

Erweiterte Messunsicherheit

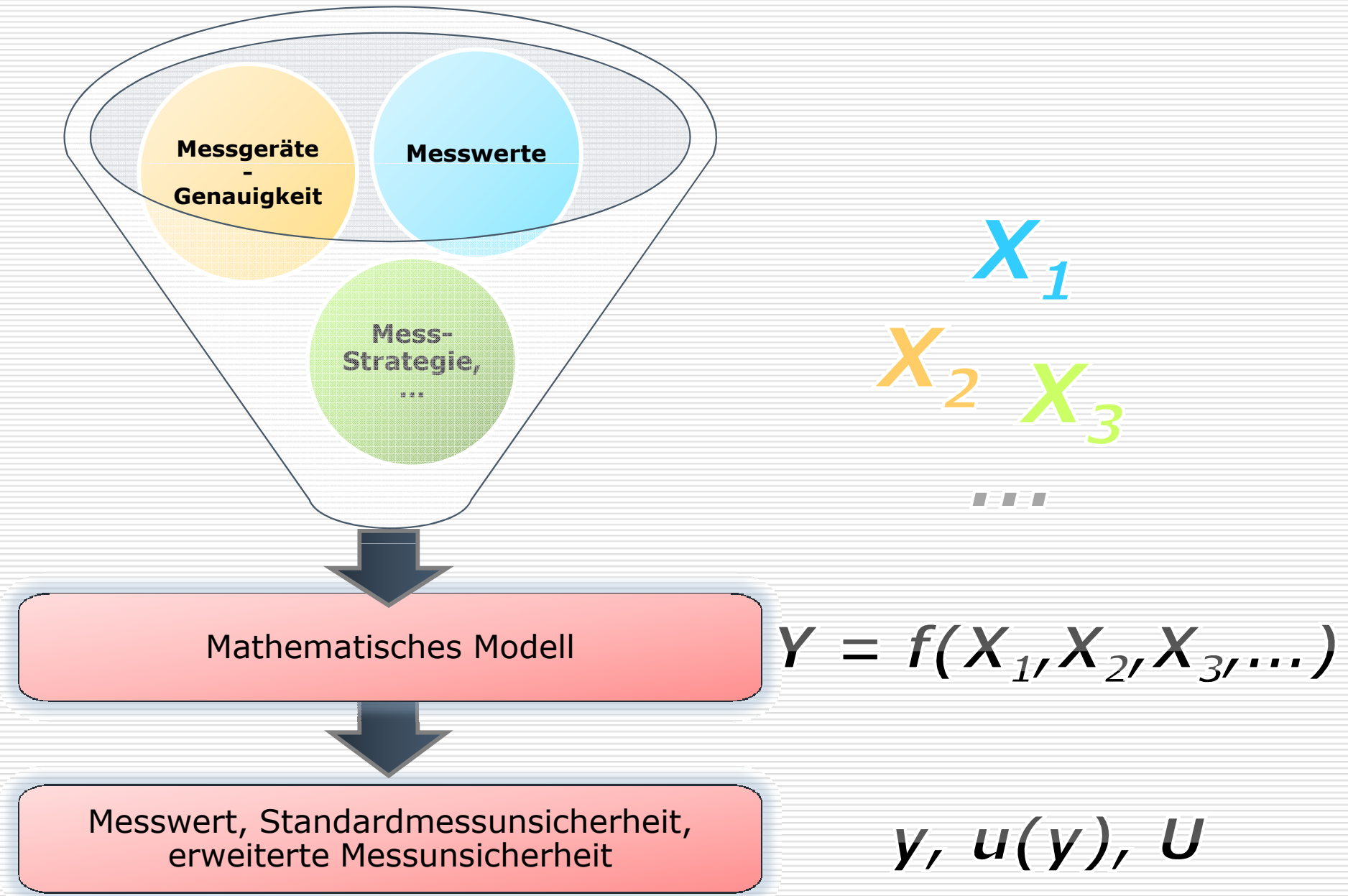
Gerd Wübbeler, Stephan Mieke
PTB, 8.4

Berechnung der Messunsicherheit – Empfehlungen für die Praxis
Berlin, 11. und 12. März 2014

Gliederung

1. Was gibt die erweiterte Messunsicherheit an ?
2. Berechnung nach GUM
3. Berechnung nach GUM Supplement 1
4. Beispiele
5. Zusammenfassung

1. Was gibt die erweiterte Messunsicherheit an?



1. Was gibt die erweiterte Messunsicherheit an?

Definitionen zur erweiterten Messunsicherheit:

GUM (dt. Ausgabe 1995, 2.3.5):

Erweiterte Messunsicherheit

Kennwert, der einem Bereich um das Messergebnis kennzeichnet, von dem erwartet werden kann, dass er einen großen Anteil der Verteilung der Werte umfasst, die der Messgröße vernünftigerweise zugeordnet werden können.

Wörterbuch der Metrologie (VIM, dt. Ausgabe 2010, 2.35):

Erweiterte Messunsicherheit

Produkt aus der kombinierten Standardmessunsicherheit und einem Faktor, der größer als eins ist.

ANMERKUNG 1 Der Faktor hängt von der Art der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Ausgangsgröße des Modells der Messung ab sowie von der gewählten Überdeckungswahrscheinlichkeit.

1. Was gibt die erweiterte Messunsicherheit an?

Definitionen zum Überdeckungsintervall:

Wörterbuch der Metrologie (VIM, dt. Ausgabe 2010, 2.36):

Überdeckungsintervall

Intervall, das die Menge der wahren Werte einer Messgröße mit einer angegebenen Wahrscheinlichkeit enthält, auf der Grundlage der verfügbaren Information

ANMERKUNG 3 Ein Überdeckungsintervall kann von einer erweiterten Messunsicherheit abgeleitet sein

GUM S1 (dt. Ausgabe 2012, 3.12):

Überdeckungsintervall

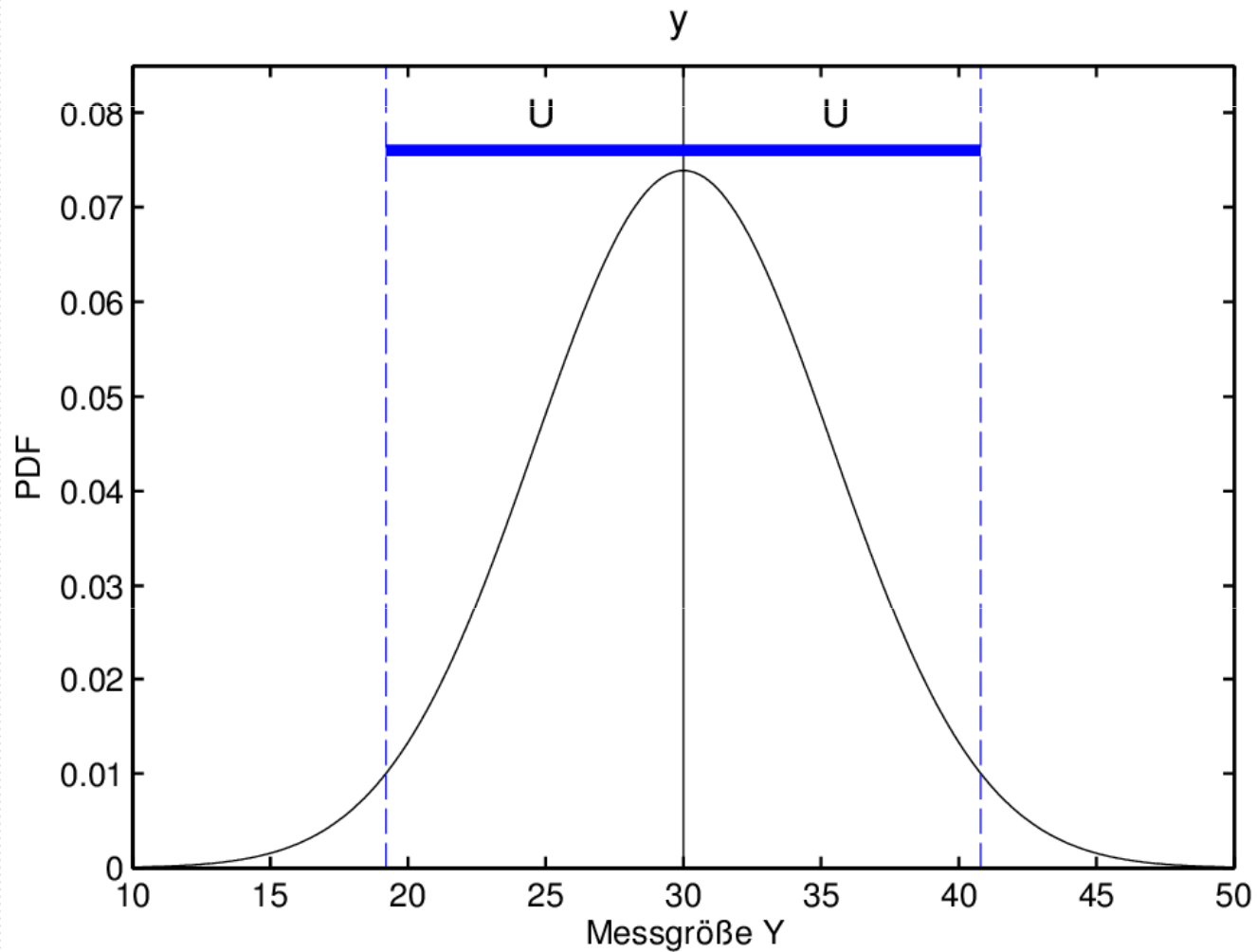
Intervall, welches den Wert einer Größe mit einer festgelegten Wahrscheinlichkeit enthält und auf der vorhandenen Information beruht

1. Was gibt die erweiterte Messunsicherheit an?

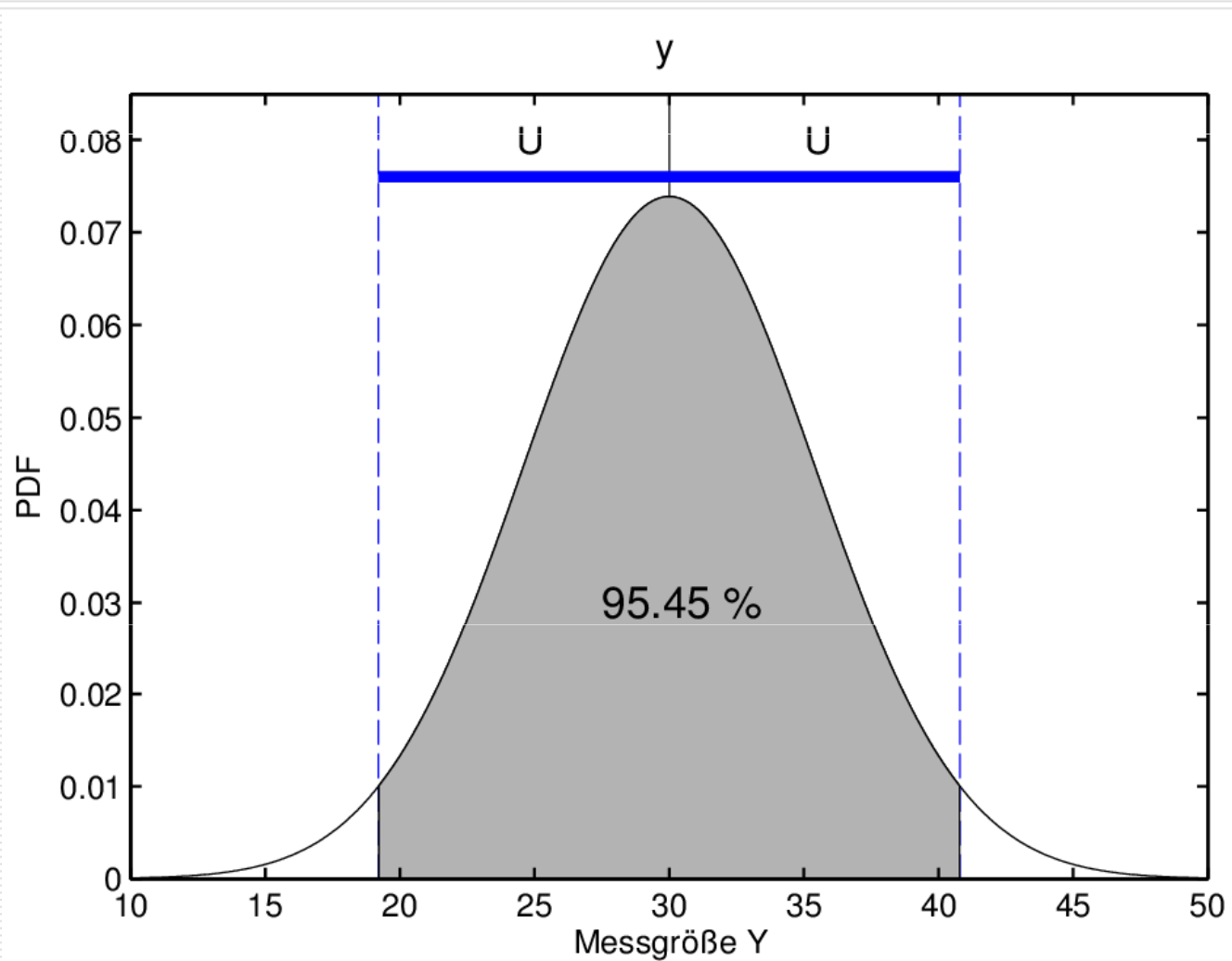
Beispiel: Normalverteilung

Schätzwert	30,0
Standardmessunsicherheit	5,4
Erweiterungsfaktor	2,00
Überdeckung	95,45 %
Erweiterte Messunsicherheit	10,8
Überdeckungsintervall	[30,0-10,8 ; 30,0+10,8] [19,2 ; 40,8]

1. Was gibt die erweiterte Messunsicherheit an?



1. Was gibt die erweiterte Messunsicherheit an?



1. Was gibt die erweiterte Messunsicherheit an?

Erweiterte Messunsicherheit **Standardmessunsicherheit**

- Kennzeichnet ein Intervall
 - Abhängig von Verteilung und gewählter Wahrscheinlichkeit
 - Fortpflanzung von Messunsicherheiten: nicht direkt verwendbar
- Streuung = Wurzel(Varianz)
 - Keine Aussage über Wahrscheinlichkeiten
 - Fortpflanzung von Messunsicherheiten: direkt verwendbar

2. Berechnung nach GUM

Erweiterte Messunsicherheit = $k * \text{Standardmessunsicherheit}$

$$U = k * u(y)$$

Überdeckungsintervall : $[y - U, y + U]$

Der Erweiterungsfaktor k hängt ab von :

- Der gewählten Überdeckungswahrscheinlichkeit
- Der Art der Wahrscheinlichkeitsverteilung
(beruht häufig auf Annahmen)

2. Berechnung nach GUM

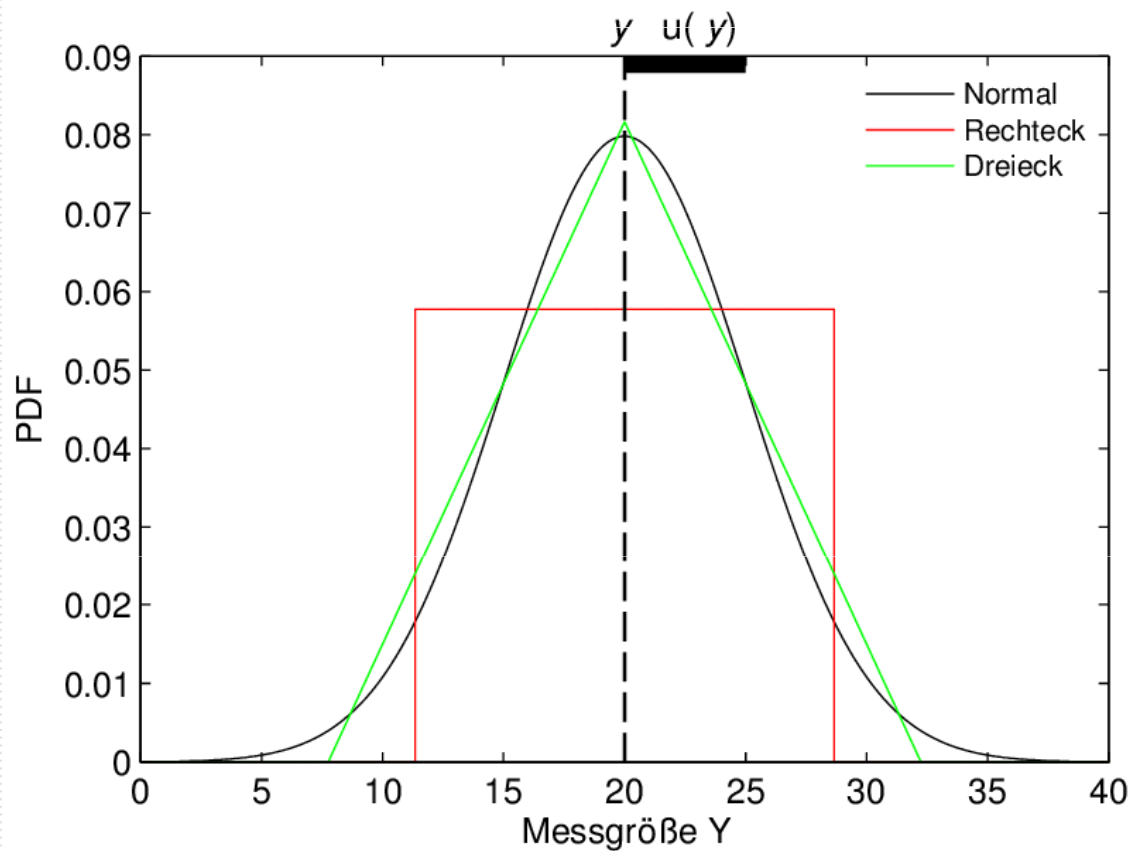
Erweiterungsfaktor k für eine **Normalverteilung**
in Abhängigkeit von der Überdeckungswahrscheinlichkeit

Wahrscheinlichkeit (in %)	Erweiterungsfaktor k
68,27	1,000
90,00	1,645
95,00	1,960
95,45	2,000
99,00	2,576
99,73	3,000

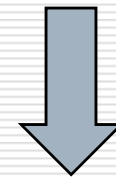
andere Wahrscheinlichkeitsverteilungen haben andere k -Faktoren

2. Berechnung nach GUM

Drei Verteilungen mit jeweils $y = 20,0$ und $u(y) = 5,0$



Wahrscheinlichkeit 95,45 %



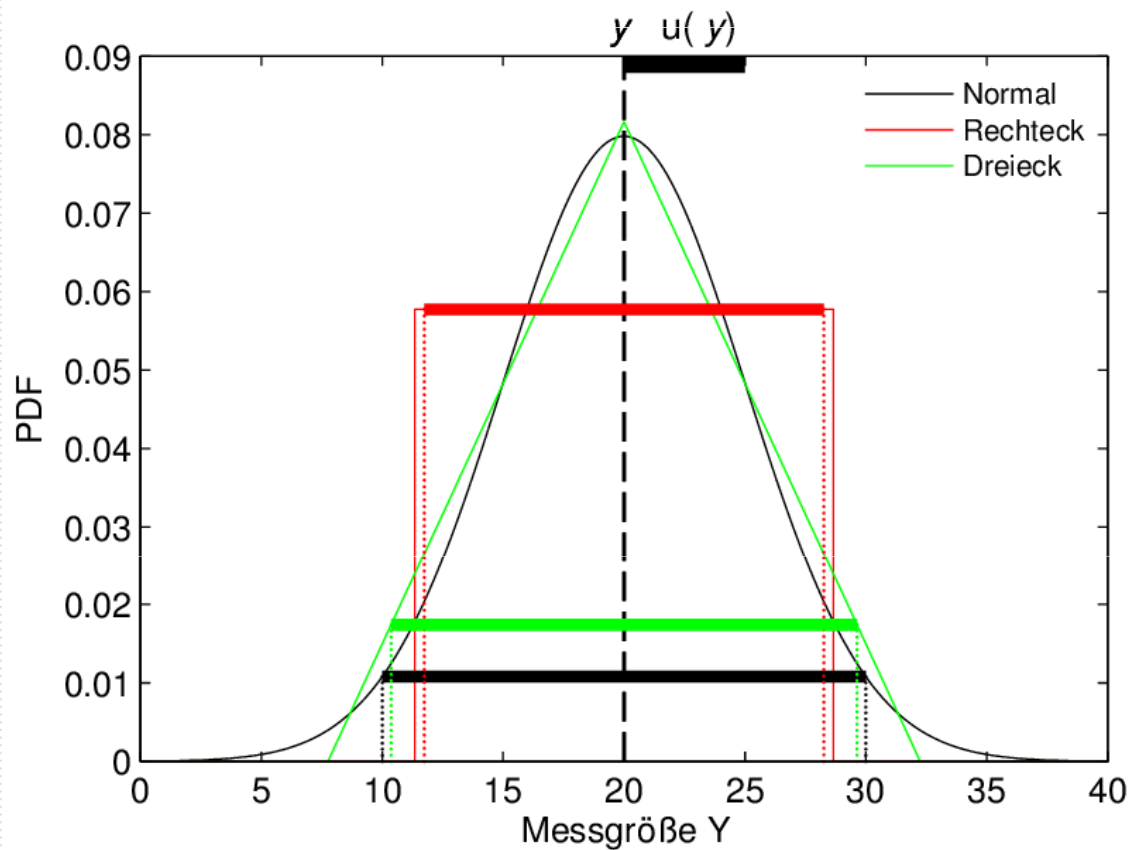
Normal $k = 2,0$

Rechteck $k = 1,65$

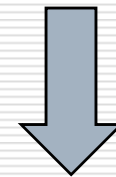
Dreieck $k = 1,93$

2. Berechnung nach GUM

Drei Verteilungen mit jeweils $y = 20,0$ und $u(y) = 5,0$



Wahrscheinlichkeit 95,45 %



Normal $U = 10,0$

Rechteck $U = 8,25$

Dreieck $U = 9,65$

2. Berechnung nach GUM

Table G.2 — Value of $t_p(\nu)$ from the t -distribution for degrees of freedom ν that defines an interval $-t_p(\nu)$ to $+t_p(\nu)$ that encompasses the fraction p of the distribution

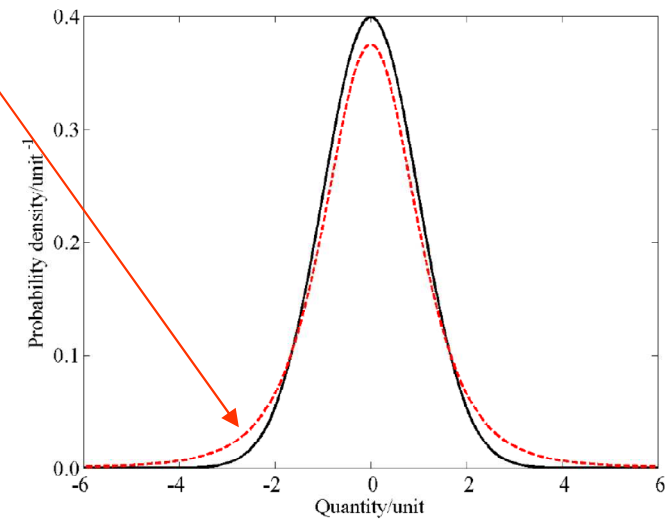
Degrees of freedom ν	Fraction p in percent					
	68,27 ^{a)}	90	95	95,45 ^{a)}	99	99,73 ^{a)}
1	1,84	0,31	12,71	13,97	63,66	235,80
2	1,32	2,92	4,30	4,53	9,92	19,21
3	1,20	2,35	3,18	3,31	5,84	9,22
4	1,14	2,13	2,78	2,87	4,60	6,82
5	1,11	2,02	2,57	2,65	4,03	5,51
6	1,09	1,94	2,45	2,52	3,71	4,90
7	1,08	1,89	2,36	2,43	3,50	4,53
8	1,07	1,86	2,31	2,37	3,36	4,26
9	1,06	1,83	2,26	2,32	3,25	4,09
10	1,05	1,81	2,23	2,28	3,17	3,96
50	1,01	1,68	2,01	2,05	2,68	3,16
100	1,005	1,680	1,984	2,025	2,626	3,077
∞	1,000	1,645	1,960	2,000	2,576	3,000

a) For a quantity z described by a normal distribution with expectation μ_z and standard deviation σ_z , the interval $\mu_z \pm k\sigma_z$ encompasses $p = 68,27$ percent, $95,45$ percent and $99,73$ percent of the distribution for $k = 1, 2$ and 3 , respectively.

GUM, Tabelle G.2

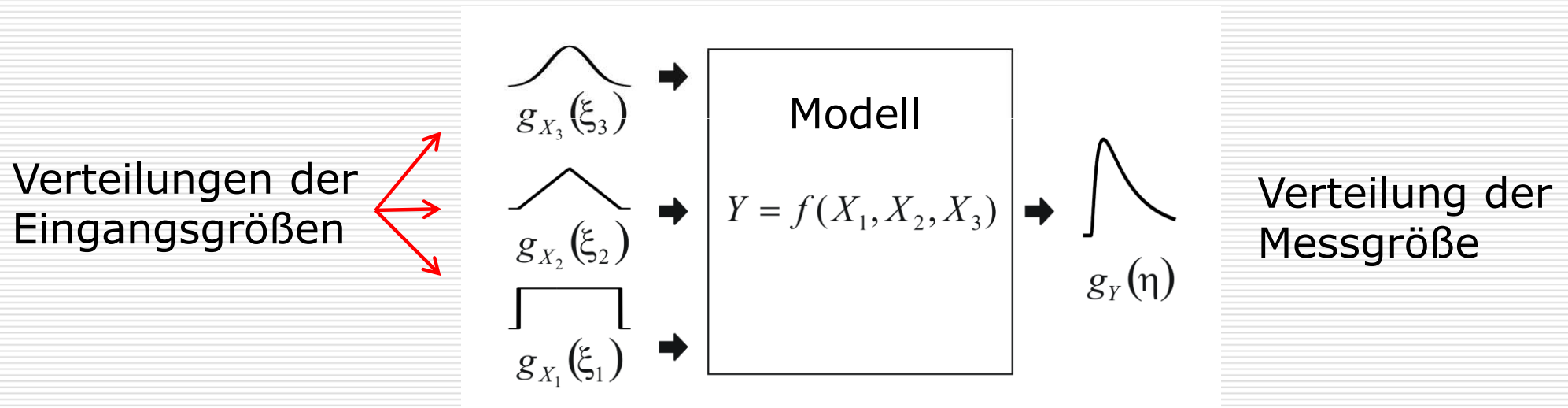
Student- oder t-Verteilung

(zu wählen bei wenigen Wiederholungsmessungen)



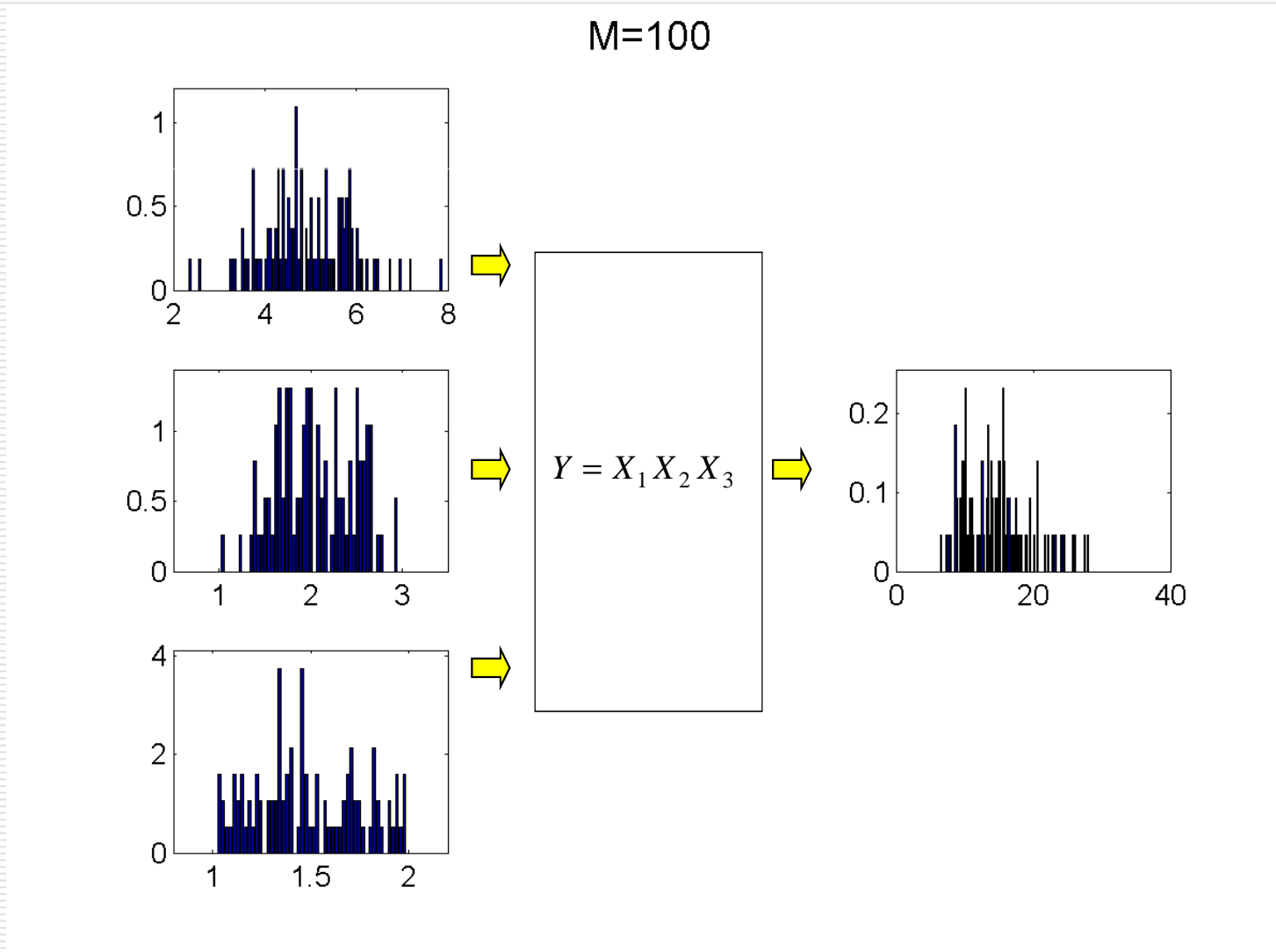
k-Faktoren der Normalverteilung

3. Berechnung nach GUM Supplement 1



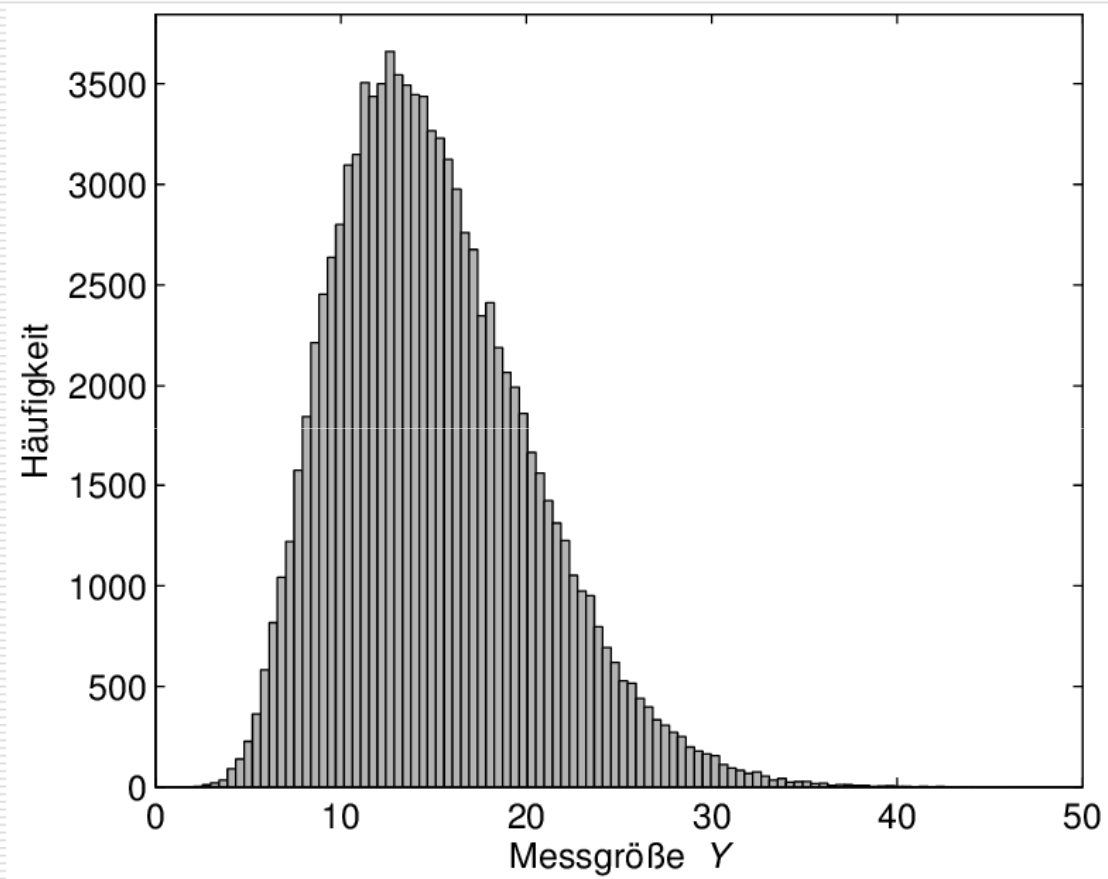
- Berechnung mittels Monte-Carlo Methode (MCM)
- Anwendbar insb. für nichtlineare Modelle

3. Berechnung nach GUM Supplement 1



3. Berechnung nach GUM Supplement 1

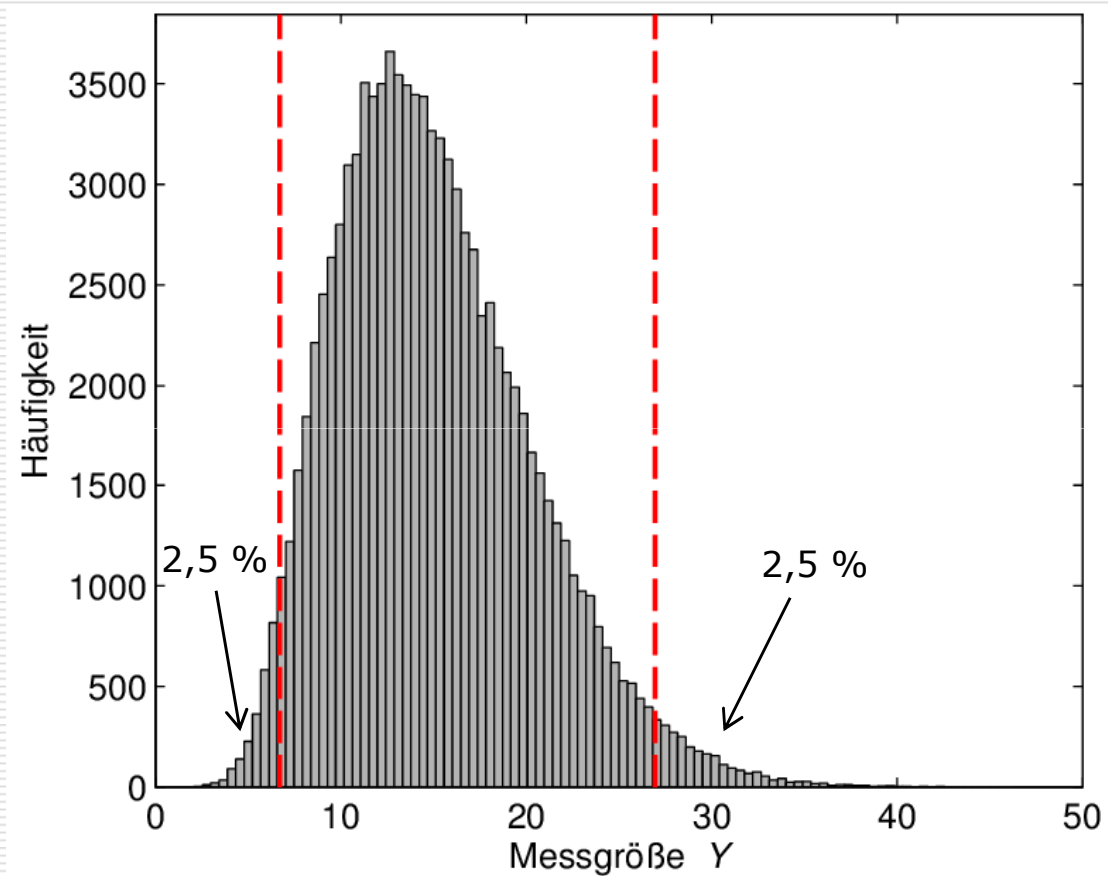
Überdeckungsintervall 95 %



3. Berechnung nach GUM Supplement 1

Überdeckungsintervall 95 %

 symmetrische Wahrscheinlichkeiten

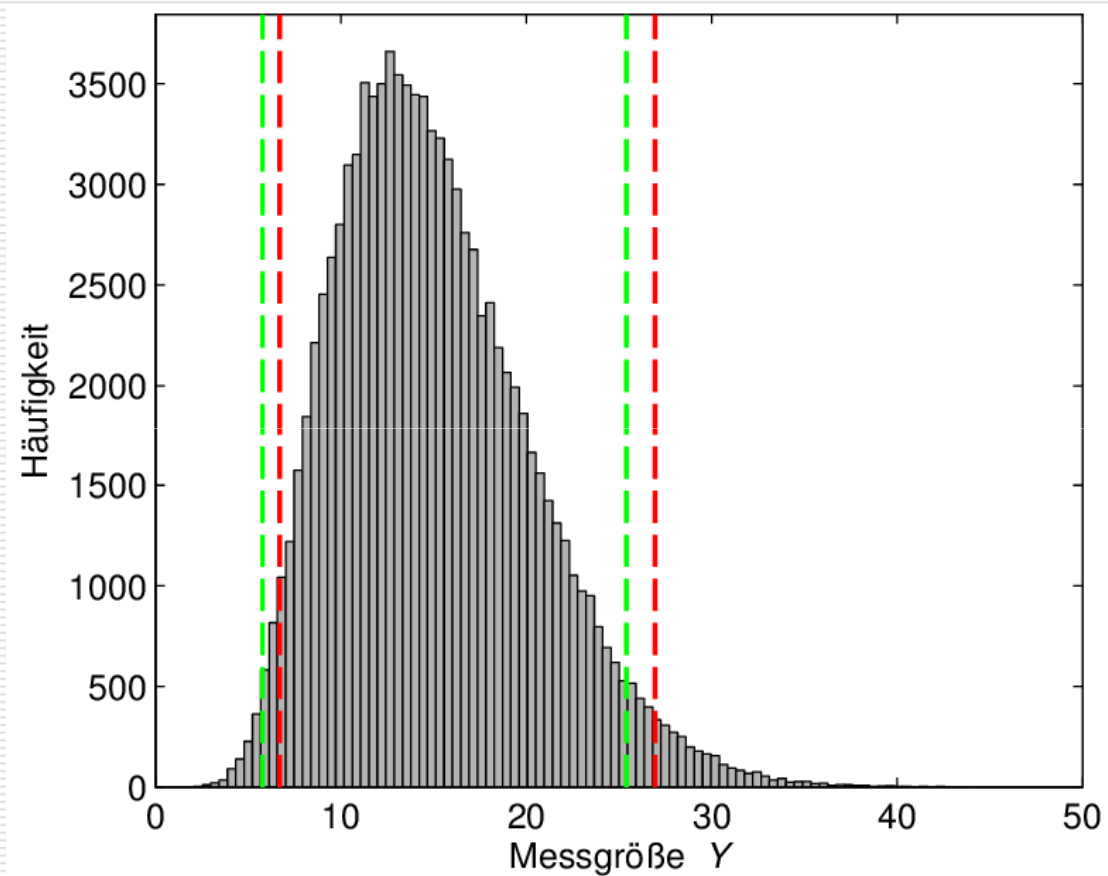


3. Berechnung nach GUM Supplement 1

Überdeckungsintervall 95 %

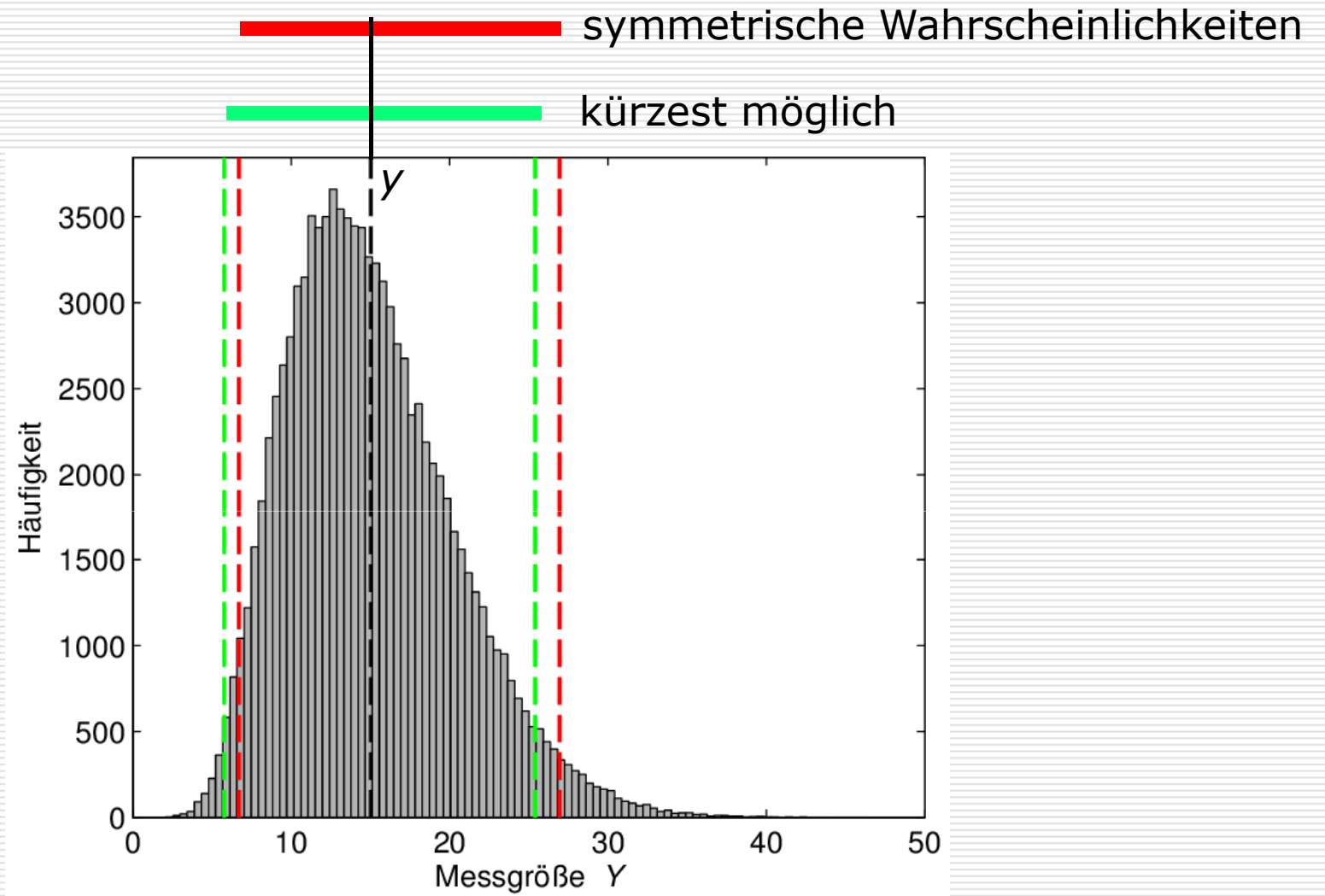
 symmetrische Wahrscheinlichkeiten

 kürzest mögliches



3. Berechnung nach GUM Supplement 1

Überdeckungsintervall 95 %



3. Berechnung nach GUM Supplement 1

GUM S1 Überdeckungsintervall:

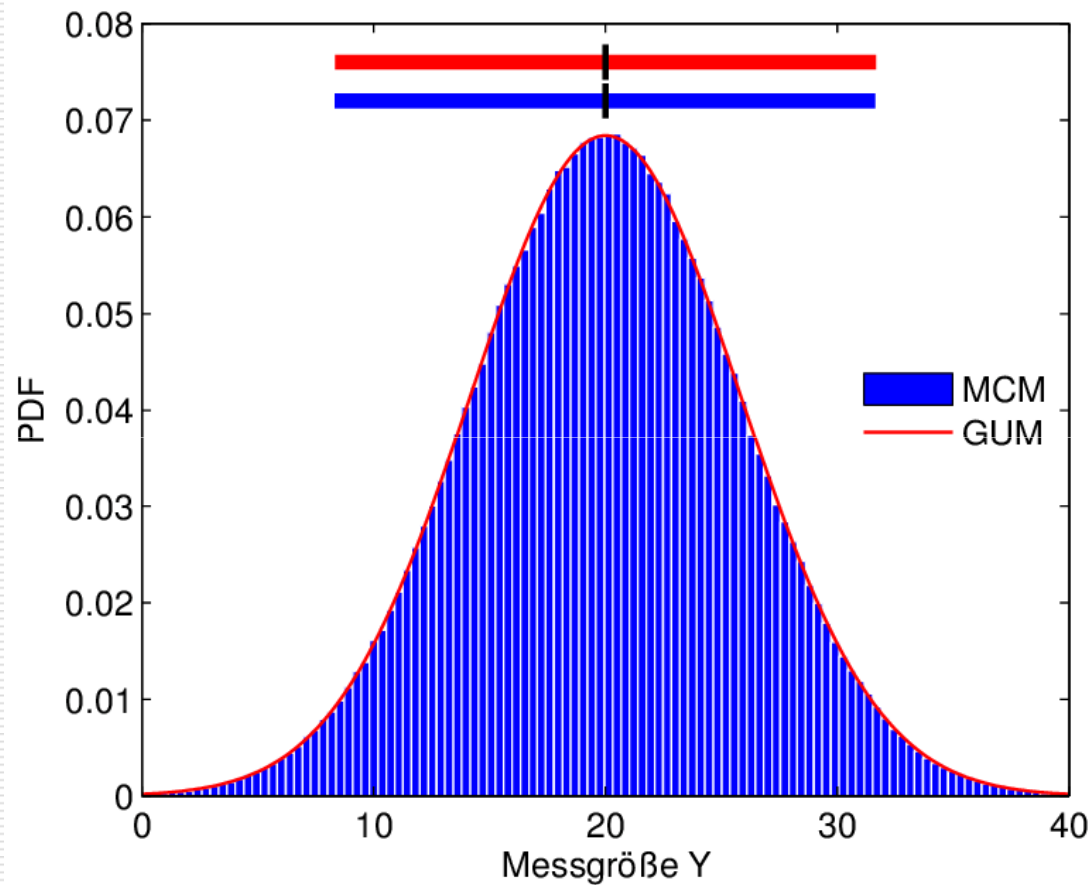
- Bestimmung direkt aus der (empirischen) Verteilung
- Kein Erweiterungsfaktor notwendig
- Unterschiedliche Varianten zur Festlegung des Intervalls
- Unsymmetrisches Intervall um den Schätzwert möglich

4. Beispiele

Modell: $Y = X_1 + X_2$

$x_1 = 10$; $u(x_1) = 5$; normalverteilt

$x_2 = 10$; $u(x_2) = 3$; normalverteilt



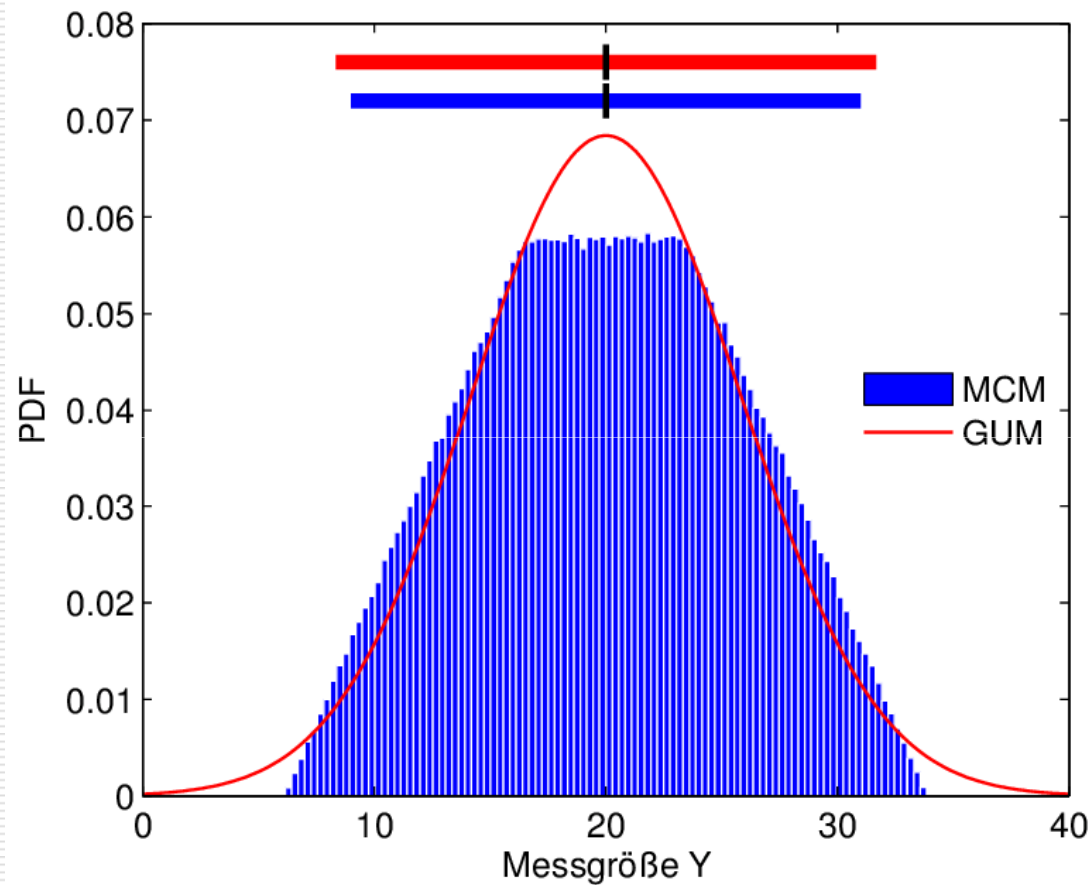
Überdeckung 95,45 %
(GUM: $k = 2$)

4. Beispiele

Modell: $Y = X_1 + X_2$

$x_1 = 10$; $u(x_1) = 5$; rechteckverteilt

$x_2 = 10$; $u(x_2) = 3$; rechteckverteilt



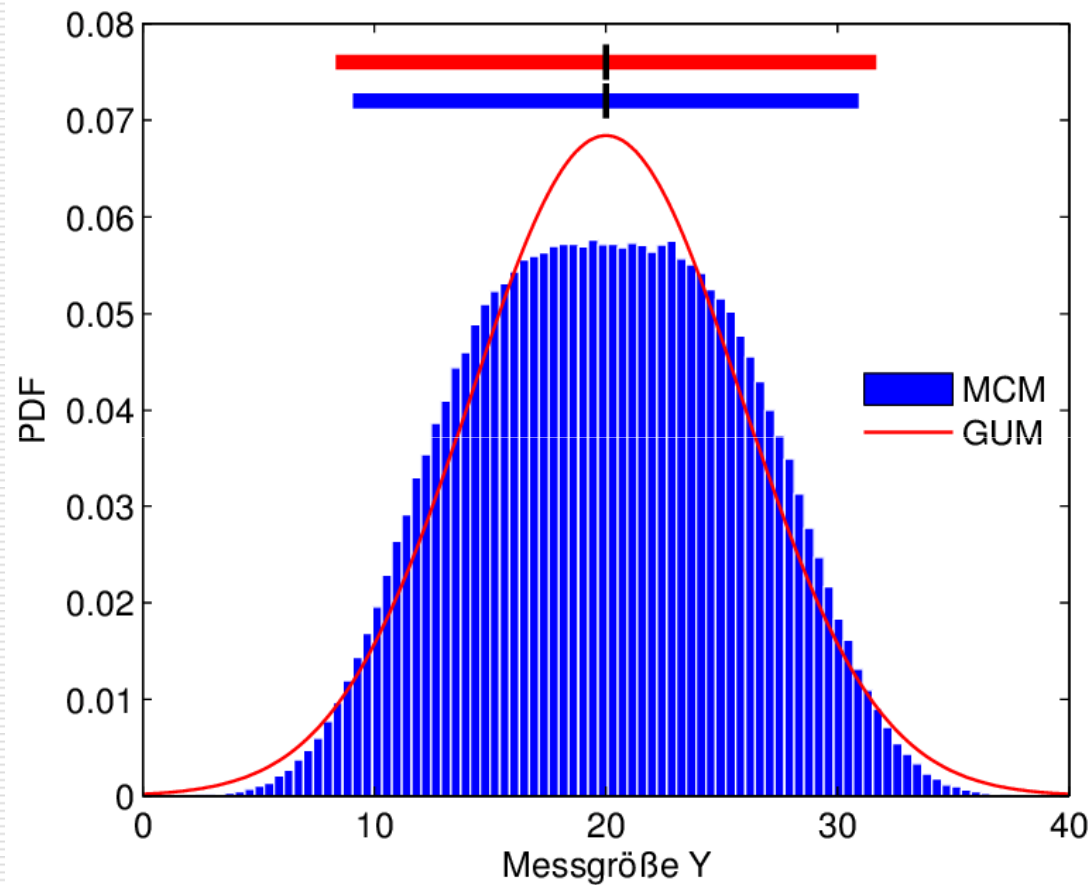
Überdeckung 95,45 %
(GUM: $k = 2$)

4. Beispiele

Modell: $Y = X_1 + X_2$

$x_1 = 10$; $u(x_1) = 5$; rechteckverteilt

$x_2 = 10$; $u(x_2) = 3$; normalverteilt



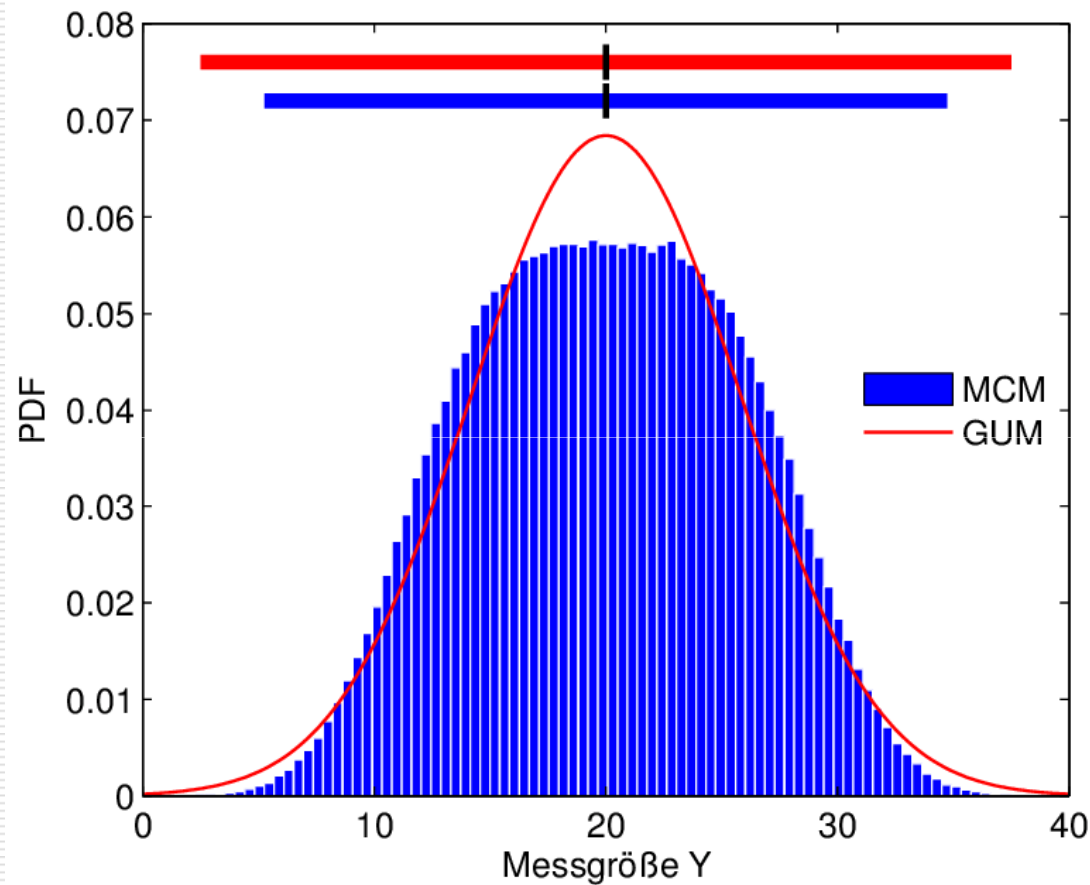
Überdeckung 95,45 %
(GUM: $k = 2$)

4. Beispiele

Modell: $Y = X_1 + X_2$

$x_1 = 10$; $u(x_1) = 5$; rechteckverteilt

$x_2 = 10$; $u(x_2) = 3$; normalverteilt



Überdeckung 99,73 %
(GUM: $k = 3$)

4. Zusammenfassung

- Die erweiterte Messunsicherheit kennzeichnet ein Überdeckungsintervall
- Der zugehörige Überdeckungsfaktor hängt ab von
 - der Art der Verteilung
 - der Überdeckungswahrscheinlichkeit
- Erweiterte Messunsicherheit und Standardmessunsicherheit haben unterschiedliche Bedeutungen
- Alternativ: Bestimmung des Überdeckungsintervalls mittels GUM S1

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit

Gibt's noch Fragen?