

**Asymptotic stabilization  
of nonholonomic systems  
with discontinuous control**



A dissertation submitted to the  
SWISS FEDERAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY  
ZURICH

for the degree of  
Doctor of Technical Sciences

presented by  
**ALESSANDRO ASTOLFI**  
MS EE, Roma, Italy  
born 11 - October - 1967  
citizen of Italy

accepted on the recommendation of  
Prof. Dr. W. Schaufelberger, examiner  
Prof. Dr. A. Isidori, co-examiner  
Prof. Dr. G. Schweitzer, co-examiner

# Abstract

In the last years the problem of stabilization and control of nonholonomic systems has attracted a lot of attention and interest for several reasons. Firstly, as pointed out in an earlier paper of Brockett, such systems cannot be stabilized via  $C^1$  feedback control laws, thus the need for discontinuous or time varying control laws. Hence, nonholonomic systems are extremely frequent in real world and many everyday systems, such as mobile robots, car-like vehicle, underactuated satellites . . . , can be modeled as nonholonomic control systems. Moreover, nonholonomic control systems are a prototype of strongly nonlinear systems, for which linearization methods result inadequately and a complete nonlinear analysis is required. Finally, the most basical control problem, namely the stabilization problem, does not yet have a satisfactory and complete solution.

The present work discusses the problem of stabilization of nonholonomic control systems described by a kinematic model from a new perspective. It moves from a critical reading of one of the cornerstones in the field, a theorem due to Brockett, and determines a particular class of systems for which such a result does not apply.

More precisely, it addresses the issue of local and global stabilizability for the class of *discontinuous* nonholonomic control systems. This subject constitutes the first part of the thesis (Chapter 2).

The second part (Chapters 3, 4, 5) is devoted to the design of *exponential stabilizers* for some prototype and interesting nonholonomic systems, whereas the last part (Chapter 6) discusses the stabilization problem for the dynamic extended model of some nonholonomic control systems.

# Zusammenfassung

In den vergangenen Jahren wurde dem Problem der Stabilisierung und Regelung von nichtholonomen Systemen aus verschiedenen Gründen zusehends mehr Aufmerksamkeit und Interesse geschenkt. Wie in einer früheren Publikation von Brockett gezeigt, können solche Systeme nicht mittels einem  $C^1$ -Regelgesetz stabilisiert werden; infolgedessen besteht die Notwendigkeit nach diskontinuierlichen oder zeitvarianten Regelgesetzen. Tatsache ist, dass nichtholonome Systeme vielfach in alltäglichen Situationen auftreten, wie z.B. mobile Roboter, autoähnliche Fahrzeuge und unvollständig angetriebene Satelliten usw., die als nichtholonome Regelsysteme modelliert werden können. Nichtholonome Systeme sind der Urtyp von stark nichtlinearen Systemen, für welche Linearisierungsmethoden unzulängliche Ergebnisse liefern, und darum eine vollständig nichtlineare Betrachtungsweise erfordern. Auf diesem Gebiet besitzt das grundlegende Regelungsproblem der Stabilisierung noch keine befriedigende und vollständige Lösung.

Die vorliegende Arbeit behandelt aus einer neuen Sichtweise das Problem der Stabilisierung von nichtholonomen Regelsystemen, die durch ein kinematisches Modell beschrieben werden. Ausgehend von einer kritischen Betrachtung der Grundlagen auf diesem Gebiet — einem Theorem von Brockett — wird anschliessend auf eine bestimmte Klasse von Systemen eingegangen, für welche das Resultat nicht anwendbar ist.

Genauer gesagt wird die lokale und globale Stabilisierbarkeit von *diskontinuierlichen* nichtholonomen Regelsystemen untersucht. Dieses Thema wird im ersten Teil dieser Arbeit vorgestellt (Kapitel 2).

Der zweite Teil (Kapitel 3, 4, 5) ist dem Entwurf von *exponentiell stabilisierenden* Reglern für einige interessante nichtholonome System -Urtypen gewidmet. Der letzte Teil (Kapitel 6) behandelt das Stabilisierungsproblem eines zustandserweiterten Modells im Rahmen einiger nichtholonomen Regelsysteme.