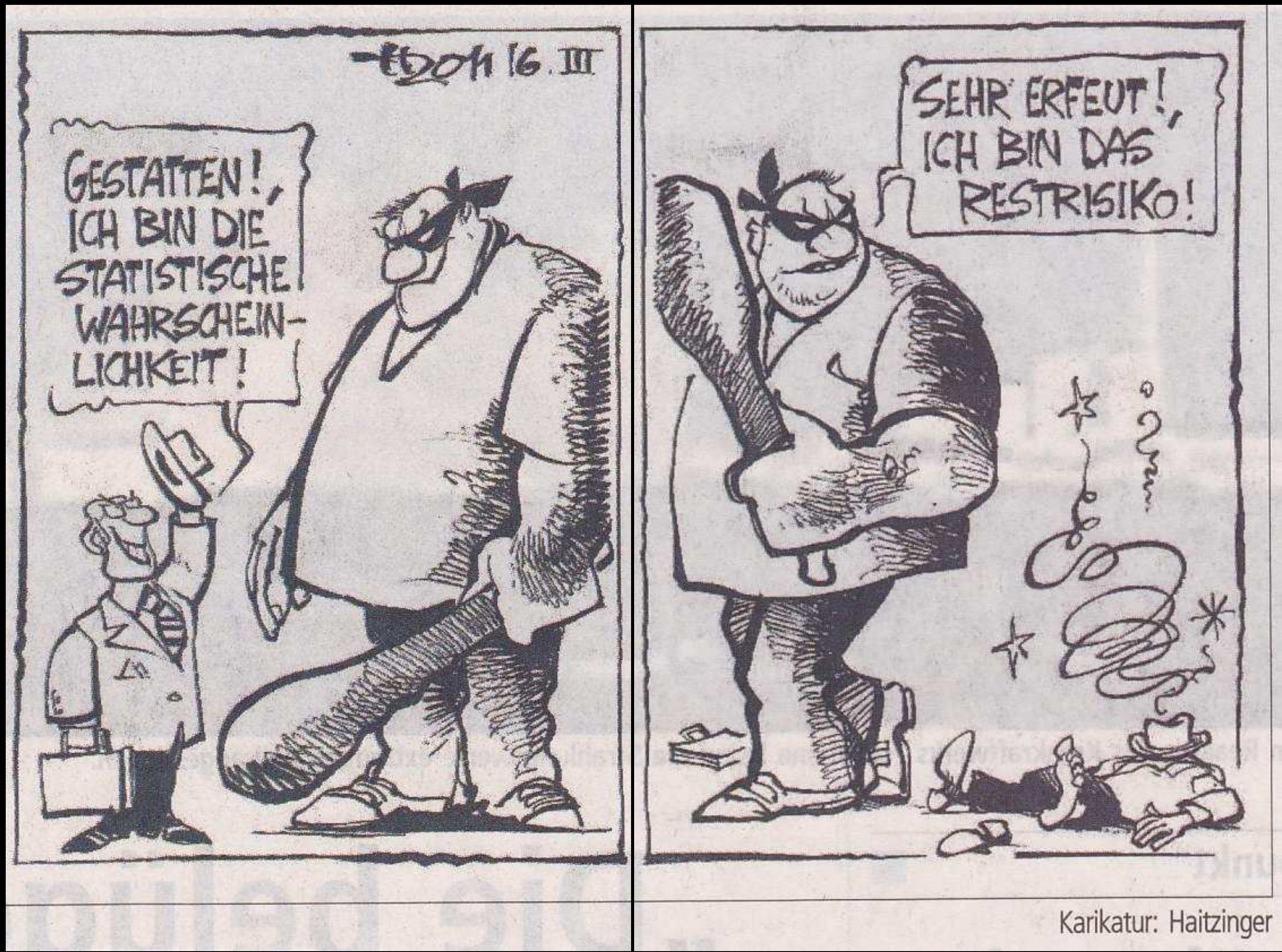
Überdeckungsintervalle (95%)



Quelle: Gerd Wübbeler

Resümee

- Der GUM und dessen Ergänzungen sorgen für Transparenz und Vergleichbarkeit der Messergebnisse.
- Der GUM bezieht auch die Unsicherheiten der Geräte, des Messverfahrens, der Korrekturen usw. mit in die Berechnung ein.
- Die (erweiterte) Messunsicherheit basiert auf dem Grad des Vertrauens in die Messung, der frei wählbar ist.
- Die Regeln des GUM lassen sich in Software umgesetzten.



Karikatur: Haitzinger

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit !

… und einen kleinen Hinweis noch:

Berechnung der Messunsicherheit – Empfehlungen für die Praxis
11. und 12. März 2014
PTB, Hörsaal im Hermann-von-Helmholtz-Bau, Abbestr. 2 – 12, 10587 Berlin
eine gemeinsame Veranstaltung von DAkkS, PTB und BAM

siehe auch: http://www.ptb.de/cms/fachabteilungen/abt8/fb-84.html