Korrelation
bei Messunsicherheitsanalysen

Wolfgang Schmid
EURAMET e.V.

277. PTB-Seminar:
Berechnung der Messunsicherheit - Empfehlungen für die Praxis

Berlin, 11. und 12. März 2014

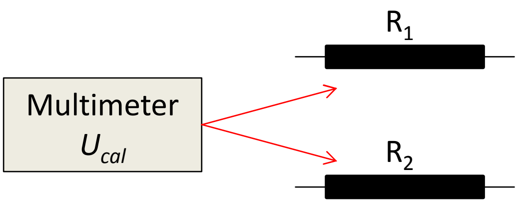
Gliederung

Gliederung

1) Einleitung
2) Ein wenig Theorie
3) Wie kann man Korrelationen in der Messunsicherheits-Analyse berücksichtigen?
4) Beispiele
5) Zusammenfassung

Ein einfaches Beispiel

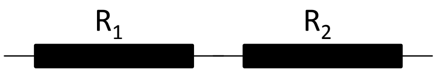
1) Messung von elektrischen Widerständen mit dem gleichen Multimeter:



$R_1 = (1{,}052 \pm 0{,}004)$ kΩ $\quad u_{rel}(R_1) = 0{,}4$ %

$R_2 = (1{,}013 \pm 0{,}004)$ kΩ $\quad u_{rel}(R_2) = 0{,}4$ %

2) Reihenschaltung der beiden Widerstände:



$R = R_1 + R_2 = 2{,}065$ kΩ

$$u(R) = \sqrt{u^2(R_1) + u^2(R_2)} \quad ??$$

?

$\cancel{u(R) = 0{,}006 \text{ k}\Omega}$ $\quad$ $\cancel{u_{rel}(R) = 0{,}3\ \% \quad u_{rel}(R) < u_{rel}(R_{1,2})}$

Korrelierte Eingangsgrößen

GUM 5.2. Korrelierte Eingangsgrößen

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i)$$

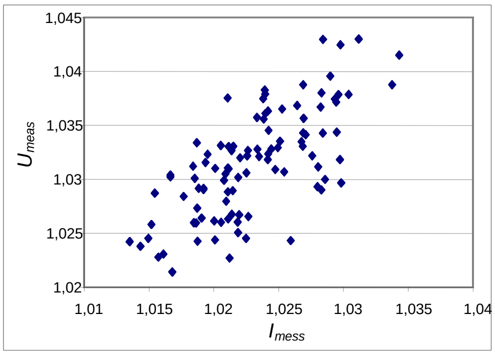
ist nur gültig, wenn die Eingangsgrößen X_i unabhängig voneinander oder unkorreliert sind …

Sind einige X_i signifikant korreliert, so müssen die Korrelationen berücksichtigt werden.

Was sind Ursachen für Korrelation?

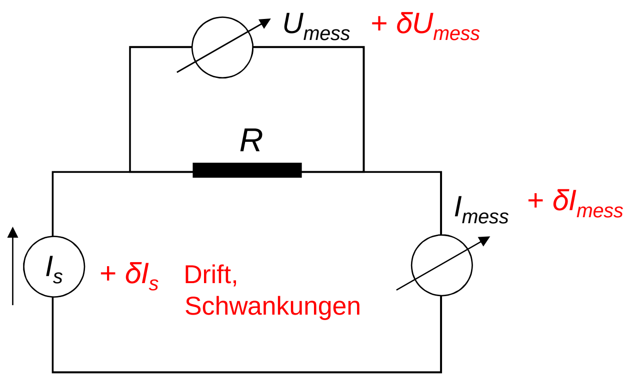
Typische Ursachen für die Korrelation von Eingangsgrößen:

- Verwendung desselben Normals oder Messgeräts
- Verwendung mehrerer Normale, die in derselben Vorrichtung kalibriert wurden (z.B. gestückelte Masse-Normale bei der Kalibrierung einer Waage)
- Verwendung des gleichen Referenzwertes
- Eine Eingangsgröße hängt direkt von einer weiteren ab (z.B. Luftdruck von Umgebungstemperatur)
- Zwei oder mehr Eingangsgrößen sind von demselben Effekt beeinflusst (z.B. Stromstärke und Spannung in einem Messkreis von Schwankungen der Stromquelle)
- …



Beispiele für Korrelation

Beispiel: Messen eines elektrischen Widerstands



Wenn die Stromquelle nicht völlig stabil ist, stehen die bei der Spannungs- und Strommessung beobachteten Schwankungen wenigstens teilweise in Beziehung, d.h. sie sind korreliert.

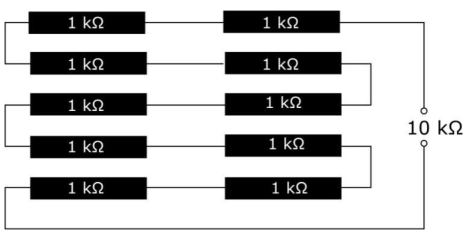
Beispiele für Korrelation

Beispiel: Bestimmung des Gesamtkohleverbrauchs

Foto: Modelleisenbahn Hamburg e.V. (MEHEV)

Wenn die Gesamtmenge des (Kohle-) Verbrauchs einer Feuerungsanlage aus Einzelmessungen mit stets **derselben Waage** bestimmt wird, sind die Einzelmessungen voneinander abhängig.

Beispiel: Widerstandsreihenschaltung



vgl. GUM , 5.2.2, Anmerkung 1

Wird eine Widerstandsreihenschaltung durch gleiche Einzelwiderstände realisiert, die alle mit **demselben Referenzwiderstand** kalibriert wurden, so wirkt sich die Unsicherheit des Referenzwiderstands auf alle Einzelwiderstände und somit auch auf den Gesamtwiderstand aus.

Folie: Stephan Mieke, PTB

1) Einleitung

2) Ein wenig Theorie:
- Was sind Korrelationen im Sinne des GUM?
- Wie beeinflussen Korrelationen die Messunsicherheit?

3) Wie kann man Korrelationen in der Messunsicherheits-Analyse berücksichtigen?

4) Beispiele

5) Zusammenfassung

Was fordert der GUM?

GUM 5.2.2 Kombinierte Varianz im Falle von korrelierten Eingangsgrößen

$$\boxed{u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}u(x_i,x_j) = \underbrace{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i)}_{\text{unkorrelierter Fall}} + \underbrace{2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}u(x_i,x_j)}_{\text{Mischterme mit Kovarianzen}}}$$ (GUM, Gl.13)

Wobei:

$u_c(y)$	kombinierte Standardunsicherheit
x_i ; x_j	Schätzwerte der Größen X_i und X_j (z.B. der Mittelwert aus wiederholten Messungen oder Literaturwerte)
$u(x_i)$	Standardunsicherheit von X_i
$u(x_i,x_j)$	Kovarianz der Größen X_i und X_j
$Y = f(X_i)$	mathematisches Modell

Kovarianz

Die Kovarianz für die Größen X_i und X_j berechnet sich gemäß:

$$u(x_i, x_j) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n} (x_{i,k} - \overline{x}_i)(x_{j,k} - \overline{x}_j)$$

(abzuleiten aus GUM, Gl. 17)

mit den n einzelnen Messwerten $x_{i,k}$ und $x_{j,k}$ der Größen X_i und X_j

Bei unabhängigen Zufallsgrößen haben Kovarianzen für $i \neq j$ Werte gleich oder nahe Null.

Korrelationskoeffizient

Der Grad der Korrelation von x_i und x_j wird durch den Korrelationskoeffizienten charakterisiert:

$$r(x_i, x_j) = r(x_j, x_i) = \frac{u(x_i, x_j)}{u(x_i)u(x_j)}$$

wobei $-1 \leq r(x_i, x_j) \leq +1$

Eingesetzt in GUM, Gl. 13 resultiert:

$$u_c^2(y) = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} c_i^2 u^2(x_i)}_{\text{Unkorrelierter Fall}} + \underbrace{2\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} c_i c_j u(x_i) u(x_j) r(x_i, x_j)}_{\text{Mischterme mit Kovarianzen}}$$

(GUM, Gl.16)

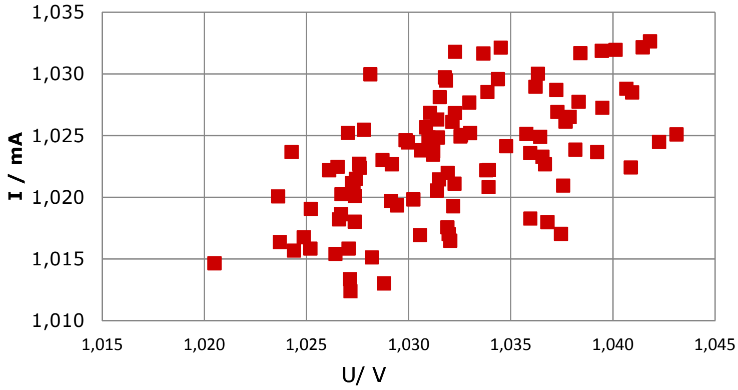
$c_{i;\,j} = \dfrac{\partial f}{\partial x_{i;\,j}}$ Empfindlichkeitskoeffizienten

Korrelationskoeffizient

Wie bestimmt man $r(x_i, x_j)$?

Der Korrelationskoeffizient wird aus den 2 Messreihen der Größen X_i und X_j errechnet,

z.B. mit der Excel-Funktion KORREL(Messreihe 1; Messreihe2)



Beispiel:

$X_i = U$

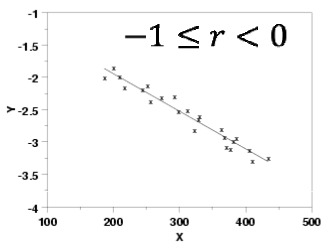
$X_j = I$

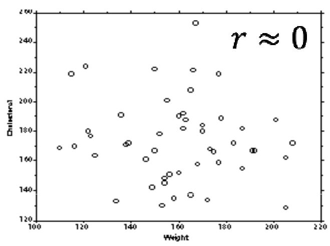
$\Rightarrow \quad r(U_i, I_j) = 0{,}58$

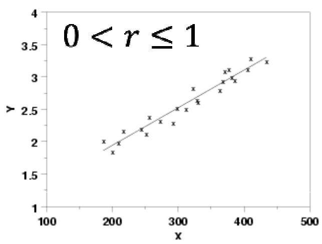
Folie: Stephan Mieke, PTB

Wie beeinflusst Korrelation $u_c(y)$?

$$\boxed{u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} c_i^2 u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} c_i c_j u(x_i) u(x_j) r(x_i, x_j)}$$







Korrelation von X_i und X_j kann die Messunsicherheit (a) vergrößern / (b) erniedrigen, wenn die zufälligen Messabweichungen der Größen X_i und X_j …

(a) … die Messgröße in die selbe Richtung beeinflussen,

(b) … sich (zumindest teilweise) gegenseitig kompensieren,

abhängig von den Vorzeichen von r , c_i, c_j

Gliederung

1) Einleitung

2) Ein wenig Theorie:

3) Wie kann man Korrelationen in der Messunsicherheits-Analyse berücksichtigen?
   a) GUM-Verfahren
   b) Monte-Carlo Simulation (MCS)
   c) Auflösung von Korrelationen

4) Beispiele

5) Zusammenfassung

Berücksichtigung von Korrelationen

a) GUM Verfahren:

$$\boxed{u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} c_i^2 u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} c_i c_j u(x_i) u(x_j) r(x_i, x_j)}$$

Erfordert Kenntnis des Korrelations-Koeffizienten $r(x_i, x_j)$

a) Abschätzung aus statistischen Daten / Wiederholungsmessungen von (x_i , x_j)

z.B. mit Excel-Funktion KORREL (Messreihe 1 ; Messreihe 2)

b) Abschätzung aus anderen vorhandenen Information (falls vorhanden)
z. B. aus den Wahrscheinlichkeitsverteilungen von X_i und X_j

$$\mathrm{u}(x_i, x_j) = E\big[(X_i - E(X_i))(X_j - E(X_j))\big] \qquad r(x_i, x_j) = \frac{u(x_i, x_j)}{u(x_i)(x_j)}$$

$E(X_i)$ Erwartungswert der Zufallsvariable X_i

Berücksichtigung von Korrelationen

b) Monte-Carlo Simulation (MCS):

Gemäß GUM Supplement 1

- Simulation von korrelierten Eingangsdaten
  (Ursache für Korrelation muss verstanden sein)
- Direkte Bestimmung der kombinierten Standard-Messunsicherheit und von Vertrauensintervallen
- Korrelationskoeffizient kann berechnet werden (ist aber nicht erforderlich)

c) Auflösung der Korrelation:

- Durch geschickte Wahl des mathematischen Modells
- Sollte bevorzugte Methode sein, wann immer möglich

Gliederung

1) Einleitung

2) Ein wenig Theorie

3) Wie kann man Korrelationen in der Messunsicherheits-Analyse berücksichtigen?

4) Beispiele:
   - Wiederholte Wägungen: GUM
   - Fläche eines Rechtecks: GUM & MSC
   - Messung eines elektrischen Widerstands: GUM & Auflösung

5) Zusammenfassung

Beispiel 1:
Wiederholte Wägungen

Foto: Modelleisenbahn Hamburg e.V. (MEHEV)

Wenn die Gesamtmenge des (Kohle-) Verbrauchs einer Feuerungsanlage aus Einzelmessungen mit stets **derselben Waage** bestimmt wird, sind die Einzelmessungen miteinander korreliert.

Masse der Kohle je LKW: 25,0 t,
geeichte Fahrzeugwaage (Eichfehlergrenze: ± 1 %),
Anzahl der Wägungen im Jahr: 5000.

Da ein geeichtes Messgerät benutzt wird, ist von einer rechteckigen Wahrscheinlichkeitsverteilung auszugehen, d.h. $u(x) = a / \sqrt{3}$ mit a als halber absoluten Spanne.

Folie: Stephan Mieke, PTB

Beispiel 1:
Wiederholte Wägungen

Daraus ergibt sich:

Masse der Kohle je Fahrzeug: 25,0 t / Anzahl der Wägungen pro Jahr: 5000
⇒ Gesamtmasse: 125000 t

Eichfehlergrenze je Wägung: ± 0,250 t (± 1%)
Standardunsicherheit der Einzelwägung $u(m_i)$: 0,144 t (0,577 %)

berechnete kombinierte Standardunsicherheit $u_c(m_{ges})$ der Gesamtmasse m_{ges}
bei Berücksichtigung der Korrelation: 721,7 t (0,577 %)
ohne Berücksichtigung der Korrelation: 10,2 t (0,008 %)

mit Korrelation: $$u_c(y) = \left| \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \cdot u(x_i) \right| = \left| \sum_{i=1}^{N} c_i \cdot u(x_i) \right|$$ für $r = +1$

ohne Korrelation: $$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot u^2(x_i)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} c_i^2 \cdot u^2(x_i)}$$ für $r = 0$

Folie: Stephan Mieke, PTB

Beispiel 2:
Fläche eines Rechtecks

$$a = a_0 + \delta a_{res} + \delta a_{cal}$$

$$A = a \cdot b$$

$$b = b_0 + \delta b_{res} + \delta b_{cal}$$

1. Bestimmung der Kantenlängen a und b mit einem kalibrierten Messschieber.
2. Bei der Messunsicherheit der Fläche werden lediglich die Kalibrierung des Messschiebers und seine Auflösung berücksichtigt.
3. Der Kalibrierwert des Messschiebers sei Null, seine Messunsicherheit u_{cal} sei im verwendeten Messbereich konstant.
4. Die Messwerte von *a* und *b* sind durch Zufallsgrößen auf Grund der Auflösung des Messschiebers δa_{res} und δb_{res} sowie seiner Kalibrierung δa_{cal} und δb_{cal} beeinflusst.
5. δa_{res} und δb_{res} sind unkorreliert.
6. δa_{cal} und δb_{cal} haben die gleiche Ursache und verursachen eine Korrelation von *a* und *b*
   Es wird angenommen: $\delta a_{cal} = \delta b_{cal}$

Beispiel 2:
Fläche eines Rechtecks

$$\boxed{A = a \cdot b}$$

Aus GUM Gl. (16) resultiert:

$$\boxed{u_c(A) = \sqrt{(c_a \cdot u(a))^2 + (c_b \cdot u(b))^2 + 2 \cdot c_a \cdot c_b \cdot u(a) \cdot u(b) \cdot r(a;b)}}$$

$$u(a) = \sqrt{u_{res}^2(a) + u_{cal}^2} \qquad c_a = \frac{\partial A}{\partial a} = b$$

$$u(b) = \sqrt{u_{res}^2(b) + u_{cal}^2} \qquad c_b = \frac{\partial A}{\partial b} = a$$

Der Korrelationskoeffizient kann berechnet werden (hier nicht gezeigt):

$$r(a;b) = \frac{u_{cal}^2}{u_{res}^2 + u_{cal}^2} \qquad \text{wobei } u_{res}(a) = u_{res}(b) = u_{res}$$

Beispiel 2:
Fläche eines Rechtecks

A) Mit GUM-Verfahren:

$$u_c(A) = \sqrt{(c_a \cdot u(a))^2 + (c_b \cdot u(b))^2 + 2 \cdot c_a \cdot c_b \cdot u(a) \cdot u(b) \cdot r(a;b)}$$

Parameter	
a_0 =	31,2
b_0 =	38,9
Auflösung	0,1
u_{res} =	0,03
u_{cal} =	0,05
r(a,b) =	0,750

GUM	Wert	u_i	c_i	$c_i\, u_i$
Messung von a		***0,06***	***38,9***	***2,25***
Messwert	31,2	0,03		
Kalibrierung	0	0,05		
Messung von b		***0,06***	***31,2***	***1,80***
Messwert	38,9	0,03		
Kalibrierung	0	0,05		
Fläche	1213,7		u(A) =	**3,79**
ohne Berücksichtigung der Korrelation			*u(A) =*	*2,88*

$$r(a;b) = \frac{u_{cal}^2}{u_{res}^2 + u_{cal}^2}$$

Beispiel 2:
Fläche eines Rechtecks

B) Mit Monte-Carlo Simulation:

Erzeugung von 10 000 Zufallsdaten für *a* und *b* :

$$a = a_0 + \delta a_{res} + \delta a_{cal} = a_0 + \delta a_{res} + \delta_{cal}$$

$$b = b_0 + \delta b_{res} + \delta b_{cal} = b_0 + \delta b_{res} + \delta_{cal}$$

Normal-Verteilung mit s = u_{cal}

Rechteck-Verteilungen ± Auflösung/2
unabhängig für δa_{res} und δb_{res}

Berechnung von 10 000 Werten für A = *a b*

Bestimmung der Messunsicherheit $u(A) = s(A) = \frac{1}{10000-1}\sum_{k=1}^{10000}\left(\bar{A} - A_k\right)^2$

Beispiel 2:
Fläche eines Rechtecks

Parameter	
a_0 =	31,2
b_0 =	38,9
Auflösung	0,1
u_{res} =	0,03
u_{cal} =	0,05
r(a,b) =	0,750

GUM	Wert	u_i	c_i	$c_i\,u_i$
Messung von a		*0,06*	*38,9*	*2,25*
Messwert	31,2	0,03		
Kalibrierung	0	0,05		
Messung von b		*0,06*	*31,2*	*1,80*
Messwert	38,9	0,03		
Kalibrierung	0	0,05		
Fläche	1213,7		u(A) =	3,79
ohne Berücksichtigung der Korrelation			*u(A) =*	*2,88*

Generierung von Zufallsdaten

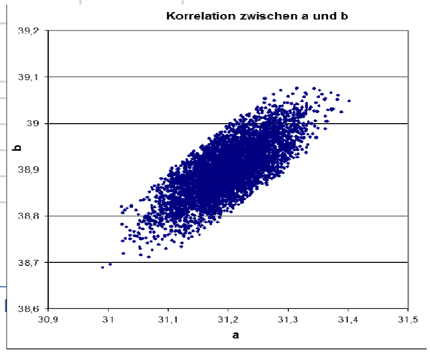
	x_a	x_b	x_{cal}
	~R[-0,5;0,5]	~R[-0,5;0,5]	~N[0;1]
m(..)	-0,0046	0,0048	-0,0066
s(..)	0,2926	0,2852	1,0050

Monte-Carlo Simulation (MCS)

	a	b	A	r(a,b)
	$a_0+\delta a_{res}+\delta_{cal}$	$b_0+\delta b_{res}+\delta_{cal}$	a*b	korrel(…)
m(..)	31,20	38,90	1213,7	0,753
s(..)	0,06	0,06	3,80 = u(A)	

r	x_a	x_b	x_{cal}	a = $a_0 + u_{res}x_a + u_{cal}x_{cal}$	b = $b_0 + u_{res}x_b + u_{cal}x_{cal}$	a*b
1	-0,343928	0,036973	0,244257	31,17782003	38,91591018	1213,31324
2	0,004532	0,40878	1,733133	31,28710986	39,02753467	1221,05876
3	0,023179	-0,2589	1,095023	31,25706901	38,92886075	1216,80209
4	0,255242	0,219291	-1,69043	31,14100254	38,83740746	1209,4358

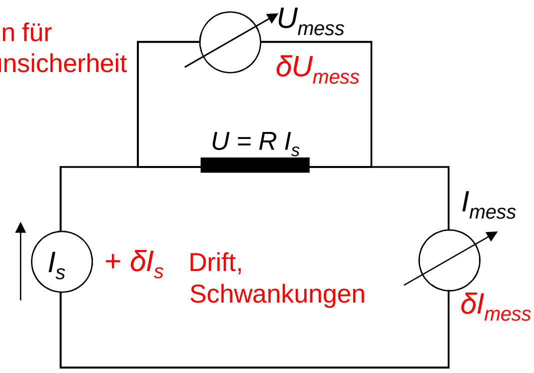
10 000 simulierte Daten



Beispiel 3:
Messung eines elektrischen Widerstands

Messgröße: $\boxed{R = \dfrac{U_{mess}}{I_{mess}}}$

Quellen für Messunsicherheit



Theoretische Betrachtungen:

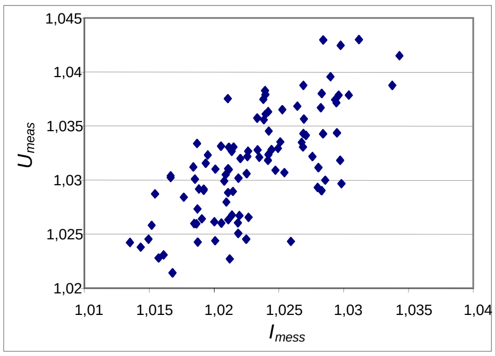
$$I_s = I_0 + \delta I_s$$

$$I_{mess} = I_0 + \delta I_s + \delta I_{mess} \qquad \cancel{+\,\delta I_{cal} + \delta I_{res}}$$

$$U_{mess} = R \cdot (I_0 + \delta I_s) + \delta U_{mess} \qquad \cancel{+\,\delta U_{cal} + \delta U_{res}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} I_{mess} &= I_0 + \delta I_s + \delta I_{mess} \\ U_{mess} &= R \cdot I_0 + R \cdot \delta I_s + \delta U_{mess} \end{aligned}}$$

verursacht Korrelation von I_{mess} und U_{mess}

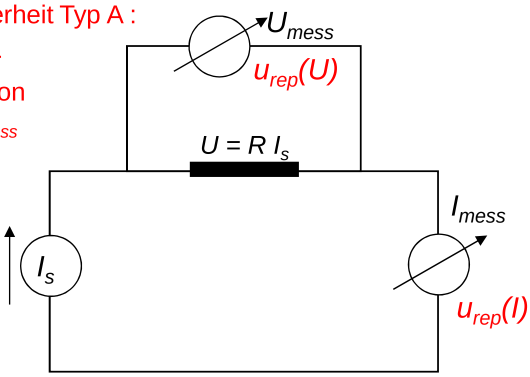


Beispiel 3:
Messung eines elektrischen Widerstands

Messgröße: $\boxed{R = \frac{U_{mess}}{I_{mess}}}$

Messunsicherheit Typ A :

Streuung der Messwerte von U_{mess} und I_{mess}



Messung:

$$I_{mess} = I_0 \pm u_{rep}(I)$$

$$U_{mess} = U_0 \pm u_{rep}(U)$$

Auswertung – Option 1: Korrektur der Korrelation

$$\boxed{u(R) = \sqrt{\left(c_U \cdot u_{rep}(U)\right)^2 + \left(c_I \cdot u_{rep}(I)\right)^2 + 2 \cdot r(U;I) \cdot c_U \cdot u_{rep}(U) \cdot c_I \cdot u_{rep}(I)}}$$

Empfindlichkeitskoeffizienten $c_U = \frac{1}{I_0}$ $\quad c_I = -\frac{U_0}{I_0^2}$

Korrelationskoeffizient $r(U;I)$

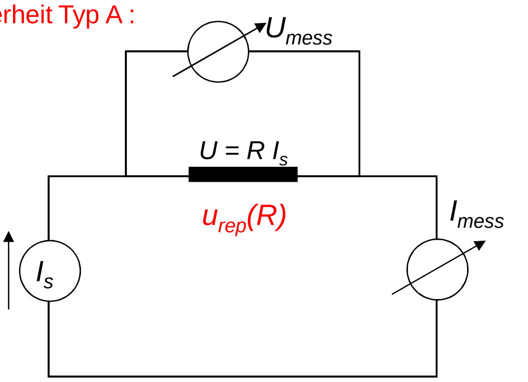
Beachte: $r(U;I) \cdot c_U \cdot c_I < 0$!

Beispiel 3:
Messung eines elektrischen Widerstands

Messgröße: $\boxed{R = \frac{U_{mess}}{I_{mess}}}$

Messunsicherheit Typ A :

Streuung der Werte von R_j



Auswertung – Option 2:

Auflösung der Korrelation

$$R_j = \frac{U_{mess\,j}}{I_{mess\,j}}$$ für jedes Messwertepaar für I_{mess} *und* U_{mess}

$$R = \overline{R} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} R_j$$

$$\boxed{u_{rep}(R) = \frac{s(R)}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{j=1}^{n} \left(\overline{R} - R_j\right)^2}}$$

Die Korrelation wird durch geschickte Wahl des Auswerteverfahrens vermieden

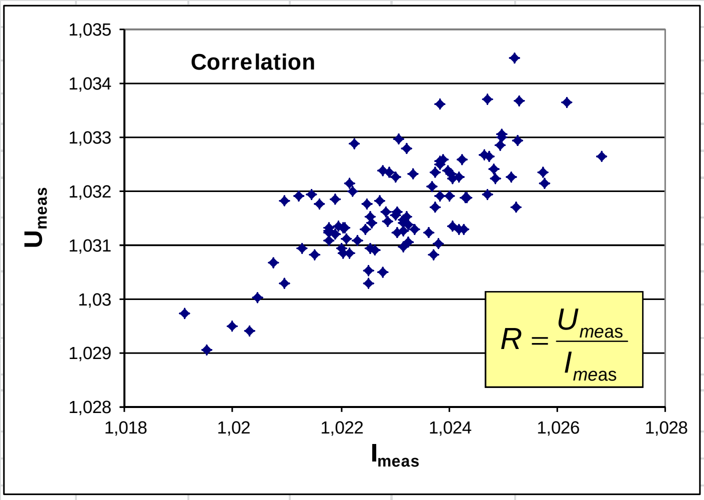
Beispiel 3:
Messung eines elektrischen Widerstands

Correlation coefficient
r(U;I) = 0,728

	I_{meas} mA	U_{meas} V	R kΩ
Mean	**1,02311**	**1,03170**	**1,00840**
s	0,00146	0,00094	0,00100
$u_A = s/\sqrt{n}$	**0,00015**	**0,00009**	**$\boxed{0,00010}$**

j	I_{meas}	U_{meas}	R
1	1,025221	1,034466	1,0090175
2	1,023038	1,031606	1,0083751
3	1,023358	1,031276	1,0077372
4	1,025253	1,031687	1,0062764
5	1,022766	1,030476	1,0075382
6	1,023342	1,032318	1,008771
7	1,022495	1,031752	1,0090539
8	1,022009	1,030926	1,0087244
9	1,024754	1,032631	1,0076866
10	1,02		

100 measured data



GUM	Correction of the Correlation			
		u_i	c_i	$c_i * u_i$
U_{meas}	1,03170	0,00009	0,977413	9,2136E-05
I_{meas}	1,02311	0,00015	-0,98562	-0,0001442
R	**1,00840** kΩ			**0,00010** **considering correlation**
				0,00017 without correction of correlation

Gliederung

1) Einleitung
2) Ein wenig Theorie:
3) Wie kann man Korrelationen in der Messunsicherheits-Analyse berücksichtigen?
4) Beispiele
5) Zusammenfassung

Was haben wir gelernt?

- Eingangsgrößen einer Messung können korreliert sein (genaugenommen ihre zufälligen Messabweichungen)
- Ursachen für Korrelation von Eingangsgrößen können vielfältig sein: gemeinsame Einflussgröße, Verwendung des gleichen Messgerätes, …
- Korrelationen können die kombinierte Messunsicherheit sowohl vergrößern, als auch verringern.
- Manchmal können Korrelationen durch ein geeignetes mathematisches Modell vermieden (aufgelöst) werden.
- Aus gemessenen Wertepaaren der korrelierten Größen kann deren Korrelationskoeffizient berechnet werden.
- Liegt signifikante Korrelation von Eingangsgrößen vor, so muss die kombinierte Standardmessunsicherheit mit GUM Gl. (13) berechnet werden.
- Korrelation kann auch über Monte-Carlo Simulation (GUM-S1) berücksichtigt werden.

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit

Noch Fragen?

Dr. Wolfgang Schmid
EURAMET e.V.
Bundesallee 100
D-38116 Braunschweig
wolfgang.schmid@euramet.org