REACTIVE SYSTEMS GROUP

Universität des Saarlandes

Prof. Bernd Finkbeiner, Ph.D.
Markus Rabe, M.Sc.

Programmierung 1 (SS 2010) - 9. Übungsblatt

http://react.cs.uni-saarland.de/prog1/

Lesen Sie im Buch bis zum Ende von Kapitel 9

Aufgabe 9.1

Bleiben die Wohlgeformtheitsbedingungen für die definierenden Gleichungen gültig, wenn man bei der Prozedur

a) fac den Ergebnisbereich zu $\mathbb{Z}$ verändert?

b) fac den Ergebnisbereich zu $\mathbb{N}_+$ verändert?

c) fac den Argumentbereich und den Ergebnisbereich zu $\mathbb{Z}$ verändert?

d) fac' den Argumentbereich zu $\mathbb{N}$ verändert?

Aufgabe 9.2

a) Geben Sie eine Anwendungsgleichung für fac' an, die nicht in entsprechender Form für fac existiert.

b) Geben Sie ein Ausführungsprotokoll für den Prozeduraufruf $fac 4$ an.

Aufgabe 9.3

Sei die Funktion

$$f = \lambda\,(x, y) \in \mathbb{B}^2.\ \text{if } x = y \text{ then } 1 \text{ else } 0$$

gegeben. Dann gibt es genau eine Funktion $f' \in \mathbb{B} \to (\mathbb{B} \to \mathbb{B})$ mit

$$\forall x \in \mathbb{B} : \forall y \in \mathbb{B} : f(x, y) = (f'\,x)\,y$$

a) Beschreiben Sie f' mit der Lambda-Notation.

b) Geben Sie die Elemente der Menge f' an.

Aufgabe 9.4

a) Geben Sie eine Prozedur mit der folgenden Rekursionsfunktion an:$\lambda\, x \in \mathbb{Z}.$ if $x < 1$ then $\langle\rangle$ else $\langle x-1, x-1\rangle$

b) Geben Sie eine Prozedur mit der Rekursionsfunktion $\lambda\, x \in \mathbb{Z}.\ \langle x-1, x-2\rangle$ an.

Aufgabe 9.5

Zu einer Prozedur $p : X \to Y$ kann man eine Prozedur $X \to \mathcal{T}(X)$ angeben, die für terminierende Argumente x von p den Rekursionsbaum für x und p liefert. Schreiben Sie eine solche Prozedur *amtree* für die Ackermannprozedur *am* (siehe 9.10 im Buch). Realisieren Sie die Prozedur in Standard ML als Prozedur vom Typ $int * int \to (int * int)\ ltr$. Beachten Sie, dass sie für die Deklaration von *amtree* wiederum die Ackermannprozedur brauchen.

Aufgabe 9.6

Sei eine Prozedur mit der folgenden Rekursionsfunktion gegeben:

$$\lambda\, x \in \mathbb{Z}.\ \text{if } x < 0 \text{ then } \langle x-5\rangle \text{ else if } x < 4 \text{ then } \langle\rangle \text{ else } \langle x-3,\ x-2\rangle$$

a) Geben Sie den Argumentbereich der Prozedur an.

b) Geben Sie den Rekursionsbaum für das Argument 8 an.

c) Geben Sie den Definitionsbereich der Prozedur an.

Aufgabe 9.7

Sei die folgende Prozedur gegeben:

$$\begin{aligned} &p : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z} \\ &p(x,y) = \text{if } x < y \text{ then } p(x, y-1) \text{ else} \\ &\qquad\qquad\ \text{if } x > y \text{ then } p(x-1, y) \text{ else } x \end{aligned}$$

a) Geben Sie die Rekursionsfolge und die Rekursionstiefe für p und $(-2, 1)$ an.

b) Geben Sie die Rekursionsfunktion und die Rekursionsrelation von p an.

c) Geben Sie eine natürliche Terminierungsfunktion für p an.

Aufgabe 9.8

Sei die folgende Prozedur gegeben:

$$\begin{aligned} &p : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} \\ &p(x, y) = \text{if } x = 0 \text{ then } y \text{ else} \\ &\qquad\qquad\; \text{if } y = 0 \text{ then } x \text{ else} \\ &\qquad\qquad\; \text{if } x \leq y \text{ then } p(x-1, y+1) \text{ else } p(x+1, y-1) \end{aligned}$$

a) Geben Sie den Rekursionsbaum und die Rekursionstiefe für p und $(3, 83)$ an.

b) Geben Sie die Rekursionsfunktion und die Rekursionsrelation von p an.

c) Geben Sie eine natürliche Terminierungsfunktion für p an.

d) Beschreiben Sie die Ergebnisfunktion von p ohne Rekursion.

Aufgabe 9.9

Beweisen Sie, dass die Ergebnisfunktion f der Prozedur *fib* die Gleichung

$$2 \cdot f(n+1) = -f\ n + f(n+3)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt.

Aufgabe 9.10

Machen Sie sich mit Hilfe der folgenden Beispiele klar, dass sich aus der Ergebnisfunktion einer Prozedur nicht ermitteln lässt, welchen Argument- und Ergebnisbereich die beschreibende Prozedur hat und ob sie rekursiv ist.

a) Geben Sie eine Prozedur $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ an, die die Ergebnisfunktion $\emptyset$ hat.

b) Geben Sie eine rekursive Prozedur $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ an, die die Funktion $\lambda\, n \in \mathbb{N}.\ 0$ berechnet.

Aufgabe 9.11

Beweisen Sie, dass die Prozedur

$$\begin{aligned} &p : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z} \\ &p(x, y) = \text{ if } x < y \text{ then } p(x,\ y-1) \text{ else if } x > y \text{ then } p(x-1,\ y) \text{ else } x \end{aligned}$$

die Funktion $f = \lambda\,(x, y) \in \mathbb{Z}^2.\ \min\{x, y\}$ berechnet.

Aufgabe 9.12

Zeigen Sie, dass die Prozedur

$$\begin{aligned}&p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\\&p\ n = \text{if } n < 1 \text{ then } 1 \text{ else } p(n-1) + 2n + 1\end{aligned}$$

die Funktion $f = \lambda\, n \in \mathbb{N}.\ (n+1)^2$ berechnet.

Aufgabe 9.13

Beweisen Sie, dass die Prozedur

$$\begin{aligned}&p : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}\\&p(x,y) = \ \text{if } x = 0 \text{ then } y \text{ else}\\&\qquad\qquad\ \ \text{if } y = 0 \text{ then } x \text{ else}\\&\qquad\qquad\ \ \text{if } x \leq y \text{ then } p(x-1, y+1) \text{ else } p(x+1, y-1)\end{aligned}$$

die Funktion $f = \lambda\,(x,y) \in \mathbb{N}^2.\ x + y$ berechnet.

Aufgabe 9.14

Geben Sie eine rekursive Prozedur $\mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}$ an, die für $n \in \mathbb{N}_+$ die Summe $1 + 3 + \cdots + (2n-1)$ der ungeraden Zahlen von 1 bis $2n-1$ berechnet. Beweisen Sie, dass Ihre Prozedur die Funktion $\lambda\, n \in \mathbb{N}_+.\ n^2$ berechnet.

Aufgabe 9.15

Geben Sie eine rekursive Prozedur $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ an, die für $n \in \mathbb{N}_+$ die Summe $0^2 + 1^2 + \cdots + n^2$ berechnet. Beweisen Sie, dass Ihre Prozedur für alle $n \in \mathbb{N}$ das Ergebnis $\frac{n}{6}(2n^2 + 3n + 1)$ liefert.

Aufgabe 9.16

Zeigen Sie, dass die Prozeduren

$$\begin{aligned}&p : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\\&p\ x = \text{if } x < 1 \text{ then } 0 \text{ else } p(x-1) + x\\[1em]&q : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\\&q\ x = \text{if } x < 1 \text{ then } 0 \text{ else } \frac{x}{2}(x+1)\end{aligned}$$

semantisch äquivalent sind. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

a) Geben Sie eine natürliche Terminierungsfunktion für p und q an.

b) Geben Sie die Ergebnisfunktion von q an.

c) Zeigen Sie, dass die Ergebnisfunktion von q die definierenden Gleichungen von p für alle $x \in \mathbb{Z}$ erfüllt.