Korrelationen in der Messunsicherheit

DAkkS/PTB/BAM-Seminar
März 2012, Berlin

Bernd Pesch, Pesch Consult
mit freundlicher Unterstützung von Dr. Rudi Frieling, Fa. ElmTec

„It‘s now time to face reality, my friends.
We‘re not exactly rocket scientists.“

Angepasste Fassung (Errata):

Das numerische Beispiel aus dem Vortrag vom 20.3.2012 wurde aktualisiert, um den Effekt der Korrelation deutlicher darstellen zu können. Die vorgestellte, zufällige Ähnlichkeit der Größen der Direktmessung und der als unkorreliert angenommenen Substitutionsmessung beruhte auf der Nutzung verschiedener Ausgangsdatenmengen.

Vortragsgliederung

- Messaufgabe: Messung eines rechten Winkels
  - Lösung mittels Direktmessung
    - Substitutionsmessung (ohne Berücksichtigung der Korrelation)
    - Korrelationen erkennen und beschreiben
    - Die Mathematik
  - Substitutionsmessung mit Korrelation
- Schwierigkeiten in der Praxis

Die Messaufgabe

Auf einer Koordinatenmessmaschine ist die Formabweichung einer Maßverkörperung von der Rechtwinkligkeit zu bestimmen.

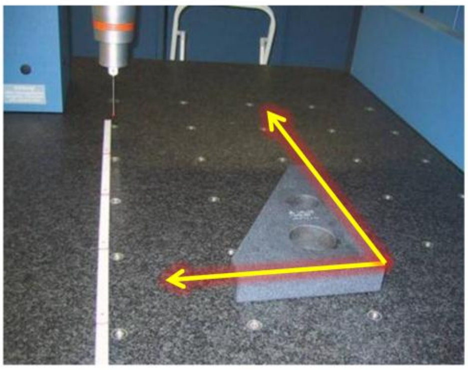
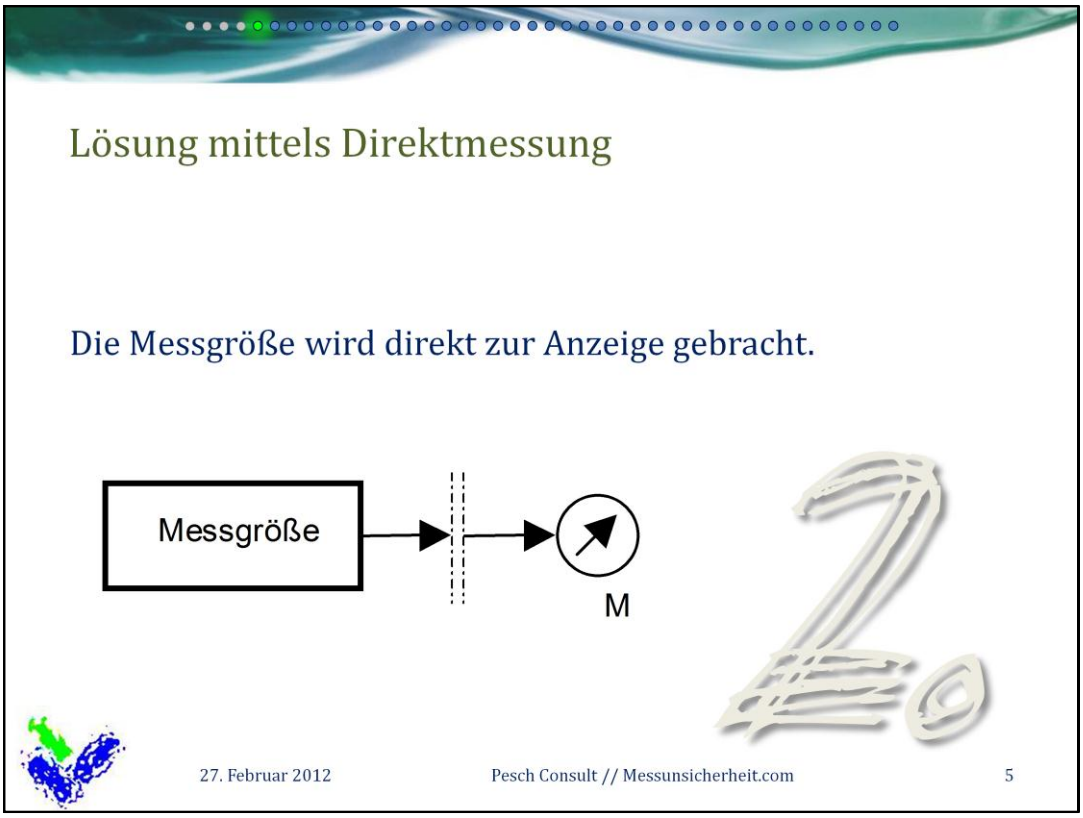


Bild: Fa. Oelze, Aschaffenburg

In der Praxis treten Linearitätsabweichungen auf jeder Achse der Koordinatenmessmaschine (KMM), wie auch Winkelabweichung zwischen den Achsen auf. Beide Einflüsse überlagern sich und führen u.U. zu größeren Winkelabweichungen. Ein Auftrennen beider Einflüsse ist nur mit weiteren Normalen möglich, da die KMM nach einem nicht offengelegtem Verfahren gemessene Winkel bestimmt.



Der erste und schnellste Ansatz, die Messgröße zu ermitteln. Die Rückführung erfolgt über die Koordinatenmessmaschine als Normal.

Prozessgleichung

Die Prozessgleichung bildet die Direktmessung ab:

$$\varphi_{DUT} = \varphi_{Ind}$$

Hierbei wird der Winkel φ von der Messsoftware (Firmensoftware) errechnet und als Ablesung zur Verfügung gestellt. Informationen über die Generierung der Ablesung ist nur rudimentär verfügbar (Black Box Ansatz).

Beim Black Box Ansatz weiß man sehr wenig über interne Vorgänge eines Messmittels (oder Prozesses). Man kann nicht hineinschauen. Es ist lediglich möglich, die Beziehung zwischen Eingangsgrößen und Ausgangsgrößen beschreibbar zu machen. Problematisch ist der Ansatz in der Bewertung, wenn auch die Eingangsgröße nicht bekannt ist, wie dies bei einem Prüfling der Fall ist.

Anmerkung zum hier demonstrierten Vorgehen: Wir erstellen die Modellgleichung immer aus einer Prozessgleichung heraus, die den Messprozess idealisiert darstellt und die physikalischen Grundlagen der Messung wiederspiegelt. MU-Einflüsse ordnen wir später dort zu, wo sie in der Prozessgleichung auftreten.

Modellgleichung

$$\varphi_{DUT} = \left(\bar{\varphi}_{Ind,Mess} + \delta\varphi_{Ind,Stat} + \delta\varphi_{Ind,Res}\right) + \delta\varphi_{KMM,Lin} + \cdots$$

Dargestellt werden der Mittelwert der Messreihe, die statistischen Einflüssen, die numerische Auflösung (unrelevant) und die Linearität. (Weitere Größen treten auf, sind für das Beispiel nicht von Bedeutung).

Der rot unterlegte Teil zeigt, wo die „Black Box“ KMM wirkt. Wenn dieser Anteil dominant ist, kommt man kaum zu sinnvollen Messunsicherheitsbilanzen. Es fehlen einfach Kenntnisse und man sollte Alternativen suchen, um „Licht in die Black Box“ zu bringen.

Der Winkel $\bar{\varphi}_{Ind,Mess}$ wird aus einer Messreihe heraus ermittelt. Den Messwert betrachten wir als messunsicherheitsfrei und entsprechende Einflussgrößen werden in den δ-Termen zum Winkel abgebildet. So haben diese Terme immer die Form (0±Unsicherheit).

Messunsicherheitsbilanz einer Direktmessung

Beschreibung	d	Halbbreite der Einflussgröße	Verteilung	Gewichtung	Sensitivität	Wirkende Unsicherheit
Stabilität, Vermessen Prüfling	$\delta\varphi_{DUT,Stat}$	0,018''	N	1,000	1,000	0,018''
Auflösung bei der Vermessung, Prüfling	$\delta\varphi_{DUT,Res}$	0,029''	R	0,577	1,000	0,017''
Positionierung	$\delta\varphi_{Pos}$	0,000''	R	0,577	1,000	0,000''
Linearität der Messmaschine, Prüfling	$\delta_{DUT,Lin}$	0,500''	R	0,577	1,000	0,289''

$U_{0,95}$	In Bogensekunden	**0,58''**

Das Budget besteht fast ausschließlich aus dem Einfluss der KMM. Dieser kann leider nicht weiter aufgeschlüsselt werden, da mangels Systemkenntnisse (Stichwort „Firmengeheimnisse“) das Messmittel als Black Box betrachtet werden muss.
Von diesem Ansatz möchte man sich lösen, denn nur bekannte Einflüsse können auch ggf. verringert werden.

Substitutionsmessung

Zielsetzung:

Verringerung der Messunsicherheit durch Änderung des Messprozesses von „Direktmessung“ auf „Substitutionsmessung“

Begründung des Prozesswechsels

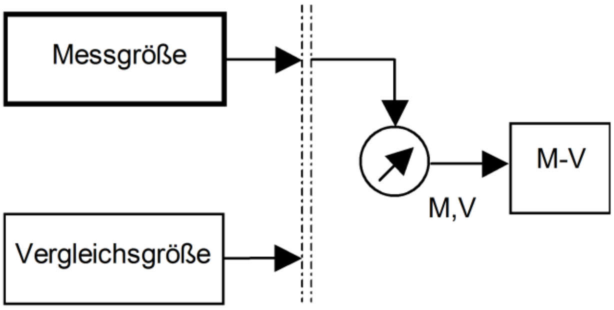
Bei der Direktmessung wurde erkannt, dass die systematischen Einflüsse der Messmaschine das Messergebnis deutlich beeinflussen.

Durch eine Substitutionsmessung soll der Einfluss der systematischen Messabweichung minimiert werden.

Der Einfluss der KMM auf das Messergebnis wurde als systematisch, aber unbekannt (besser: nicht mit vertretbarem Aufwand hinreichend zu beschreiben) erkannt. Gerade das Erkennen des Vorliegens einer Systematik lässt ein alternatives Messverfahren (Substitution) als geeignet erscheinen, da zudem ein externes Winkelnormal zur Verfügung steht. Der Ansatz wäre aber nicht zielführend, wenn die der KMM zuzuordnenden Messunsicherheitseinflüsse statistischer Natur wären.

Messprozess

Normal und Prüfling werden nacheinander auf der gleichen Messanordnung vermessen. Aus der Differenz der Ablesungen wird die Messgröße ermittelt.



In der Rückführung der Messgröße tritt nun ein Bezugsnormal (Vergleichsgröße) hinzu. Der Einfluss der Koordinatenmessmaschine als „Transferelement“ verringert sich deutlich.

Das Bezugsnormal

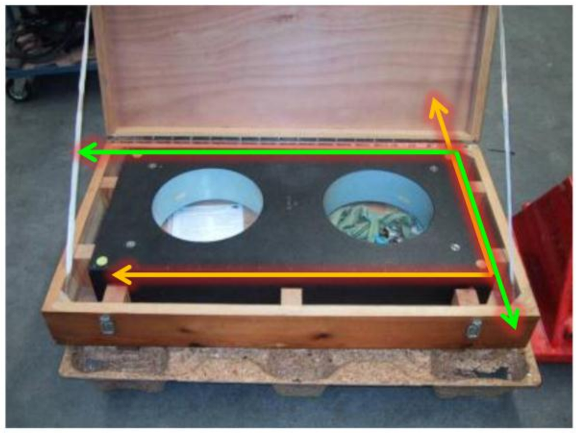


Bild: Fa. Oelze, Aschaffenburg

Hartgestein (Gabbro-Impala) aus Südafrika.

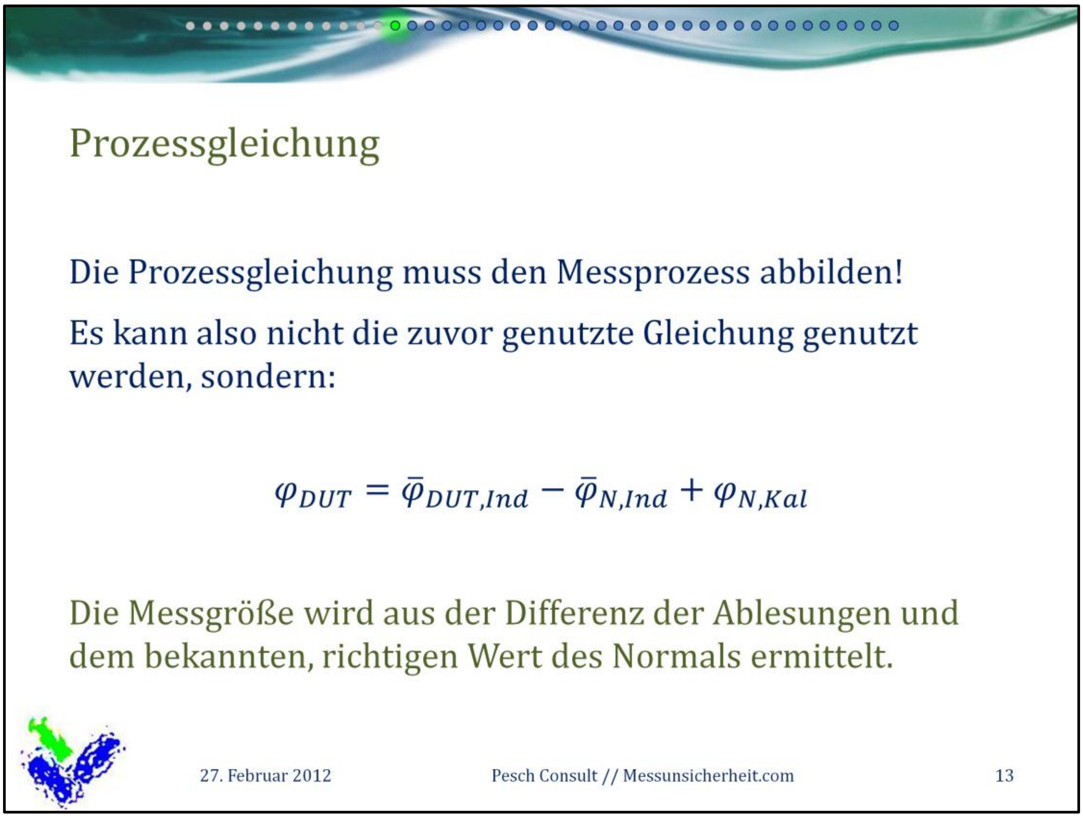
Zwei Winkel wurden als Bezugsnormal PTB-kalibriert.

So sind Validierungsmessungen an der gleichen Maßverkörperung möglich!

27. Februar 2012 Pesch Consult // Messunsicherheit.com 12

Diese Maßverkörperung hat eine besondere Eleganz in der Anwendung. Da zwei Winkel als Bezugsnormal kalibriert sind, ist eine Verfahrensvalidierung mit nur einem Normal möglich. Für die Bewertung des geplanten Substitutionsverfahrens betrachtet man einen Winkel als Normal, den zweiten als Prüfling und wertet hinterher die Abweichungen zwischen beiden Winkeln mittels „Normalized Error Ratio“ aus.

<u>Anmerkung:</u> Natürlich sind die Bezugsinformationen beider Winkel miteinander korreliert: Sie wurden auf der gleichen Messanordnung unter Wiederholbedingungen kalibriert. Über die Korrelation bei der Bestimmung der Normale (Achtung: Nicht zu verwechseln mit der Korrelation in der eigenen Messung) liegen aber keine Informationen vor. Diese gehen immer dann verloren, wenn MU-Bilanzen voneinander getrennt werden und zu getrennten Messergebnissen führen (Kalibrierwert mit Unsicherheit für jeden der beiden Winkel). Dies ist aber bei der Verfahrensvalidierung auf der jeweils nächstniedrigen Ebene der Kalibrierhierarchie nicht von Bedeutung, da sich die Unsicherheiten durch die Korrelation (auf der nächsten Ebene) nicht merklich erhöhen können(!). Leider ist auch andererseits eine Verringerung nicht möglich.



Systematische Anteile wirken beim Prüfling (DUT), wie auch beim Normal (N) betragsmäßig gleich, jedoch auf Grund des „-“-Zeichens gegensinnig. Die systematischen Anteile der Unsicherheit der Einflussgrößen heben sich also auf. Es bleiben die nicht korrigierbaren statistischen Einflüsse.

<u>Empfehlung:</u> Erst eine einfache Prozessgleichung aufstellen, die die physikalischen Grundlagen der Messung korrekt wiedergibt (wie hier: Prüfling-Normal+Kalibrierwert) und diese nachträglich zur Modellgleichung ergänzen.

Es können und dürfen nicht die Prozess- und die Modellgleichung der zuvor betrachteten Direktmessung genutzt werden. Sie beschreiben den Messvorgang nicht.

Modellgleichung

$$\varphi_{DUT} = \left(\bar{\varphi}_{DUT,Mess} + \delta_{DUT}\right) - \left(\bar{\varphi}_{N,Mess} + \delta_{N,Mess}\right) + \left(\varphi_{N,Kal} + \delta_{N,Kal}\right) + \delta_{KMM,Temp} + \delta_{Position}$$

mit:

$$\delta_{DUT} = \delta\varphi_{DUT,Stat} + \delta\varphi_{DUT,Res} + \delta\varphi_{KMM,Lin}$$

$$\delta_{N,Mess} = \delta\varphi_{N,Stat} + \delta\varphi_{N,Res} + \delta\varphi_{N,Temp} + \delta\varphi_{KMM,Lin}$$

$$\delta_{N,Kal} = \delta\varphi_{N,Kal} + \delta\varphi_{N,Drift}$$

Die Folgezeilen sind Bestandteil der Modellgleichung und keine(!) Untermodelle. Eine Untermodellbildung ist bei korrelierten Größen nicht möglich (wie später noch gezeigt wird).

Die aufgeführten Indizes haben folgende Bedeutungen:

DUT = Device Under Test // Prüfling
DUT,Mess = Mittelwert der Messung des Prüfling
N,Mess = Messwert des Normals (Genauer: Ablesewert, da eine weitere numerische Behandlung der Ablesung folgt).
N,Kal = Kalibrierwerte des Normals mit Messwert und Unsicherheitseinfluss beim δ-Term.
KMM,Temp = Temperatureinfluss der Koordinatenmessmaschine
Position = Positionierung des Prüflings auf der Messfläche

DUT,Stat und N,Stat = Statistische Auswertung der einzelnen Messreihen
Res = Resolution // Auflösung der KMM-Software
Lin = Linearität der KMM bei der Angabe der Winkel als Ablesung; nicht jedoch Linearität der jeweiligen Messachsen
N,Kal = Unsicherheit, die dem Messwert des Normal bei der letzten Kalibrierung zugeordnet wurde
N,Drift = Drift des Normals seit der letzten Kalibrierung

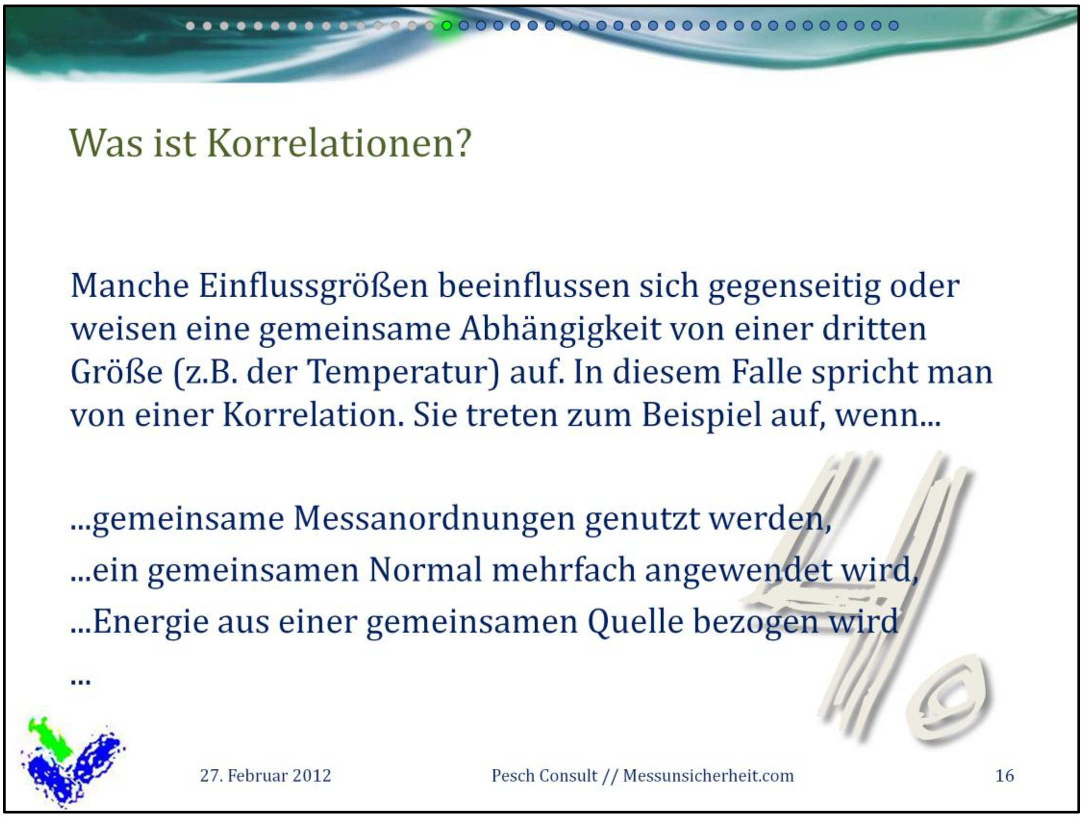
Messunsicherheitsbilanz Substitutionsmessung

Beschreibung	d	Halbbreite der Einflussgröße	Verteilung	Gewichtung	Sensitivität	Wirkende Unsicherheit
Vermessen, Prüfling	$\delta\varphi_{DUT,Stat}$	0,018''	N	1,000	1,000	0,018''
Auflösung bei der Vermessung, Prüfling	$\delta\varphi_{DUT,Res}$	0,029''	R	0,577	1,000	0,017''
Vermessen, Normal	$\delta\varphi_{N,Stat}$	0,028''	N	1,000	-1,000	-0,028''
Auflösung bei der Vermessung, Normal	$\delta\varphi_{N,Res}$	0,022''	R	0,577	-1,000	-0,013''
Positionierung	$\delta\varphi_{Pos}$	0,185''	R	0,577	1,000	0,107''
Kalibrierwert, Normal	$\delta\varphi_{N,Kal}$	0,100''	N	1,000	-1,000	-0,100''
Linearität der Messmaschine, Prüfling	$\delta_{DUT,Lin}$	0,500''	R	0,577	1,000	0,289''
Linearität der Messmaschine, Normal	$\delta_{N,Lin}$	0,500''	R	0,577	-1,000	-0,289''
	$U_{0,95}$	In Bogensekunden				**0,87''**

27. Februar 2012 Pesch Consult // Messunsicherheit.com 15

Durch die Änderung der Messmethode haben wir keine Budgetverbesserung erzielen können, sondern eine Verschlechterung.

<u>Anmerkung:</u> Im Beispiel während des Seminars wurde von geringeren Linearitätseinflüssen der KMM ausgegangen, was zu einer geringeren MU führte. Zu Grunde lag eine andere numerische Ausgangssituation. Unter Nutzung der Daten der Direktmessung (gleiche Datenbasis) vergrößert sich die erweiterte Messunsicherheit gegenüber der Direktmessung von 0,58 Bogensekunden auf 0,87 Bogensekunden.



Im Beispiel tritt der Einfluss der KMM zwei Mal in Erscheinung.

Beispiel:

1) Die Temperatur wirkt auf einen Widerstandswert
2) Bei geändertem Widerstand fließt ein anderer Strom im Messkreis, was zu einer geänderten Verlustleistung und somit zu einer anderen Temperatur führt.
3) Typisches Beispiel ist die Fehlanpassung auf einem HF-Leitungsweg
4) Vergleichsprüfung von Massen auf einer Balkenwaage. Die Luftauftriebskorrektur wirkt auf beide Massen zugleich.

Herkunft von Korrelationen

Statistik

- Feststellung durch Messreihen mit vielen Messpunkten
- Vorsicht: Scheinkorrelationen möglich

Mathematik Mehrfache Nutzung der Ausgangsdatenmenge

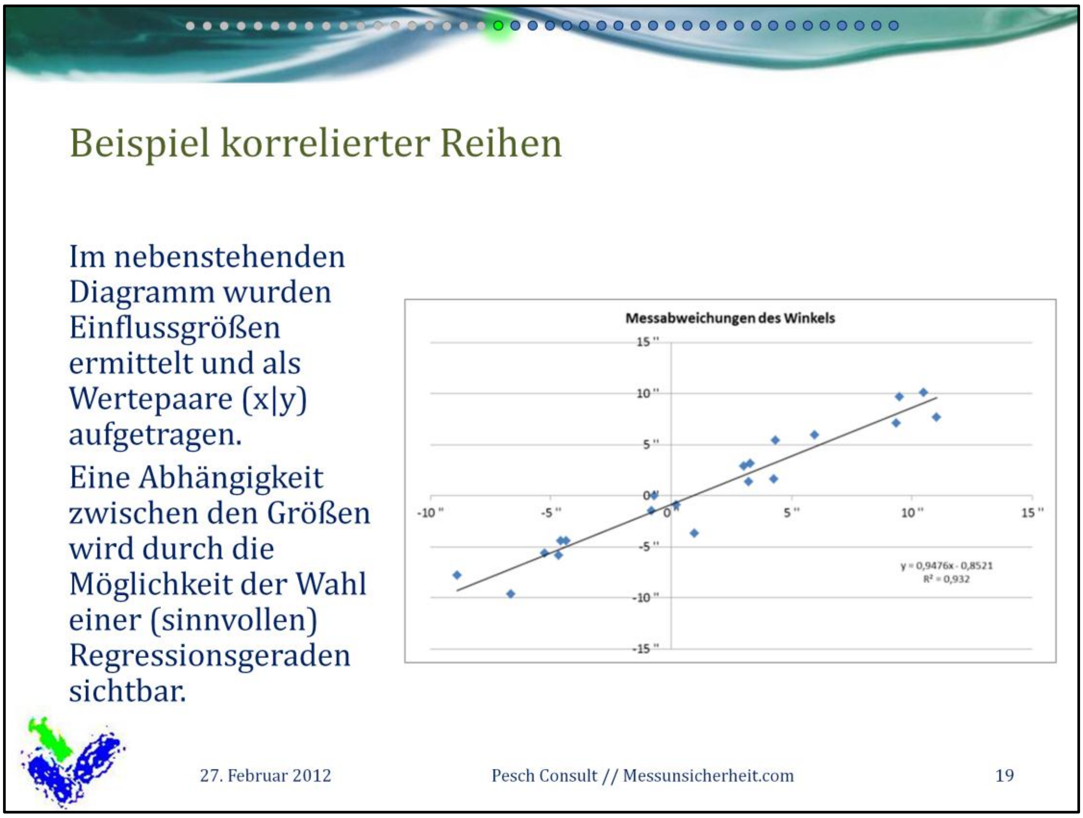
- Regression, Interpolation
- ...

Metrologie Bedingt durch die Messmethode

- Summenmessung, Differenzmessung
- ...

Physik

- Bedingt durch gemeinsame Abhängigkeiten mehrerer an der Messung beteiligter Einflüsse von gemeinsam wirkenden Größen



Da die KMM weiterhin als Black Box zu betrachten ist, können als korrelierte Größen nur die Einflüsse eben dieser Black Box auf die Messung des Winkels des Prüflings und des Normals voneinander getrennt werden.

Aus Winkelmessungen am Prüfling und am Normal (singuläre Differenzmessung, bevor DUT-N gebildet wird) werden Punktpaare gebildet und auf der x- und der y-Achse aufgetragen. Die Paarbildung der Reihenelemente ist wichtig, um Zusammenhänge in der Form „wenn A wächst, dann wächst auch B“ beurteilen zu können.

Sofern es möglich ist, eine sinnvolle Regressionsgerade durch die generierte Datenmenge zu legen, ist auf eine Korrelation zu schließen. Aus der Streuung der Werte um die Gerade kann über den Regressionskoeffizienten (der Ausgleichsgeraden) eine Aussage zur Qualität der Korrelation getroffen werden. Eine numerische Aussage zu einer Unsicherheit kann noch nicht direkt abgeleitet werden.

Es können auch nichtlineare Korrelationen, die anderen Zusammenhängen folgen (Physik ist im Wesen nur selten linear), auftreten. Sinnvoll anwendbar sind im Rahmen der Bestimmung von Messunsicherheiten die linearen Verhältnisse.

(Offensichtliche) Beispiele

Tendentiell sind alle Differenz-, Vertauschungs- und Substitutionsmessungen anfällig für Korrelationen (Bezug über die Messanordnung).

- Substitutionsmessung Endmaß gegen Endmaß: Das Normal, wie auch der Prüfling „wachsen“ bei Erwärmung.
- Vertauschungsmessung auf einer Balkenwaage: Ist die Nulllage der Waage nicht mittig und tendiert zu einer Seite, so wird sie Gleiches auch bei Vertauschung von Normal und Prüfling tun.
- ...

Weniger offensichtliche Beispiele

Nicht alle Korrelationen erkennt man sofort. Manche kann man nur auf Grund der messtechnischen Erfahrung erahnen.

- Reflexionen auf einer HF-Leitung: Die Fehlanpassung auf dem Leitungsweg ist an jeder Stoßstelle von den individuellen Impedanzen beider „zusammengefügten“ Komponenten wechselseitig abhängig.
- Beim Common View Vergleich der Messgröße „Frequenz“ eines GPS-Signals beobachten zeitlich verschiedene Empfänger das gleiche Signal und vergleichen hinterher numerisch die Messwerte. Die Laufzeiten des Signals sind bei beiden Beobachtern von atmosphärischen Einflüssen abhängig.
- ...

Fazit

Von **korrelierten Größen**, oder Reihen ist die Rede, wenn kein direkter mathematischer Zusammenhang durch eine Funktion beschrieben werden kann, aber andererseits eine tendentielle Abhängigkeit zu erkennen ist.

Das heißt nicht, dass es keinen Zusammenhang gibt; sondern nur, dass er mit den vorhandenen Mitteln nicht ausreichend gut beschrieben werden kann, um korrigiert zu werden.

27. Februar 2012 Pesch Consult // Messunsicherheit.com 22

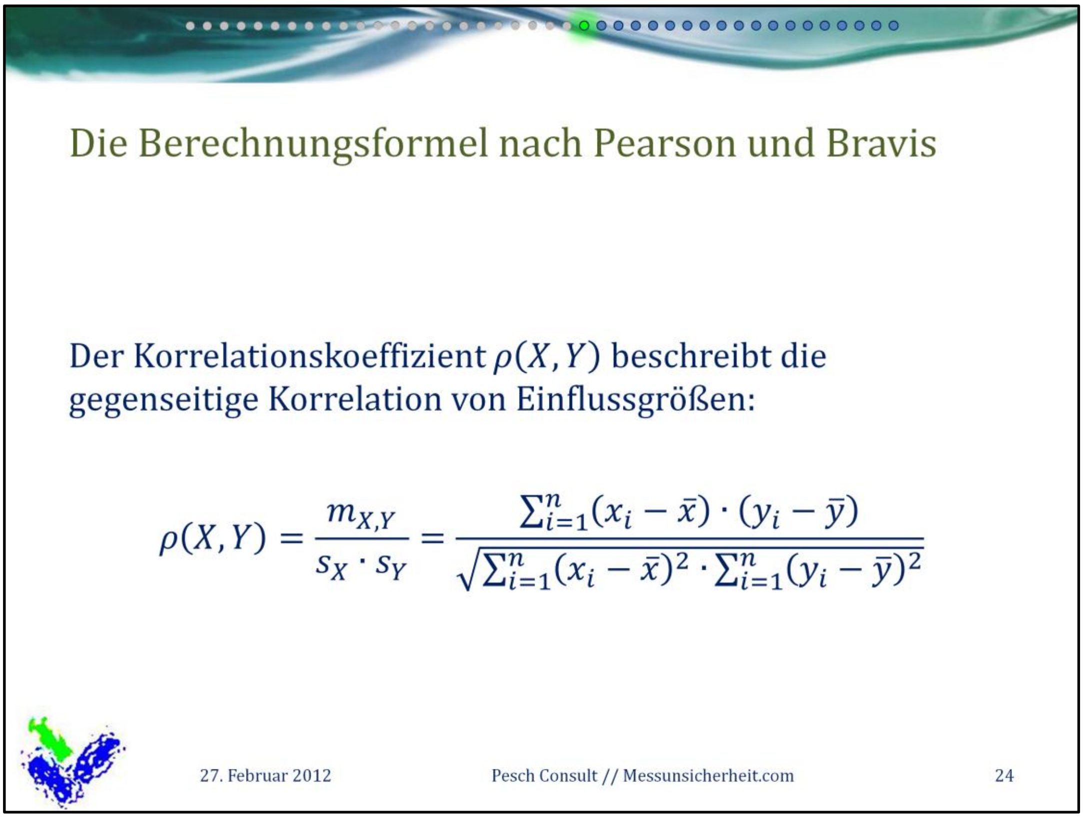
Natürlich muss es systematische Zusammenhänge zwischen korrelierten Größen geben. Ansonsten wären sie im Gegensatz hierzu: Unkorreliert, also linear unabhängig.

Hieraus ableitbar ist, dass Korrelationen bestimmbar zu machen, ein Weg ist, die Auswirkungen der Systematik besser beschreiben zu können, ohne sich jener im Detail konkret angenähert zu haben. Welche Ursache sich hinter der Korrelation versteckt kann vermutet, aber so nicht bewiesen werden. Wäre letzteres der Fall, kann man den Zusammenhang funktional beschreiben und im Rahmen der Messung korrigieren. Man hätte den Übergang zwischen Korrelation und Beschreibung systematischer Vorgänge vollzogen.

Die Anwendung

Betrachten Sie die folgenden Darstellungen zunächst rein informativ.

Letztendlich konzentriert sich alles auf eine einzige Formel, die Sie später in Ruhe nachlesen und bei Bedarf nutzen können.



Hierin stehen die gängigen Symbole für das Steigungsmaß, die Standardabweichungen, Einzelelemente der Reihe und dem Mittelwert.

Der Korrelationskoeffizient ist normiert. Sein Wertebereich liegt zwischen -1 und 1 mit besonderer Bedeutung der Grenzwerte und der „0“. Bei $\rho = 1$ liege eine vollständige Korrelation der betrachteten Eingangsgrößen vor. Statistische Anteile treten nicht in Erscheinung. Ein funktionaler Zusammenhang wäre möglich. Gleiches gilt für die negative Korrelation bei $\rho = -1$.

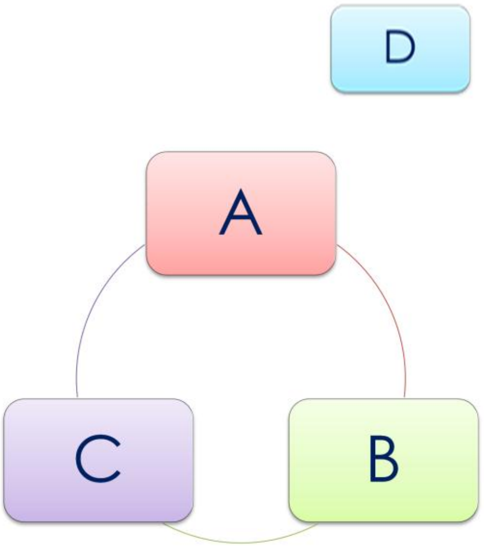
Gilt $\rho = 0$ haben wir den Fall linearer Unabhängigkeit zwischen den Einflussgrößen.

Korrelationskoeffizienten gelten immer nur für ein Paar von Einflussgrößen. Auch mehrfache Korrelationen sind möglich, müssen dann aber immer als Paare betrachtet werden. Beispiel: In einem Budget mit

Paarweise Gültigkeit

Korrelationskoeffizienten gelten immer nur für ein Paar von Einflussgrößen. Auch mehrfache Korrelationen sind möglich, müssen dann aber immer als Paare betrachtet werden.

Beispiel: In einem Budget mit den Einflüssen *A*, *B*, *C* und *D* sind *A* und *B*, sowie *B* mit *C* miteinander korreliert. Dann ist aber auch *A* mit *C* über den Umweg *B* korreliert, wobei der Korrelationskoeffizient hier natürlich kleiner sein kann, wenn keine zusätzliche, direkte Beeinflussung existiert.



Vollständige Gleichung nach GUM 5.2.2

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j)$$

Diese Gleichung kann in zwei Bestandteile zerlegt werden...

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j)$$

Der Anteil der unkorrelierten Einflüsse (Varianzen) für $i = j$ hat die Form:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i, x_j)$$

Oder geläufiger als „Bestimmungsformel der Messunsicherheit“:

$$U(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} c_i^2 \cdot \sqrt{G}_i^2 \cdot y_i^2}$$

Falls, wie hier gegeben, $i = j$ gilt, erhalten wir die typische Form der Behandlung unkorrelierter Messunsicherheitseinflüsse.

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j)$$

Aber es bleibt als weiterer Summand der Anteil der Kovarianzen für $i \neq j$, der die (untereinander) korrelierten Einflüsse zusätzlich erfasst:

$$2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j)$$

Der Grad der Abhängigkeit – der Korrelation – zwischen x_i und x_j wird hierin durch den bereits vorgestellten Korrelationskoeffizienten $\rho(x_i, x_j)$ beschrieben:

$$\rho(x_i, x_j) = \frac{u(x_i, x_j)}{u(x_i) \cdot u(x_j)}$$

Hier wird der Korrelationskoeffizient als Beziehung der Messunsicherheitsbeiträge zueinander dargestellt.

Zusammenfassen der unkorrelierten und korrelierten Einflüsse führt zu folgender Gleichung der erweiterten Messunsicherheit:

$$U(y) = k \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(c_i \cdot \sqrt{G_i} \cdot y_i\right)^2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \rho_{i,j} \cdot c_i \cdot c_j \cdot \sqrt{G_i \cdot G_j} \cdot y_i \cdot y_j}$$

27. Februar 2012 Pesch Consult // Messunsicherheit.com 30

Der Rest ist Zusammenfassen der Varianzen und Kovarianzen und anschließendes Einsetzen.

Korrelationsmatrix

Messunsicherheitsbudgets mit Korrelationen lassen sich sehr gut mittels Matrizen darstellen und berechnen.

Beispiel eine Korrelationsmatrix:

$$\underline{\rho} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Auf die Korrelationsmatrix sei nur der Vollständigkeit halber hingewiesen. Im Rahmen des Vortrages würde die Behandlung den Zeitansatz sprengen. Die Werte der Hauptdiagonalen geben wieder, dass die Messunsicherheitsbeiträge mit sich selbst jeweils vollständig korreliert sind. Diese Werte haben immer den Wert 1.

Unkorrelierte Beziehungen zwischen verschiedenen Einflussgrößen zeigen „*0*“-Werte auf den übrigens Positionen der Matrix. Miteinander korrelierte Größen weisen die entsprechenden Korrelationskoeffizienten in der zur Hauptdiagonalen symmetrischen Matrix an entsprechenden Positionen doppelt auf.
Wenn u_1 mit u_3 korreliert ist, ist u_3 mit u_1 ebenso korreliert und die Element der Matrix 1,3 und 3,1 haben identische Werte.

Die ergänzte Bilanz der Substitutionsmessung

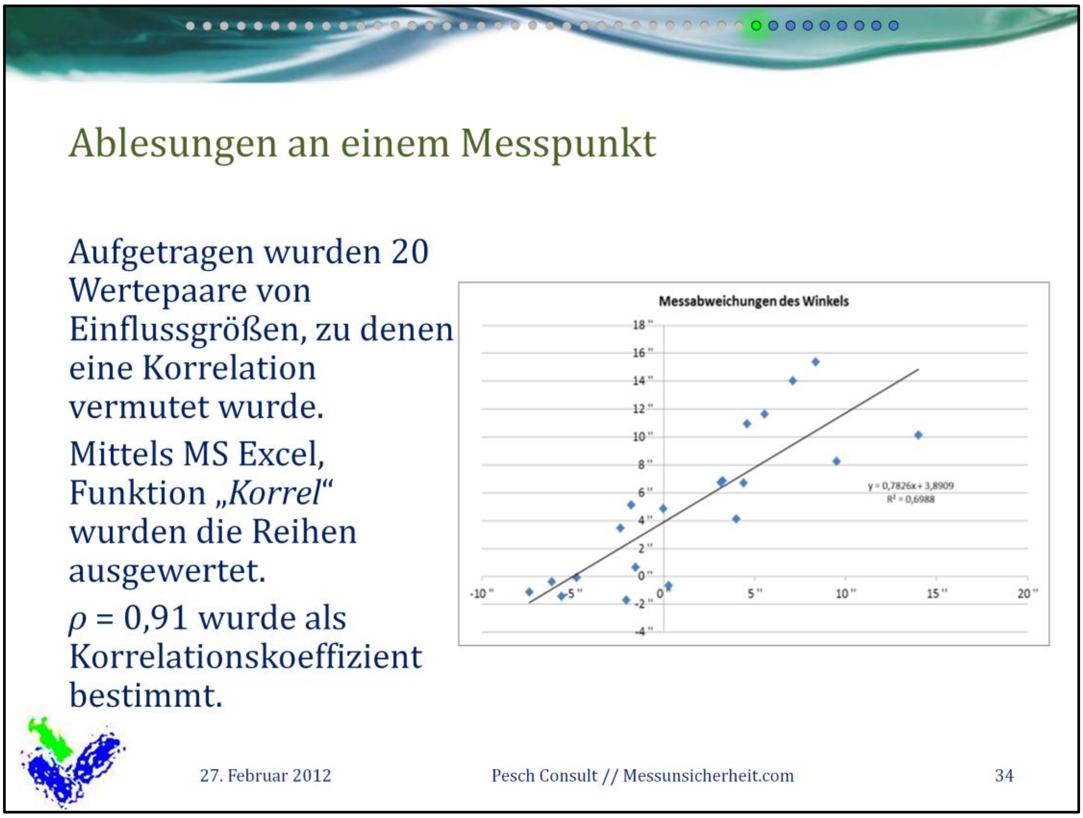
Nachfolgend werden die erkannten Korrelationen in die Bilanz der Substitutionsmessung eingebracht.

Prozess- und Modellgleichung

Die Prozess- und die Modellgleichung bleiben unverändert.

Nur die Bilanz wird um die fehlenden Korrelationen ergänzt.

Der Messprozess hat sich ja nicht geändert.



Auch wenn in der Theorie alle Werte zwischen *-1* und *1* auftreten können, sind in der Praxis die bereits angesprochenen Werte die wahrscheinlichsten. Entweder liegt die lineare Unabhängigkeit oder eine hohe Korrelation nahe *1* oder *-1* vor. Betragsmäßig kleinere Wert der Korrelationen sind ebenfalls möglich, aber tendentiell eher mathematischer Umformungen (Beispiel Transformation von karthesischen Koordinaten in Polarkoordinaten), denn physikalischer Ursachen zuzuordnen. Aber auch hier gibt es Ausnahmen, z.B. bei mehrfachen Abhängigkeiten (*A* ist zugleich mit *B* und mit *C* korreliert).

Messunsicherheitsbudget Substitutionsmessung

{1}		{3}	{4}	{5}	{6}	{7}	{9}
Beschreibung	Formel-zeichen	Halbbreite der Einflussgröße	Verteilung	Gewichtung	Korre-lation	Sensitivität	Messunsicherheits beitrag
		e		$\sqrt{G}$	ρ	c	{3}*{5}*{7}

Varianzen

Statistik, Vermessen Prüfling	$\delta\varphi_{DUT,Stat}$	0,018''	N	1,000		1,000	0,018''
Auflösung bei der Vermessung, Prüfling	$\delta\varphi_{DUT,Res}$	0,029''	R	0,577		1,000	0,017''
Statistik, Vermessen Normal	$\delta\varphi_{N,Stat}$	0,028''	N	1,000		-1,000	-0,028''
Auflösung bei der Vermessung, Normal	$\delta\varphi_{N,Res}$	0,022''	R	0,577		-1,000	-0,013''
Positionierung	$\delta\varphi_{Pos}$	0,185''	R	0,577		1,000	0,107''
Kalibrierwert, Normal	$\delta\varphi_{N,Kal}$	0,100''	N	1,000		-1,000	-0,100''
Linearität der Messmaschine, Prüfling	$\delta_{DUT,Lin}$	0,500''	R	0,577		1,000	0,289''
Linearität der Messmaschine, Normal	$\delta_{N,Lin}$	0,500''	R	0,577		-1,000	-0,289''

Kovarianzen

Korrelation, Linearität, DUT und N	0,910	

$U_{0,95}$	In Bogensekunden	**0,39''**

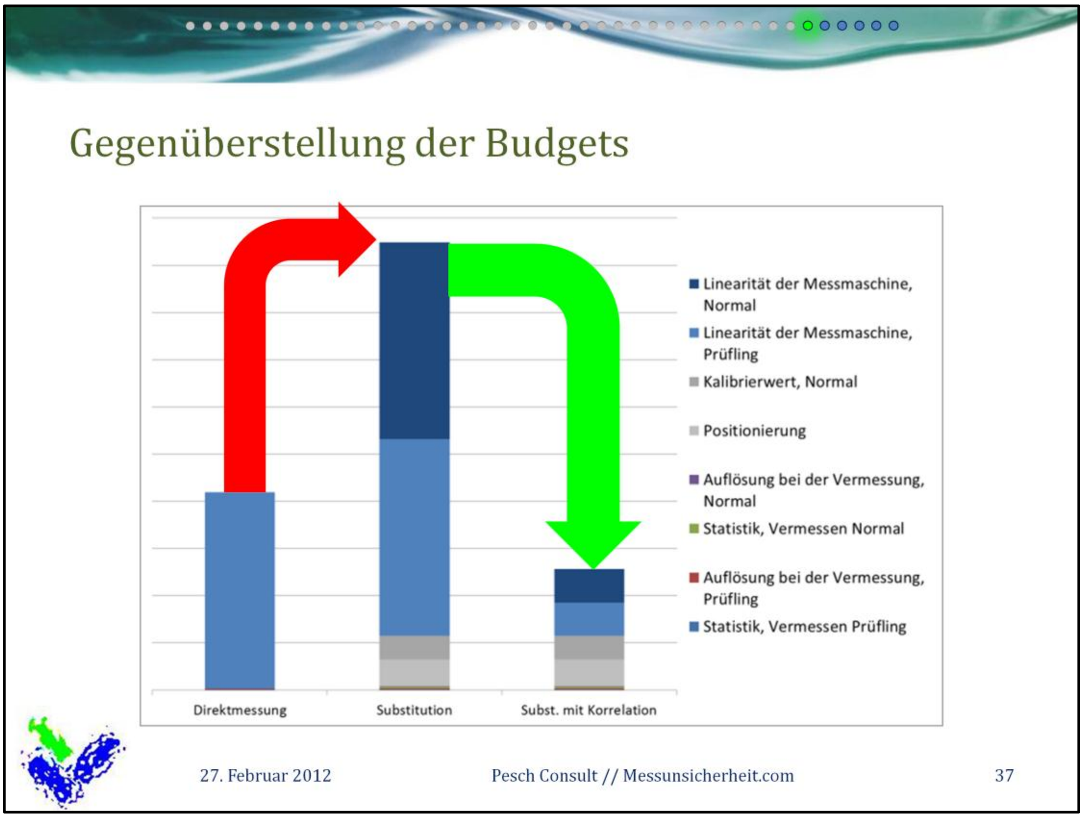
Die „Korrelationszeile“ im Budget

$$U(y) = k \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(c_i \cdot \sqrt{G_i} \cdot y_i\right)^2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \rho_{i,j} \cdot c_i \cdot c_j \cdot \sqrt{G_i \cdot G_j} \cdot y_i \cdot y_j}$$

{1}		{3}	{4}	{5}	{6}	{7}	{9}	{10}
Beschreibung	Formel-zeichen	Halbbreite der Einflussgröße	Verteilung	Gewichtung	Korre-lation	Sensitivität	Messunsicher-heitsbeitrag	
		e		√G	ρ	c	{3}*{5}*{7}	$\{9\}^2$
...	...	...	...	...	...	...	...	...
Linearität der Messmaschine, Prüfling	$\delta_{DUT,Lin}$	0,300''	R	0,577		1,000	0,289''	3,0E-02
Linearität der Messmaschine, Normal	$\delta_{N,Lin}$	0,300''	R	0,577		-1,000	-0,289''	3,0E-02
								8,3E-02
Kovarianzen								
Korrelation, Linearität, DUT und N					0,910			-0,055''
	$U_{0,95}$	In Bogensekunden					0,39''	

Für jede einzelne Kovarianz ist eine Zeile im Budget zu ergänzen.

Die Zuordnung der Bestandteile der Formel zu Zahlenwerten des Kalkulationsblattes wurden farbig unterlegt.



Die Substitutionsmessung ist ohne Berücksichtigung der Korrelation deutlich schlechter, als die Direktmessung, da die Einflussgrößen unkorreliert angenommen werden. Diese Annahme ist falsch und wirkt sich in der Bilanzsumme aus!

Nach Berücksichtigung der Korrelation wirkt von der Einflussgröße der Linearität lediglich der statistische Anteil. Eine weitere Budgetreduzierung ist nur mit einem Wechsel des Normals (geht aber nicht) oder einer besseren Positionierwiederholbarkeit möglich.

Schwierigkeiten in der Praxis umgehen

Auch wenn die Mathematik alle notwendigen Werkzeuge bietet und in Microsoft Excel sogar eine entsprechende Funktion („*KORREL*“) angeboten wird, gestaltet sich die Bestimmung der Korrelation in der Praxis oftmals schwierig.

Die experimentelle Seite

Für eine experimentelle Bestimmung müsste man in der Lage sein, innerhalb von Messreihen die Änderung der einzelnen Einflussgrößen messen zu können. Nur so kann man die systematischen von den statistischen Anteilen trennen.

Wäre dies vollständig möglich, braucht man keine Korrelation mehr, sondern kann die systematischen Einflussgrößen auch gleich numerisch korrigieren. Es bliebe der statistische, unkorrelierte Anteil.

Der Korrelationskoeffizient ist auch als Maß für das Verhältnis zwischen systematischer Verknüpfung jeweils zweiter Einflussgrößen und ihren jeweiligen statistischen Anteil interpretierbar.

Beim Schätzen besteht auch die Gefahr, den Korrelationsfaktor zu groß abzuschätzen und das Budget ad absurdum zu führen. Zumeist ist das Gegenteil der Fall und man lässt die Korrelation komplett außer Acht. Auch in vielen (zumeist älteren) Beispielen finden wir diese Annahmen.

Zusammenfassung (I)

- Die Modellgleichung muss besonders sorgsam aufgestellt werden.
- Unterbudgets können nicht genutzt werden.
- Die Berücksichtigung erforderte gute Kenntnisse des Messprozesses und der Eigenschaften der Messmittel.
- Durch die Korrelation kann die Messunsicherheitsbilanz um maximal $\sqrt{2}$ wachsen, aber andererseits auch fast auf *0* verringert werden!
- Die Beweisführung zur Festlegung des Korrelationskoeffizienten kann aufwendig werden und gibt nicht selten Grund zur Diskussion!

Zusammenfassung (II)

- Die Korrelation beschreibt den Zusammenhang, kann das Wesen des Verhältnisses auf Ursache und Wirkung hin aber nicht erklären.
- Sind zwei Zufallsgrößen linear voneinander abhängig, so sind sie vollständig korreliert und umgekehrt.
- Aus einem hohen Korrelationskoeffzienten darf nicht notwendig auf einen linearen Zusammenhang geschlossen werden; ein solcher kann, muss aber nicht vorliegen. (Linearitätsparadox).
- Sind zwei Variablen voneinander (statistisch) unabhängig, so sind sie unkorreliert. Die Umkehrung gilt nicht. (Unabhängigkeitssatz)
- Unterschiedliche Rohwerte können zu gleichen Korrelationskoeffizienten führen.

Fragen?

Herzlichen Dank für Ihre Aufmerksamkeit.

Nachträgliche Fragen beantworte ich gerne unter:
BerndPesch@Messunsicherheit.com

<u>Eigene Publikationen für Praktiker:</u>
Messunsicherheit, ISBN 978-3-8391-9026-5
Messen, Kalibrieren, Prüfen, ISBN 978-3-8370-9747-4
Bestimmung der Messunsicherheit nach GUM, ISBN 978-3-8330-1039-2