

Temperaturverlauf und Wärmespannungen in Verbrennungsmotoren

VON DER
EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE
IN ZÜRICH

ZUR
ERLANGUNG DER WÜRDE EINES
DOKTORS DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN

GENEHMIGTE
PROMOTIONSARBEIT

Vorgelegt von

Gustav Eichelberg, dipl. Masch.-Ing.,
aus Zürich

318

Referent: Prof. Dr. A. Stodola
Korreferent: Prof. Dr. E. Meißner

Leer - Vide - Empty

Berichtigungen.

Seite 9, Zeile 10 von unten: statt $\left(\frac{\nu}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}$ lies $\left(\frac{\nu}{d}\right)^{\frac{1}{4}}$.

Seite 9, Anmerkung: statt 1924 lies 1921.

Seite 24, Zeile 9 von oben:
(auf der linken Seite der Gleichung) statt $\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)_{u = \text{konst.}}$ lies $\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)_{r = \text{konst.}}$

Seite 27, Zeile 5 von oben, wird irrtümlicherweise auf Abb. 17 verwiesen, während sich Gleichung (23) auf reine Parallelströmung bezieht. Die Ergebnisse werden davon in keiner Weise berührt. Praktisch kann die Gleichung auch ohne weiteres auf Zylindereinsatz, Deckel und Kolbenboden angewendet werden.

Seite 30, Zeile 8 von unten: in Gleichung (35) fehlt nach dem + das Integralzeichen.

Seite 36, Zeile 8 von oben: Gleichung (1) statt $\frac{12}{h'}$ lies $\frac{12}{h^2}$.

Seite 40, Zeile 10 von unten: in Gleichung (68) statt CI_2 lies $C_1 I_2$.

Herrn Professor Dr. A. Stodola
in Verehrung gewidmet.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Einleitung	5
I. Gastemperatur und Wärmeübergang	5
1. Der zeitliche Temperaturverlauf der Gase im Zylinder	5
2. Der Wärmeübergang	7
a) Kühlwasserwärme und mittlere Wärmeübergangszahlen	7
b) Verlauf des Wärmeübergangs vom Gas an die Wand	8
II. Der Temperaturverlauf in den Zylinderwandungen	14
1. Der periodische Temperaturverlauf in der Zylinderwand	15
a) unter Annahme unveränderlicher Wärmeübergangszahl	15
b) bei veränderlicher Wärmeübergangszahl	18
2. Die stationäre Temperaturverteilung in den Wandungen	22
a) Die partielle Differentialgleichung für die Temperaturverteilung in Rotationskörpern (Kolben, Deckeln, Einsätzen) und ihre Be- ziehung zur Torsionsgleichung	22
b) Graphische Näherungslösung für die Temperaturverteilung im Kegeldeckel eines Zweitaktmotors (Bauart Sulzer)	25
3. Der Uebergang von einer stationären Temperaturverteilung in eine andere bei Belastungsänderung	26
a) Die Beziehung zwischen den Temperaturfeldern bei verschiedener Belastung	26
b) Die zeitlich aperiodische Veränderung des Temperaturfeldes bei Belastungsänderung	27
III. Die Wärmespannungen in den Zylinderwandungen	29
1. Die periodischen Wärmespannungen	29
2. Die zusätzlichen Wärmespannungen bei Belastungsänderung	32
3. Die stationären Wärmespannungen	33
a) Die Differentialgleichungen der Festigkeitsberechnung achsen- symmetrischer Schalen (Kolben, Deckel, Einsätze) bei achsen- symmetrischer Temperaturverteilung und Belastung	33
b) Die Gleichungen für diejenigen Schalen, für welche die Meißnersche Reduktion auf zwei simultane Differentialgleichungen möglich ist	35
c) Die Trennung der mittleren stationären Temperaturverteilung in einen achsensymmetrisch verteilten linearen Temperaturabfall und den davon abweichenden Betrag	37
d) Die partikulären Lösungen für verschiedene Fälle der Temperatur- verteilung	38
e) Graphische Lösung für einen Zylindereinsatz von veränderlicher Wandstärke bei gegebener Temperaturverteilung	43

Einleitung.

Die Beherrschung der Temperaturverteilung und der durch sie bedingten Wärmespannungen in den Zylinderwandungen der Verbrennungsmotoren ist Voraussetzung eines zuverlässigen Betriebes. Im Gegensatz aber zu Fragen, die in jedem Einzelfalle eine genaue quantitative Vorausberechnung verlangen, wie z. B. die Bestimmung einer kritischen Drehzahl, kann und muß sich hier die Praxis vielfach mit einer mehr qualitativen Beurteilung der Verhältnisse begnügen und wird es dem formbegabten Techniker überlassen, die Konstruktion »nach Gefühl«, d. h. entsprechend einer möglichst lebhaften und zutreffenden Vorstellung durchzubilden.

Der Theorie bleibt jedoch die Aufgabe, in engster Zusammenarbeit mit dem Konstrukteur teils dessen verschiedene Ausführungen rechnerisch zu vergleichen, teils dessen Vorstellungen zu berichtigen, was nur durch genauere Nachrechnung wichtiger Einzelfälle möglich ist.

Die vorliegende Arbeit will die Gebiete einer solchen Berechnung in der Weise bearbeiten, daß der erste der drei Hauptabschnitte — über die Gastemperatur und den Wärmeübergang — nur als unerläßliche Vorarbeit zur Beurteilung der beiden andern — der Temperaturverteilung in den Zylinderwandungen und der Wärmespannungen — gedacht und entsprechend behandelt ist.

I. Gastemperatur und Wärmeübergang.

Nicht nur die Temperatur der Gase im Zylinder, sondern auch die Uebergangszahl der Wärme vom Gas an die Zylinderwand ist eine periodische Funktion der Zeit, und mit beiden sind sowohl die Temperaturverteilung als auch die Wärmespannungen in den Wandungen periodisch veränderlich, weshalb zunächst auf die zeitliche Aenderung der Gastemperatur und der Wärmeübertragung kurz eingetreten werden muß. Jedoch soll es sich hier nicht darum handeln, diese beiden Größen in ihrem zeitlichen Verlauf einwandfrei festzulegen, was umfangreiche Wärmeübergangsversuche erfordert, es möge vielmehr genügen, annehmbare Unterlagen zu gewinnen, um anschließend die grundsätzlichen Wege einer Berechnung der Temperaturverteilung und der Wärmespannungen erörtern zu können.

1. Der zeitliche Temperaturverlauf der Gase im Zylinder.

Druck und Volumen der im Zylinder arbeitenden Gase sind durch das Indikatorgramm in ihrem zeitlichen Verlauf gegeben. Die Temperatur folgt als die dritte, den Gaszustand bestimmende Größe unmittelbar aus der Gasgleichung

$$pV = GRT \dots \dots \dots (1).$$

G bedeutet das im augenblicklichen Zylindervolumen V beim Druck p und der absoluten Temperatur T eingeschlossene Gasgewicht. Es ergibt sich bei dem hier besonders betrachteten Zweitakt-Dieselmotor aus der Ueberlegung, daß zu Beginn der Kompression die Lufttemperatur gleich der Spüllufttemperatur im Aufnehmer ist, vermehrt um die während der Spülung aufgenommene Wandungswärme und, bei unvollkommener Spülung, um einen aus der Mischung der

Restgase und der Frischluft sich ergebenden Betrag. Diese Zuschläge sind von den besonderen Betriebsverhältnissen abhängig und entsprechend einzuschätzen.

Außer von der Spülluftmenge hängt die Vollkommenheit der Spülung wesentlich von einer konstruktiv gut durchgebildeten Luftführung ab. So könnte bei schlecht geformten Spülschlitzen die Frischluft durch Spül- und Auspuffschlitze durchblasen, ohne den oberen Zylinderraum auszuspülen; während umgekehrt bei guter Anordnung zuerst ein Teil der Restgase durch die Auspuffschlitze getrieben wird, bevor Spülluft durchbläst. Eine mittlere und leicht zu verfolgende Annahme wäre etwa die, daß in jedem Augenblick soviel Frischluft mit dem Restgas austritt, als einem homogenen Gemisch der beiden gerade im Zylinder befindlichen Mengen entspricht.

Ist etwa im Zylinder, dessen mittleres Volumen \mathfrak{B} während der Spülung stets gleich angenommen sei, gerade das Luftgewicht G vom spezifischen Volumen v enthalten, so vermehrt sich dieses im nächsten Augenblick um ein eintretendes Luftgewicht dG_1 und vermindert sich um ein im gleichen Zeitabschnitt austretendes Luftgewicht dG_2 , deren Volumina dV für gleichbleibenden Druck gleich sein müssen. Somit ist die Gewichtszunahme $dG = \frac{dV}{v_{sp}} = \frac{dV}{v}$, während andererseits aus $G = \frac{\mathfrak{B}}{v}$ durch Ableitung folgt: $dG = -\frac{\mathfrak{B}}{v^2} dv$.

Die Gleichsetzung liefert $dV = -\frac{\mathfrak{B}}{v_{sp}} \frac{dv}{\left(\frac{1}{v_{sp}} - \frac{1}{v}\right)}$. Beträgt das bis zu einem gewissen Zeitpunkt eingeströmte Frischluftvolumen V das λ -fache des mittleren Zylindervolumens \mathfrak{B}

während der Spülung, so muß $\lambda_{sp} = -\int_{v_0}^v \frac{v_{sp} dv}{v(v-v_{sp})} = -T_{sp} \int_{T_0}^T \frac{dT}{T(T-T_{sp})}$ sein. Damit läßt

sich unter der gemachten Voraussetzung für eine gegebene Spüllufttemperatur T_{sp} und für eine gegebene Temperatur T_0 der Abgase im Zylinder zu Beginn der Spülung und für jeden Luftüberschuß der Spülung λ_{sp} die resultierende Mischungstemperatur T zu Beginn der Kompression bestimmen. Das Integral ergibt $\lambda_{sp} = \ln \frac{T(T_0 - T_{sp})}{T_0(T - T_{sp})}$ und zeigt, daß beispielsweise bei zweifacher Spülluftmenge unter der obigen Voraussetzung eine Temperaturverminderung der Restgase bis auf etwa 30° über der Spüllufttemperatur erzielt wird.

Der Gaswert R ist für Luft gleich 29,3 und behält für die Verbrennungsgase im Dieselmotor praktisch den gleichen Wert. Während der Expansion ist der Zylinderinhalt um den Betrag der Einblaseluft und des Brennstoffes höher als während der Kompression. Aus Luftpumpendiagrammen und Brennstoffmessungen sind beide Beträge bekannt. Somit kann nach der Zustandsgleichung der Verlauf der Gastemperatur im Zylinder aus Indikatordiagrammen ermittelt werden.

Streng genommen, folgt aus der Gasgleichung nur der Temperaturwert $\frac{1}{G} \int T dG$, d. h. der über den ganzen Zylinderinhalt genommene Mittelwert der Temperatur in dem betrachteten Augenblick. Räumlich ungleichmäßige Temperaturverteilung kann dabei bedingt sein

- durch den Grenzübergang des Temperaturfeldes an den das Gas umschließenden Wandungen,
- durch ungleiche Gemischbildung vor der Verbrennung und
- durch eine nicht gleichzeitig im ganzen Raum erfolgende Verbrennung, soweit diese nicht bei gleichbleibendem Druck vor sich geht).

Der zeitliche Temperaturverlauf in einem Zweitakt-Dieselmotor bei verschiedenen Belastungen ist in den Abb. 1 bis 3 dargestellt.³⁾ Abb. 1 zeigt Diagramme²⁾ eines Sulzer-Zweitakt-Schiffsmotors von 600 mm Bohrung, 1060 mm Hub und normal 100 Uml./min. Außer der Höchsttemperatur ist für das Ueber-

¹⁾ Vergl. Nägel, Forschungsheft 54 S. 32.

²⁾ Die Diagramme wurden auf ein von der Steuerwelle angetriebenes Papierband fortlaufend aufgenommen, während gleichzeitig durch einen zweiten Schreibstift die Hubstellung aufgezeichnet wurde. Die Versuchseinrichtung ist weiter unten beschrieben. Die Diagramme wurden bei der Auswertung in die p - v -Diagramme der Abb. 1 übertragen.

³⁾ s. die Tafeln im Anhang.

lastdiagramm $p_i = 7,5$ at die zugeführte Wärmemenge (Brennstoffwärme vermindert um Wandungswärme) eingezeichnet, wie sie sich nach dem Entropiediagramm, Abb. 2, aus $dQ = Tds$ ergab. Im Punkt der Höchsttemperatur, wo die Hyperbel der Isotherme das Diagramm tangiert, sind etwa 80 vH der zugeführten Wärme verbraucht, worauf der Rest während der Expansion kurz nachbrennt. Abb. 3 gibt schließlich für verschiedene Belastungen den Temperaturverlauf der Gase bei verschiedenen Kurbelstellungen.

Als Unterlage für die nachfolgenden Untersuchungen der Wandungstemperaturen mögen die gewonnenen Temperaturkurven genügen.¹⁾

2. Der Wärmeübergang.

a) Kühlwasserwärme und mittlere Wärmeübergangszahlen.

Der Wärmeübergangswert für den Fall, daß die Wärme von der heißen Zylinderwand an das Kühlwasser übergeht, wird in den Grenzen zwischen 1000 und 2000 kcal/m² °C h liegen. Der Wert wird von der Wassergeschwindigkeit und der Oberflächenbeschaffenheit abhängen. Um seine Größe in einem bestimmten Falle genauer festzulegen, wurden gleichzeitig mit den zur Ermittlung der Gastemperatur vorgenommenen Messungen einige Kühlwassermessungen zur Bestimmung der durch den Deckel abgeführten Wärme ausgeführt. Die Oberflächentemperaturen des Deckels auf der Wasserseite konnten durch ein mit Asbest angepreßtes und isoliert fortgeführtes Thermoelement gemessen werden.

In Zahlentafel 1 ist für verschiedene Lasten die abgeführte Kühlwärme in kcal/m²h, und die zugehörige Wärmeübergangszahl α_w für den Fall, daß die Wärme von der Wand an das Wasser übergeht, zusammengestellt. α_w wird mit zunehmender Wassergeschwindigkeit, d. h. mit zunehmender stündlicher Wassermenge, bezogen auf 1 m², größer. Abb. 4 gibt hierüber Aufschluß.

Unter Annahme einer Leitfähigkeit des Gußeisens von $\lambda = 50$ kcal/m² °C h kann schließlich die Deckeltemperatur auf der gasberührten Oberfläche berechnet werden. Sie wird bei einer Wandstärke von 35 mm selbst für Vollast nicht höher als 230° C.

Zahlentafel 1.

Last etwa	1/4	1/2	3/4	4/4
An das Kühlwasserabgeführte Deckelwärme Q_{stat} kcal/m ² h	50000	(65000)	100000	150000
Kühlwassermenge W kg/m ² h	3650	(7700)	12200	16700
Wärmeübergangszahl (von der Wand an das Wasser) α_w kcal/m ² C h	900	(1150)	1400	1800
Wandtemperatur auf der Wasserseite τ_w °C	85°	(90°)	100°	120°
Wandtemperatur auf der Gasseite τ_m °C	120°	(140°)	175°	230°

Für den Wärmeübergang auf der Gasseite ließe sich die scheinbare mittlere Wärmeübergangszahl als Quotient der übertragenen Wärme und des Unterschiedes der zeitlichen Mitteltemperaturen von Gas und Wandoberfläche angeben. Eine solche konstante Wärmeübergangszahl kann jedoch bei dem stark

¹⁾ Einwandfreie Temperaturwerte sind beim Zweitakt am ehesten durch thermoelektrische und Widerstandsmessungen nach dem von Prof. N ä g e l im Dresdener Laboratorium eingeführten und durch Petersen (Forschungsheft 143) für diesen besonderen Zweck ausgebauten Verfahren zu gewinnen. Vergl. auch die Versuche von Wolff, Oelmotor 1914/15 S. 451 und 1915/16 S. 9 und 52.

veränderlichen Gaszustand im Zylinder nur als grobe Annäherung gelten, die im folgenden fallen gelassen werden soll.

b) Verlauf des Wärmeübergangs vom Gas an die Wand.

Die Wärmeabgabe des Gases an die Wand vollzieht sich teils durch molekulare Wärmeleitung und molare Wärmemitführung, teils durch Strahlung. Da die Uebertragung durch Leitung und Mitführung in hohem Maße von den Eigenschaften des Gases (spezifischer Wärme, Leitfähigkeit), vom Zustand (Druck und Temperatur) und von der Bewegung des Gases (Strömungsgeschwindigkeit und Wirbelung) abhängt, muß die Wärmeübergangszahl als eine während eines Arbeitsspieles stark veränderliche Größe angesehen werden.

Diese Tatsache kann umso weniger außer Acht bleiben, als sie nicht etwa nur für die periodischen Temperaturschwingungen in den Wandungen, sondern auch für die stationäre Temperaturverteilung wichtig ist. Der mittlere stationäre Wärmefluß vom Gas an die Zylinderwand würde nämlich unter Annahme einer stets gleichen Wärmeübergangszahl einfach dem zeitlich mittleren Temperaturunterschied zwischen Gas und Wand verhältnismäßig sein. Wenn dieser verschwindet, d. h. wenn sich etwa bei schlechter Kühlung die Wandtemperatur der mittleren Gastemperatur nähert, so würde die Wärmeübertragung auch bei der besten Uebergangszahl aufhören; die zeitlich mittlere Gastemperatur wäre ein Grenzwert, den die mittlere Wandtemperatur bei stets gleicher Wärmeübergangszahl nicht überschreiten könnte.

Anders liegen aber die Verhältnisse, wenn neben der Gastemperatur auch die Wärmeübergangszahl veränderlich ist. Trifft es sich dann so, daß bei tiefen Temperaturen der Wärmeübergang schlecht, bei hohen dagegen gut ist, so wird während der Zeit der tiefen Temperaturen verhältnismäßig wenig Wärme von der Wand an das Gas abgegeben, während der Zeit der hohen Gastemperaturen dagegen verhältnismäßig mehr Wärme aus dem Gas durch die Wand aufgenommen; die Temperatur der ungekühlten Wand steigt infolgedessen über den zeitlichen Mittelwert der Gastemperatur hinaus, wobei es sich um Beträge von 100° und mehr handeln kann.

Ueber den Verlauf der Wärmeübergangszahl im Verbrennungsmotor sind zurzeit genaue Angaben nicht erhältlich. Ob neben der Uebertragung durch Leitung noch eine solche durch Strahlung in Frage kommt, war vor wenigen Jahren noch unentschieden. Aeltere Versuche ließen kaum einen Strahlungsanteil erwarten, während nach andern Gase sogar den Strahlungswert des schwarzen Körpers aufgewiesen haben sollen¹⁾.

Die bekannten Arbeiten von Nusselt über den Wärmeübergang von strömenden Gasen im Rohr bestätigen die weitgehende Abhängigkeit der Wärmeübertragung vom Gaszustand, insbesondere ein starkes Anwachsen mit dem Druck.

Zur weiteren Klärung der Wärmeübertragung im Verbrennungsmotor hat Nusselt²⁾ im Dresdener Laboratorium ausgezeichnete Versuche mit brennbaren Gasgemischen in Bomben ausgeführt, aus denen deutlich die starke Abhängigkeit der Uebertragung vom Gaszustand hervorgeht, und die eine genaue Trennung in Leitung, Strahlung und in ein vor Erreichung der stationären Wärmeströmung

¹⁾ Weißhaar, Forschungsheft 203, verwendet diesen Wert unter Hinweis auf die Versuche von Wamsler (Z. d. V. d. I. 1911 S. 630). Wamsler hat aber diese Strahlung zwischen Heizrohr und Gebäudewand gemessen und hat nur der Einfachheit halber als Temperatur der letzteren die Temperatur der Luft eingesetzt.

²⁾ Z. d. V. d. I. 1914 S. 361.

wirksames »Zeitglied« ermöglichen. Doch sind einerseits die Versuche nicht zum Abschluß gebracht, und andererseits dürfte es auch kaum möglich sein, die Ergebnisse auf die unregelmäßigen Strömungsverhältnisse im Verbrennungszylinder zu übertragen.

In allerneuester Zeit hat Latzko¹⁾ auf Grund der von Prandtl und von Karman aufgestellten Ansätze über die Geschwindigkeitsverteilung turbulenter Strömung die Theorie der Wärmeübertragung für turbulente Strömung analytisch entwickelt. Er fand die Wärmeübergangszahl im Rohr bei Turbulenz

$$\alpha_p = 0,03484 \nu C_p \left(\frac{\nu}{v d}\right)^{\frac{1}{4}} \dots \dots \dots (2).$$

- Darin bedeuten: C_p die spezifische Wärme der Volumeneinheit des Gases bei gleichbleibendem Druck,
- ν die mittlere Strömungsgeschwindigkeit im Rohr,
- d den Rohrdurchmesser,
- $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ die Zähigkeitszahl.

Latzko weist darauf hin, daß in dieser Gleichung nur solche Größen auftreten, die maßgebend sind für den Strömungszustand einerseits (ν, d, ν) und für die molare Wärmemitführung andererseits (C_p), da bei turbulenter Strömung die molare Uebertragung durch Mitführung die molekulare durch Leitung um ein Vielfaches übertrifft.

Dem Faktor $\nu \left(\frac{\nu}{v d}\right)^{\frac{1}{4}}$ kommt nun allerdings für die Vorgänge im Zylinder eines Verbrennungsmotors keine eigentliche quantitative Bedeutung zu. Anstelle der analytisch einigermaßen erfaßbaren turbulenten Strömung im Rohr von der mittleren Geschwindigkeit ν tritt im Zylinder eine regellose Wirbelung der Gase, für deren Ausbildung auch die Veränderlichkeit der Zähigkeit ν der Größe nach kaum noch in Betracht fallen kann. Qualitativ kann der ganze Faktor als »Wirbelungsfaktor« angesprochen und mit einem entsprechenden Wert eingesetzt werden. Die Bewegung der Gase im Zylinder ist sowohl während der Spülung und der anschließenden Kompression, als auch während der Verbrennung und Expansion sehr heftig, so daß die ihr »äquivalente Wirbelungsgeschwindigkeit«, d. h. diejenige Geschwindigkeit, welche in einem Rohr gleich gute Wärmeübertragung zur Folge haben würde wie die wirkliche Wirbelung im Zylinder, sehr hoch gewählt werden muß.

Abb. 5 zeigt den nach Gl. (2) berechneten Verlauf von α_p , wie er sich für den Druck und Temperaturverlauf bei hoher Belastung ($p_i = 7,5$ at, Abb. 3) ergibt. Der Maßstab entspricht bei einem mittleren Wert $\left(\frac{\nu}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}} = 0,185$ einer »äquivalenten Wirbelungsgeschwindigkeit« von $\nu = 40$ m/s gemäß Gleichung

$$\alpha_p = 0,0065 C_p \nu^{\frac{3}{4}} \text{ kcal/m}^2 \text{ s } ^\circ\text{C} \dots \dots \dots (2')$$

ν wurde zu 40 m/s gewählt, um in Uebereinstimmung mit der gemessenen Kühlwasserwärme zu bleiben.

Dieser berechnete Verlauf von α_p kann allerdings nur als eine Grundform angesehen werden, die in Wirklichkeit infolge eines etwa vorhandenen Strahlungsgliedes und vor allem infolge einer Veränderlichkeit der »äquivalenten Wirbelungsgeschwindigkeit« insbesondere während der Verbrennung mehr oder weniger verzerrt sein wird.

¹⁾ Zeitschrift f. angewandte Mathematik u. Mechanik, Bd. I, 1924 Heft 4.

Eine unmittelbare Bestimmung des zeitlichen Verlaufes der Wärmeübergangszahl durch Messungen am Motor selbst ist mit Schwierigkeiten verbunden, scheint jedoch gleichwohl möglich, wie ein kurzer Orientierungsversuch zeigte, der gleichzeitig den in Abb. 5 wiedergegebenen α -Verlauf zu bestätigen scheint.

Der Gedankengang des Versuches ist der folgende:

In den Verbrennungsraum wird ein dünnwandiges und an seinem vorderen Ende geschlossenes Stahlröhrchen eingeführt. Seine Temperatur muß sich auf einen Mittelwert einstellen, und um diesen, den Schwingungen der Gastemperatur nacheilend, geringe periodische Schwankungen im Takt des Motors ausführen. Diese haben periodische Wärmedehnungen des Röhrchens in der Längsrichtung von wenigen Hundertstel Millimetern zur Folge, die durch das Röhrchen nach außen übertragen und genügend übersetzt, auf ein fortlaufendes Band aufgezeichnet werden können. Aus diesen Aufzeichnungen kann alsdann die vom Röhrchen in jedem Zeitpunkt einer Umdrehung aufgenommene Wärme ermittelt werden. Als Quotient zwischen dieser auf die Flächeneinheit bezogenen Wärmemenge und dem augenblicklichen Temperaturunterschied zwischen Gas und Röhrchen ergibt sich schließlich die augenblickliche Wärmeübergangszahl.

Eine zuverlässige Bestimmung des Verlaufes der Wärmeübergangszahl während eines Spieles kann allerdings nur ein entsprechend vorbereiteter eingehender Versuch ähnlicher Art liefern, weil aus den erhaltenen Dehnungskurven die Tangentenneigung als ein Maß der aufgenommenen Wärmemenge abgelesen werden muß.

Da es sich hier nur darum handelt, für die Berechnungen des nächsten Abschnittes an Stelle der offenbar ungenügenden Annahme $\alpha_r = \text{konst}$ einen ungefähren α -Verlauf als Basis zu wählen, genügte schon ein sehr einfacher Versuch, um in doppelter Hinsicht eine Nachprüfung der nach Gl. (2) berechneten α -Kurve zu erhalten.

Ein solcher wurde wie folgt durchgeführt, Abb. 6:

An einem Zylinder eines 4-Zyl.-Zweitakt-Sulzer-Schiffsmotors¹⁾ von 600 mm Bohrung und 1060 mm Hub ($n_{\text{normal}} = 100$ Uml./min) wurde durch das außer Betrieb gesetzte Anlaßventil ein Meßröhrchen eingeführt, das 95 mm in den Verbrennungsraum ragte. In diesem dünnwandigen Stahlröhrchen von 10,5 mm Dmr. und 9 mm l. W., dem eigentlichen Dehnungsstück, steckte ein zweites Röhrchen von 6 mm Dmr. und 4 mm l. W. Am unteren Ende war ein gemeinsames Abschlußköpfchen mit beiden verschweißt. Das Ganze stellte sich im Betrieb auf eine mittlere Temperatur ein, die durch ein Eisen-Konstantan-Thermoelement gemessen wurde, dessen Drähte isoliert durch das innere Röhrchen geführt und in dem Abschlußköpfchen hart verlötet waren. Zwischen dem inneren und dem äußeren Röhrchen lag eine Asbestisolierung, so daß nur das äußere dünnwandige Röhrchen periodischen Temperaturschwankungen und entsprechenden Wärmedehnungen unterworfen war, die ein periodisches Verschieben der beiden Röhrchen ineinander zur Folge hatten. Diese Relativbewegung von wenigen Hundertstel Millimetern wurde außerhalb des Zylinderdeckels einfach in der Weise auf einen 195 mm langen Zeiger übertragen, daß zwischen zwei angefeilten Flächen am inneren Röhrchen und entsprechenden Anpreßschraubchen im äußeren Röhrchen 2 Stahlstiftchen von 1 mm Dmr. sich abwälzten, auf deren einem der Zeiger aufgeklemt war. Dies gestattete bei der gewählten Länge eine 195fache Uebersetzung. Der Zeiger schrieb auf ein Papierband, das von der Steuerwelle aus angetrieben, sich gleichförmig bewegte und während einer Umdrehung etwa 70 mm Weg zurücklegte. Um genau zusammengehörende Werte des Gastemperaturverlaufes und des Dehnungsverlaufes zu erhalten, wurde gleichzeitig auf dasselbe Band der Druck im Zylinder mittels eines Indikators fortlaufend aufgezeichnet und ebenso die Kurbelstellung von einem um 90° versetzten Indikatorantrieb aus geschrieben. Um ferner zusammengehörende Punkte dieser verschiedenen Diagramme zu erhalten, wurde bei stillstehendem Band der Schreibstiftausschlag des Indikators, des Dehnungszeigers und des Hubschreibers aufgenommen, aus deren gegenseitig unveränder-

¹⁾ Der kurze Versuch wurde auf dem Versuchsstand der Firma Sulzer A.-G. in Winterthur während einer dreitägigen Unterbrechung der normalen Abnahmeversuche durchgeführt.

lichem Abstand zusammengehörige Punkte gegeben sind. Die zu jeder Hubstellung gehörende Stellung des Hubschreibers wurde durch Schalten des Motors von 10 zu 10° aufgenommen.

Abb. 7 zeigt einen Abschnitt eines bei Ueberlast ($p_1 = 7,5$ at) aufgenommenen Diagrammstreifens. Kurve a gibt den vom Indikator geschriebenen Druckverlauf im Zylinder, Kurve b die Dehnung des Meßröhrchens. Die Hubkurve ist weggelassen. Die mittels Thermoelement gemessene mittlere Temperatur des Röhrchens betrug bei dieser Belastung 650° C.

Die Dehnungs- oder Temperaturkurve des Röhrchens läßt sich nun aber auch umgekehrt ableiten aus dem bekannten Verlauf der Gastemperatur, Abb. 3, und dem angenommenen α -Verlauf. Das Ergebnis wird verschieden ausfallen, je nachdem z. B. α_g als stets gleich oder aber als veränderlich vorausgesetzt wird, und zwar wird nicht nur die Form der Temperaturkurve, sondern auch ihr Mittelwert wesentlich von der Annahme über den α -Verlauf abhängen.

Es ist nämlich in jedem Augenblick die vom Gas an die Flächeneinheit der Oberfläche des Meßröhrchens abgegebene Wärme $dq = \alpha_g(t - \tau) dz$, wenn t und τ die Momentanwerte der Gas- bzw. Rohrtemperatur bedeuten.

Die während eines Spieles übertragene Wärme wird, wenn man zunächst von der Wärmestrahlung dieses Oberflächenstückes an die umgebenden Wandungen absieht:

$$\frac{q}{\text{Spiel}} = \int_{\text{Spiel}} \alpha_g(t - \tau) dz.$$

Da die Temperaturschwingungen des Meßröhrchens ($\infty \pm 10^\circ$) neben denen der Gastemperatur ($\infty \pm 700^\circ$) nicht in Betracht kommen, ist

$$\frac{q}{\text{Spiel}} = \int_{\text{Spiel}} \alpha_g t dz - \tau_m \int \alpha_g dz.$$

Erfährt der im Gasraum eingeschlossene Körper keinen Wärmeverlust durch Abstrahlung oder metallische Leitung, so wird sich seine Temperatur schließlich auf einen solchen mittleren Betrag τ_m einstellen, daß die pro Spiel vom Gas zugeführte Wärme gleich null ist.

Diese für die Wärmeübertragung maßgebende »Mitteltemperatur« des Gases folgt aus vorstehendem zu:

$$t_m^* = (\tau_m)_{q=0} = \frac{\int \alpha_g t dz}{\int \alpha_g dz}.$$

Die Integrale können durch die zeitlichen Mittelwerte der $\alpha_g t$ - bzw. α_g -Kurven ausgedrückt werden, so daß

$$t_m^* = \frac{(\alpha_g t)_m}{\alpha_{g_m}} \dots \dots \dots (3)$$

wird.

Für unveränderlich angenommenes α_g ist dieser Wert t_m^* gleich dem zeitlichen Mittelwert t_m der Gastemperatur. Bei veränderlichem α_g werden die beiden im allgemeinen verschieden sein, und zwar wird t_m^* einen größeren oder einen kleineren Wert als t_m aufweisen, je nachdem die Wärmetübertragung bei hohen oder bei tiefen Temperaturen besser ist. Hier trifft jenes zu, d. h. es würde eine ungekühlte (isolierte) Wand im Mittel eine höhere Temperatur als die mittlere Gastemperatur annehmen.

Aus dem Temperaturverlauf Abb. 3 ergibt sich:

für stetsgleiches α :

$$t_m^* = t_m = 560^\circ \text{ C},$$

für veränderliches α , nach Abb. 5 folgt aus Gl. (3) unabhängig vom Maßstab der α -Kurve:

$$t_m^* = 695^\circ \text{ C}.$$

Das Meßröhrchen im Innern des Gasraumes müßte daher eine mittlere Temperatur τ_m gleich der so ermittelten Gastemperatur t_m^* annehmen, vermindert um den Betrag der Abstrahlung an die kälteren Wandungen, und zwar fordert die Gleichheit der zu- und abgeführten Wärmemengen:

$$\alpha_{g_m} (t_m^* - \tau_m) = \frac{1}{\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} - \frac{1}{c}} \left[\left(\frac{\tau_m}{100} \right)^4 - \left(\frac{\tau_{\text{Wand}}}{100} \right)^4 \right],$$

wobei die τ im Strahlungsglied selbstverständlich als absolute Temperaturen einzusetzen sind.

c_1, c_2 sind die Strahlungskonstanten des eingeschlossenen Körpers bzw. der umgebenden Wand, und zwar ist

$$c_1 \text{ bzw. } c_2 = \begin{cases} 1,6 & \text{für glatte Oberfläche,} \\ 4,4 & \text{» rauhe »} \end{cases},$$

$c = 4,61$ ist die Strahlungskonstante des absolut schwarzen Körpers.

Die Mittelwerte von α ergeben sich aus der an den Deckel übertragenen Wärme $Q = 160000 \text{ kcal/m}^2 \text{ h}$ und der Deckeltemperatur auf der Gasseite von $\tau_{\text{Wand}} = 240^\circ \text{ C}$, wegen der Beziehung $Q = \alpha_{g_m} (t_m^* - \tau_{\text{Wand}})$

für unveränderliches α zu $\alpha_{g_m} = 500 \text{ kcal/m}^2 \text{ }^\circ\text{C h}$,

» veränderliches α » $\alpha_{g_m} = 350$ » » ».

Je nachdem etwa der Wert von $c_1 = c_2$ zwischen 1,6 und 4,4 liegt, muß sich danach die Temperatur des im Gasraum befindlichen Körpers wie folgt einstellen:

$$\begin{aligned} &\text{für } \alpha = \text{konst} && (t_m^* = 560^\circ \text{ C}); \tau_m = 530 \text{ bis } 553^\circ \text{ C}, \\ &\text{» } \alpha = \text{veränderlich} && (t_m^* = 695^\circ \text{ »}); \tau_m = 625 \text{ » } 672^\circ \text{ »}. \end{aligned}$$

Es ist zu beachten, daß für die beiden Annahmen $\alpha = \text{konst}$ bzw. $\alpha = \text{veränderlich}$ nach Gl. (2') von der gleichen Temperaturkurve Abb. 3 ausgegangen und daß mit der gleichen übertragenen Wärmemenge Q und der gleichen Wandtemperatur τ_{Wand} gerechnet wurde, so daß die Unterschiede, die sich in t_m^* , α_m und τ_m ergaben, einzig durch den verschieden gewählten Verlauf von α bedingt sind.

Vergleicht man nun damit die mittels Thermoelement im Innern des Gasraumes gemessene Temperatur des Röhrchens,

$$\tau_{\text{gemessen}} = 650^\circ \text{ C},$$

so spricht dieser Wert unbedingt gegen ein unveränderliches α , während er andererseits dem durch Gl. (2') gegebenen α -Verlauf nicht widerspricht.

In gleicher Weise wie für Ueberlast wurde auch für geringere Belastungen des Motors aus den entsprechenden τ - und α -Kurven die zeitlich mittleren Gastemperaturen t_{g_m} und die für den Wärmeübergang maßgebenden $t_{g_m}^*$ ermittelt. Stets bestätigte die gemessene Mitteltemperatur (bis auf einen Abstrahlungsbetrag) den angenommenen — mit c_p veränderlichen — α -Verlauf, während sich andererseits die Annahme $\alpha = \text{konst}$ als unhaltbar erwies. Abb. 8 zeigt dies übersichtlich zusammengestellt.

Es ist aber nicht allein die Temperatur des Meßröhrchens, sondern auch die Form der Dehnungskurve, die den α -Verlauf nach Gl. (2') als passende Grundform wenigstens im großen und ganzen bestätigt.

Diese Dehnungskurve kann rückwärts aus den t - und α -Kurven abgeleitet werden:

Die augenblicklich dem Röhrchen zugeführte Wärme ist (mit $\tau \propto \tau_m$)

$$dq = F \alpha_g (t - \tau_m) dz$$

und wird eine Temperaturerhöhung desselben bewirken gemäß

$$dq = G c d\tau,$$

woraus sich der Temperaturverlauf des Röhrchens ergibt zu

$$\tau - \tau_m = \frac{F}{G c} \int \alpha_g (t_g - \tau_m) dz$$

und seine Längendehnung mit $dz_s = d\alpha^0 \frac{60}{n 360}$

$$\text{zu} \quad \Delta l = l \beta (\tau - \tau_m) = \frac{F l \beta}{G c 6 n} \int \alpha_g (\tau_g - \tau_m) d\alpha^0.$$

F = Oberfläche

G = Gewicht

β = lineare Wärmedehnungszahl

c = spezifische Wärme

n = Umlaufzahl des Motors.

} des Meßröhrchens,

Für $\alpha = \text{konst}$ handelt es sich daher einfach darum, die Integralkurve des Gastemperaturverlaufes, Abb. 3, zu zeichnen.

Für veränderliches α (Gl. (2')) kann das Produkt des Integrals ohne weiteres aufgezeichnet und zeichnerisch integriert werden. Die Ergebnisse sind in Abb. 9 dargestellt. Die gestrichelte Kurve gilt für $\alpha = \text{konst}$, die strichpunktierte für $\alpha_g = \text{veränderlich}$ nach Gl. (2'), während die ausgezogenen Kurven Vergrößerungen der aufgenommenen Dehnungskurven sind.

An den abgeleiteten Dehnungskurven ist allerdings noch eine Berichtigung für die durch den Druck bewirkte Dehnung anzubringen:

$$\Delta l = \frac{D l p}{(D - d) E} \left(\frac{D}{D + d} - \nu \right),$$

wenn D den äußeren, d den inneren Durchmesser des Meßröhrchens bedeuten. Die Druckdehnung Δl ist somit besonders stark von der Querschrumpfung ν abhängig, über die bei hohen Temperaturen nichts bekannt ist. Mit normalen Werten von E und ν ergibt sich die in Abb. 8 punktierte Berichtigung.

Ein Vergleich der beiden gerechneten mit den gemessenen Kurven zeigt deutlich die Unhaltbarkeit der Annahme $\alpha = \text{konst}$. und spricht durchaus zugunsten eines veränderlichen α -Verlaufes nach Abb. 5. Allerdings lassen die Unterschiede zwischen den einzelnen gemessenen Kurven und zwischen diesen und der berechneten noch einen beträchtlichen Spielraum zu einer Berichtigung der α -Kurve. Eine unmittelbare Berechnung des α -Verlaufes aus den aufgenommenen Diagrammen führte zwar auf ganz ähnliche Kurven wie Abb. 5, doch enthielt der kurze Orientierungsversuch¹⁾ in seiner einfachen Anordnung zu viele Fehlerquellen, um mehr als den in Abb. 9 zusammengestellten Vergleich zu gestatten.

K. Neumann²⁾ hat auf anderem Wege versucht, den α -Verlauf während eines Arbeitsspieles im Viertaktmotor zu bestimmen: Durch Entnahme von Gasproben an bestimmten Stellen des Hubes mit Hilfe eines gesteuerten Ventiles gelang es, den zeitlichen

¹⁾ Der Motor stand für dessen Durchführung nur wenige Tage zur Verfügung.

²⁾ Forschungsheft 245.

Verbrennungsverlauf genau festzustellen. Unter Heranziehung der aus dem Indikator-diagramm berechneten Gastemperatur ergab die Wärmebilanz für jeden Hubpunkt die vom Gas an die Wand abgegebene Wärme. Die Wandungswärme hat Neumann¹⁾ über dem Kurbelwinkel aufgetragen, und zwar bedeutet jede Ordinate die vom Beginn der Zündung bis zu dem betreffenden Zeitpunkt an die Wand abgegebene Wärme, bezogen auf eine Betriebsstunde. Die daraus entwickelte α -Kurve zeigt aber, abgesehen von einem unwahrscheinlichen Verlauf einen mit jeder Kühlwassermessung unverträglich kleinen Höchstwert von $\alpha_g = 45$. Im Endpunkt der Kompression, wo wir einen α -Wert von der Größenordnung $\alpha \sim 1500$ fanden, ist nach Neumann gar nur $\alpha \infty 12$. Der Widerspruch klärt sich dadurch auf, daß Neumann die während einer Betriebsstunde innerhalb eines Drehwinkels φ abgegebene Wärme so in die Gleichung für α einführt, als ob für den Wärmeübertritt eine ganze Stunde zur Verfügung gestanden hätte, während in Wirklichkeit die Übertragung sich in $\frac{\varphi^0}{2 \cdot 360}$ h vollzieht. Zusammen mit einer weiteren Berichtigung in bezug auf den Wärmefluß in der Wandung folgt daraus eine Erhöhung der Neumannschen α -Zahlen bis zum 100fachen Betrag; insbesondere ergibt sich für den oberen Totpunkt ein mit unserem Wert nahezu gleiches $\alpha = 1540$. Eine Umrechnung der Neumannschen Versuchswerte scheint uns hier gleichwohl nicht angezeigt, da die resultierende α -Kurve in zu hohem Maße von jeder Unsicherheit in dem ermittelten Temperaturverlauf abhängt.

Es bleibt daher genaueren Messungen vorbehalten, die Abweichungen der α -Kurve von der durch Gl. (2') gegebenen Grundform festzulegen und den Einfluß der Betriebsbedingungen im einzelnen zu verfolgen.

Diese Ausführungen mögen es immerhin rechtfertigen, wenn in den nachfolgenden Untersuchungen über die Temperaturverteilung in den Zylinderwandungen an Stelle der einfachen Annahme $\alpha = \text{konst}$ die der Wirklichkeit besser entsprechende Annahme eines mit der spezifischen Wärme für die Volumeneinheit veränderlichen α -Verlaufes nach Gl. (2') bezw. Abb. 5 zugrunde gelegt wird. Dies dürfte um so eher zulässig sein, als auch die periodischen Temperaturschwingungen in den Wandungen, wie noch gezeigt werden wird, in ihrer Größenordnung dadurch nicht beeinflusst werden.

II. Der Temperaturverlauf in den Zylinderwandungen.

In einer beliebig gestalteten Wandung ist die Temperaturverteilung, abgesehen vom Stoff der Wandung, durch den Temperaturverlauf der angrenzenden Medien und durch die Wärmeübergangszahlen eindeutig bestimmt. Zu ihrer Ermittlung muß von der allgemeinen Differentialgleichung der Wärmeleitung ausgegangen werden. Diese folgt in bekannter Weise²⁾ aus der Ueberlegung, daß die in ein Volumenelement des Körpers infolge eines bestehenden Temperaturgefälles eintretende Wärmemenge eine Temperatursteigerung dieses Elementes entsprechend seiner spezifischen Wärme zur Folge hat. Die Gleichung lautet

mit $\kappa = \frac{\lambda}{\gamma c}$ als »Temperaturleitzahl«

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2} \right) \dots \dots \dots (4).$$

Der Temperaturverlauf in den Zylinderwandungen kann zerlegt werden in eine mittlere stationäre Verteilung und in sich darüber lagernde periodische Temperaturschwingungen, die von der Gasseite in das Innere der Wand eindringen. Dementsprechend zerfällt auch die allgemeine Gleichung in die beiden nachfolgenden.

Die periodischen Temperaturschwingungen dringen, wie sich zeigen wird, nur wenige Millimeter unter die gasberührte Oberfläche, so daß für ihre Berechnung die besonderen Formen und Abmessungen der Wand praktisch außer

¹⁾ a. a. O. Abb. 8 S. 19.

²⁾ Riemann-Weber, Partielle Differentialgleichungen der Physik.

Betracht fallen und die Temperatur nur von einer Koordinate abhängt. Die Grundgleichung der Wärmeleitung reduziert sich dabei auf

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} \dots \dots \dots (5).$$

Für die stationäre Verteilung andererseits ist die zeitliche Temperaturänderung $\frac{\partial \tau}{\partial t} = 0$, also der Klammerausdruck der Gl. (4) gleich null zu setzen:

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2} = 0 \dots \dots \dots (6).$$

Die Gl. (5) und (6) sollen gesondert weiter verfolgt werden.

1) Der periodische Temperaturverlauf in der Zylinderwand

a) unter Annahme einer stets gleichen Wärmeübergangszahl.

An eine ebene Wand grenze auf der einen Seite Wasser von der unveränderlicher Temperatur t_w , auf der anderen Seite Gas von der periodisch veränderlichen Temperatur t_g , deren zeitlicher Mittelwert t_{g_m} betrage.

Die für diesen Fall allgemeine Lösung der Gl. (5) liefert die Wandtemperatur τ in Abhängigkeit von der Schichttiefe x — positiv gerechnet von der gasberührten Oberfläche aus rechtwinklig ins Innere — in der Form

$$\tau = \tau_m - ax + \sum_{v=1}^{\infty} C_v e^{-\sqrt{\frac{v\omega}{2\kappa}} x} \cos\left(v\omega t - \sqrt{\frac{v\omega}{2\kappa}} x - \delta_v\right) \dots \dots (7),$$

wovon man sich durch Einsetzen in Gl. (5) überzeugt.

Die Wandtemperatur hat danach linearen Verlauf, über den sich sinusförmige Temperaturschwingungen lagern, deren Amplituden nach dem Innern der Wand hin nach einem Exponentialgesetz, also sehr rasch, abklingen.

Um die Grenzbedingungen zu erfüllen, muß die durch eine beliebige Schichttiefe x durchtretende Wärmemenge betrachtet werden. In der x -Richtung strömt nach der Definitionsgleichung für die Wärmeleitfähigkeit λ die Wärmemenge

$$dQ = -\lambda \frac{\partial \tau}{\partial x} dt,$$

was mit Gl. (7) die sekundliche Wärmemenge

$$q = \frac{dQ}{dt} = \lambda a + \sum_{v=1}^{\infty} \lambda \sqrt{2} C_v \sqrt{\frac{v\omega}{2\kappa}} e^{-\sqrt{\frac{v\omega}{2\kappa}} x} \cos\left(v\omega t - \sqrt{\frac{v\omega}{2\kappa}} x - \delta_v + \frac{\pi}{4}\right) \dots (8)$$

liefert.

Für die bei den Verbrennungsmotoren in Frage kommenden kurzen Zeiten einer vollen Temperaturschwingung einerseits und den reichlichen Wandstärken andererseits verschwinden auf der Wasserseite für $x = h$ infolge des Exponentialgliedes die periodischen Glieder und es wird dort die Wandtemperatur

$$\tau_w = \tau_m - ah \dots \dots \dots (7'),$$

und die aus der Wand austretende stationäre Wärmemenge wird

$$q_{\text{stationär}} = \left(\frac{dQ}{dt}\right)_{x=h} = \lambda a.$$

Sie muß der an das Wasser abgegebenen Wärme $a_w(\tau_w - t_w)$ gleich sein, also

$$\lambda a = a_w(\tau_w - t_w) \dots \dots \dots (8').$$

Andererseits nimmt in der gasberührten Oberfläche für $x = 0$ die Wandtemperatur gemäß Gl. (7) den periodischen Betrag an

$$\tau_g = \tau_{g_m} + \sum_{v=1}^{\infty} C_v \cos(\nu \omega t - \delta_v) \dots \dots \dots (7'')$$

und die sekundlich eintretende Wärmemenge

$$q = \left(\frac{dQ}{dt}\right)_{x=0} = \lambda a + \sum_{v=1}^{\infty} \lambda \sqrt{\frac{\nu \omega}{2\kappa}} C_v \sqrt{\frac{\nu \omega}{2\kappa}} \cos\left(\nu \omega t - \delta_v + \frac{\pi}{4}\right).$$

Sie muß stets gleich $\alpha_g(t_g - \tau_g)$ sein, wenn t_g die augenblickliche Gastemperatur und α_g den augenblicklichen Wert der Wärmeübergangszahl bedeutet:

$$\alpha_g(t_g - \tau_g) = \lambda a + \sum_{v=1}^{\infty} \lambda \sqrt{\frac{\nu \omega}{2\kappa}} C_v \sqrt{\frac{\nu \omega}{2\kappa}} \cos\left(\nu \omega t - \delta_v + \frac{\pi}{4}\right) \dots \dots (8'').$$

Aus Gl. (7'') und (8'') läßt sich die Gastemperatur berechnen:

$$t_g = \tau_{g_m} + \frac{\lambda a}{\alpha_g} + \sum_{v=1}^{\infty} C_v \left\{ \left(1 + \frac{\lambda}{\alpha_g} \sqrt{\frac{\nu \omega}{2\kappa}}\right) \cos(\nu \omega t - \delta_v) - \frac{\lambda}{\alpha_g} \sqrt{\frac{\nu \omega}{2\kappa}} \sin(\nu \omega t - \delta_v) \right\} (9).$$

Anderseits ist die Gastemperatur aus dem Indikatordiagramm als eine periodische Funktion der Zeit gegeben und kann nach Fourier in eine unendliche Reihe zerlegt werden gemäß dem Ansatz

$$t_g = t_{g_m} + \sum_{v=1}^{\infty} D_v \cos(\nu \omega t - \delta_v + \sigma_v) \dots \dots \dots (10).$$

Ist diese Zerlegung vorgenommen, wobei, wie sich zeigen wird, meist die ersten Glieder der Reihe für eine gute Annäherung genügen, so muß dieser Ausdruck etwa in der Form

$$t_g = t_{g_m} + \sum D_v \{ \cos(\omega t - \delta_v) \cos \sigma_v - \sin(\nu \omega t - \delta_v) \sin \sigma_v \}$$

gleichbedeutend mit Gl. (9) sein, woraus für unveränderliches α_g gliederweise folgt:

$$t_{g_m} = \tau_{g_m} + \frac{\lambda a}{\alpha_g}$$

und

$$D_v \cos \sigma_v = C_v \left(1 + \frac{\lambda}{\alpha_g} \sqrt{\frac{\nu \omega}{2\kappa}}\right) \dots \dots \dots (11)$$

$$D_v \sin \sigma_v = C_v \frac{\lambda}{\alpha_g} \sqrt{\frac{\nu \omega}{2\kappa}},$$

also

$$t_g \sigma_v = \frac{\frac{\lambda}{\alpha_g} \sqrt{\frac{\nu \omega}{2\kappa}}}{1 + \frac{\lambda}{\alpha_g} \sqrt{\frac{\nu \omega}{2\kappa}}} \dots \dots \dots (12)$$

und

$$C_v = D_v \frac{\sin \sigma_v}{\frac{\lambda}{\alpha_g} \sqrt{\frac{\nu \omega}{2\kappa}}} \dots \dots \dots (13).$$

Damit sind die Amplituden C_v der Wandtemperaturen bestimmt, ebenso die Phasenverschiebungen σ_v , um welche die Oberflächentemperaturen den Gastemperaturschwingungen nacheilen.

Die damit charakterisierten Temperaturschwingungen lagern sich über die mittlere Temperaturverteilung, wie sie dem stationären Wärmefluß entspricht. Für diesen ergibt sich in dem hier der Einfachheit halber herangezogenen Fall der ebenen Wand aus den Gl. (7'), (8') und (11) der bekannte Ausdruck

$$q_{stat} = \lambda a = \frac{t_{g_m} - t_w}{\frac{1}{\alpha_w} + \frac{1}{\alpha_g} + \frac{h}{\lambda}} \dots \dots \dots (14).$$

Die Verhältnisse liegen somit bei Annahme stetsgleicher Wärmeübergangszahl α_g einfach, wie noch kurz an einem Beispiel gezeigt werde, und zwar sollen die Temperaturschwingungen in der Wandung eines Zweitakt-Dieselmotors von 100 Uml.-min bei Höchstlast berechnet werden.

Der Verlauf der Gastemperatur sei durch Abb. 3 ($p_i = 7,5$ at) gegeben, aus der die mittlere Gastemperatur zu $t_{g,m} = 560^\circ \text{C}$ abgelesen werden kann.

Die Kühlwassertemperatur betrage $t_w = 40^\circ \text{C}$.

Die stetsgleiche Wärmeübergangszahl vom Gas an die Wand sei

$$\alpha_g = 500 \text{ kcal/m}^2 \text{ }^\circ\text{C h.}$$

Die Uebertragung von der Wand an das Wasser erfolge mit

$$\alpha_w = 1800 \text{ kcal/m}^2 \text{ }^\circ\text{C h.}$$

Die Wanddicke betrage $h = 35$ mm.

Ferner sei

die Wärmeleitzahl für Gußeisen $\lambda = 50 \text{ kcal/m h }^\circ\text{C}$,

das spez. Gewicht » » $\gamma = 7200 \text{ kg/m}^3$,

die spez. Wärme » » $c = 0,13 \text{ kcal.kg }^\circ\text{C}$,

damit wird in kg-cm-s-Einheiten die »Temperaturleitfähigkeit«

$$x = \frac{\lambda}{\gamma c} = 0,148.$$

Die Zerlegung der periodischen Gastemperatur nach Fourier liefert für die 5 ersten Glieder

$$\begin{aligned} t_g &= 560^\circ + 640^\circ \cos(\omega t + 120^\circ) \\ &+ 180^\circ \cdot (2\omega t + 69^\circ) \\ &+ 108^\circ \cdot (3\omega t + 75^\circ) \\ &+ 123^\circ \cdot (4\omega t + 37^\circ) \\ &+ 82^\circ \cdot (5\omega t + 10^\circ). \end{aligned}$$

Es wird:

$$\text{nach Gl. (14) } q_{\text{stat}} = \frac{560 - 40}{\frac{1}{1800} \frac{1}{500} \frac{0,035}{50}} = 160000 \text{ kcal/m}^2 \text{ h}$$

$$\text{nach Gl. (8') } \tau_w = 40 + \frac{160000}{1800} = 127^\circ \text{C}$$

$$\text{nach Gl. (11) } \tau_{g,m} = 560^\circ - \frac{160000}{500} = 240^\circ \text{C.}$$

Schließlich ergibt sich mit Gl. (12) und (13) die Zahlentafel 2, welche für $n = 100$ Uml./min und $p_i = 7,5$ at gilt.

Zahlentafel 2.
Amplituden der Oberflächentemperatur ($n = 100$ Uml./min).

Ordnung ν	$\frac{\lambda}{\alpha_g} \sqrt{\frac{\nu \omega}{2x}}$	D_ν	$(\delta_\nu - \sigma_\nu)$	σ_ν Gl. (12)	α_ν Gl. (13)
1	58,9	$\pm 640^\circ$	120°	$44^\circ 35'$	$\pm 7,65^\circ$
2	83,2	180°	69°		$1,52^\circ$
3	102,2	108°	75°	bis	$0,74^\circ$
4	117,8	123°	37°		$0,74^\circ$
5	132	82°	10°	$44^\circ 50'$	$0,44^\circ$

Die Amplituden C_ν der Temperaturschwingungen in der gasberührten Oberfläche werden danach sehr viel kleiner, als die sie erzeugenden Schwingungen der Gastemperatur. Schon bei der Amplitude 1. Ordnung C_1 findet eine Um-

rechnung auf $\frac{1}{84}$ statt. Bei der 5. Ordnung ist $C_5 : D_5$ nur noch $\frac{1}{186}$, und die betreffende Oberflächenschwingung ist weniger als $\pm \frac{1}{2}^\circ \text{C}$.

Zugleich erfolgt eine Phasenverschiebung in dem Sinne, daß die Oberflächentemperatur der Gastemperatur um den Winkel σ , also um rund 45° nach-eilt. Als Resultierende der verschiedenen Ordnungen folgt eine Schwingung der Oberflächentemperatur von rund $\pm 10^\circ \text{C}$.

Um den Temperaturverlauf im Innern der Wand überblicken zu können, sind für Schichttiefen von $x = 0, 1, 2$ und 5 mm gemäß Gl. (8) die Faktoren $e^{-\sqrt{\frac{v\omega}{2x}}x}$ berechnet worden, um die sich die Amplituden C , der Temperaturschwingungen beim Eindringen in das Wandinnere reduzieren (Zahlentafel 3).

Zahlentafel 3.
Prozentuale Verkleinerung der Temperaturschwingungen
im Innern der Wand ($n = 100$ Uml./min).

Ordnung	$x = 0$	1 mm	2 mm	5 mm
$\nu = 1$	1	0,55	0,302	0,050
$= 2$	1	0,43	0,185	0,015
$= 5$	1	0,264	0,070	0,0013

In 5 mm Tiefe ist danach von einer Gastemperaturschwingung von $\pm 640^\circ$ bei 100 Uml./min nur noch rund $\frac{1}{3}^\circ$ zu verspüren.

Zugleich mit dem Abklingen der Temperaturschwingung im Wandinnern tritt für jedes Millimeter Tiefe ein weiteres Nacheilen um $0,1 \sqrt{\frac{v\omega}{2x}}$ ein, also bei der 1. Ordnung um 34° , bei der 5. um 76° für 1 Millimeter.

Die in die Wand eintretende Wärmemenge läßt sich in ebenso einfacher Weise nach Gl. (8) berechnen, doch soll zunächst die Beschränkung $\alpha_v = \text{konst.}$ fallen gelassen werden.

b) *Temperaturschwingungen bei veränderlicher Wärmeübergangszahl α_v .*

Die Annahme einer zeitlich veränderlichen Wärmeübergangszahl α_v , etwa nach Abb. 5 scheint nach dem im I. Abschnitt geschilderten Orientierungsversuch begründet; auch ist gegenüber unveränderlichem α_v nach den Vergleichskurven Abb. 8 eine bedeutende Aenderung im zeitlichen Verlauf der Wandtemperaturen zu erwarten.

Die vorstehenden Ableitungen bleiben von dem veränderlichen Charakter von α_v bis einschließlich der Grenzbedingung auf der Wasserseite, Gl. (8'), unberührt. Dagegen muß jetzt in dem Ausdruck für die eintretende Wärme auf der Gasseite, Gl. (8''), α_v als veränderlich betrachtet und etwa in eine Reihe entwickelt werden. Eine genaue Lösung wie für unveränderliches α wird damit unmöglich. Dagegen ist eine angenäherte Lösung mit jeder gewünschten Genauigkeit leicht zu gewinnen.

In dem Ausdruck für die eintretende Wärmemenge

$$\alpha_v (t_g - \tau_g)$$

sind nämlich die Schwankungen der Oberflächentemperatur τ_g von der Größenordnung $\pm 10^\circ$ neben denen der Gastemperatur so gering, daß in erster und zumeist auch genügender Annäherung in dem Unterschied $(t_g - \tau_g)$ die augenblickliche Oberflächentemperatur τ_g durch ihren Mittelwert $\tau_{g,m}$ ersetzt werden kann.

Ist aber damit der Verlauf der eintretenden Wärme bekannt, so kann nach dem vorhergehenden Abschnitt leicht die Oberflächentemperatur gewonnen werden.

Zunächst folgt aus:

$$q_{stat} = \frac{\tau_{g_m} - t_w}{\frac{h}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_w}} = (\alpha_g t_g)_m - \alpha_{g_m} \tau_{g_m}$$

mit $\frac{h}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_w} \equiv \frac{1}{\beta}$ ohne weiteres die mittlere Oberflächentemperatur auf der Gasseite

$$\tau_{g_m} = \frac{(\alpha_g t_g)_m + \beta t_w}{\alpha_{g_m} + \beta} \dots \dots \dots (15).$$

Da t_g und α_g in Kurven vorliegen, läßt sich auch das Produkt $\alpha_g t_g$ am besten als Kurve aufzeichnen und planimetrieren, um $(\alpha_g t_g)_m$ für Gl. 15 zu erhalten.

Für den Höchsttemperaturverlauf, Abb. 3, und α_g nach Abb. 5 folgt $(\alpha_g t_g)_m = 242000 \text{ kcal/m}^2 \text{ h}$, und nach (15) wird für eine Kühlwassertemperatur $t_w = 40^\circ$, eine Wandstärke $h = 35 \text{ mm}$, mit $\lambda = 50$, $\alpha_w = 1800$, $\alpha_{g_m} = 350$ die Oberflächentemperatur $\tau_{g_m} = 240^\circ \text{ C}$.

Die in die Oberfläche eintretende Wärmemenge ergibt sich alsdann in ihrem zeitlichen Verlauf nach

$$q = \alpha_g (t_g - \tau_g) \sim \alpha_g t_g - \alpha_g \tau_{g_m}$$

ohne weiteres als Kurve, und zwar wie in Abb. 10 wiedergegeben.

Die in die Wand eindringende Wärme schwankt danach in weiten Grenzen. Der Hauptteil der gleichmäßig an das Kühlwasser abgehenden Wärme tritt während der kurzen Verbrennungszeit vom O. T. P. bis $60^\circ \text{ n. O. T. P.}$ in die Wand ein (60 vH). Bei $90^\circ \text{ Expansion}$ tritt bereits weniger Wärme auf der Gasseite in die Wand ein, als was gleichzeitig auf der Wasserseite abgegeben wird, und während der ersten Hälfte der Kompression findet neben der stationären Wärmeabgabe an das Kühlwasser auch auf der Gasseite ein Rückfließen der Wärme von der Wand an das Gas statt.

Aus der eintretenden Wärmemenge kann nun rückwärts die Oberflächentemperatur auf analytischem Wege leicht gewonnen werden, da nach Gl. (8) das zeichnerisch gegebene q einfach gleich

$$q = q_{stat} + \sum_{v=1}^{\infty} \lambda \sqrt{2} C_v \sqrt{\frac{\nu \omega}{2\pi}} \cos(\nu \omega t - \delta_v + \frac{\pi}{4})$$

zu setzen ist.

Entwickelt man die in Abb. 10 gegebene Kurve $f(\omega t) = q - q_{stat}$ in eine Fouriersche Reihe von der Form

$$\frac{1}{2} B_0 + \sum (A_v \sin \nu \omega t + B_v \cos \nu \omega t),$$

so ergibt sich durch gliedweisen Vergleich

$$A_v = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega t) \sin(\nu \omega t) d(\omega t) = \lambda \sqrt{2} C_v \sqrt{\frac{\nu \omega}{2\pi}} \sin\left(\delta_v - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$B_v = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega t) \cos(\nu \omega t) d(\omega t) = \lambda \sqrt{2} C_v \sqrt{\frac{\nu \omega}{2\pi}} \cos\left(\delta_v - \frac{\pi}{4}\right).$$

Damit lassen sich die Amplituden C_v und die Phasen δ_v berechnen und gemäß Gl. (7'') die Oberflächentemperaturen $\tau_g - \tau_{g_m} = \sum C_v \cos(\nu \omega t - \delta_v)$ zusammensetzen.

In besonders schöner Weise kann dieser Uebergang von der Wärmemenge zur Oberflächentemperatur durch die Umkehrung des von Prof Kirsch (Z. d. V. d. I. 1891 S. 957) angegebenen Verfahrens der »Temperaturzuckung« vereinfacht werden.

Man teilt das Intervall von 0 bis 2π in 12 Teile und ersetzt die Kurve durch einen entsprechenden Polygonzug. Diesen denkt man sich gemäß Abb. 11 durch Uebereinanderlagerung von Dreiecken gebildet, die sich bei gleicher Basis nur durch ihre Höhe unterscheiden. Es genügt alsdann, für nur eines derselben die geforderte Umformung vorzunehmen.

Für das schraffierte Dreieck von der vorläufigen Höhe = 1 wird:

$$\pi B_v = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{2\pi - \frac{\pi}{6}} f(\omega t) \cos \nu \omega t d(\omega t) = \int_{-\frac{\pi}{6}}^0 + \int_0^{\frac{\pi}{6}} + \int_{\frac{\pi}{6}}^{2\pi - \frac{\pi}{6}}$$

wobei das Integral in dem letzteren Abschnitt verschwindet, da dort $f(\omega t) = 0$ ist.

Von $-\frac{\pi}{6}$ bis 0, und von 0 bis $+\frac{\pi}{6}$ ist $f(\omega t)$ linear, und es wird

$$B_v = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-\frac{\pi}{6}}^0 \left(1 + \frac{6}{\pi} \omega t\right) \cos(\nu \omega t) d(\omega t) + \int_0^{+\frac{\pi}{6}} \left(1 - \frac{6}{\pi} \omega t\right) \cos(\nu \omega t) d(\omega t) \right\}$$

also

$$B_v = \frac{12}{\pi^2 \nu^2} \left(1 - \cos \nu \frac{\pi}{6}\right) = \lambda \sqrt{2} C_v \sqrt{\frac{\nu \omega}{2\pi}} \cos\left(\delta_v - \frac{\pi}{4}\right).$$

Für $\nu = 0$ folgt daraus für B_0 die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$, deren Wert sich durch zweimaliges Differenzieren von Zähler und Nenner zu $\frac{1}{6}$ ergibt. Das Glied $\frac{1}{2} B_0$ stellt den Mittelwert der Dreiecksfläche dar.

Ferner wird:

$$A_v = 0 = \lambda \sqrt{2} C_v \sqrt{\frac{\nu \omega}{2\pi}} \sin\left(\delta_v - \frac{\pi}{4}\right).$$

Das schraffierte Dreieck der »Wärmezuckung« von der Höhe 1 setzt sich danach aus einer unendlichen Cosinusreihe zusammen mit den Amplituden

$$B_v = 0,164; 0,153; 0,135; 0,114 \dots \dots \dots$$

Der Vergleich ergibt:

$$\delta_v = \frac{\pi}{4}$$

und

$$\sqrt{\omega} C_v = \frac{12 \left(1 - \cos \nu \frac{\pi}{6}\right)}{\pi^2 \nu^2 \lambda \sqrt{\frac{\nu}{\pi}}} = \frac{B_v}{\sqrt{\nu} \lambda \gamma c}.$$

Berechnet man auf diese Weise $\sqrt{\omega} C_v$ und δ , so läßt sich die zu dem Dreieck der »Wärmezuckung« zugehörige »Temperaturzuckung« gemäß Gleichung

$$\sqrt{\omega} (\tau_s - \tau_m) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sqrt{\omega} C_v \cos(\nu \omega t - \delta)$$

aufbauen. Dies ist in Abb. 12 mit den Konstanten für Gußeisen für $\nu = 1$ bis 7 durchgeführt. Die ausgeglichenen Ordinaten dieser »Temperaturzuckungskurve« betragen von 0 bis 2π in Abständen von je $\frac{\pi}{12}$ in kcal-cm-s-Einheiten

1070; 1275; 770; 430; 331; 170; 86,5; 20; -38; -88; -133; -170; -204
-240; -267; -300; -323; -350; -372; -400; -415; -440; -458; +160.

Ist nun eine Periode von $q - q_{stat}$ gegeben, und unterteilt man sie in 12 gleiche Teile, so ergibt jeder der 12 Ordinatenwerte, multipliziert mit obiger Zahlenreihe, eine Zeile, die die zugehörige Temperaturzuckung darstellt. Diese 12 Zeilen, passend untereinander geschrieben und addiert, ergeben das resultierende $(\tau - \tau_m) \sqrt{\omega}$.

Die Anwendung dieses Verfahrens auf die Kurve der eintretenden Wärmemenge, Abb. 10¹⁾, ergibt für $n = 100$ Uml./min die Kurve der Oberflächentemperatur, Abb. 13. Hieraus ist folgendes zu entnehmen:

In der gasberührten Oberfläche schwankt die Temperatur periodisch um einen Mittelwert, von dem sie sich bei einer Umlaufzahl des Motors von $n = 100$ Uml./min nach oben höchstens um rd. 14° C, nach unten um 8° C entfernt.

Im Wandinneren klingt die Temperaturschwingung nach Gl. (7)

$$(\tau_x - \tau_m) + ax = \sum C_v e^{-\sqrt{\frac{v\omega}{2x}} x} \cos(v\omega t - \sqrt{\frac{v\omega}{2x}} x - \delta_v) \dots (7)$$

rasch ab.

Das Verfahren der »Temperaturzuckung« ließe sich in ganz ähnlicher Weise auch hierbei, d. h. für die Transformation der Temperaturschwingung beim Uebergang von einer Schichttiefe zur nächsten anwenden. Bei dem regelmäßigen Verlauf der Oberflächentemperatur genügen aber für ihre Wiedergabe wenige Fourierglieder, so daß die unmittelbare Anwendung der Gl. (7) am raschesten zum Ziele führt. Die Oberflächentemperatur wird:

$$\begin{aligned} \tau_0 - \tau_m = \Delta\tau_{x=0} = & 7,65^\circ \cos(\omega t - 76^\circ) \\ & + 3,64^\circ \text{ » } (2\omega t - 93^\circ) \\ & + 2,1^\circ \text{ » } (3\omega t - 107^\circ) \dots \dots \dots (16). \\ & + 1,27^\circ \text{ » } (4\omega t - 132^\circ) \\ & + 0,84^\circ \text{ » } (5\omega t - 160^\circ) \\ & + \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Die Verkleinerungsfaktoren der Amplituden und die Phasenverschiebungen für 1 mm Tiefe wurden schon oben unter a) berechnet, so daß ohne weiteres die Temperaturschwingung unter der Oberfläche in 1 mm Tiefe angeschrieben werden kann:

$$\begin{aligned} \Delta\tau_{x=1\text{ mm}} = & 4,25^\circ \cos(\omega t - 110^\circ) \\ & + 1,57^\circ \text{ » } (2\omega t - 141^\circ) \\ & + 0,76^\circ \text{ » } (3\omega t - 166^\circ) \\ & + 0,38^\circ \text{ » } (4\omega t - 200^\circ) \\ & + 0,22^\circ \text{ » } (5\omega t - 160^\circ) \\ & + \dots \dots \dots \end{aligned}$$

In 5 mm Tiefe bleibt von der 1. Ordnung noch eine Schwingungsamplitude von 0,38° übrig.

Die Temperaturkurven sind für verschiedene Schichttiefen von Millimeter zu Millimeter in Abb. 13 ebenfalls eingetragen, woraus ohne weiteres für jede Kurbelstellung die jeweilige Temperaturverteilung in der Wand gegeben ist. Einige der charakteristischen Kurven sind in Abb. 14 für die ersten 5 mm Wandtiefe (Maßstab 10 fach) eingetragen.

Trotzdem die Gastemperaturen in den weiten Grenzen von ungefähr 1500° C schwanken, sind die Temperaturschwingungen in der Wand so gering, daß sie den stationären Temperaturverlauf praktisch nur bis zu einer Tiefe von etwa

¹⁾ Die Unterteilung in Abb. 10 erfolgte nach dem fein eingezeichneten Polygonzug.

5 mm stören. Gleichwohl ist die übertretende Wärmemenge den starken Schwankungen der Abb. 10 bis zum Mehrfachen des stationären Betrages unterworfen, was mit den Tangentensteigungen der Temperaturkurven beim Eintritt übereinstimmt. Danach findet ein Rückströmen der Wärme von der Wand an das Gas (während der Kompression) nur bis zu einer Wandtiefe von kaum 1 mm statt. (Wagerechte Tangente in Abb. 14.)

Die gewonnenen Kurven gelten für eine Motordrehzahl $n = 100$ Uml./min. Für eine andere Umlaufzahl ändert sich der Ordinaten-Maßstab umgekehrt verhältnismäßig mit \sqrt{n} ; die Temperaturschwingungen und die durch sie bedingten periodischen Wärmespannungen (Abschnitt III₁) kommen daher vor allem für langsam laufende Motoren (etwa Schiffsmotoren in halber Fahrt) in Betracht.

Abb. 14 zeigt besonders anschaulich, bis zu welcher geringeren Schichttiefe die Temperaturschwingungen in den Zylinderwandungen sich praktisch fortpflanzen. Von dieser äußersten Schicht abgesehen, herrscht in der Wand die der betreffenden Belastung entsprechende stationäre Temperaturverteilung. Insbesondere ist die an das Kühlwasser abgegebene Wärme keinen vom einzelnen Arbeitsspiel herrührenden Schwankungen unterworfen. Insofern sind thermodynamische Betrachtungen über die Wandungswärme unrichtig, die so rechnen, als ob sich in jedem Zeitpunkt die der augenblicklichen Gastemperatur entsprechende stationäre Temperaturverteilung ausbilden könnte¹⁾. Es ist leicht einzusehen, daß unter dieser Annahme ein Rückströmen der Wärme von der Wand an das Gas nicht möglich wäre, solange die Gastemperatur über der Kühlwassertemperatur bleibt. Welche ungeheure Wärmemengen dabei dem Gas entnommen werden müßten, um die stationäre Verteilung innerhalb eines Spieles in so weiten Grenzen zu ändern, möge aus der Angabe hervorgehen, daß die Erwärmung einer das Hubvolumen umschließenden Wandschicht von nur 1 mm Stärke um 10° C bereits eine Abkühlung des Gasinhaltes bedingt

um rd. 150° bei 1000 mm Bohrung
 » » 300° » 500 » »
 » » 600° » 250 » »

Schließlich sei in bezug auf das Material der Zylinderwandung bemerkt, daß sich die Größe der Oberflächentemperaturschwingung gemäß Gl. (13) umgekehrt verhältnismäßig mit $\sqrt{c\lambda\gamma}$ ändert. Dieser kennzeichnende Materialwert wird:

für Gußeisen, Stahl und Stahlguß . . . ~ 200
 » Aluminium ~ 300
 » Kupfer ~ 500
 » Glas ~ 20

2. Die stationäre Temperaturverteilung in den Zylinderwandungen.

a) Die partielle Differentialgleichung für die Temperaturverteilung in Rotationskörpern (Kolben, Einsätzen, Deckeln) und ihre Beziehung zur Gleichung der Torsionsfrage.

Die allgemeine Gleichung für die stationäre Temperaturverteilung in einem Körper, Gl. (4), lautet insbesondere für den Rotationskörper in Polarkoordinaten

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau}{\partial r} = 0 \dots \dots \dots (17).$$

Es besteht nun zwischen der Frage der Wärmeverteilung einerseits und den Fragen der Torsion in Rotationskörpern und der zweidimensionalen

¹⁾ Weißhaar, Forschungsheft Nr. 203; Neumann, Forschungsheft Nr. 245.

Flüssigkeitsströmung andererseits ein Zusammenhang, der in der Ähnlichkeit der partiellen Differentialgleichungen zum Ausdruck kommt. Der Zusammenhang zwischen der Torsions- und der Strömungsfrage ist bekannt¹⁾ und zur Bestimmung der Verteilung der Torsionsspannungen in Rotationskörpern auf zeichnerisch-rechnerischem²⁾ und auf experimentellem Wege³⁾ herangezogen worden.

In der Tat lautet bei der Torsionsfrage die Gleichgewichtsbedingung zwischen den radialen und den tangentialen Schubspannungen

$$\frac{\partial \tau_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{2}{r} \tau_r = 0,$$

wobei diese mit dem Verdrehungswinkel φ zusammenhängen gemäß

$$\begin{aligned} \tau_r &= Gr \frac{\partial \varphi}{\partial r} \\ \tau_x &= Gr \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \end{aligned}$$

was, in die Gleichgewichtsbedingungen eingesetzt, auf

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0$$

führt. Diese Gleichung unterscheidet sich von der Differentialgleichung der Wärmeverteilung, Gl. (17), nur durch den Faktor des dritten Gliedes.

Es entsprechen sich in den beiden Fällen die Temperatur τ und der Verdrehungswinkel φ . Flächen gleichen Verdrehungswinkels entsprechen Flächen gleicher Temperatur.

Der radialen und axialen Schubspannung entsprechend sei das Temperaturgefälle nach diesen beiden Richtungen:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_r &= \frac{\partial \tau}{\partial r} \\ \vartheta_x &= \frac{\partial \tau}{\partial x} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (18)$$

eingeführt.

Der Richtungswinkel ψ , den das resultierende Temperaturgefälle ϑ mit der x -Achse bildet, ergibt sich gemäß

$$\begin{aligned} \vartheta_r &= \vartheta \sin \psi \\ \vartheta_x &= \vartheta \cos \psi. \end{aligned}$$

zu

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\vartheta_r}{\vartheta_x} = \frac{\frac{\partial \tau}{\partial r}}{\frac{\partial \tau}{\partial x}} \dots \dots \dots (19).$$

Führt man eine Hilfsfunktion u ein durch die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -r \vartheta_r = -r \frac{\partial \tau}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial r} &= +r \vartheta_x = +r \frac{\partial \tau}{\partial x} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (20),$$

so ist zunächst durch jede der so gekennzeichneten Funktionen u zugleich die Grundgleichung (17) identisch erfüllt, wie man sich durch Einsetzen überzeugt.

¹⁾ Vergl. z. B. Föppl, Drang und Zwang, Bd. II, S. 157.
²⁾ F. A. Willers, Die Torsion von Rotationskörpern. Diss. Göttingen 1907.
³⁾ Wyszomirski, Stromlinien und Spannungslinien. Diss. Dresden 1914.

Ferner gibt eine Linie $u = \text{konst}$ die Richtung des Temperaturgefälles, da für

$$du = \frac{\partial u}{\partial r} dr + \frac{\partial u}{\partial x} dx = 0$$

$$\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)_{u=\text{konst.}} = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial r}} = +\frac{r}{r} \frac{\partial \tau}{\partial x},$$

also nach Gl. (19) gleich $\text{tg} \psi$ ist.

Linien $u = \text{konst}$ und Linien $\tau = \text{konst}$ bilden daher ein orthogonales Netz, da ja analog für

$$d\tau = \frac{\partial \tau}{\partial r} dr + \frac{\partial \tau}{\partial x} dx = 0$$

$$\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)_{\tau=\text{konst.}} = -\frac{\frac{\partial \tau}{\partial x}}{\frac{\partial \tau}{\partial r}} = -\frac{1}{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)_{u=\text{konst.}}}$$

ist. (Vergl. Abb. 15.)

Verlaufen die Richtungen a und b längs den Linien $\tau = \text{konst}$ bzw. $u = \text{konst}$, so gilt für das orthogonale Netz

$$-\frac{dx}{da} = \frac{dr}{db}$$

$$\frac{dr}{da} = \frac{dx}{db},$$

und der Differentialquotient

$$\frac{du}{da} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{da} + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{dr}{da}$$

geht über in

$$-\frac{\partial u}{\partial x} \frac{dr}{db} + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{dx}{db},$$

was schließlich mittelst der Gleichungen (20) auf

$$r \frac{\partial \tau}{\partial r} \frac{dr}{db} + r \frac{\partial \tau}{\partial x} \frac{dx}{db} = r \frac{d\tau}{db}$$

führt.

Somit gilt für die Bestimmung der Temperaturverteilung in Rotationskörpern

$$\frac{du}{da} = r \frac{d\tau}{db} \dots \dots \dots (21).$$

Dem Differential du kommt eine einfache physikalische Bedeutung zu: Durch den zwischen zwei benachbarten Linien $u = \text{konst}$ liegenden Querschnitt $2\pi r da$ fließt nach der Bestimmung der Wärmeleitzahl λ die Wärmemenge

$$dq = 2\pi r da \lambda \frac{d\tau}{db} = 2\pi \lambda du \dots \dots \dots (22).$$

Entsprechend dem Vorgehen von Willers bei der Torsionsfrage, kann hier ein zeichnerisches Näherungsverfahren wie folgt eingeschlagen werden.

Man entwirft ein Liniennetz, bestehend aus Linien gleicher Temperatur und den sie rechtwinklig schneidenden Richtungslinien der Wärmeströmung, wobei man sich von vornherein den bestehenden Grenzbedingungen möglichst anpaßt. Greift man nun einen zwischen zwei benachbarten Linien $\tau = \text{konst}$ gelegenen Streifen heraus, so lassen sich Korrekturpunkte für die Linien $u = \text{konst}$ in folgender Weise finden: Ueber a als Abszisse (auf dem Bogen gemessen) wird gemäß Gl. (21) $r \frac{d\tau}{db}$ als Ordinate aufgetragen, wobei $d\tau$, da es zunächst

auf den Maßstab nicht ankommt, zweckmäßig = 1 gesetzt wird. Diese Kurve kann zeichnerisch integriert werden, mit Runge am besten nach dem Seilpolygonverfahren. Es ergibt sich:

$$u = \int r \frac{dr}{db} da \dots \dots \dots (21'),$$

wobei das gesamte u über den Querschnitt $u = \frac{Q}{2\pi\lambda}$ bekannt ist. Es können alsdann rückwärts die Ordinatenwerte der u -Kurve etwa in 10 gleiche Teile geteilt und die zugehörigen Abszissen a in die Kurvenschaar als Punkte der $u = \text{konst}$ -Kurven eingetragen werden.

Entsprechend lassen sich nach

$$\tau = \int \frac{1}{r} \frac{du}{da} db \dots \dots \dots (21'')$$

Punkte der $\tau = \text{konst}$ -Kurven finden.

b) Graphische Näherungslösung für die Temperaturverteilung im Kegeldeckel eines Zweitaktmotors (Bauart Sulzer).

Es empfiehlt sich, von einer den Grenzbedingungen angepaßten u -Einteilung ausgehend, das Liniennetz in einer ersten Annahme zu entwerfen und zunächst über a die Integralkurve $\int r \frac{dr}{db} da$ aufzutragen. Daraus kann rückwärts die Differentialkurve $r \frac{dr}{db}$ gebildet und so für jeden Punkt die Breite db eines Streifens bestimmt werden. Darauf schließt man in gleicher Weise je die angrenzenden a -Streifen an und erhält so ein Netz, das der Grundgleichung genügt. Es bleibt schließlich übrig, zu prüfen, ob sich für jede Stelle der Körperoberfläche die nach dem Liniennetz aus- oder eintretende Wärmemenge darstellen läßt als das Produkt aus Fläche, Wärmeübergangszahl und Temperaturunterschied zwischen dem Außenmedium und der Wand an dieser Stelle. Die Unzulänglichkeit des ersten Liniennetzes wird bei diesem Vorgehen früher oder später einen berichtigten Entwurf veranlassen und schließlich zu einer sowohl die Gleichung als auch die Grenzbedingungen praktisch befriedigenden Lösung führen.

Die Durchführung für einen wassergekühlten Kegeldeckel ergab in Abb. 16 ein genügend genau orthogonales Liniennetz, das, wie die eingetragenen Kontrollpunkte ($\times \circ$) zeigen, die Differentialgleichung der Wärmeleitung erfüllt. Die durch ein beliebiges Oberflächenstück eintretende Wärme entspricht bei einer für den Wärmeübergang maßgebenden Gastemperatur $t_m^* = 680^\circ \text{C}$ einer Wärmeübergangszahl von im Mittel $\alpha_{gm} = 340$, während auf der Wasserseite die Wärme entsprechend einer Uebergangszahl von rund 1500 an das Kühlwasser (40°C) austritt.

Bleibt eine solche, auf zeichnerischem Wege gewonnene Temperaturverteilung auch stets eine Annäherung, so kann doch gesagt werden, daß der Praxis mit einer solchen Lösung, deren Annäherungsgrad überblickt werden kann, immerhin besser gedient ist, als mit einem aus der Vorstellung entworfenen Temperaturbild.

An der Temperaturverteilung Abb. 15 dürfte außer der Wärmeströmung im inneren und äußeren Stützzyylinder vor allem auffallen, daß trotz einer der großen Bohrung entsprechenden bedeutenden Wandstärke die Höchsttemperatur auf der Gasseite 270°C nicht überschreitet.

3. Der Uebergang von einer stationären Temperaturverteilung in eine andere bei Belastungsänderung.

Ueber die stationäre Temperaturverteilung in den Zylinderwandungen, wie wir sie soeben gewonnen haben, lagern sich in der gasberührten Oberflächenschicht die unter (II_γ) ermittelten Temperaturschwingungen, die sich je nach Umlaufzahl und Belastung in wenigen Millimetern Tiefe verlieren.

Wird die Belastung plötzlich geändert, d. h. geht der zeitliche Verlauf der Gastemperatur aus der bisherigen in eine neue Temperaturkurve über, so werden sich die periodischen Temperaturschwingungen in der Oberflächenschicht sogleich der veränderten erregenden Temperaturschwingung gemäß einstellen. Die stationäre Temperaturverteilung wird aber nur allmählich in die entsprechend veränderte Verteilung übergehen, und es stellen sich die Fragen:

- a) Wie verhält sich die neue stationäre Temperaturverteilung zu derjenigen vor der Belastungsänderung?
- b) Wie erfolgt zeitlich der stetige Uebergang von einem Temperaturfeld zu andern?

a) Die Beziehung zwischen den Temperaturfeldern bei verschiedener Belastung.

Für die stationäre Temperaturverteilung ist eine Belastungsänderung gleichbedeutend mit einer Neueinstellung der für den Wärmeübergang maßgebenden Mitteltemperatur des Gases t_m^* , verbunden mit einer entsprechenden Aenderung der mittleren Wärmeübergangszahl α_m . Sehen wir dabei von einer möglichen Aenderung auf der Wasserseite als unwesentlich ab, so läßt sich leicht zeigen, daß durch eine solche Aenderung im Wandinneren die Linien $u = \text{konst}$ des Verteilungsnetzes unberührt bleiben.

In der Tat besteht bei unveränderten Linien $u = \text{konst}$, Abb. 17, nach der Differentialgleichung für das Temperaturfeld, Gl. (21),

$$\frac{d\tau}{db} = \frac{du}{r da}$$

in jedem Punkt Proportionalität zwischen dem Temperaturgefälle $\frac{d\tau}{db}$ längs der Richtung $u = \text{konst}$ und der in dieser Richtung fließenden Wärmemenge $dq = 2\pi\lambda du$. Da ferner auf der Wasserseite die Grenzbedingung $dq = (\tau_w - t_w) \alpha_w \frac{2r\pi da}{\cos\beta_w}$ gilt, d. h. Proportionalität zwischen der durchtretenden Wärmemenge und $(\tau_w - t_w)$ besteht, muß sich der Temperaturunterschied $(\tau - t_w)$ auch innerhalb der Wand für jeden Punkt einer Linie $u = \text{konst}$ verhältnismäßig mit der durchtretenden Wärmemenge ändern. Es entsteht längs der Richtung des Temperaturgefälles das in Abb. 18 dargestellte Bild.

Die Wandtemperatur ändert sich bei einer Belastungsänderung in jedem Punkt in gleichem Verhältnis wie das wirksame Temperaturgefälle zwischen der mittleren Gastemperatur t_{g1}^{**} und der Wassertemperatur t_w . Oder mit andern Worten: der neue Temperaturverlauf in der Wand in irgend einer Richtung ist dem gewesenen affin mit $t = t_w$ als Achse und $\frac{t_{g1}^{**} - t_w}{t_{g0}^* - t_w}$ als Verhältniszahl.

Eine für eine beliebige Belastung gewonnene stationäre Temperaturverteilung gilt somit nach einfacher Umrechnung des Temperatur- und Wärmemaßstabes auch für eine veränderte Belastung.

b) Die zeitlich aperiodische Veränderung des Temperaturfeldes bei Belastungsänderung.

Die zweite Frage nach der zeitlich stetigen Aenderung der Temperaturverteilung bei Laständerung kann dahin beantwortet werden, daß ein solcher Uebergang der allgemeinen Gleichung der Wärmeleitung genügen muß. Wenn wir mit x die Richtung längs des Temperaturgefälles bezeichnen, Abb. 17, so gilt:

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} \dots \dots \dots (23).$$

Sie wird allgemein erfüllt durch den Ansatz:

$$\tau = f_1(\tau) + \Sigma (A_n \cos nx + B_n \sin nx) e^{-\kappa n^2 t} \dots \dots (24).$$

Für die Zeit $t = \infty$ verschwindet die Summe, und es bleibt

$$\tau = f_1(\tau).$$

$f_1(\tau)$ bedeutet somit die stationäre Temperaturverteilung in der Richtung des Gefälles nach vollzogener Laständerung und kann, nach vorstehendem, falls wir alle Temperaturen von der Kühlwassertemperatur als Nullpunkt aus zählen, ausgedrückt werden als

$$f_1(\tau) = C f_0(\tau)$$

mit

$$C = \frac{t_{g_1}^* \alpha_{g_1}}{t_{g_0}^* \alpha_{g_0}}$$

Ueber die Festwerte A_n , B_n und n kann den Grenzbedingungen gemäß verfügt werden, und zwar muß für jeden Zeitpunkt t die Uebergangsbedingung sowohl auf der Gasseite

$$-\lambda \left(\frac{\partial \tau}{\partial x} \right)_0 = \frac{\alpha_{g_1}}{\cos \beta_g} [t_{g_1}^* - (\tau)_0],$$

als auch auf der Wasserseite

$$-\lambda \left(\frac{\partial \tau}{\partial x} \right)_h = \frac{\alpha_w}{\cos \beta_w} [(\tau)_h - t_w]$$

erfüllt sein.

τ und $\frac{\partial \tau}{\partial x}$ aus Gl. (24) eingesetzt, ergibt durch Vergleich der von t freien Glieder einerseits

$$\left. \begin{aligned} -\lambda f_1'(\tau)_0 &= \frac{\alpha_{g_1}}{\cos \beta_g} (t_{g_1}^* - f_1(\tau)_0) \\ -\lambda f_1'(\tau)_h &= \frac{\alpha_w}{\cos \beta_w} (f_1(\tau)_h - t_w) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (25)$$

und durch Vergleich der Exponentialglieder andererseits

$$\left. \begin{aligned} \lambda n B_n &= \frac{\alpha_{g_1}}{\cos \beta_g} A_n \\ \operatorname{tg}(nh) &= \frac{\frac{\alpha_w}{\cos \beta_w} A_n + \lambda n B_n}{\lambda n A_n - \frac{\alpha_w}{\cos \beta_w} B_n} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (25')$$

Aus den beiden letzteren Gleichungen folgt zur zeichnerischen Bestimmung von n

$$\operatorname{tg}(nh) = \lambda n \frac{\frac{\alpha_w}{\cos \beta_w} + \frac{\alpha_{g_1}}{\cos \beta_g}}{(\lambda n)^2 - \frac{\alpha_w}{\cos \beta_w} \frac{\alpha_{g_1}}{\cos \beta_g}} \dots \dots \dots (26).$$

Die noch verfügbaren Amplituden A_n und B_n ergeben sich schließlich aus der Bedingung, daß zur Zeit $t = 0$ die Temperatur in der Wand den stationären Verlauf

$$\tau = f_1(\tau) + \Sigma A_n \cos nx + B_n \sin nx = f_0(\tau)$$

aufweist, was im Verein mit der ersten Gl. (25') ergibt:

$$\Sigma A_n \left(\cos nx + \frac{a_{g1}}{\lambda n \cos \beta_g} \sin nx \right) = - (f_1(\tau) - f_0(\tau)) = - C f_0(\tau) \quad (27)$$

Damit ist die gestellte Frage grundsätzlich beantwortet, die Lösung soll an Hand eines Beispiels veranschaulicht werden.

Hierzu mögen die Verhältnisse bei der Inbetriebsetzung des kalten Motors für eine ebene Wand untersucht werden, und zwar soll plötzlich unter Höchstlast angelassen werden, d. h. es sei

$$\begin{array}{llll} t_{g1}^* = 700^\circ & \alpha_{g1} = 350 & \cos \beta_g = 1 & \lambda = 50 \text{ kcal m}^2 \text{ h } ^\circ\text{C}, \\ t_w = 40^\circ & \alpha_w = 1800 & \cos \beta_w = 1 & h = 50 \text{ mm.} \end{array}$$

Die stationäre Verteilung, die sich alsdann einstellen wird, ist gegeben durch

$$f_1(\tau) = C + D\tau,$$

und zwar liefern die Beziehungen (25)

$$C = 274 \quad D = - 2980.$$

Für n folgt aus Gl. (26)

$$\cotg(0,05 n) = 0,0232 n - \frac{5,85}{n},$$

was zeichnerisch gelöst die Werte

$$n_1 = 24,5; \quad n_2 = 73,5; \quad n_3 = 132; \quad n_4 = 193; \quad n_5 = 255; \dots$$

ergibt.

Im Augenblick der Inbetriebsetzung, d. h. zurzeit $t = 0$ sei die Wandtemperatur längs der ganzen Plattendicke gleich der Kühlwassertemperatur $t_w = 40^\circ \text{C}$. Die Anfangsbedingung, Gl. (27), lautet somit

$$\Sigma A_n \left(\cos nx + \frac{7}{n} \sin nx \right) = - (234 + 2980 x) \quad \dots \quad (27')$$

Sie kann streng nur für eine unendliche Anzahl Glieder erfüllt werden. Der einzelne Festwert A_n , kann wie bei gewöhnlichen Fourierreihen ermittelt werden, indem man die ganze Gleichung mit $\cos n, x dx$ erweitert und integriert. Es verschwinden alsdann sämtliche Glieder mit Ausnahme des n ten, womit A_n bestimmt ist. Beschränken wir uns auf die vier ersten Glieder der Reihe, so genügt es, für den Zeitpunkt $t = 0$ die Forderung $\tau = 0$ für 4 Punkte der Wandtiefe zu stellen und sich nachträglich durch Aufzeichnen über den so gewonnenen Temperaturverlauf zur Zeit $t = 0$ Rechenschaft zu geben.

Auf diese Weise fand sich für die Temperatur im Innern der Wand die Gleichung:

$$\tau = 274 - 2980 - \left. \begin{array}{l} \{ 188 \cos(24,5 x - 16^\circ) e^{-32 t} \\ + 34 \cos(73,5 x - 6^\circ) e^{-287 t} \\ + 14 \cos(132 x - 3^\circ) e^{-922 t} \\ + 6 \cos(193 x - 2^\circ) e^{-1980 t} \\ + \dots \} \end{array} \right\} \dots \quad (28),$$

worin die Wandtiefe x in Metern, die Zeit t in Stunden einzusetzen ist.

Abb. 19 zeigt diesen Temperaturverlauf in verschiedenen Zeitpunkten nach Inbetriebsetzung. Das Anwärmen erfolgt mit anfänglich bedeutender Wärmeaufnahme durch die Wand, ohne gleichzeitige Abgabe an das Kühlwasser. Demgemäß steigt die Temperatur in der gasberührten Oberfläche während der ersten Sekunden sehr rasch, dann langsamer, und theoretisch erst nach unendlicher Zeit den stationären Zustand erreicht. Nach 5 Minuten ist der Unterschied jedoch bereits geringer als 15°C .

Von besonderer Bedeutung ist die starke Krümmung der Temperaturkurven in den ersten Sekunden des Anwärmens, da dieser Verlauf, wie sich im folgenden Abschnitt zeigen wird, zusätzliche Wärmespannungen zur Folge hat.

III. Die Wärmespannungen in den Zylinderwandungen.

1) Die periodischen Wärmespannungen.

Die periodischen Temperaturschwingungen in den Wandungen haben periodische Wärmespannungen zur Folge, da sich die einzelnen Wandschichten gegenseitig hindern, sich ihrer Temperatur entsprechend auszudehnen. Für die Beurteilung dieser Zusatzspannungen kann ein genügend kleines Stück der Wandung herausgegriffen und als eben betrachtet werden.

Grenzt man in diesem ein quadratisches Prisma von der Höhe h (Plattendicke) und den Seiten $dx = dy$ ab, so würde bei ungehinderter Ausdehnung jeder Schicht infolge der ungleichen Erwärmung dieses etwa die Form Abb. 20 annehmen. Die angrenzenden Elemente erzwingen aber aus Symmetriegründen die Form einer abgestumpften, quadratischen Pyramide mit ebenen Seitenflächen. Die dadurch hervorgerufenen elastischen Dehnungen und Spannungen sind eine Funktion des Abstandes z , von der Mittelfläche gemessen, sind aber je in der x -Richtung gleich wie in der y -Richtung.

$$\epsilon_{xz} = \epsilon_{yz}; \quad \sigma_{xz} = \sigma_{yz}.$$

Allgemein ist

$$E\epsilon_x = \sigma_x - \nu\sigma_y,$$

also hier

$$\sigma = \frac{E}{1-\nu} \epsilon \dots \dots \dots (29).$$

Es gilt nun, den Ausdruck für die spezifische elastische Dehnung ϵ zu finden. dx sei die Länge des Elementes bei der Temperatur 0° . Nach ungehinderter Wärmedehnung ist $dx' = dx(1 + \tau)$, wobei die Temperatur τ und damit dx' Funktionen des Abstandes von der Plattenmitte sind.

Nun wird das Element elastisch auf ebene Seitenflächen verformt, wobei sich ein Krümmungshalbmesser ϱ und ein Winkel $d\varphi$, die beide zunächst noch unbekannt sind, einstellen, Abb. 20. Damit ergibt sich die elastische Dehnung im Abstand z

$$\begin{aligned} \epsilon dx &= (\varrho + z) d\varphi - dx' \\ \epsilon &= (\varrho + z) \frac{d\varphi}{dx} - (1 + \beta\tau) \dots \dots \dots (30). \end{aligned}$$

In diesem Ausdruck sind der Krümmungshalbmesser ϱ und die Neigung $\frac{d\varphi}{dx} = \varphi'$ noch unbestimmt; sie sollen hier aus der Bedingung abgeleitet werden, daß die Verformungsarbeit zur Erzwingung ebener Seitenflächen ein Kleinstwert sein muß.

Zum gleichen Ergebnis gelangt man auch auf Grund der Bedingung, daß die Summen der Randkräfte und der Randmomente für eine Seitenfläche verschwinden müssen.

Die Verformungsarbeit für das Element ist mit σ aus Gl. (29)

$$dA = \frac{1}{2} dx dy \frac{E}{1-\nu} \int_{-h/2}^{+h/2} \epsilon^2 dz \dots \dots \dots (31).$$

wobei für ϵ der Ausdruck Gl. (30) gilt, in dem τ als Funktion von z zeichnerisch vorliegt. Die Bedingungen für den Kleinstwert lauten

$$\frac{\partial dA}{\partial \varrho} = 0; \quad \frac{\partial dA}{\partial \varphi'} = 0.$$

Diese Differentiationen können ausgeführt werden, bevor das Integral (31) berechnet ist. Es folgt mit Gl. (30)

$$\left. \begin{aligned} \varphi' \int \varepsilon dz &= 0 \\ \varrho \int \varepsilon dz + \int \varepsilon z dz &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (32).$$

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt

$$\int_{-h/2}^{+h/2} \varepsilon dz = 0$$

und dies eingesetzt in die zweite

$$\int_{-h/2}^{+h/2} \varepsilon z dz = 0,$$

oder ausgeschrieben mit ε aus Gl. (30)

$$\varrho \varphi' \int z dz + \varphi' \int z^2 dz - \int z dz - \beta \int \tau z dz = 0.$$

In diesem Ausdruck wird das erste und dritte Integral = 0, das zweite = $\frac{h^3}{12}$, so daß schließlich folgt:

$$\varphi' = \frac{12 \beta}{h^3} \int_{-h/2}^{+h/2} \tau z dz \dots \dots \dots (33).$$

Ist der Temperaturverlauf τ über z aufgezeichnet, so hat das Integral in Gl. (33) die einfache Bedeutung des statischen Momentes der Temperaturfläche in bezug auf die Achse $z = 0$. Sein Zahlenwert kann somit ohne weiteres bestimmt werden, und wir führen dafür die Bezeichnung ein:

$$S_\tau = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau z dz \dots \dots \dots (34).$$

Es fehlt nun noch die Größe ϱ , die etwa aus der ersten Gl. (32) entnommen werden kann. Es ist

$$\int \varepsilon dz = 0 = \varrho \varphi' \int dz + \varphi' \int z dz - \int dz - \beta \int \tau dz = 0.$$

Das erste und dritte Integral wird h , das zweite = 0 und damit

$$\varrho \varphi' = 1 + \frac{\beta}{h} \int_{-h/2}^{+h/2} dz \dots \dots \dots (35).$$

Das Integral hat die einfache Bedeutung des Inhaltes der Temperaturfläche, kann also ebenfalls durch Planimetrieren bestimmt werden. Es gelte die Abkürzung

$$F_\tau = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau dz \dots \dots \dots (34').$$

Mit Gl. (33) und (35) sind φ' und ϱ und damit die spezifische Dehnung ε nach Gl. (30) und schließlich die Spannung σ nach Gl. (29) bestimmt. Dies vereinfacht sich in der Durchführung noch wie folgt:

und

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\beta}{h} F_{\tau} + z \frac{12\beta}{h^3} S_{\tau} - \beta \tau \\ \sigma &= \frac{E\beta}{1-\nu} \left[\frac{F_{\tau}}{h} + \frac{12 S_{\tau}}{h^3} z - \tau \right] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (36).$$

Damit läßt sich der Spannungszustand bei nicht geradlinigem Temperaturverlauf in einfacher Weise bestimmen.

Setzt man die Konstanten

E = Elastizitätsmaß = 0,7 · 10⁶ bis 1,1 · 10⁶ kg/cm² für Gußeisen (Zyl.-Guß),
2 150 000 » » Stahlguß und Stahl,

ν = Querkontraktion = 0,2 für Gußeisen,
0,3 » Stahlguß,

β = linearer Ausdehnungskoeffizient = $\frac{0,013}{1000}$ für 1° C,

so wird der Faktor vor der Klammer

$$\frac{E\beta}{1-\nu} = 11,4 \text{ bis } 18 \text{ für Gußeisen und } 40 \text{ für Stahlguß und Stahl.}$$

Die gewonnene Gleichung für die Zusatzspannungen in einer ebenen Wand bei einem vom linearen Verlauf abweichenden Temperaturabfall wird erst im nachfolgenden Abschnitt über die Zusatzspannungen bei Laständerung voll angewendet werden. Hier, wo es sich nur um die sehr geringen Temperaturschwingungen in der gasberührten Schicht und die durch sie bewirkten Spannungen handelt, vereinfacht sich Gl. (36) in weitgehendem Maße, da bei den üblichen Wandstärken und dem auf eine dünne Schicht beschränkten Störungsgebiet die Integrale F_{τ} und S_{τ} , Gl. (34) und (34'), praktisch verschwinden.

Der Ausdruck für die periodischen Wärmespannungen lautet damit nach Gl. (36) einfach

$$\sigma \propto \frac{E\beta}{1-\nu} \Delta \tau \dots \dots \dots (36'),$$

worin für $\Delta \tau$ die in Abschnitt II₁ ermittelten periodischen Temperaturschwingungen einzusetzen sind.

Insbesondere für die gasberührte Oberflächenschicht gilt daher mit Gl. (16), Abschnitt II₁,

$$\sigma = \frac{E\beta}{1-\nu} \left\{ \begin{aligned} &7,65^{\circ} \cos(\omega t - 76^{\circ}) \\ &+ 3,64^{\circ} \cos(2\omega t - 93^{\circ}) \\ &+ 2,1^{\circ} \cos(3\omega t - 107^{\circ}) \\ &+ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\}.$$

Die Kurve der Oberflächentemperatur, Abb. 13, kann daher zugleich als Kurve der periodischen Spannungen in der Oberflächenschicht gelten, wenn die Ordinaten mit $\frac{E\beta}{1-\nu}$ vervielfacht werden. Für Gußeisen mit $E = 1,1 \cdot 10^6$ bedeutet dies für den vorliegenden Fall von Höchstlast und 100 Uml./min einen periodischen Spannungswechsel zwischen rd. 150 kg/cm² Zug und 250 kg/cm² Druck. Für Stahlguß verdoppeln sich diese Zahlen. Diese Spannungen sind in gleicher Weise wie die Oberflächentemperatur von der Belastung und der Umlaufzahl abhängig.

Als ein kennzeichnender Wert des Baustoffes mit Rücksicht auf die periodischen Wärmespannungen kann der Ausdruck

$$\frac{E \beta}{1 - \nu \sqrt{\lambda \gamma c}}$$

gelten, da nach III $\Delta \tau$ umgekehrt verhältnissgleich $\sqrt{\lambda \gamma c}$ ist. Bei einem gegebenen Kreisprozeß im Zylinder sind die periodischen Oberflächenspannungen in den Wandungen diesem Festwert verhältnissgleich, so daß als Gütegrad des Baustoffes mit Rücksicht auf die periodischen Wärmespannungen der Wert

$$\frac{\sigma_{zul. (1 - \nu)} \sqrt{\lambda \gamma c}}{E \beta}$$

gesetzt werden kann.

Mit Rücksicht auf stationäre Temperaturspannungen gilt dagegen angenähert

$$\frac{\sigma_{zul. (1 - \nu)} \lambda}{E \beta}$$

als Gütegrad.

2. Die zusätzlichen Wärmespannungen bei Belastungsänderung.

Der vom geradlinigen wesentlich abweichende Temperaturverlauf, wie er sich in den ersten Sekunden nach einer Belastungsänderung einstellt (vergl. Abschnitt II 3 b), hat bedeutende Ausgleichspannungen zur Folge, die sich nach der soeben gewonnenen Gl. (36) berechnen lassen.

Greifen wir aus Abb. 19 den Temperaturverlauf in einem beliebigen Zeitpunkt nach erfolgter Belastung heraus, so müssen nach Gl. (36) für jene Temperaturkurven zunächst die Integrale

$$F_{\tau} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau dz \quad \text{und} \quad S_{\tau} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau z dz$$

z. B. durch Aufzeichnen und Planimetrieren bestimmt werden.

Es läßt sich dann in jede Temperaturkurve die mittlere Gerade $\frac{F}{h} + \frac{12 S}{h^3} z$ eintragen. Nach Gl. (36) ist die Spannung in jeder Schicht dem Ordinaten-Unterschied zwischen der Temperaturkurve und dieser mittleren Geraden verhältnissgleich.

Abb. 21 zeigt solche Spannungskurven für 10, 20 und 40 s nach Inbetriebsetzung bei einer Wandstärke von 50 mm. Als Material der Wand ist Gußeisen mit $\frac{E \beta}{1 - \nu} = 18$ angenommen. Sowohl auf der Gas-, als auch auf der Wasserseite entstehen Druckspannungen, während die Mittelschichten der Wand auf Zug beansprucht sind. Es fällt auf, daß die Spannungen auf der Gasseite nach 10 s besonders hoch sind (450 kg/cm²) und rasch abnehmen, während sie auf der Wasserseite nach 10 s noch klein sind und bis 40 s weiter zunehmen. In diesem Zeitpunkte übertreffen sie die gleichzeitigen Spannungen auf der Gasseite.

Dieses Spiel der Ausgleichspannungen während der ersten Minute der Inbetriebsetzung läßt sich besonders anschaulich aus den Kurven der Abb. 22 erkennen, die aus den Spannungskurven Abb. 21 bzw. den Temperaturkurven Abb. 19 entnommen sind¹⁾.

Die Druckspannungen auf der Gasseite erreichen in raschem Anstieg nach 10 s ihren Höchstwert und sinken dann rasch wieder. Langsamer nehmen die Druckspannungen auf der Wasserseite zu, werden nach 25 s größer als auf der Gasseite und nehmen nach einem Höchstwert (40 s) ebenfalls ab.

¹⁾ Es bietet keine Schwierigkeit, diesen zeitlichen Spannungsverlauf aus der Gl (28) des Temperaturverlaufes auch rechnerisch abzuleiten, doch verdient ein zeichnerisches Vorgehen als eigentliches Werkzeug des Ingenieurs auch hier den Vorzug.

Für nicht allzureichliche Wandstärken sind selbst bei plötzlichen Belastungen die entstehenden Ausgleichspannungen gefahrlos, da die Zugbeanspruchung den Betrag von 160 kg/cm² nicht überschreitet.

3. Die stationären Wärmespannungen.

a) Die Differentialgleichungen der Festigkeitsberechnung achsensymmetrischer Schalen (Kolben, Deckel, Einsatz) bei achsensymmetrischer Temperaturverteilung und Belastung.

Bei Festigkeitsuntersuchungen der Zylinderwandungen handelt es sich ganz allgemein um die Berechnung achsensymmetrischer Schalen bei achsensymmetrischer Belastung, soweit diese Achsensymmetrie nicht konstruktiv, etwa durch Ventile oder Rippen, gestört ist.

Die Frage der Schalenfestigkeit ist durch die Arbeiten von Prof. Stodola über die Kegelschale¹⁾ und von Reißner über die Kugelschale²⁾ in Angriff genommen und neuerdings besonders durch die Arbeiten von Prof. Meißner³⁾ und seinen Schülern einer verhältnismäßig einfachen Lösung zugänglich gemacht worden.

In unmittelbarer Anlehnung an die genannten Arbeiten sollen hier zunächst die Differentialgleichungen für den allgemeinen Fall achsensymmetrischer Belastung und beliebiger achsensymmetrischer Temperaturverteilung aufgestellt werden. Die Temperatur kann dabei sowohl in der Richtung des Meridians x als auch in der Richtung der Plattendicke z achsensymmetrisch variieren, also eine Funktion von x und z sein.

Die der Schalentheorie zugrunde liegende Annahme, daß die Normalen zur Schalenmittelfläche bei der Formänderung gerade und senkrecht bleiben, ist auch für die nachfolgenden Berechnungen vorausgesetzt.

Die Bezeichnungen sollen sich an die von Meißner eingeführten anschließen. Insbesondere mögen bedeuten:

- x der längs des Meridians gemessene Abstand eines Punktes von der Achse,
- z die Ordinate senkrecht zur Mittelebene der Schale,
- R_1, R_2 die Haupt-Krümmungshalbmesser in der Meridianebene und rechtwinklig dazu,
- α der Breitenwinkel,
- φ der Winkel zwischen zwei Meridianschnitten.

Beschreiben wir die Formänderung der Schale durch eine Verschiebung ξ eines Punktes der Schalenmittelfläche in der Richtung des Meridians, und durch eine Verschiebung ζ senkrecht zur Mittelfläche (etwa positiv nach einwärts), wobei ξ und ζ die gesamten von Druck und Temperatur bewirkten Verschiebungen bedeuten, so läßt sich die spezifische Dehnung der Schalenmittelfläche in der Richtung des Meridians darstellen durch

$$\epsilon_{x_0} + \beta t_0 = \frac{\xi' - \zeta}{R_1} \dots \dots \dots (37),$$

¹⁾ A. Stodola, Die Dampfturbinen. 4. Aufl. Berlin, Springer, 1910 S. 599 u. f.
²⁾ H. Reißner. Spannungen in Kugelschalen. Müller - Breslau - Festschrift. Leipzig, Körner, 1912.
³⁾ E. Meißner. Physikalische Zeitschrift, 14. Jahrgang, 1913 S. 343 bis 349. — E. Meißner, Ueber Elastizität und Festigkeit dünner Schalen. Vierteljahresschrift der Naturf. Gesellschaft. Zürich 1915. — L. Bolle, Festigkeitsberechnung von Kugelschalen. Diss. Zürich 1916. — H. Wisler, Festigkeitsberechnung von Ringflächenschalen. Zürich 1916. — Fr. Dubois, Ueber die Festigkeit der Kegelschale. Diss. Zürich 1917. — E. Honegger, Festigkeitsberechnung von Kegelschalen mit linear veränderlicher Wandstärke. Diss. Zürich 1919.

wenn t_0 die Temperatur der Schalenmittelfläche in dem betreffenden Punkt x bedeutet, und mit β die lineare Wärmedehnungszahl bezeichnet wird. Striche bedeuten im folgenden Ableitung der betreffenden Größe nach α .

Für die spezifische Dehnung der Mittelfläche in der Umfangsrichtung folgt

$$\varepsilon_{y_0} + \beta t_0 = \frac{\xi \cotg \alpha - \zeta}{R_2} \dots \dots \dots (38).$$

Führt man als weitere Verformungsgröße mit ϑ den Neigungswinkel an die elastische Meridianlinie ein, der mit ξ und ζ durch die Gleichung

$$\vartheta = \frac{\xi' + \zeta'}{R_1} \dots \dots \dots (39)$$

verbunden ist, so wird die gesamte spezifische Dehnung in der x -Richtung in einem Schichtabstand z über der Schalenmittelfläche ($\varepsilon_{xx} + \beta t_x$) sich von derjenigen der Mittelfläche ($\varepsilon_{x_0} + \beta t_0$) um den Betrag $z \frac{\vartheta'}{R_1}$ unterscheiden, wenn man die Plattendicke als klein neben den Krümmungshalbmesser R_1 und R_2 vernachlässigt. Somit wird:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xx} + \beta t_x &= \varepsilon_{x_0} + \beta t_0 - z \frac{\vartheta'}{R_1} \\ \varepsilon_{yy} + \beta t_y &= \varepsilon_{y_0} + \beta t_0 - z \frac{\vartheta \cotg \alpha}{R_2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (40).$$

und entsprechend

Die Spannungen werden gemäß den Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (41),$$

worin als ε_x und ε_y die rein elastischen spezifischen Dehnungen einzusetzen sind:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \varepsilon_{x_0} + \beta t_0 - z \frac{\vartheta'}{R_1} - \beta t_x + \nu \left[\varepsilon_{y_0} + \beta t_0 - z \frac{\vartheta \cotg \alpha}{R_2} - \beta t_y \right] \right\}$$

oder

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \left[\frac{\xi' - \zeta}{R_1} + \nu \frac{\xi \cotg \alpha - \zeta}{R_2} \right] h - z \left[\frac{\vartheta'}{R_1} + \nu \frac{\vartheta \cotg \alpha}{R_2} \right] - (1 + \nu) \beta t_x \right\} \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \left[\frac{\xi \cotg \alpha - \zeta}{R_2} + \nu \frac{\xi' - \zeta}{R_1} \right] h - z \left[\frac{\vartheta \cotg \alpha}{R_2} + \nu \frac{\vartheta'}{R_1} \right] - (1 + \nu) \beta t_y \right\} \end{aligned} \right\} (42).$$

Bedeutet man mit den Bezeichnungen von Meißner T_x und T_y die resultierenden Spannungen über die ganze Schalendicke h , also

$$T = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x dz,$$

so wird

$$\left. \begin{aligned} T_x &= \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \left[\frac{\xi' - \zeta}{R_1} + \nu \frac{\xi \cotg \alpha - \zeta}{R_2} \right] h - (1 + \nu) \beta \int_{-h/2}^{+h/2} t_x dz \right\} \\ T_y &= \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \left[\frac{\xi \cotg \alpha - \zeta}{R_2} + \nu \frac{\xi' - \zeta}{R_1} \right] h - (1 + \nu) \beta \int_{-h/2}^{+h/2} t_y dz \right\} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (43).$$

Bezeichnet man ferner die Biegemomente mit G_x und G_y ,

$$\text{d. h. } G = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x z dz,$$

so wird

$$\left. \begin{aligned} G_x &= \frac{-E}{1-\nu^2} \left\{ \left[\frac{\vartheta'}{R_1} + \nu \frac{\vartheta \cotg \alpha}{R_2} \right] \frac{h^3}{12} + (1+\nu)\beta \int_{-h/2}^{+h/2} t_x z dz \right\} \\ G_y &= \frac{-E}{1-\nu^2} \left\{ \left[\frac{\vartheta \cotg \alpha}{R_2} + \nu \frac{\vartheta'}{R_1} \right] \frac{h^3}{12} + (1+\nu)\beta \int_{-h/2}^{+h/2} t_y z dz \right\} \end{aligned} \right\} \quad (44).$$

Damit sind die Beziehungen zwischen den Spannungen und den Formänderungen gegeben.

Die Gleichgewichtsbedingungen für ein durch $d\alpha$ und $d\varphi$ abgegrenztes Schalenelement sind reine Beziehungen zwischen den Spannungen T_x, T_y , den resultierenden Schubspannungen N im Breitenschnitt und den äußeren auf der Flächeneinheit angreifenden Kräften X und Z und sind somit von den durch die Temperaturen bewirkten Verzerrungen unabhängig.

Sie können daher ohne weiteres hier übernommen werden:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} (T_x R_2 \sin \alpha) - T_y R_1 \cos \alpha - N R_2 \sin \alpha + X R_1 R_2 \sin \alpha &= 0 \\ \frac{d}{d\alpha} (N R_2 \sin \alpha) + T_x R_2 \sin \alpha + T_y R_1 \sin \alpha + Z R_1 R_2 \sin \alpha &= 0 \\ \frac{d}{d\alpha} (G_x R_2 \sin \alpha) - G_y R_1 \cos \alpha - N R_1 R_2 \sin \alpha &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (45).$$

Durch Elimination von T_y aus den beiden ersten Gleichungen folgt

$$\left. \begin{aligned} R_2 \sin \alpha (T_x \sin \alpha + N \cos \alpha) + F(\alpha) &= 0 \\ \text{mit } F(\alpha) &= \int_{\alpha_0}^{\alpha} R_1 R_2 \sin \alpha (X \sin \alpha + Z \cos \alpha) d\alpha + C \end{aligned} \right\} \quad (46),$$

worin das Gleichgewicht einer durch die Breitenkreise α_0 und α begrenzten Schalenzone in Richtung der Achse zum Ausdruck kommt.

Durch die angeschriebenen Differentialgleichungen sind die unbekanntenen Spannungen und Dehnungen analytisch festgelegt. Zunächst lassen sich ohne weiteres einige der Unbekannten aussondern und die Gleichungssysteme auf zwei Differentialgleichungen mit zwei passend gewählten Veränderlichen zurückführen.

b) Die Gleichungen für diejenigen Schalen, für die die Meißnersche Reduktion auf zwei simultane Differentialgleichungen möglich ist.

Da es hier in erster Linie darauf ankommt, den Einfluß einer achsensymmetrischen Temperaturverteilung zu verfolgen, soll die genannte Umformung der Gleichungen auf zwei simultane Differentialgleichungen unter den beschränkenden Annahmen $R_1 = \text{konst.}$, $R_2 = \text{konst.}$ (Kugel-, Kegel- oder Ringfläche), sowie auch $h = \text{konst.}$ (Schale gleicher Dicke) weiter verfolgt werden.

Als Veränderliche wählen wir mit Meißner den Winkel ϑ und die Spannungsgröße

$$V = N R_2 \quad (47).$$

Nach den Gl. (45) und (46) lassen sich T_x und T_y durch V ausdrücken:

$$\left. \begin{aligned} T_x &= -\frac{\cotg \alpha}{R_2} V - \frac{F(\alpha)}{R_2 \sin^2 \alpha} \\ T_y &= -\frac{V'}{R_1} + \frac{F(\alpha)}{R_1 \sin^2 \alpha} - R_2 Z \end{aligned} \right\} \quad (48).$$

Durch Einsetzen von Gl. (44) und (48) in die Momentengleichung (45) folgt als erste Hauptgleichung:

$$\frac{R_2}{R_1} \vartheta'' + \frac{R_2}{R_1} \cotg \alpha \vartheta' - \frac{R_1}{R_2} \cotg^2 \alpha \vartheta - \nu \vartheta = - \frac{1-\nu^2}{E} \frac{12}{h^3} R_1 V + (1+\nu) \beta \frac{12}{h^3} \left[\cotg \alpha (R_1 - R_2) \int_{-h/2}^{+h/2} t_x z dz = R \frac{d}{d\alpha} \int_{-h/2}^{+h/2} t_x z dz \right],$$

die sich mit dem linearen Differentialoperator

$$L(\vartheta) = \frac{h}{R_1} \left[\frac{R_2}{R_1} (\vartheta)'' + \frac{R_2}{R_1} \cotg \alpha (\vartheta)' - \frac{R_1}{R_2} \cotg^2 \alpha (\vartheta) \right]$$

abgekürzt schreiben läßt:

$$L(\vartheta) - \nu \frac{h}{R_1} \vartheta = - \frac{1-\nu^2}{E} \frac{12}{h^3} V + \Phi(\alpha) \quad (I),$$

worin

$$\Phi(\alpha) \equiv (1+\nu) \beta \frac{12}{h^3} \left[\cotg \alpha \left(1 - \frac{R_2}{R_1} \right) \int_{-h/2}^{+h/2} t_x z dz - \frac{R_2}{R_1} \frac{d}{d\alpha} \int_{-h/2}^{+h/2} t_x z dz \right].$$

Die zweite Differentialgleichung drückt den Zusammenhang zwischen Spannungen und Dehnungen aus.

Sondert man ζ aus Gl. (37) und (38) aus, so folgt:

$$(\varepsilon_{x_0} + \beta t_0) R_1 - (\varepsilon_{y_0} + \beta t_0) R_2 = \xi' - \xi \cotg \alpha = \sin \alpha \left(\frac{\xi}{\sin \alpha} \right)'$$

oder

$$\xi = \sin \alpha \int \frac{(\varepsilon_{x_0} + \beta t_0) R_1 - (\varepsilon_{y_0} + \beta t_0) R_2}{\sin \alpha} d\alpha$$

und

$$\zeta = \cos \alpha \int \frac{(\varepsilon_{x_0} + \beta t_0) R_1 - (\varepsilon_{y_0} + \beta t_0) R_2}{\sin \alpha} d\alpha - R_2 (\varepsilon_{y_0} + \beta t_0).$$

Durch Einsetzen in Gl. (39) folgt

$$R_1 \vartheta = \xi + \zeta = \cotg \alpha [(\varepsilon_{x_0} + \beta t_0) R_1 - (\varepsilon_{y_0} + \beta t_0) R_2] - R_2 (\varepsilon_{x_0} + \beta t_0) \quad (49).$$

Ersetzt man darin mit Hilfe der Beziehungen (37), (38) und (43) die spezifischen Dehnungen durch T_x und T_y gemäß

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{x_0} + \beta t_0 &= \frac{1}{hE} (T_x - \nu T_y) + \frac{\beta}{h} \int_{-h/2}^{+h/2} t_x dz \\ \varepsilon_{y_0} + \beta t_0 &= \frac{1}{hE} (T_y - \nu T_x) + \frac{\beta}{h} \int_{-h/2}^{+h/2} t_x dz \end{aligned} \right\} \quad (50),$$

so geht Gl. (49) über in

$$E h R_1 \vartheta = \cotg \alpha \left\{ T_x (R_1 + \nu R_2) - T_y (R_2 + \nu R_1) + (R_1 - R_2) E \beta \int_{-h/2}^{+h/2} t_x dz \right\} - R_2 (T_y - \nu T_x) - R_2 E \beta \frac{d}{d\alpha} \int_{-h/2}^{+h/2} t_x dz \quad (51).$$

Drückt man in dieser Gleichung schließlich T_x und T_y nach (48) durch die Spannungsveränderliche V aus, so wird mit dem eingeführten Differentialoperator

$$L(V) + \nu \frac{h}{R_1} V = E h^3 \vartheta + \Psi(\alpha) \quad (II)$$

mit
$$\Psi_{(\alpha)} \equiv \frac{h}{R_1} \left\{ -\frac{F(\varphi) \cotg \alpha}{\sin^2 \alpha} \left(\frac{R_1}{R_2} + \frac{R_2}{R_1} + 2\nu \right) - \left(\frac{F(\alpha)}{\sin^2 \alpha} \right)' \left(\frac{R_2}{R_1} + \nu \right) \right. \\ \left. + R_2 (R_2 + \nu R_1) \cotg \alpha Z + R_2^2 Z' \right. \\ \left. + (R_1 - R_2) \cotg \alpha E \beta \int t_z dz - R_2 E \beta \frac{d}{d\alpha} \int t_z dz \right\}.$$

$\Psi_{(\alpha)}$ ist wie oben $\Phi_{(\alpha)}$ eine nur von der Belastung und der Temperaturverteilung abhängige gegebene Funktion von α .

Es sind damit die zwei Differentialgleichungen gewonnen, die die Frage bestimmen. Es zeigt sich, daß die durch die Temperaturverteilung hinzutretenden Glieder einzig in den Ausdrücken $\Phi_{(\alpha)}$ und $\Psi_{(\alpha)}$ auftreten, während die homogenen Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} L(\vartheta) - \nu \frac{h}{R_1} \vartheta + \frac{1 - \nu^2}{E} \frac{12}{\lambda^2} V &= 0 \\ L(V) + \nu \frac{h}{R_1} V - E h^3 \vartheta &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \text{(III)}$$

von der Temperaturverteilung wie auch von jeder Belastung unabhängig sind. Darin kommt zum Ausdruck, daß die Wärmespannungen einfach als eine besondere Art der Belastung in die Festigkeits-Gleichungen eingehen.

Die Lösung der homogenen Differentialgleichung ist von Meißner allgemein behandelt und in den Arbeiten von Dubois, Bolle, Wißler auf die Kegel-, Kugel- und Ringschalen angewendet worden. Wir können uns daher sogleich den durch die Temperaturverteilung bedingten partikulären Lösungen zuwenden.

c) Die Trennung der mittleren stationären Temperaturverteilung in einen achsensymmetrisch verteilten linearen Temperaturabfall und den davon abweichenden Betrag.

In den Belastungsgliedern $\Phi_{(\alpha)}$ und $\Psi_{(\alpha)}$ tritt die Temperaturverteilung einzig in den Formen

$$\int_{-h/2}^{+h/2} t_z dz \quad \text{und} \quad \int_{-h/2}^{+h/2} t_{z,z} dz$$

und ihren ersten Ableitungen nach α auf.

Es kommt somit für die Schalenfrage nur auf die Temperaturfläche

$$\int_{h/2}^{+h/2} t_z dz \equiv F_t \dots \dots \dots \text{(52)}$$

sowie auf das statische Moment der Temperaturfläche

$$\int_{-h/2}^{+h/2} t_z z dz \equiv S_t \dots \dots \dots \text{(52')}$$

und für die Verteilung längs des Meridians auf ihre ersten Ableitungen F_t' und S_t' an.

Schon in den Betrachtungen des vorhergehenden Abschnittes (III 2) trat die Bedeutung von F_t und S_t hervor.

Eine beliebige achsensymmetrische Temperaturverteilung längs der Schalendicke kann daher, ohne für die Schalengleichungen irgendwelche Aenderung zu ergeben, in jedem Punkt der Schale ersetzt werden durch eine mittlere Temperatur

$$t_m = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{+h/2} t_z dz = \frac{1}{h} F_t \dots \dots \dots \text{(53)}$$

und einen linearen Temperaturverlauf längs der Plattendicke

wobei

$$\left. \begin{aligned} t_z - t_m &= \frac{\Delta_t}{h} z \\ \int_{-h/2}^{+h/2} t_z z dz &= \int \frac{\Delta_t}{h} z^2 dz = \Delta_t \frac{h^2}{12} = S_t \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (54).$$

Sowohl die mittlere Temperatur t_m der Schale kann sich dabei allgemein längs des Meridians ändern, als auch die Neigung des Temperaturgefälles Δ_t . Jenes kommt zum Ausdruck in dem Glied

$$\frac{d}{d\alpha} \int t_z dz = h \frac{d t_m}{d\alpha} = F_t',$$

dieses in

$$\frac{d}{d\alpha} \int t_z z dz = \frac{h^2}{12} \frac{d \Delta_t}{d\alpha} = S_t'.$$

Die Ausdrücke $\Phi_{(\alpha)}$ und $\Psi_{(\alpha)}$ lauten danach

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{(\alpha)} &= (1 + \nu) \beta \frac{12}{h^3} \left[\cotg \alpha \left(1 - \frac{R_2}{R_1} \right) \right] S_t - \frac{R_2}{R_1} S_t' \\ \Psi_{(\alpha)} &= \frac{h}{R_1} \left\{ - \frac{F_{(\alpha)} \cotg \alpha}{\sin^2 \alpha} \left(\frac{R_1}{R_2} + \frac{R_2}{R_1} + 2 \nu \right) - \left(\frac{F_{(\alpha)}}{\sin^2 \alpha} \right)' \left(\frac{R_2}{R_1} + \nu \right) + R_2 (R_2 + \nu R_1) \right. \\ &\quad \left. \cotg \alpha Z + R_2^2 Z' + (R_1 - R_2) \cotg \alpha E \beta F_t - R_2 E \beta F_t' \right\} \end{aligned} \right\} (55).$$

Der vom linearen Temperaturgefälle Δ_t abweichende Temperaturverlauf trägt zu den Krümmungen der Schale nichts mehr bei, die zugehörigen Temperaturdehnungen müssen unmittelbar durch entsprechende zusätzliche Wärmespannungen unterdrückt werden.

Diese Ausgleichspannungen lassen sich, wie dies unter (III₁) für die periodischen Temperaturspannungen ausgeführt wurde, berechnen, und zwar wird, da hier die Zerlegung in einen linearen Temperaturverlauf $(t_m + \frac{\Delta_t}{h} z)$ und die noch übrig bleibenden Abweichungen δt_z schon durchgeführt ist, die Zusatzspannung in der Schichttiefe z mit β als linearem Ausdehnungskoeffizienten einfach

$$\sigma_s = \frac{E \beta}{1 - \nu} \delta t_z \dots \dots \dots (56).$$

Die in den Ausdrücken F_t und S_t eingeführte mittlere Temperatur t_m und das lineare Temperaturgefälle Δ_t der Schale können sich längs des Meridians im allgemeinen beliebig ändern; die partikuläre Lösung der Differentialgleichung wird aber analytisch nur möglich sein, wenn sich beide nach besonders einfachen Gesetzen ändern, also insbesondere, wenn t_m und Δ_t das eine oder andere oder beide unveränderlich sind, oder aber sich längs des Meridians geradlinig oder nach einer einfachen Potenz ändern. Der letzte Fall ist vor allem von Bedeutung für den Zylindereinsatz¹⁾, wo vom oberen Totpunkt nach unten sowohl die mittlere Temperatur als auch das lineare Temperaturgefälle rasch abnimmt.

Wir gehen nun dazu über,

d) die partikulären Lösungen für verschiedene Fälle der Temperaturverteilung anzuschreiben, wobei wir uns zuvor auf den Kegel beschränken wollen.

¹⁾ Als Spezialfall des Kegels aufgefaßt.

Für den Kegel wird der Neigungswinkel α des Meridians unveränderlich, weshalb als Veränderliche an dessen Stelle die Länge x , gemessen auf dem Meridian, eingeführt wird¹⁾, wobei $dx = R_1 d\alpha$.

Im übrigen ist zu beachten, daß R_1 beim Kegel unendlich groß wird und sich R_2 durch $R_2 = x \cotg \alpha$ ausdrücken läßt.

Damit schreiben sich die spezifischen Dehnungen, wenn jetzt die Ableitungen nach x durch einen Strich bezeichnet werden:

$$\varepsilon_{x_0} + \beta t_0 = \xi' \dots \dots \dots (57),$$

$$\varepsilon_y + \beta t_0 = \frac{\xi - \xi \operatorname{tg} \alpha}{x} \dots \dots \dots (58),$$

$$\vartheta = \zeta' \dots \dots \dots (59).$$

Ferner:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{x_s} + \beta t_s &= \varepsilon_{x_0} + \beta t_0 - z \vartheta' \\ \varepsilon_{y_s} + \beta t_s &= \varepsilon_{y_0} + \beta t_0 - z \frac{\vartheta'}{x} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (60).$$

Die Hauptspannungen werden damit

$$\left. \begin{aligned} T_x &= \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \left[\xi' + \nu \frac{\xi - \xi \operatorname{tg} \alpha}{x} \right] h - (1+\nu) \beta F_t \right\} \\ T_y &= \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \left[\frac{\xi - \xi \operatorname{tg} \alpha}{x} + \nu \xi' \right] h - (1+\nu) \beta F_t \right\} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (61),$$

und die Biegemomente

$$\left. \begin{aligned} G_x &= \frac{-E}{1-\nu^2} \left\{ \left[\vartheta' + \nu \frac{\vartheta'}{x} \right] \frac{h^3}{12} + (1+\nu) \beta S_t \right\} \\ G_y &= \frac{-E}{1-\nu^2} \left\{ \left[\frac{\vartheta'}{x} + \nu \vartheta' \right] \frac{h^3}{12} + (1+\nu) \beta S_t \right\} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (62).$$

Die Gleichgewichtsbedingungen gehen über in

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dx} (x T_x) - T_y + x X &= 0 \\ \frac{d}{dx} (x N) + T_y \operatorname{tg} \alpha + x Z &= 0 \\ \frac{d}{dx} (x G_x) - G_y - x N + x M &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (63),$$

und aus den beiden ersten folgt

$$\left. \begin{aligned} T_x \sin \alpha + N \cos \alpha &= -\frac{F(x)}{x} \\ F(x) &\equiv \int_{x_0}^x x (X \sin \alpha + Z \cos \alpha) dx \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (64).$$

mit

Führt man als Unbekannte den Winkel ϑ und die Spannungsgröße

$$V = \frac{x T_x}{h^2}$$

ein, so drücken sich die Spannungen durch die neue Unbekannte V wie folgt aus:

$$\left. \begin{aligned} T_x &= \frac{h^2 V}{x} \\ T_y &= h^2 V' + x X \\ N &= -\operatorname{tg} \alpha \frac{h^2 V}{x} - \frac{F(x)}{x \cos \alpha} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (65),$$

¹⁾ Vergl. Dubois a. a. O.

und man erhält schließlich durch Einsetzen in die dritte, noch übrige Gleichgewichtsbedingung (63) (Momentengleichung):

$$x \vartheta'' + \vartheta' - \frac{\vartheta}{x} - \frac{12(1-\nu^2)}{Eh} \operatorname{tg} \alpha V = \frac{12}{h^3} \frac{1-\nu^2}{E} \left\{ \frac{F(x)}{\cos \alpha} + x \mathfrak{M} - \frac{E\beta}{1-\nu} x S_1' \right\} \quad (\text{I}).$$

Die Vereinbarkeitsbedingung ergibt sich mit

$$\xi = \int \varepsilon_{x_0} dx + \beta \int t_0 dx \dots \dots \dots (66)$$

durch Einsetzen in Gl. (58):

$$x(\varepsilon_{y_0} + \beta t_0) - \int \varepsilon_{x_0} dx - \beta \int t_0 dx + \xi \operatorname{tg} \alpha = 0$$

und Ableiten zu

$$(\varepsilon_{y_0} + \beta t_0) + x \frac{d}{dx} (\varepsilon_{y_0} + \beta t_0) - (\varepsilon_{x_0} + \beta t_0) + \vartheta \operatorname{tg} \alpha = 0$$

oder, wenn die Dehnungen durch die Spannungen ersetzt werden:

$$(T_y - \nu T_x) + x \frac{d}{dx} (T_y - \nu T_x + E\varepsilon F_t) - (T_x - \nu T_y) + Eh \operatorname{tg} \alpha \vartheta = 0;$$

wenn wir schließlich T_x und T_y durch V ausdrücken und ordnen:

$$xV'' + V' - \frac{V}{x} + E \operatorname{tg} \alpha \frac{\vartheta}{h} = -\frac{1}{h^2} \{(2+\nu)xX + x^2X' + E\beta xF_t'\} \quad (\text{II}).$$

Die beiden Hauptgleichungen lassen sich mit dem Differentialoperator

$$L(\) = x \frac{d^2(\)}{dx^2} + \frac{d(\)}{dx} - \frac{(\)}{x}$$

kurz schreiben

$$L(\vartheta) - K_1 V = \varphi(x) \dots \dots \dots (\text{I}''),$$

$$L(V) - K_2 \vartheta = \psi(x) \dots \dots \dots (\text{II}'')$$

mit

$$K_1 = \frac{12(1-\nu^2)}{Eh} \operatorname{tg} \alpha,$$

$$K_2 = -\frac{E \operatorname{tg} \alpha}{h},$$

und

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{12(1-\nu^2)}{h^3 E} \left\{ \frac{F(x)}{\cos \alpha} + x \mathfrak{M} - \frac{E\beta}{1-\nu} x S_1' \right\} \\ \psi(x) &= -\frac{1}{h^2} \{(2+\nu)xX + x^2X' + E\beta x F_t'\} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (67).$$

Die Lösungen der homogenen Gleichungen sind bekannt (Dubois a. a. O.) und lauten

$$\left. \begin{aligned} \vartheta &= \frac{2\sqrt{3(1-\nu^2)}}{E} [C_2 I_1 - C I_2 + C_4 I_3 - C_3 I_4] \\ V &= C_1 I_1 + C_2 I_2 + C_3 I_3 + C_4 I_4 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (68).$$

C_1 bis C_4 sind Festwerte, die sich durch die Randbedingungen bestimmen. Die Funktionen $I_1 I_2 I_3 I_4$ sowie ihre ersten Ableitungen und Integrale sind als Funktionen von $X = \lambda x$ mit $\lambda = \frac{\operatorname{tg} \alpha \cdot 2\sqrt{3(1-\nu^2)}}{h}$ in Zahlentafeln und Kurven in der ausführlichen Arbeit von Dubois gegeben.

Die partikulären Lösungen der Gl. (I'') und (II'') lassen sich für einfache Fälle der Belastung und Temperaturverteilung angeben, wobei wir uns, da das Prinzip der Superposition gilt, auf den Fall des unbelasteten Kegels beschränken können. Wir wiederholen zunächst aus der Arbeit von Dubois den Fall:

1. Kegel unbelastet ohne Temperaturspannung, d. h.

$$X = 0; Z = 0; M = 0; F_t = 0; S_t = 0.$$

Es wird

$$F(x) = \int_{x_0}^x (X \sin \alpha + Z \cos \alpha) dx = \text{konst.} \equiv F_0$$

$$Q(x) = \frac{12(1-\nu^2)}{h^3 E \cos \alpha} F_0 \equiv M_0; \psi(x) = 0;$$

als partikuläre Lösungen folgen

$$\vartheta = \frac{A}{x}; V = C$$

mit

$$A = -\frac{M_0}{K_1 K_2} = -\frac{F_0}{E h \operatorname{tg}^2 \alpha \cos \alpha}$$

und

$$C = -\frac{M_0}{K_1} = -\frac{F_0}{h^2 \sin \alpha}.$$

2. Mittlere Temperatur t_m längs des Meridians konst.

Linearer Temperaturabfall Δ_t längs des Meridians konst.

$$F_t = \text{konst.}; F_t' = 0,$$

$$S_t = \text{konst.}; S_t' = 0.$$

Die partikulären Lösungen bleiben die gleichen wie unter 1.; der Einfluß der Temperatur tritt erst in den Spannungen T_x, T_y und den Biegemomenten G_x, G_y hervor.

3. Mittlere Temperatur t_m der Kegelschale längs des Meridians linear veränderlich.

$$t_m = a_0 + a_1 x$$

$$\Delta_t = \text{konst}$$

$$F_t = h(a_0 + a_1 x) \quad F_t' = h a_1$$

$$S_t = \text{konst.} \quad S_t' = 0$$

$$F(x) = \text{konst} \equiv F_0$$

$$Q(x) = \frac{12(1-\nu^2)}{E h^3 \cos \alpha} F_0 \equiv M_0$$

$$\psi(x) = -\frac{E \beta a_1}{h} x = N_1 x.$$

Partikuläre Lösung:

$$\vartheta = \frac{A}{x} + Bx; V = C$$

mit den Konstanten

$$A = +\frac{M_0}{K_1 K_2} = -\frac{F_0}{E h \operatorname{tg}^2 \alpha \cos \alpha},$$

$$B = -\frac{N_1}{K_2} = -\frac{\beta a_1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

und

$$C = -\frac{M_0}{K_1} = \frac{F_0}{h^2 \sin \alpha}.$$

4. Temperaturgefälle Δ_t längs des Meridians linear veränderlich.

$$t_m = \text{konst}$$

$$\Delta_t = b_0 + b_1 x$$

$$F_t = \text{konst.}; F_t' = 0$$

$$S_t = \frac{h^2}{12} (b_0 + b_1 x); \quad S_t' = \frac{h^2 b_1}{12}$$

$$F(x) = \text{konst} = F_0$$

$$q(x) = \frac{12(1-\nu^2)}{h^3 E} \left\{ \frac{F_0}{\cos \alpha} - \frac{E \beta}{1-\nu} \frac{h^2 b_1}{12} x \right\} = M_0 + M_1 x$$

$$\psi(x) = 0.$$

Partikuläre Lösung:

$$\vartheta = \frac{A}{x}; \quad V = C + Dx$$

mit den Konstanten

$$A = + \frac{M_0}{K_1 K_2} = - \frac{F_0}{E h \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha},$$

$$C = - \frac{M_0}{K_1} = - \frac{F_0}{h^2 \sin \alpha}$$

und

$$D = - \frac{M_1}{K_1} = + \frac{E \beta b_1}{12(1-\nu) \operatorname{tg} \alpha}.$$

Mit den angeschriebenen partikulären Lösungen kann wohl meist eine genügende Annäherung an die vorhandene Temperaturverteilung erreicht werden.

Ein besonders wichtiges Beispiel für die vorstehend entwickelte Berechnung bietet etwa ein Zweitaktdeckel der bekannten Bauart Sulzer, die sich vor allem dadurch auszeichnet, daß der Deckel als reiner Umdrehungskörper ausgebildet und mit nur einer einzigen zentral gelegenen Oeffnung (für das kombinierte Brennstoff- und Anlaßventil) versehen ist. Diese Konstruktion vermeidet nicht nachprüfbar Spannungserhöhungen, wie sie bei Drehbrechung der Achsensymmetrie, sei es durch Ventile oder Rippen, unumgänglich sind. Die den heißen Gasen ausgesetzte wassergekühlte Wand ist als Kegelschale ausgebildet und wird, um den Wärmespannungen zu begegnen, möglichst dünn gehalten. Um gleichwohl dem Gasdruck widerstehen zu können, ist sie durch eine zylindrische Ventilpfeife zentral auf eine kräftige Kreisplatte abgestützt. Die Kegelschale darf an den Rändern, zumal außen, wo sie in einen Kreiszylinder übergeht, nicht als fest eingespannt betrachtet werden; vielmehr ergeben sich die Randmomente und wagerechten Randkräfte und die zugehörigen Formänderungen des Kegels durch Gleichsetzen mit den entsprechenden Größen der anschließenden Zylinder. Dasselbe gilt für die obere Kreisplatte; insbesondere folgt aus den Verschiebungen von Kegel und Platte in senkrechter Achs-Richtung derjenige Anteil des gesamten Innendruckes, der durch den mittleren Zylinder auf die Kreisplatte abgestützt wird.

Die Lösung ist damit bestimmt. Sie gestattet, den Einfluß der Schalendicke und ihre günstigste Abstufung gegenüber den zylindrischen Teilen und der Kreisplatte in Parallelrechnungen zu untersuchen, womit die einwandfreie Bemessung eines solchen achsensymmetrischen Deckels bei gegebener achsensymmetrischer Temperaturverteilung und Belastung möglich ist.

Die Lösung wird rein analytisch dann durchführbar sein, wenn längs des Meridians sowohl die Mitteltemperatur als auch die Neigung des Temperaturgefälles unveränderlich sind, oder wenn beide nach einfachen Potenzgesetzen sich ändern. Dies dürfte meist zutreffen; so ergab die in Abschnitt II, 2, Abb. 16, ermittelte Temperaturverteilung in einem Kegeldeckel der Bauart Sulzer nahezu unveränderliche Werte für beide Größen.

In vielen Fällen, besonders bei einer analytisch schwer erfaßbaren Temperaturverteilung, dürfte eine zeichnerische Integration der Differentialgleichungen

von Vorteil sein, zumal eine solche ohne Schwierigkeit auch bei veränderlicher Wandstärke durchführbar ist. Ein sehr einfaches graphisches Integrationsverfahren totaler Differentialgleichungen hat Prof. Meißner¹⁾ angegeben und damit ein Werkzeug geschaffen, das uns, nach mehrfacher Anwendung in der Praxis, vor allem in Schwingungsfragen, für den wissenschaftlich arbeitenden Ingenieur geradezu unentbehrlich erscheint. Das bereits erwähnte Beispiel des Zylindereinsatzes mit von oben nach unten abnehmender Mitteltemperatur und abnehmendem Temperaturgefälle läßt sich zeichnerisch ohne weiteres auch bei veränderlicher Wandstärke lösen.

Dies soll in einem letzten Abschnitt durchgeführt werden.

e) *Graphische Lösung für einen Zylindereinsatz von veränderlicher Wandstärke bei gegebener Temperaturverteilung.*

Wir wählen als Beispiel einen Zylindereinsatz eines Zweitakt-Dieselmotors mit den in Abb. 24 gegebenen Abmessungen und Temperaturen. Sowohl die mittlere Wandtemperatur, als auch das Temperaturgefälle durch die Wand nehme von oben nach unten gemäß dem eingezeichneten Liniennetz ab. Der obere Ringflansch ist heißer als der anschließende Zylinder und wird schon infolge seiner Temperaturverteilung eine anfängliche Verdrehung und Ausweitung erfahren. Ring und Zylinder müssen selbstverständlich getrennt behandelt und durch (statisch unbestimmte) Randkräfte auf gleiche Verschiebungen in der Schnittfläche verformt werden.

Der Flanschring erfährt durch die Randkräfte vom Zylinder her, sowie durch die Temperaturverteilung über den Ringquerschnitt eine Verschiebung u in radialer Richtung und eine Verdrehung ϑ , und zwar wird die elastische Verlängerung einer Ringfaser (xy) im Umfang (vergl. Abb. 23)

$$\xi_{xy} = 2\pi u + 2\pi \vartheta y - 2\pi(r_s - x)\beta t_{xy} \dots \dots \dots (69)$$

und die Umfangsspannungen an der betreffenden Stelle

$$\sigma_{xy} = E \frac{\xi_{xy}}{2\pi(r_s - x)} \dots \dots \dots (70)$$

Das Gleichgewicht verlangt

$$d\varphi \iint_F \sigma_{xy} dx dy = Q_0 d\varphi$$

und

$$d\varphi \iint_F \sigma_{xy} y dx dy = (M_0 + Q_0 \varphi) d\varphi,$$

wenn M_0 und Q_0 auf die Winkleinheit des Umfanges bezogen sind. Mit den obenstehenden Ausdrücken für σ und ξ wird

$$\left. \begin{aligned} E \iint_F \left[\frac{u}{r_s - x} + \frac{\vartheta}{r_s - x} y - \beta t_{xy} \right] dx dy &= Q_0 \\ E \iint_F \left[\frac{u}{r_s - x} + \frac{\vartheta}{r_s - x} y - \beta t_{xy} \right] y dx dy &= M_0 + Q_0 \varphi \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (71)$$

Daraus lassen sich u und ϑ als Funktionen von M_0 , Q_0 und der beliebig angenommenen Temperaturverteilung berechnen, indem man die Integrale durch

¹⁾ E. Meißner, Schweiz. Bauzeitung Bd. LXII Nr. 15 und 16, 1913.

Planimetrieren bestimmt. Setzt man $r_s - x \propto r_s$, so wird

$$\left. \begin{aligned} Eu &= \frac{r_s Q_0}{F} + r_s E \beta \frac{F_{t\text{Ring}}}{F} \\ E\vartheta &= \frac{(M_0 + Q_0 Q)}{J} + r_s E \beta \frac{S_{t\text{Ring}}}{J} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (72)$$

mit den Abkürzungen

$$\left. \begin{aligned} F_{t\text{Ring}} &= \iint_F t_{xy} dx dy \\ S_{t\text{Ring}} &= \iint_F t_{xy} y dx dy \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (73)$$

und

In unserem Beispiel wird $F_{t\text{Ring}} = 15400^\circ \text{C cm}^2$ und $S_{t\text{Ring}} = 6000^\circ \text{C cm}^3$, ferner ist $F = 74 \text{ cm}^2$, $J = 430 \text{ cm}^4$, $r_s = 30 \text{ cm}$, $E = 10^6$, und es wird $Eu_0 = r_s \beta \frac{F_{t\text{Ring}}}{F} = 81000$; $E\vartheta_0 = 5450$.

Der anschließende Zylinder kann als Grenzfall des Kegels aufgefaßt werden, doch können die Gleichungen nicht ohne weiteres durch Grenzübergang aus denen des letzten Abschnittes gewonnen werden, da hier die Wandstärke veränderlich ist.

Es werden die spezifischen Dehnungen

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{x_0} + \beta t_0 &= \frac{d\xi}{dx} \\ \varepsilon_{y_0} + \beta t_0 &= -\frac{\xi}{r} \\ \varepsilon_{x_z} + \beta t_z &= \varepsilon_{x_0} + \beta t_0 - z \frac{d^2\xi}{dx^2} \\ \varepsilon_{y_z} + \beta t_z &= \varepsilon_{y_0} + \beta t_0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (74)$$

Die Spannungen sind

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x_z} &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[\left(\xi' - \nu \frac{\xi}{r} \right) - z \zeta'' - (1+\nu) \beta t_x \right] \\ \sigma_{y_z} &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[\left(-\frac{\xi}{r} + \nu \xi' \right) - \nu z \zeta'' - (1+\nu) \beta t_y \right] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (75)$$

Auf die volle Wandstärke bezogen, wird

$$\left. \begin{aligned} T_x &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[\left(\xi' - \nu \frac{\xi}{r} \right) h - (1+\nu) \beta F_t \right] \\ T_y &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[\left(-\frac{\xi}{r} + \nu \xi' \right) h - (1+\nu) \beta F_t \right] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (76)$$

$$\left. \begin{aligned} G_x &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[-\zeta'' \frac{h^3}{12} - (1+\nu) \beta S_t \right] \\ G_y &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[-\nu \zeta'' \frac{h^3}{12} - (1+\nu) \beta S_t \right] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (77)$$

Die Gleichgewichtsbedingungen lauten

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dx} T_x + X &= 0 \\ \frac{d}{dx} N + \frac{T_y}{r} + Z &= 0 \\ \frac{d}{dx} G_x - N + \mathfrak{M} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (78)$$

Die erste dieser Gleichungen läßt sich ohne weiteres integrieren und ergibt

$$T_x = -\int X dx + \frac{P}{2r\pi},$$

wobei P eine äußere Zugbelastung in der Achsrichtung bedeutet.

Aus der dritten Gleichgewichtsbedingung folgt

$$N = G_x' + \mathfrak{M}$$

und, eingesetzt in die zweite,

$$T_y = -r(G_x'' + \mathfrak{M}' + Z).$$

Mit T_y aus Gl (76) folgt nach einiger Umformung die erste Hauptgleichung

$$G_x'' = \frac{Eh}{r^2} \zeta - \frac{\nu}{r} \left(-\int X dx + \frac{P}{2r\pi} \right) + \frac{E\beta F_t}{r} - \mathfrak{M}' - Z \quad \text{. . . (III)}$$

Die zweite Hauptgleichung kann unmittelbar aus Gl. (77) entnommen werden:

$$E\zeta'' = -\frac{12(1-\nu^2)}{h^3} G_x - \frac{12}{h^3} (1+\nu) E\beta S_t \quad \text{. (IV)}$$

In unserem Beispiel wird mit

$$X = 0 \quad Z = 0 \quad \mathfrak{M} = 0 \quad P = 0$$

$$G_x'' = f_1 E\zeta + f_2 \quad \text{. (III')}$$

$$E\zeta'' = -f_3 G_x - f_4 \quad \text{. (IV')}$$

mit den längs X bekannten Funktionen

$$f_1 = \frac{h}{r^2}; \quad f_2 = \frac{E\beta F_{t_{xy1}}}{r};$$

$$f_3 = \frac{12(1-\nu^2)}{h^3}; \quad f_4 = \frac{12}{h^3} (1+\nu) E\beta S_{t_{zyl}}$$

Die Differentialgleichungen (III') und (IV') wurden zeichnerisch gelöst mit Hilfe des Meißnerschen Liniendiagrammes. Als Randbedingung muß das Biegemoment G_x und die Schubspannung G_x' am unteren spannungsfreien Zylinderende gleich null gesetzt werden. Als solches ($x=0$) wurde der Kürze halber der Schnitt 345 mm unter der Oberkante Ringflansch gewählt, so daß der Ring im Schnitt $x=25$ cm anschließt. Die Verschiebungen ζ und ζ' am freien Ende $x=0$ sind unbekannt.

Wählt man sie ein erstes Mal beliebig, so ergibt die graphische Integration den Verlauf von G , G' , ζ und ζ' für die getroffenen Annahmen, die nur dann eine Lösung darstellen, wenn am oberen Ende das dort gefundene Moment $G_{x=25}$, die Querkraft $G'_{x=25}$ und die Verschiebungen ζ und ζ' mit den entsprechenden Werten des Ringes zusammen stimmen. Um dies zu erreichen, müssen zwei weitere Lösungen mit anderen Anfangsbedingungen auf gleiche Weise bestimmt werden, wobei die von den Temperaturen herrührenden Glieder f_2 und f_4 gleich null gesetzt werden können. Jede dieser beiden letzten Teillösungen ergibt, mit einem beliebigen Faktor vervielfacht, eine neue Lösung, und es können die beiden Faktoren so bestimmt werden, daß die aus der Summe der drei Teillösungen gebildete Lösung den Grenzübergang zwischen Ring und Zylinder erfüllt.

Diese Grenzbedingungen lauten (wenn der Index l auf das obere Zylinderende bezogen wird):

$$\left. \begin{aligned}
 E(\zeta'_{i_1} + a\zeta'_{i_2} + b\zeta'_{i_3}) &= -E\vartheta_{0\text{Ring}} + \frac{r_0^2}{J} [(G_{i_1} + aG_{i_2} + bG_{i_3}) \\
 &\quad + q(G'_{i_1} + aG'_{i_2} + bG'_{i_3})] \\
 E(\zeta_{i_1} + a\zeta_{i_2} + b\zeta_{i_3}) &= -Eu_0 - qE(\zeta'_{i_1} + a\zeta'_{i_2} + b\zeta'_{i_3}) \\
 &\quad - \frac{r_0^2}{F} (G'_{i_1} + aG'_{i_2} + bG'_{i_3})
 \end{aligned} \right\} (79).$$

Die sich ergebenden Formänderungen und Biegungsspannungen sind in Abb. 24 zusammengestellt. Sie gelten für $E\beta = 12$. Ueber die eingetragenen Spannungen lagern sich ohne zusätzliche Verformung der elastischen Meridianlinie geringe Ausgleichspannungen entsprechend der Abweichung vom linearen Temperaturgefälle. Sie sind nach Abschnitt III, 2 ohne weiteres bestimmt.

Schließlich treten in der gasberührten Oberfläche, herrührend von den Temperaturschwingungen, periodisch wechselnde Spannungen nach III, 1 hinzu, womit der Spannungszustand des Zylindereinsatzes in vollem Umfange bestimmt ist.

Abb. 1 Dieseldiagramme (Zweitakt)

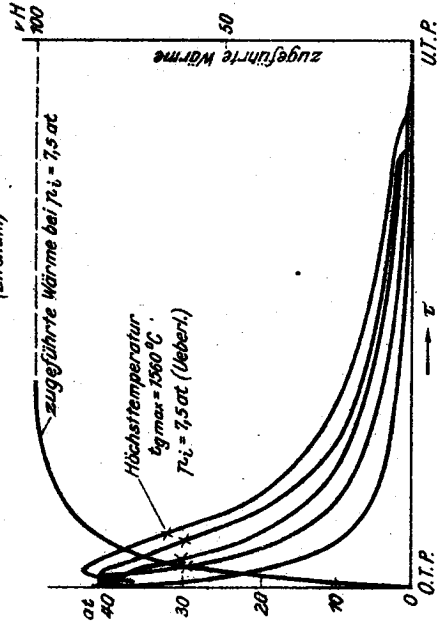


Abb. 2 Entropiediagramme (Zweitakt-Dieselmotore)

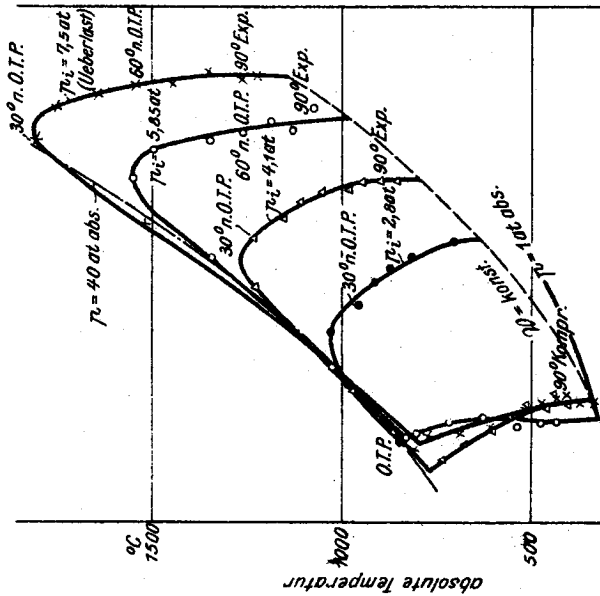


Abb. 5 Verlauf der Wärmeübergangszahl α_{qm} (nach Gl. 2) Tafel 1

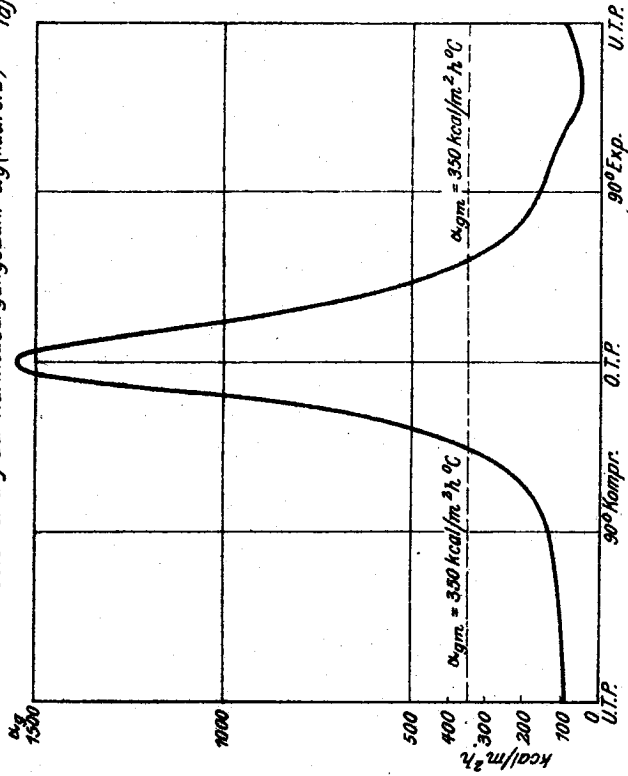
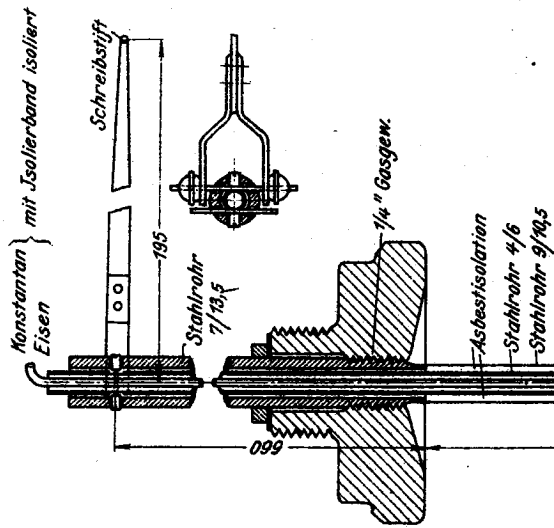


Abb. 6 Meßgründröhrchen



Leer - Vide - Empty

Leer - Vide - Empty

Abb. 5 Verlauf der Wärmeübergangszahl α_g (nach Gl. 2) Tafel 1

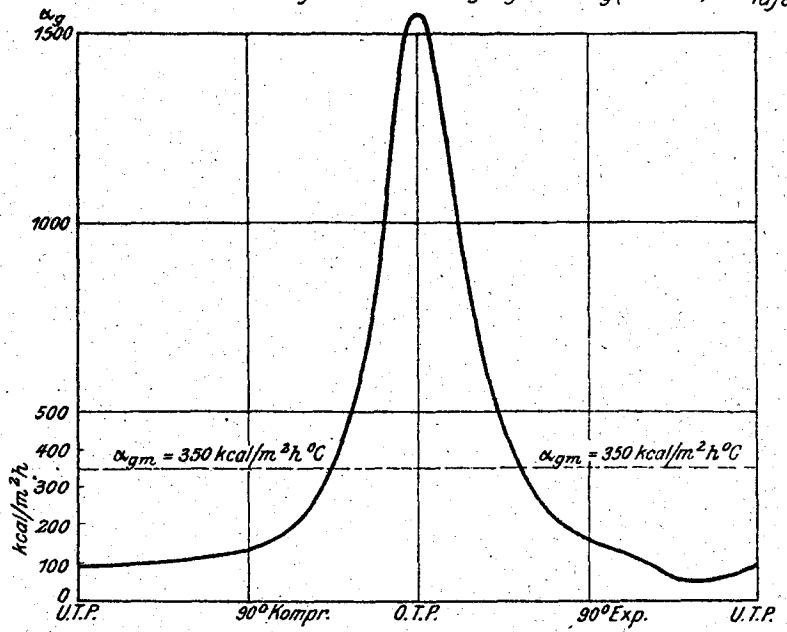


Abb. 6 Meßröhrchen

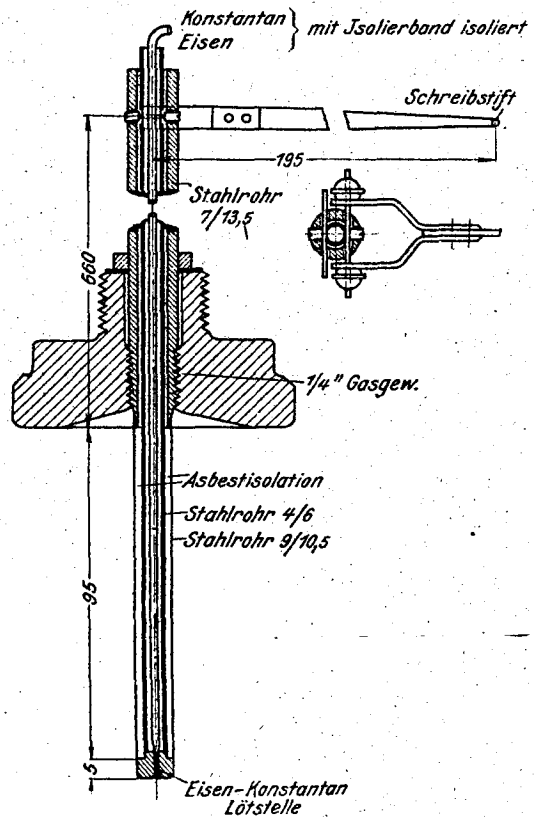


Abb. 7 Fortlaufendes Indikatordiagramm und Temperaturdehnung des Meßröhrchens

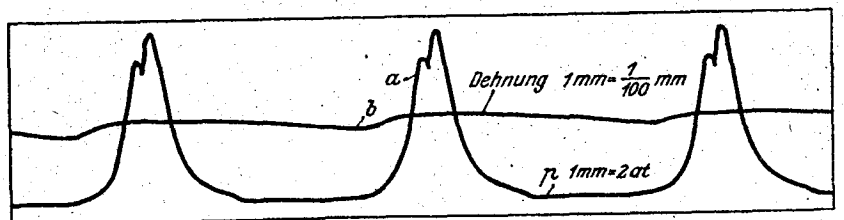


Abb. 8 Mittlere Gastemperaturen

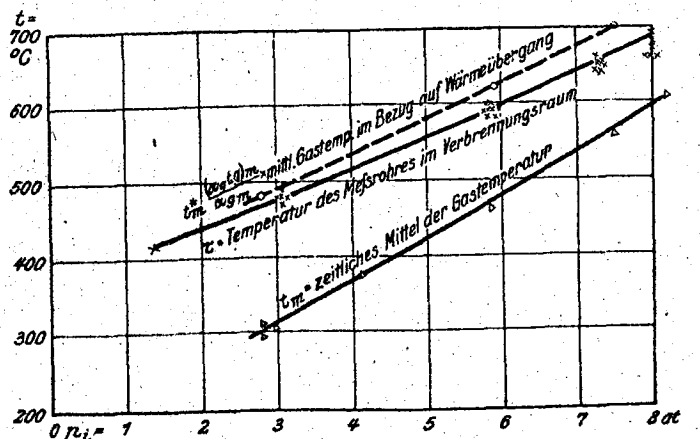


Abb. 1 Dieseldiagramme (Zweitakt)

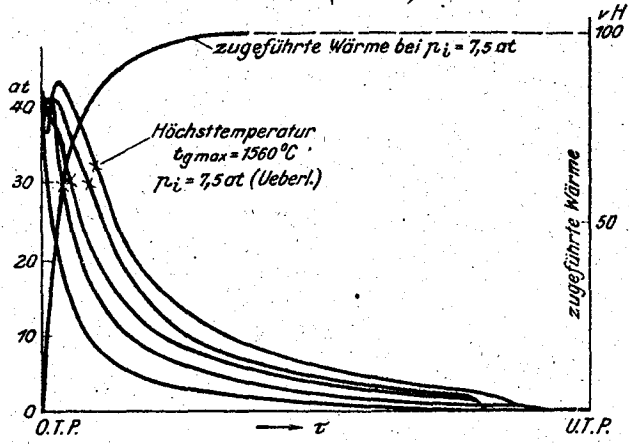


Abb. 2 Entropiediagramme (Zweitakt-Dieselmotore)

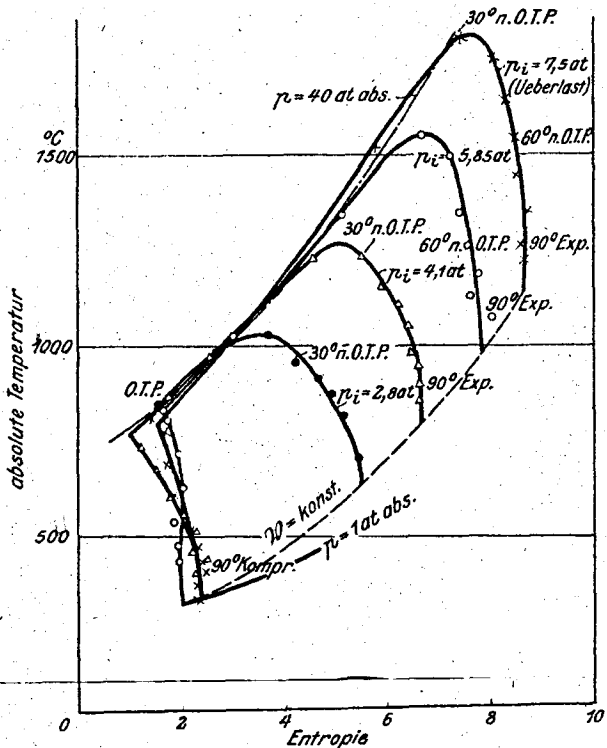


Abb. 3 Temperaturverlauf im Zweitakt-Dieselmotor bei verschiedenen Belastungen

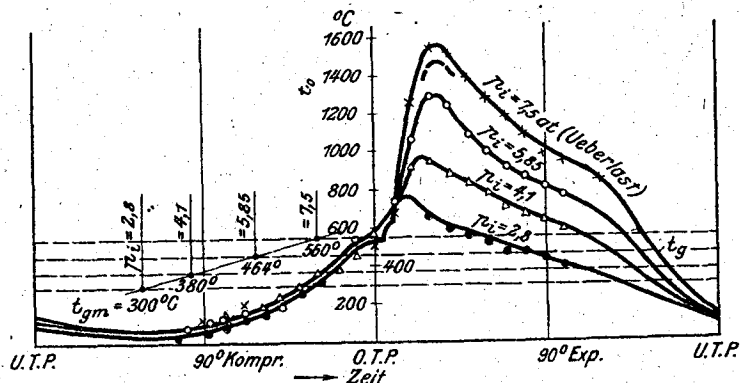


Abb. 4

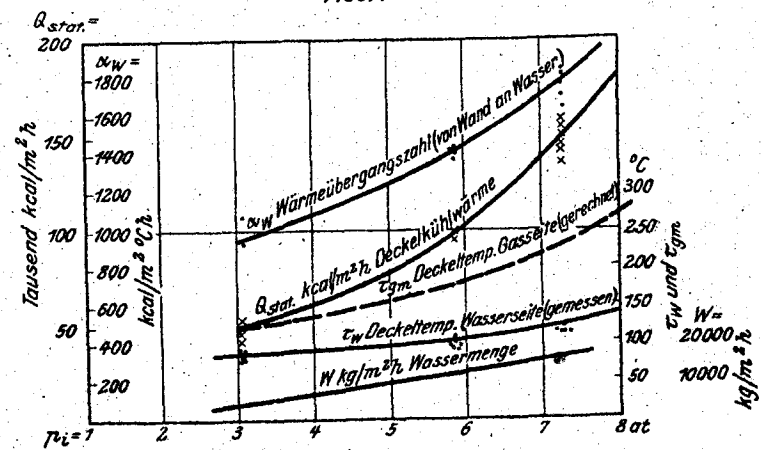


Abb. 9

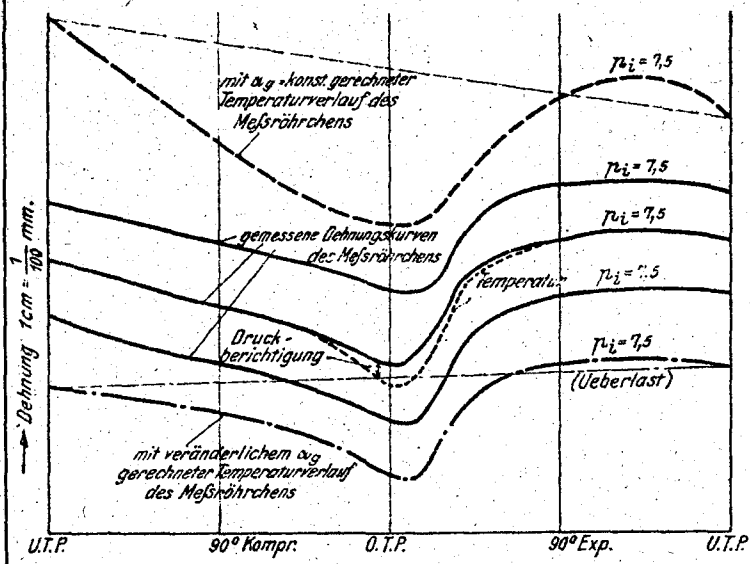


Abb. 10 Zeitlicher Verlauf der Wärmeabgabe vom Gas an die Wand

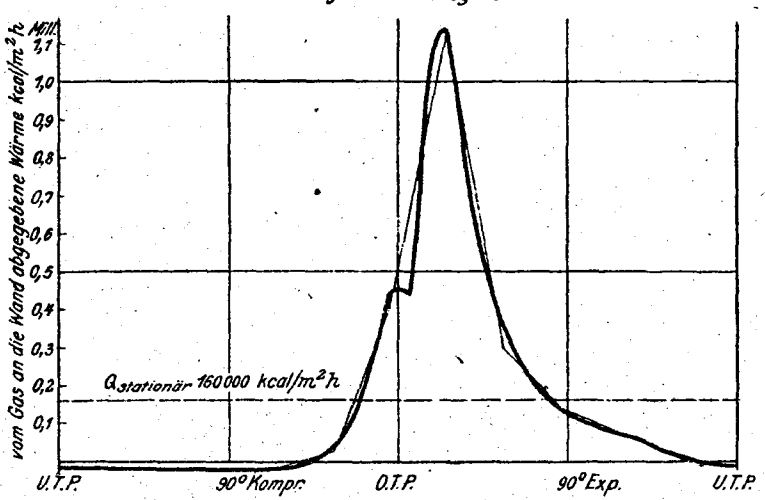


Abb. 11 Verfahren der Temperaturzuckung

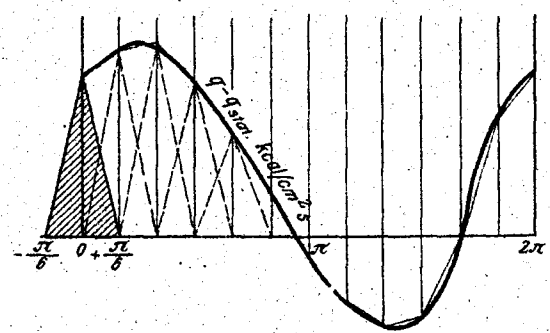


Abb. 14 Abklingen der Temperaturschwingungen im Innern der Zylinderwandung

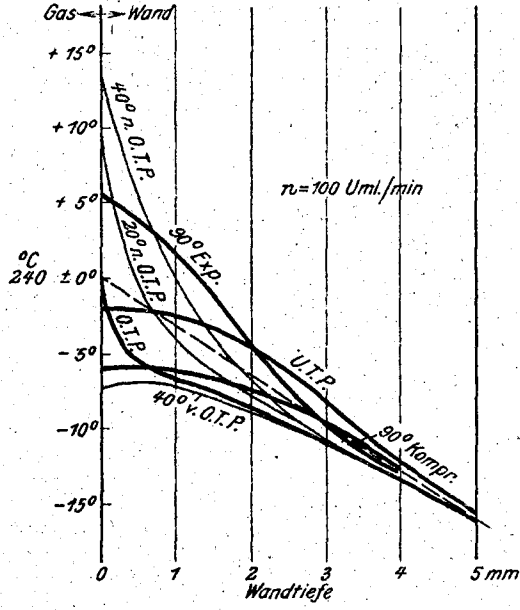


Abb. 12 Resultierende Temperaturzuckung ($\tau - \tau_m$) \sqrt{a} aus den Einzelschwingungen der Wärmezuckung $1 \text{ kcal/cm}^2 \text{ s}$

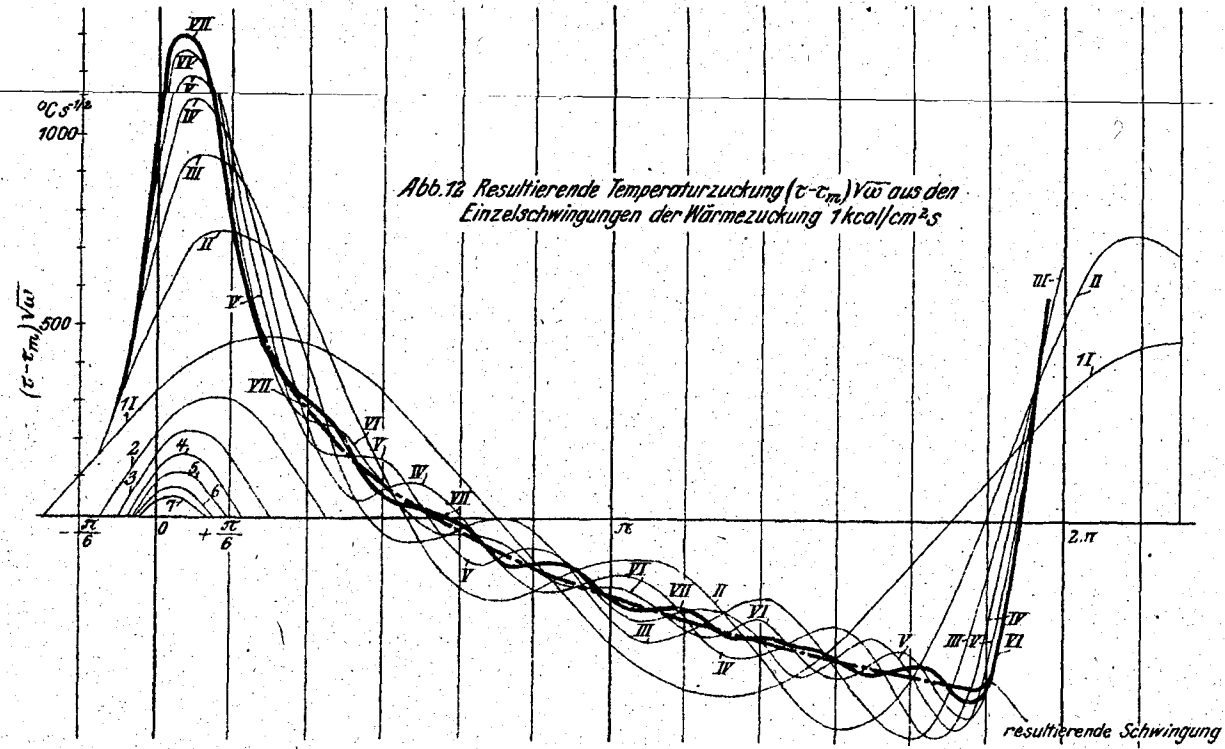


Abb. 13 Zeitliche Temperaturschwankungen in der Zylinderwand

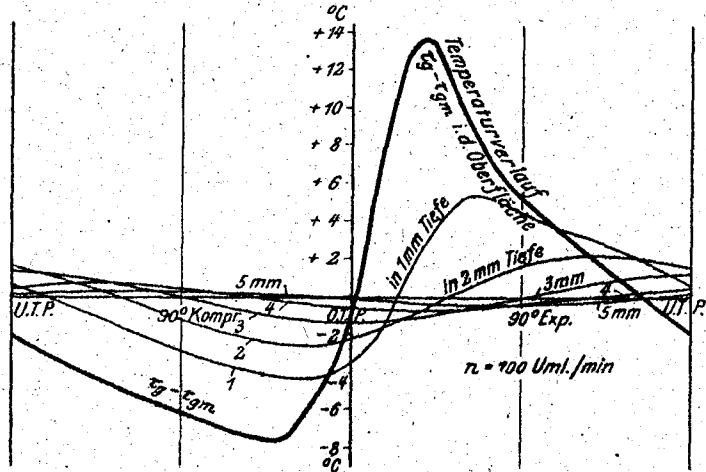


Abb. 15

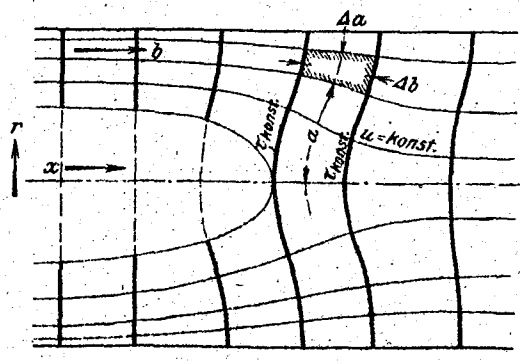


Abb. 16 Temperaturverteilung im Kegeldeckel eines Zweitakt-Verbrennungsmotors (Bauart Sulzer)

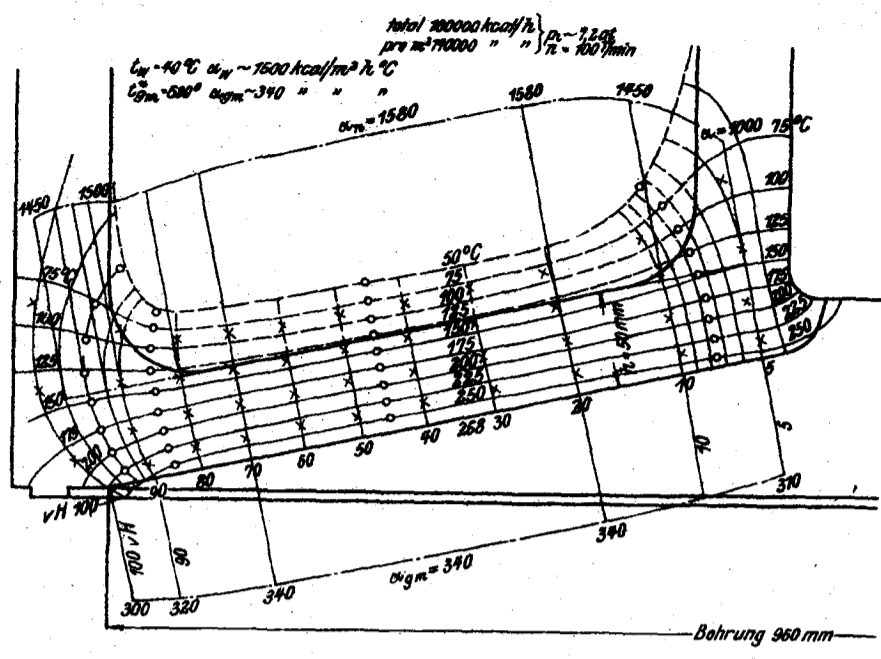


Abb. 17

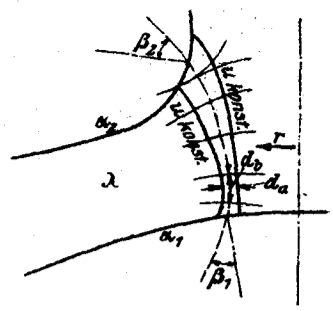


Abb. 18

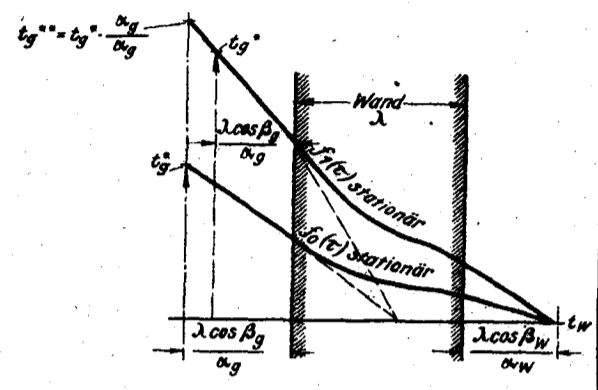


Abb. 19 Temperaturkurven beim Anwärmen

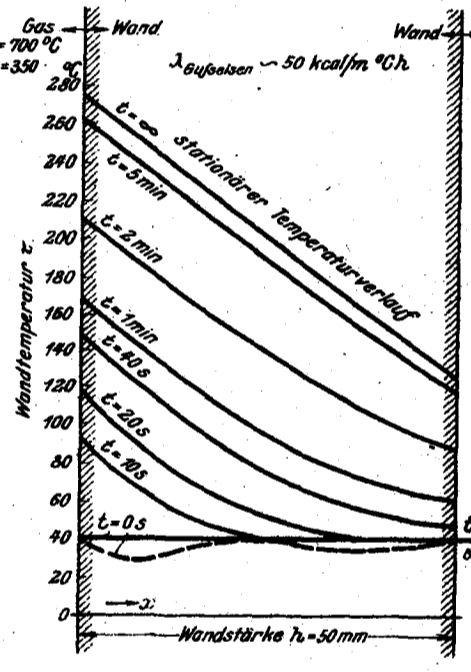


Abb. 20

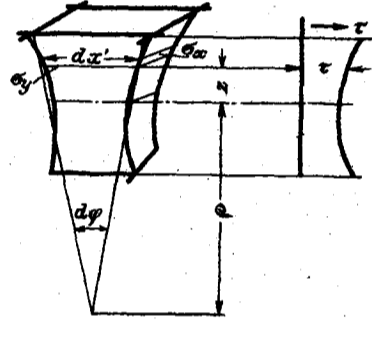


Abb. 21 Zusatzspannungen bei plötzlicher Inbetriebsetzung mit höchster Belastung

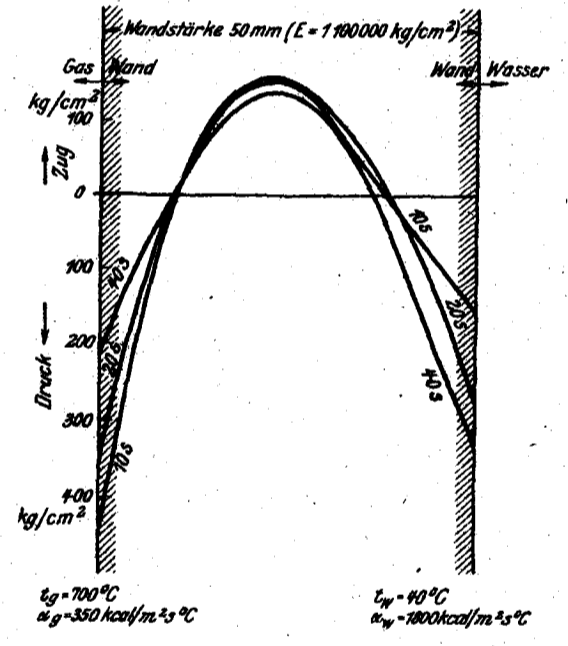


Abb. 22

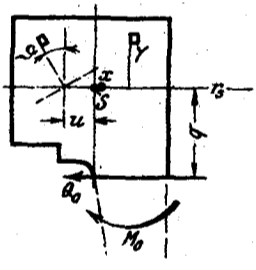


Abb. 22 Zusatzspannungen in einer 50mm starken Wand (Guß) bei plötzlichem Anlassen

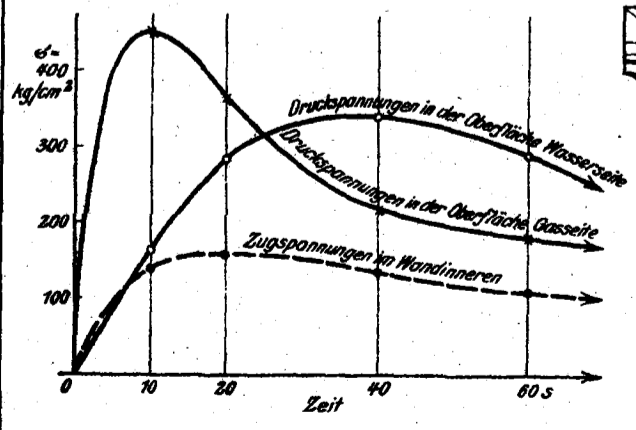


Abb. 24 Dehnungen und Wärmespannungen in einem Zylindereinsatz bei gegebener Temperaturverteilung

