Prom. Nr. 2220

Zur Berechnung der Flugbahnen von Leitstrahlraketen

VON DER

EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE IN ZÜRICH

ZUR ERLANGUNG DER

WÜRDE EINES DOKTORS DER MATHEMATIK

GENEHMIGTE

PROMOTIONSARBEIT

VORGELEGT VON

ERNST ROTH

von Niederbipp (Bern) und Luzern

Referent: Herr Prof. Dr. E. Stiefel

Korreferent: Herr Prof. Dr. R. Sänger

Zürich 1953 Dissertationsdruckerei Leemann AG

Einleitung

Unter einer Leitstrahlrakete verstehen wir eine Rakete, die durch eine geeignete Steuerung veranlaßt wird, sich längs eines gebündelten elektromagnetischen Strahles, dem sogenannten Leitstrahl, zu bewegen. Da es sich um eine ballistische Anwendung dieser ferngesteuerten Rakete handelt, soll der Leitstrahl durch ein Radargerät so gerichtet werden, daß er immer nach einem bestimmten Flugzeug weist. Es ist offensichtlich, daß es auf diese Weise zu einem Zusammentreffen von Rakete und Flugzeug kommen muß.

Die automatische Steuerung durch einen Leitstrahl erfolgt im Prinzip so, daß die Rakete einen elektrischen Steuerbefehl erhält, sobald sie die Leitstrahlmitte verläßt. Dabei wird im allgemeinen die Abweichung überkompensiert, woraus ein Einschwingvorgang resultiert, der durch einen Servomechanismus gesteuert wird. Die damit verbundenen Probleme fallen außerhalb des Bereiches dieser Arbeit. Wir setzen eine ideale Servosteuerung voraus, die bewirkt, daß die Rakete sich stets in der Leitstrahlmitte befindet und der Leitstrahl als Gerade betrachtet werden darf.

Die vorliegende Untersuchung befaßt sich mit drei verschiedenen Arten der Steuerung. Damit überhaupt eine solche Steuerung möglich wird, muß eine variable, normal zur Flugbahntangente stehende Kraft erzeugt werden. Dies kann geschehen durch Auslenkung des die Rakete vorwärtsbewegenden Gasstrahles, so daß der Schub die gewünschte Normalkomponente aufweist. Wir bezeichnen diesen Fall als die erste Art der Steuerung. Der Gasstrahl kann noch in anderer Weise zur Steuerung herangezogen werden, indem er den zur Erzeugung des notwendigen Auftriebes (als Steuerkraft) erforderlichen Anstellwinkel der Raketenachse zur Flugbahntangente aufrecht erhält[1]). Andererseits entsteht eine Steuerkraft auch durch drehbar angeordnete Steuerflächen. Je nachdem der Schub nur am Anfang der Flugbahn (Antriebsbahn) oder ständig während längerer Zeit wirksam ist, sprechen wir im folgenden von der zweiten oder der dritten Art der Steuerung.

Um das Problem der Flugbahnberechnung einer Untersuchung zugänglich zu machen, werden einige vereinfachende Annahmen getroffen, von denen die wichtigsten hier angegeben seien.

---

[1]) *Perret* [10]. Wir gehen hier darauf nicht ein.

1. Das Flugzeug bewege sich mit konstanter Geschwindigkeit in einer horizontalen Geraden, die mit der Abschußstelle der Rakete in einer Vertikalebene liege. Damit wird die Flugbahn der Rakete zu einer ebenen Kurve, und das Problem ist zweidimensional.

2. Die Schwingungen der Rakete um eine Querachse durch ihren Schwerpunkt sollen in erster Näherung vernachlässigt, die Rakete also als Massenpunkt betrachtet werden. Wie sich im fünften Kapitel ergeben wird, ist diese Approximation in bezug auf die Schwingungen um die Querachse normal zur Flugbahnebene ohne weiteres tragbar. Zudem gleicht die Steuerung diese Schwingungen automatisch aus, da ja die Rakete den Leitstrahl nicht verlassen darf.

3. Die Rakete befinde sich stets in der Leitstrahlmitte, was eine ideale Servosteuerung voraussetzt.

Weitere Annahmen werden später an den betreffenden Stellen eingeführt.

Zur eigentlichen Raketenballistik existiert bis jetzt nur sehr wenig Literatur[2]). Insbesondere behandelt, abgesehen von [10], keine der veröffentlichten Arbeiten die ballistischen Fragen, welche die Leitstrahlrakete betreffen.

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit der Herleitung der Bewegungsdifferentialgleichungen für eine Leitstrahlrakete und der Berechnung einer ganzen Flugbahnschar. Im 1. Kapitel wird die von der Rakete beschriebene Verfolgungskurve kurz erörtert, und im 2. Kapitel folgt, unter Berücksichtigung der wichtigsten Kräfte und Momente (Abschnitt 2.1), die Ableitung der Differentialgleichungen der Bewegung (Abschnitt 2.2 und 2.3). Die Bestimmung der von Parametern abhängigen Flugbahnschar, deren Kenntnis für verschiedene Fragestellungen von Bedeutung ist, bildet das Hauptziel dieser Untersuchung. Es werden zwei Methoden angegeben: Integration der Schar durch Reihenentwicklungen und durch Interpolation. Die erste Methode geht vom Entwicklungssatz von *H. Poincaré* aus (3. Kapitel). Die Flugbahnschar wird — ähnlich wie etwa in der Astronomie beim Dreikörperproblem — in Potenzreihen nach den Parametern entwickelt (Abschnitt 3.2). Die zur Berechnung der Koeffizienten dieser Reihenentwicklungen erforderlichen Differentialgleichungen werden für die ersten Glieder in den Abschnitten 3.3 und 3.5 explizit angegeben. Es zeigt sich dabei, daß die inhomogenen Glieder dieser linearen Gleichungen sehr kompliziert sind, so daß die Rechnung praktisch nur mit programmgesteuerten Rechenmaschinen durchführbar ist. Die Güte der Konvergenz dieser Reihen konnte aber nicht näher bestimmt werden. Die zweite Methode beruht auf einer zweckmäßigen Interpolation von exakt berechneten Grundbahnen (4. Kapitel). Sie ist praktisch sehr gut brauchbar, und ihr Erfolg liegt in den folgenden Umständen: 1. Einführung einer

[2]) Die wichtigsten Arbeiten sind: *Rankin* [13] und *Rosser* [14]. Eine Untersuchung von *Gantmacher* und *Levin* (Akad. Nauk SSSR Prikl. Mat. Mech. 11, (1947)) war mir nicht zugänglich.

geeigneten Variablen, so daß die Anfangswerte der Integrale und deren erste und zweite Ableitung vom Parameter unabhängig werden (Abschnitt 2.3, 4.1, 4.4). 2. Zweckmäßige Wahl der Grundbahnen (Abschnitt 4.2). Ist die erste Forderung nicht ohne weiteres erfüllbar, dann kann nachträglich noch eine passende Transformation der Funktionen vorgenommen werden (Abschnitt 4.4.4). Ein im Abschnitt 4.4 durchgerechnetes Beispiel lehrt, daß man im allgemeinen mit vier Grundbahnen zur Interpolation bezüglich eines Parameters auskommt. Im 5. Kapitel wird noch die Pendelung der Rakete um eine Querachse untersucht (Abschnitt 5.1) und die Rückwirkung auf die Schwerpunktsbahn abgeschätzt (Abschnitt 5.2). Die Lenkbarkeit der Rakete kann auf Grund der Formel für die Bahnkrümmung diskutiert werden, und es lassen sich daraus einige Bedingungen, speziell für die aerodynamischen Koeffizienten ableiten, was im Abschnitt 5.3 durchgeführt ist.

Die Zahlenwerte in den Beispielen sind stets in den Einheiten (m, s, kg) des Maßsystems von *Giorgi* ausgedrückt.