

Funktechnische Arbeitsblätter Mv 02

Bestimmung des Frequenzverhältnisses (und Phasenwinkels) zweier Spannungen mit Lissajous-Figuren

2 Blätter

A. Prinzip

In den Arbeitsblättern Mv 01 sind die Lissajous-Figuren behandelt, die sich ergeben, wenn in beiden Ablenkrichtungen eines Elektronenstrahloszillografen Spannungen gleicher Frequenz angelegt werden. Das typische Kennzeichen dieser Figuren ist, daß innerhalb des Kurvenzuges kein Schnittpunkt entsteht.

Bei in den beiden Ablenkrichtungen unterschiedlichen Frequenzen erhält man eine verschlungene Kurve mit einem oder mehreren Kreuzungspunkten. Aus der Anzahl ihrer Berührungspunkte mit den Seiten des umgeschriebenen Rechtecks läßt sich das Frequenzverhältnis bestimmen (nähere Einzel-

B. Entstehung einer Lissajous-Figur

In Bild 1 ist für zwei Spannungen, deren Frequenzen sich wie 1 : 3 verhalten, das Oszillogramm gezeichnet. Für die beiden 'an die x- und y-Platten angelegten Spannungen ist gleiche Amplitude, aber eine Phasendifferenz von $a = 30^\circ$ und $b = 90^\circ$ vorausgesetzt. Hierfür gelten folgende Gleichungen:

Fall a: $x = a \cdot \sin \omega t$
 $y = a \cdot \sin (3 \omega t + 30^\circ)$

Fall b: $x = a \cdot \sin \omega t$
 $y = a \cdot \sin (3 \omega t + 90^\circ)$

Für die Schwingung in x-Richtung wird über der y-Achse eine ganze Schwingung (360°) gezeichnet. über der gleichen Strecke, d. h. für die gleiche Zeit, werden über der x-Achse drei volle Schwingungen (1080°) dargestellt. Die zu gleichen Zeitwerten gehörenden Amplituden

x und y_a für Bild 1a sowie

x und y_b für Bild 1b

bestimmen in der Lissajous-Figur den jeweiligen geometrischen Ort für den Leuchtpunkt.

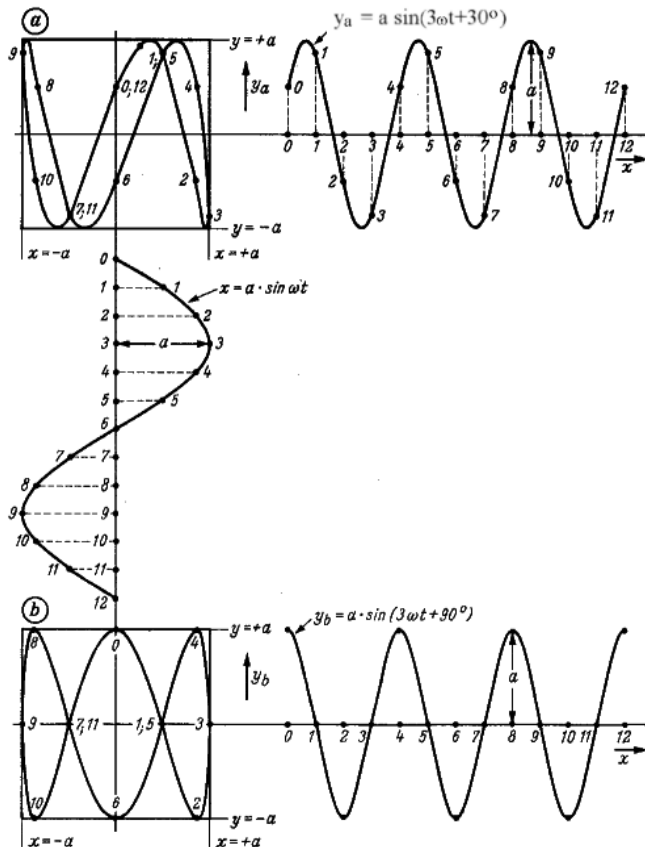
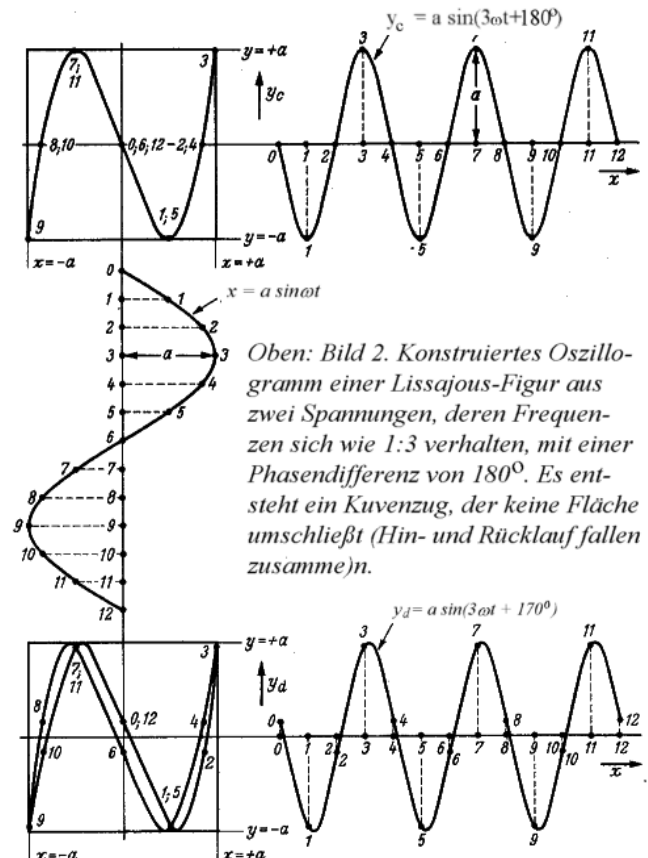


Bild 1. Konstruiertes Oszillogramm von Lissajous-Figuren aus zwei Spannungen, deren Frequenzen sich wie 1:3 verhalten; a=Phasendifferenz von 30° , b=Phasendifferenz von 90°



Oben: Bild 2. Konstruiertes Oszillogramm einer Lissajous-Figur aus zwei Spannungen, deren Frequenzen sich wie 1:3 verhalten, mit einer Phasendifferenz von 180° . Es entsteht ein Kurvenzug, der keine Fläche umschließt (Hin- und Rücklauf fallen zusammen).

Bild 3. Lissajous-Figur ähnlich Bild 2, aber in der Phasenlage ein wenig gegen die von Bild 2 verschieden (170°). (Hin- und Rücklauf werden noch getrennt geschrieben)

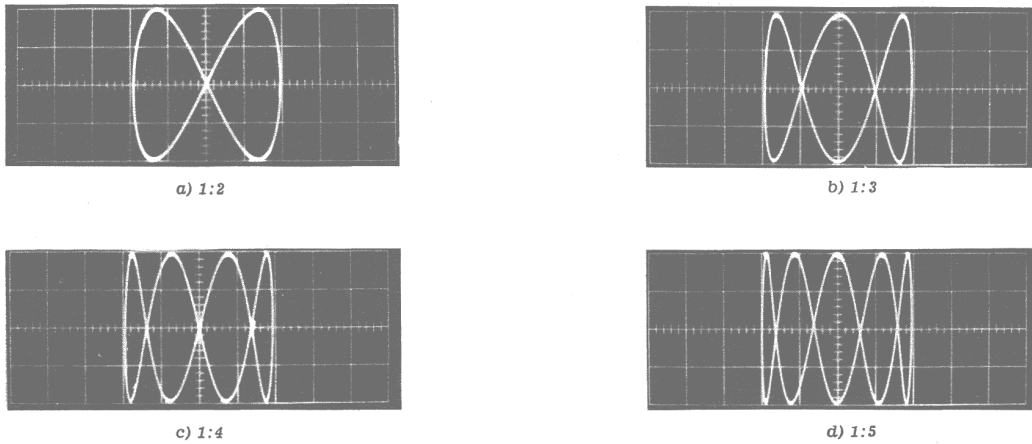


Bild 4. Oszillogramme von Lissajous-Figuren für ganzzahlige Frequenzverhältnisse

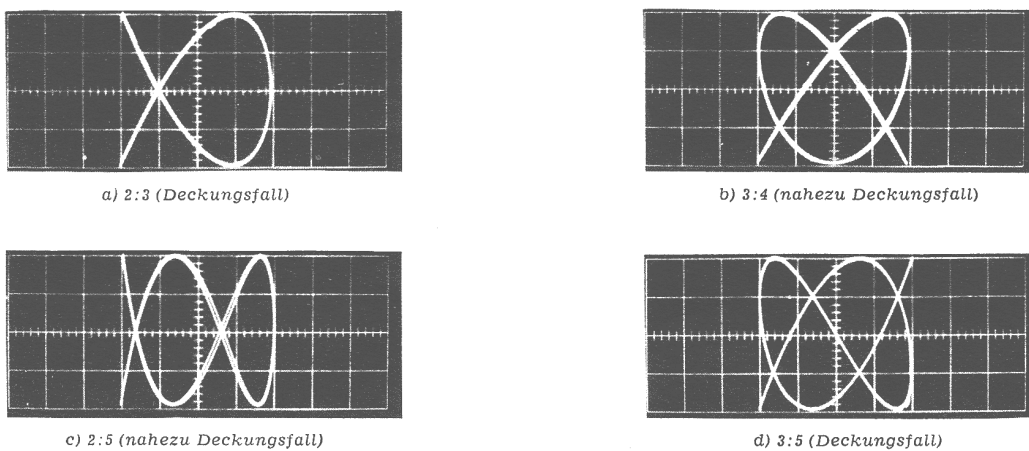


Bild 5. Oszillogramme von Lissajous-Figuren für gebrochene Frequenzverhältnisse

C. Bestimmung von Frequenzverhältnis und Phasenunterschied

1. Frequenzverhältnis

a) Man zählt die Berührungspunkte (n_y) der Lissajous-Figur mit der Geraden

$$y = +a \text{ oder } y = -a \text{ (siehe Bild 1)}$$

und die Berührungspunkte (n_x) mit der Geraden

$$x = +a \text{ oder } x = -a \text{ (siehe Bild 1)}$$

Dann ist das Verhältnis der Frequenzen für die in der y-Richtung und in der x-Richtung ablenkenden Spannungen gegeben durch

$$n_y : n_x$$

b) Ist das Frequenzverhältnis eine ganze Zahl, dann kann es aus der Anzahl der durch den Kurvenzug umschlossenen

Teilflächen oder aus der Zahl der Kreuzungspunkte des Kurvenzuges bestimmt werden, und zwar gilt:

Die Anzahl der Teilflächen ist gleich dem Frequenzverhältnis oder:

Die Anzahl der Kreuzungspunkte vermehrt um 1 gibt ebenso das Frequenzverhältnis an.

c) Sonderfall: Bei bestimmten Phasenverschiebungen fallen Hin- und Rücklauf des Kurvenzuges zusammen. Handelt es sich dabei um ein ganzzahliges Frequenzverhältnis, so wird auf dem Schirm nur eine gekrümmte Kurve gezeichnet, die aber keine Fläche umschließt (Bild 2). In diesem Fall sind die Berührungspunkte der Kurve mit den Seiten des umhüllenden Quadrats

am Anfang oder Ende der Kurve, also in den Ecken des Quadrats einfach, alle übrigen doppelt zu zählen.

Bestimmung des Frequenzverhältnisses mit Lissajous-Figuren

Um das besonders deutlich zu machen, ist für Bild 3 ein Phasenwinkel gewählt, der sich nur wenig von dem für Bild 2 geltenden unterscheidet. Beim Vergleich von Bild 2 und 3 sieht man, wie die Schleifen zusammenfallen und wie sich daraus die genannte Regel für die Zählung der Berührungspunkte ableitet. Das Übereinanderschreiben von Hin- und Rücklauf tritt unter folgenden Bedingungen ein:

Bei ganzzahligem und geradem Frequenzverhältnis, wenn die Phasenverschiebung ein ungerades Vielfaches von $\pi/2$ beträgt.

Bei ganzzahligem und ungeradem Frequenzverhältnis, wenn die Phasenverschiebung gleich Null oder gleich einem Vielfachen von π ist.

Ist das Frequenzverhältnis eine gebrochene Zahl, dann gilt für dessen Bestimmung die gleiche — eben genannte — Regel. Während im Deckungsfall bei ganzzahligem Frequenzverhältnis nur eine gekrümmte Kurve entsteht, Flächenelemente aber nicht umschlossen werden, werden bei gebrochenem Verhältnis Flächen vom Kurvenzug eingeschlossen. Allerdings ist die Zahl der umschriebenen Flächenelemente im Deckungsfall kleiner.

Bild 4 zeigt Oszillogramme von Lissajous-Figuren, die bei ganzzahligen Frequenzverhältnissen entstanden sind; Bild 5 dagegen bringt Oszillogramme für gebrochene Frequenzverhältnisse.

2. Phasenverhältnis

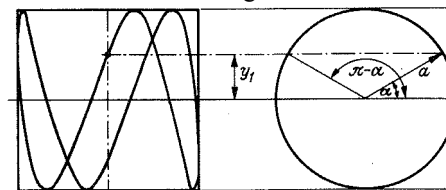
Nach Bild 6 kann der Phasenunterschied zwischen den an die beiden Plattenpaare angelegten Spannungen aus

$$\alpha = \arcsin \frac{y_1}{a}$$

bestimmt werden. Die Verhältnisse von Bild 1a sind als Beispiel genommen.

Bild 6 und die Gleichung für a zeigen, daß der Phasenwinkel nicht eindeutig zu bestimmen ist. Für α und $\pi - \alpha$ ergeben sich gleiche Kurvenzüge. Eine Deutung ist, wie in den Funktechnischen Arbeitsblättern Mv 01 gezeigt, durch Hellsteuerung möglich. Man überlagert der Wehnelt-Gleichspannung eine unsymmetrische

Spannung (Sägezahn) höherer Frequenz. Der Kurvenzug wird durch die Tastung in Striche aufgelöst. Dadurch, daß zur Hellsteuerung keine Sinusspannung benutzt wird, besitzen die Striche unterschiedliche Helligkeitsverteilung. Auf diese Weise läßt sich feststellen, in welcher Richtung der Kurvenzug geschrieben wird. Für eine Phasenverschiebung von α und $\pi - \alpha$ ergeben sich zwar gleiche Kurvenbilder, aber unterschiedliche Schreibrichtungen.



$$x = a \sin \omega t$$

$$y = a \sin (3\omega t + 30^\circ)$$

für $\omega t = 0$ wird

$$x = a \sin 0^\circ = 0$$

$$y_1 = a \sin 30^\circ = a \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{y_1}{a} \quad (\text{für } x=0)$$

Bild 6. Bestimmung der Phasendifferenz der an die beiden Plattenpaare einer Oszillografenröhre angelegten Spannungen

Bild 7 bringt Oszillogramme für verschiedene Phasendifferenzen. In ihnen ist die Nullachse ($x=0$) eingetragen. Man kann also aus der Amplitude für $x = 0$ den Phasenwinkel ermitteln.

Bild	$\Delta \varphi$	Amplitude
7a	30°	0,50 a
7b	45°	0,71 a
7c	60°	0,87 a
7d	90°	1,00 a

D. Ein zweites Verfahren zur Frequenzbestimmung

Die Spannung mit der kleineren Frequenz wird den beiden Plattenpaaren so zugeführt, daß ein Kreis geschrieben wird. Das bedeutet, daß man diese Spannung an das eine Plattenpaar direkt, an das andere über ein die Phase um 90° drehendes Glied zuführen muß. Die andere Spannung mit der höheren Frequenz wird zur Hellsteuerung benutzt, also an die Strecke Wehneltzylinder-Katode des verwendeten Elektronenstrahl-Oszillografen gelegt.

Ist das Verhältnis der beiden Frequenzen eine ganze Zahl, dann erhält man ein stehendes Bild und die Zahl der Hell- oder Dunkelstellen gibt das Frequenzverhältnis an (Bild 8).

Dieses Verfahren erfordert, um zu einer fehlerfreien Deutung des Schirmbildes zu kommen, eine sorgfältige Einstellung des Arbeitspunktes auf der Kennlinie, die den Leuchtschirmstrom in Abhängigkeit von der Wehneltspannung angibt. Die dunkelgetasteten Kurvenstücke müssen

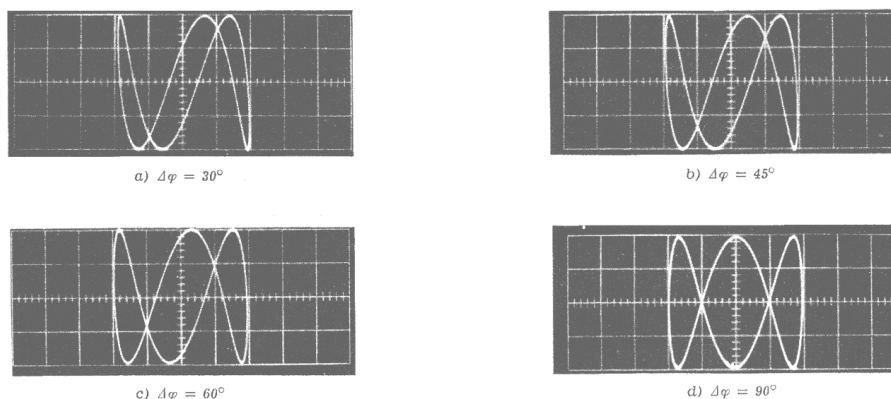


Bild 7. Oszillogramme von Lissajous-Figuren für verschiedene Phasendifferenz bei gleichem Frequenzverhältnis 1:3

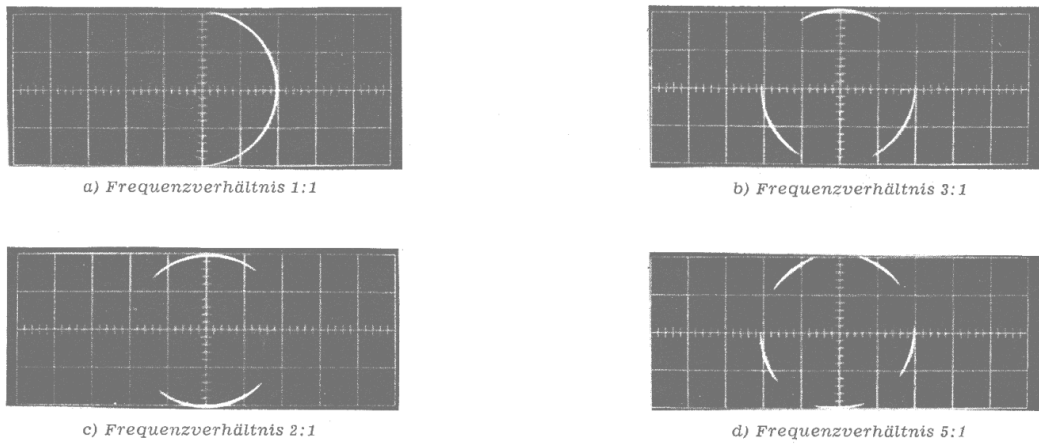


Bild 8. Oszillogramme zur Frequenzmessung durch Hellsteuerung

nämlich genauso lang wie die hellen sein, d. h. der Arbeitspunkt muß dort liegen, wo ein Leuchtpunkt oder ein Leuchtstrich gerade sichtbar wird (Helligkeits-Schwellwert). Bei einer solchen Einstellung ist also während der negativen Halbwelle die Oszillografenröhre dunkel und während der positiven hellgetastet. Ferner sind die hellen Kurvenstücke genauso lang wie die dunklen.

Diese Einstellung ist deshalb wichtig, um unterscheiden zu können, ob ein ganzzahliges oder gebrochenes Frequenzverhältnis vorliegt (Bild 9).

In Bild 9 a ist ein ganzzahliges Frequenzverhältnis (7 : 1) angenommen. Die auf dem Leuchtschirm geschriebene Kreis-

bahn ist auf einer geraden Linie abgewickelt. Fällt der Arbeitspunkt oder Ruhepunkt mit dem Helligkeitsschwellwert zusammen, dann ergeben sich — wie gezeichnet — je sieben gleich lange helle und dunkle Striche.

In Bild 9 b ist ein gebrochenes Frequenzverhältnis (3,5 : 1 = 7/2) gezeichnet, d. h. auf zwei Umläufe der Frequenz f_1 entfallen sieben ganze Schwingungen der Frequenz f_2 . Demzufolge sind beide Umläufe abgewickelt.

Legt man nun, wie in Bild 9 a, den Ruhepunkt auf den Helligkeits-Schwellwert, dann ist der Kreis völlig aufgehellt, denn an den Stellen, wo der Kreis im ersten Umlauf dunkel bleibt, wird er im zweiten Umlauf aufgehellt.

Verschiebt man aber den Ruhepunkt so, daß nur ein Teil der positiven Halbwelle die Röhre auf tastet (Bild 9 c), dann entstehen sieben längere helle und sieben kurze, dunkle Striche.

Man kann also bei einem gebrochenen Verhältnis durch Zählen der Hellstellen den Zähler des Bruchs bestimmen, nicht aber den Nenner.

Bild 10 zeigt das Oszillogramm für ein gebrochenes Frequenzverhältnis von 7 : 2 (Bild 10b), gegenübergestellt mit einem Oszillogramm für ein ganzzahliges Frequenzverhältnis von 7 : 1 (Bild 10a).

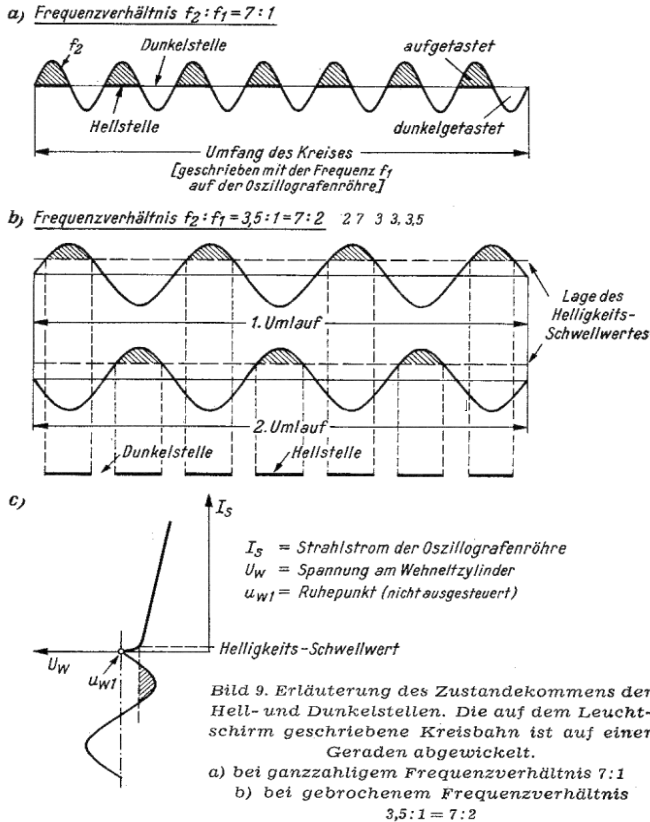


Bild 9. Erläuterung des Zustandekommens der Hell- und Dunkelstellen. Die auf dem Leuchtschirm geschriebene Kreisbahn ist auf einer Geraden abgewickelt.
 a) bei ganzzahligem Frequenzverhältnis 7:1
 b) bei gebrochenem Frequenzverhältnis 3,5:1 = 7:2

c) zeigt für Fall b) die Aussteuerung der Oszillografenröhren-Kennlinie (Lage des Ruhepunktes wie bei einem C-Betrieb)

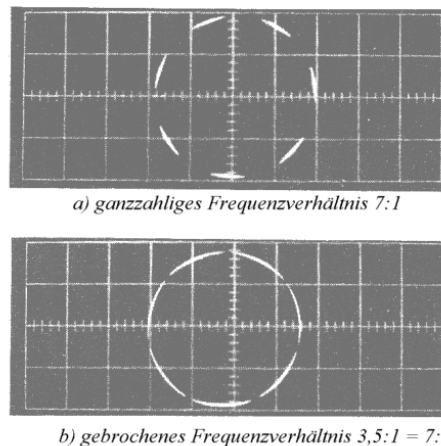


Bild 10. Oszillogramme zur Frequenzbestimmung durch Hellsteuerung