Die Euler-Gerade und ihre ursprüngliche Herleitung

eine Studie in klassischer Algebra

Die Euler-Gerade

und ihre ursprüngliche Herleitung

Betrachtungen zu Eulers Urtext. Eine Studie in klassischer Algebra

Heinz Theo Lutstorf

Zürich

2012

Die Euler-Gerade

und ihre ursprüngliche Herleitung

Inhaltsverzeichnis

Die Euler-Gerade und ihre ursprüngliche Herleitung.

Betrachtungen zu Eulers Urtext. Eine Studie in klassischer Algebra.

Das Problem.

Die ***Euler-Gerade*** ist ein Phänomen der Geometrie der ebenen Dreiecke. Im gleichschenkligen Dreieck ist die Verbindungslinie *CP* vom Scheitelpunkt *C* zum Mittelpunkt *P* der Basis *AB* zugleich Höhe, Schwerlinie und Winkelhalbierende des Scheitelwinkels $\angle C$ [1]. Höhenpunkt *E,* Schwerpunkt *F* und Umkreismittelpunkt *H* liegen daher auf der Geraden *CP*. Es ist eine nicht ganz triviale Eigenschaft der Dreiecke, daß auch für nichtgleichschenklige Dreiecke der Satz gilt: ***Im Dreieck liegen Höhenpunkt, Schwerpunkt und Umkreismittelpunkt auf einer Geraden***. Diese Gerade ist heute unter dem Namen ***Euler-Gerade*** oder ***Eulersche Gerade*** bekannt.

Der Name ***Euler-Gerade*** ist neueren Datums. Noch in Lehrbüchern des 19. Jahrhunderts wird nur vom ***Satz von Euler*** gesprochen [2]. Sachlich sagt der Name *Euler-Gerade* nicht mehr aus, als daß das Phänomen mit Leonhard Euler (1707-1783) in Verbindung zu bringen ist. Konkreter wäre *Kollinearität von Umkreismittelpunkt, Schwerpunkt und Höhenpunkt*, kurz *Kollinearität der Punkte H, F* und *E*.

Zahllose Geometriebeflissene haben sich mit dem Phänomen befaßt. Allein im *INTERNET* werden zur Zeit etwa 700 einschlägige Arbeiten angeboten. Fast alle Geometrielehrmittel der Gymnasialstufe behandeln die Euler-Gerade. (Dennoch enthüllt die Befragung von Schulabgängern oft weitgehende Unkenntnis.) Die Behandlung ist durchwegs rein geometrisch. Namentlich gilt die Euler-Gerade als Schulbeispiel für das Abbildungsverfahren der sog. ***zentrischen Streckung***.

Laut Tropfke [3] soll der französische Staatsmann und General ***L.N.M. Carnot*** 1803 erstmals einen geometrischen Beweis vorgelegt haben. Dieser ist so elementar, daß man fast von einer Selbstverständlichkeit sprechen möchte und keineswegs erstaunt wäre, das Phänomen bereits in Euklids ***ELEMENTEN*** zu finden. Die geometrischen Beweise beruhen auf der Ähnlichkeit von Teilfiguren – Proportionalität homologer Strecken bei unveränderter Größe homologer Winkel.

Ganz anders Euler. Leonhard Euler befaßte sich um 1760 – vierzig Jahre vor Carnot –, noch in Berlin, mit dem Phänomen. Angesichts der Simplizität des Carnotschen und anderer geometrischer Beweise ist es unwahrscheinlich, daß die geometrischen Fakten ausgerechnet einem Euler unbekannt gewesen sein sollten. Indessen verläßt Eulers Herleitung und nachfolgende Darstellung den von andern Geometern eingeschlagenen Weg in zweifacher Hinsicht.

---

[1] Im Nachfolgenden werden dieselben Symbole benutzt, die Euler in seiner Studie verwendet.

[2] Der Historiker Tropfke in *Johannes Tropfke. Geschichte der Elementar-Mathematik.* Vierter Band: Ebene Geometrie. Berlin und Leipzig, 1923. Seiten 168ff. gibt nicht an, wer den Namen *Euler-Gerade* vorgeschlagen hat. Er vermeldet lediglich, das Phänomen sei *später nach Euler benannt* worden.

[3] Johannes Tropfke. l.c.

Zunächst behandelt er das Thema analytisch-geometrisch. Er führt ein Koordinatensystem ein und definiert die Punkte *E*, *F*, *G*, *H* durch ihre Koordinaten. Die Analytische Geometrie behandelt geometrische Probleme mit Hilfe algebraischer Methoden. Dabei widerspiegeln sich geometrische Beziehungen in einer Vielzahl von algebraischen Formeln. Diese sind im Falle der Eulerschen Untersuchung zugleich einfach und kompliziert. Einerseits benötigen sie nur die Operationen Addition und Multiplikation (und ihre Inversen: Subtraktion und Division). Differentiale, Integrale, Logarithmen u.ä. fehlen. Wurzeln beschränken sich auf Quadratwurzeln, werden aber nicht einmal benötigt, da sie lediglich in Gestalt ihrer Quadrate in die Rechnungen eingehen. Andererseits sind die in Zählern und Nennern auftretenden Summanden und Faktoren nicht nur einfache Terme, sondern auch Binome, Trinome und sogar Polynome von Potenzen einfacher Terme und müssen oft ihrerseits wieder potenziert werden. Das Rechnen mit solchen Operanden ist äußerst mühsam, und auch geübte Rechner sind vor der Gefahr des Sichverhedderns nicht gefeit; Euler selbst warnt davor! [4] Nur am Anfang der Studie argumentiert Euler noch geometrisch, an Hand von Figuren. Nachher gewinnt seine Untersuchung den Charakter einer rein algebraischen (oder gar arithmetischen) Studie.

Sodann bettet Euler, um gleichsam zwei Fliegen auf einen Schlag zu erledigen, das Problem der Kollinearität der fraglichen Punkte in ein schwieriges, bisher nicht gelöstes Dreieckskonstruktionsproblem ein. Offenbar ist es Eulers Absicht, den Komplex ***Euler-Gerade*** in seiner Darstellung sozusagen als ein Zufallsprodukt der Lösung einer Konstruktionsaufgabe erscheinen zu lassen.

Ausgangspunkt war nach Tropfke eine geometrische Konstruktionsaufgabe, welche die ältere Berliner Akademie in ihren Berichten [5] 1723 angeregt hatte: es sollte das zugehörige Dreieck konstruiert werden, wenn dessen Schwerpunkt *F*, der Mittelpunkt *G* des einbeschriebenen Kreises und der Höhenschnittpunkt *E* vorgegeben sind [6].

Tropfke schreibt: „Die sehr umständlichen Rechnungen führten zu nicht nennenswerten Resultaten. EULER löste endlich die Aufgabe 1765, indem er sich ***in der entgegengesetzten Folge*** ausgehend an die Arbeit machte; er berechnete in sehr übersichtlicher Weise aus den Seiten *a, b, c* des Dreiecks die Entfernungen der Punkte *E, F* und *G* untereinander und ihre Abstände vom Mittelpunkt *H* des umgeschriebenen Kreises. An den aufgestellten Formeln zeigte er, daß *EFH* eine gerade Linie bilden und daß $FH = ½FE$ sei.“ Offenbar war vorerst – vergeblich – versucht worden, direkt von den drei Punkten *E, F, G* ausgehend, konstruktionsfähige Stücke des Dreiecks zu finden.

Sich ***in der entgegengesetzten Folge*** ausgehend an die Arbeit machen und aus den Dreiecksseiten *a, b, c* die Entfernungen der Punkte *E, F, G* und *H* voneinander berechnen heißt hier freilich nichts anderes, als daß Euler sich an die vier klassischen

[4] Siehe Ziffer 3: *... id imprimis est cavendum, ne in calculos taediosissimos et omnino inextricabiles delabamur*.

[5] ***Miscellanea Berolinensia***, II, Berlin 1723, S. 89-128, *Problema geometricum*. (Zitat nach Tropfke.)

[6] Leider unterläßt es Tropfke, den Namen des für die Aufgabenstellung verantwortlichen Mitarbeiters der Akademie anzugeben. Die Aufgabe ist keineswegs trivial, sie setzt im Gegenteil erhebliche Kenntnisse und Fähigkeiten voraus. Zu beachten ist die Wahl des Inkreismittelpunktes als eine der Vorgaben, denn mit dem Umkreismittelpunkt wäre die Aufgabe unterbestimmt.

Schritte ***Analysis, Synthesis*** (*Constructio*), ***Demonstratio*** und ***Determinatio*** hielt, aus denen die Lösung einer geometrischen Aufgabe nach herkömmlicher Auffassung zu bestehen hat. Im ersten Schritt ***Analysis*** wird angenommen, die Aufgabe sei bereits gelöst, und allenfalls an Hand einer groben Skizze untersucht, welche geometrischen Beziehungen zwischen den vorgegebenen Stücken einerseits und gesuchten erfolgversprechenden anderen andererseits festgestellt und für die Konstruktion genutzt werden können. Die Entfernungen der Punkte E, F, G und H voneinander als (algebraische) Funktionen der Seiten a, b, c des gesuchten Dreiecks vertreten hier gleichsam die „grobe Skizze" der Stufe ***Analysis***.

Eine Teilaufgabe, nämlich die Berechnung des Abstandes des Mittelpunkts des Umkreises vom Mittelpunkt des Inkreises und dessen Darstellung als Funktion der Dreiecksseiten, hatte bereits 1618, fast hundertfünfzig Jahre vor Euler, Benjamin ***Bramer*** (1588-1650), der Schwager, Pflegesohn, Schüler und Mitarbeiter des bekannten Kossisten, Logarithmikers, Astronomen, Uhrmachers und Zirkelschmieds Jost ***Bürgi*** (1552-1632), gelöst [7].

Die Konstruktion eines Dreiecks erfordert normalerweise die Vorgabe von drei Stücken. Demzufolge gab die Akademieaufgabe drei Punkte vor, nämlich neben dem Inkreismittelpunkt G den Schwerpunkt F und den Höhenpunkt E, und erwähnt den Umkreismittelpunkt H überhaupt nicht. Die zwei Punkte E und F liegen auf der Euler-Geraden, indessen ist deren besonderes Merkmal, daß sie zusätzlich noch den Umkreismittelpunkt H enthält. Dadurch, daß Euler aber von allem Anfang an immer von den *vier* Punkten E, F, G, H ausgeht [8] und also bewußt den in der Akademieaufgabe nicht erwähnten Punkt H miteinbezieht, läßt er (ungewollt?) durchblicken, daß er mit dem geometrischen Phänomen „Euler-Gerade“ als Gerade EFH bereits vertraut ist, wahrscheinlich doch in Gestalt einer geometrischen Skizze samt Herleitung ähnlich derjenigen von Carnot u.a. Die in einer verblüffenden „Zufallsentdeckung“ gipfelnde „dramatische“ Darstellung ist ein literarisches Ausdrucksmittel.

Eulers Formalismus ist bereits der unsrige, der ja großenteils auf Eulers Vorschlägen fußt, und ist daher leicht verständlich. In der Notation der Potenzen von Größen hält er sich an die im 18. Jahrhundert geltende Konvention: Mehrfachfaktoren (Potenzen) einzelner Größen a^n werden erst ab $n = 3$ mit Exponenten geschrieben. Für Quadratzahlen gilt noch die Schreibweise aa, bb, AA usw. Der Exponent 2 wird indessen für Klammerausdrücke wie $(a+b+c)^2$, $(aa-bb)^2$ usw. ebenso für Quadrate von Strecken EF^2, EG^2 usw. benutzt. Unbekannte bzw. variable Größen werden mit den Endbuchstaben x, y, z des Alphabets bezeichnet. Standardsymbol für eine Unbekannte ist der Buchstabe z, nicht wie heute üblich x, erst in zweiter Linie folgen y und x. Die mit „Fig. 1“ bis „Fig. 9“ bezeichneten Abbildungen sind Kopien des Originals.

Kommentatoren haben Euler einen „schnellen Denker“ genannt. In der vorliegenden Studie übergeht er Zwischenrechnungen grundsätzlich. Die Ergebnisse von Substitutionen, Quadrierungen, Kürzungen, Abspaltungen von Faktoren, Lösungen von Gleichungen und Gleichungssystemen u.ä. werden ohne Erklärungen hingestellt, was

[7] Siehe Tropfke l.c.

[8] Vgl. *Summarium* im lateinischen Urtext und die Ziffer 1 der Studie.

zulässig ist, da sie leicht verifizierbar sind und hier nur den Zweck verfolgen, die Möglichkeit der Konstruktion des gesuchten Dreiecks zu belegen. Der normale Leser möchte indessen doch manchmal wissen, wie eine Formulierung in eine andere, ihr auf den ersten Blick nicht zwingend verwandt erscheinende, übergeführt werden kann.

Euler löst seine Untersuchung in einzelne kurze Schritte auf, die als Abschnitte meist nur durchnumeriert werden. Sie umfassen die Ziffern (Paragraphen) 1 bis 34, und die Darstellung benötigt knapp 19 großformatige Seiten. Die Ziffern 5 bis 17 werden von insgesamt 10 Zwischentiteln unterbrochen, doch ist nicht ganz klar, ob diese von Euler selbst oder vom Herausgeber A. Speiser stammen. Die übrigen Abschnitte müssen – abgesehen von den drei Hinweisen *Problema*, *Solutio* und *Exemplum* – ohne Überschriften auskommen. Insbesondere fehlt der aus heutiger Sicht zentralen Ziffer 18, in welcher die ***Euler-Gerade*** hergeleitet wird, jede noch so einfache typographische Auszeichnung. Auch in dieser Hinsicht soll der Anschein einer Zufallsentdeckung konsequent gewahrt bleiben.

Die nachfolgenden Seiten behandeln in separaten Kapiteln:

- Textquellen;
- Eulers Originaltext im lateinischen Wortlaut [9] ;
- die von Euler befolgte Strategie zur Lösung der Grundaufgabe;
- mathematische Hilfsmittel, die Euler ohne besondere Erklärungen für seine Beweisführungen benutzt;
- Eulers Text in deutscher Übersetzung mit Kommentaren zu den einzelnen Ziffern und ausführliche Zwischenrechnungen, wo deren Fehlen das Verständnis erschwert;
- die Euler-Gerade als Beispiel einer zentrischen Streckung;
- Benjamin Bramers Berechnung der Entfernung der Mittelpunkte von Umkreis und Inkreis voneinander;
- L.N.M. Carnots geometrischen Beweis der Kollinearität der Punkte *E, F, H*.

---

[9] Die Numerierung der Fußnoten im lateinischen Originaltext ist diejenige des Herausgebers A. Speiser.

Zugang zum Originalwortlaut.

Eulers Studie ist keineswegs leicht zu finden. In Lehrmitteln für den Geometrieunterricht und sogar in Fachnachschlagewerken wird gewöhnlich nur das geometrische Phänomen selber erklärt, nicht aber wann, wo und wie Euler darauf gestoßen ist, geschweige denn es der Öffentlichkeit vorgestellt hat. Bemerkungen und Fußnoten weisen jeweils bloß auf seinen Namen und seine Lebensdaten hin – ***Leonhard Euler*** (1707-1783) –, in seltenen Fällen wird eine genauere Jahreszahl 1765 genannt.

Die Suche wird noch dadurch erschwert, daß Eulers lateinische Originalpublikation in den Berichten der Petersburger Akademie hinter dem wenig aussagekräftigen Titel ***Solutio facilis problematum quorumdam geometricorum difficillimorum*** verborgen ist. Es hilft wenig, daß die Abhandlung im klassischen Werkkatalog von *Gustav Eneström* verzeichnet ist; denn auch dort erscheint bloß der Titel, ohne Andeutung des Inhalts.

Vergleicht man andere Schriften Eulers, enthalten deren Titel sonst immer deutliche Hinweise auf den Inhalt – *Briefe an eine deutsche Prinzessin über verschiedene Gegenstände aus Physik und Philosophie, Sol et Luna, Scientia navalis, Institutiones calculi differentialis, Theorie der Planeten, Annulus Saturni, Theoria refractionis, Verbesserungen an Fernröhren, Vollständige Anleitung zur Algebra* usw. –, so daß die ***Solutio facilis*** in dieser Hinsicht aus dem Rahmen zu fallen scheint.

Trennt man den Titel in zwei Zeilen, erscheinen diese mit zweckmäßiger Skandierung als zwei Hexameter, der erste mit unbetonter Vorsilbe – die sich, um regelkonform zu bleiben, beim Rezitieren durch Elision unmerklich umgehen läßt –, der zweite mit Binnenreim:

S'lútio fácilís problématúm quorúmdam
géométricórum dífficíllimórum.

Leicht befundene Lösung unterschiedlicher Rätsel
geometrischer Art, dazu noch der schwierigsten Stufe.

Angesichts Eulers sonstiger Gewohnheiten muß man annehmen, daß er diese „poetische“ Formulierung absichtlich gewählt und die Aufgabe eher als Kurzweil betrachtet hat. Auch der Herausgeber, Professor Speiser, meint, Euler sei „offenbar überrascht davon gewesen, wie einfach sich die Rechnung gestaltete“ [10].

Die Studie mit dem neutralen Titel *Solutio facilis problematum geometricorum* ist, wenn man diesen kennt, heute leicht zugänglich. Sie findet sich in der Edition der Werke Eulers, ***Opera omnia Leonhardi Euleri***, und dieser Umstand ist in zweierlei Hinsicht mit Zürich und seinen beiden Hochschulen verbunden.

Vom 9. bis 11. August 1897 fand in Zürich der erste Internationale Mathematikerkongreß statt, organisiert und betreut von Ferdinand ***Rudio*** (1856-1929), einem besonderen Verehrer des Mathematikers Leonhard Euler und Professor der Mathematik an der Eidgenössischen Technischen Hochschule, aus dessen Feder eine ganze

[10] Leonhardi Euleri Commentationes Geometricae. Lausannae MCMLIII. Vol. I, p. XXI.

Reihe von Publikationen über Euler stammt. Rudio, als Direktor der Hochschulbibliothek im Nebenamt an Werkeditionen interessiert, schlug der Versammlung damals vor, die weit herum verstreuten Werke Eulers in einer gesamthaften Werksammlung neu herauszugeben. Ab 1910 begann diese Edition zu erscheinen, und Rudio steuerte selber die ersten Bände bei.

Die Bände 26 bis 29 der ***Opera omnia***, ***series*** **1**, ***opera mathematica***, tragen die Überschrift ***Commentationes geometricae*** und wurden von ***Andreas Speiser*** (1885-1970), Professor der Mathematik an der Universität Zürich, herausgegeben und vom Verlag Orell-Füßli, Zürich, 1953 bis 1954 herausgebracht.

Die ***Solutio facilis***, Eulers lateinischer Originaltext, trägt die Nummer 325 im Verzeichnis von Eneström und findet sich in den Berichten der Petersburger Akademie 11(1765), 1767. Nach Ausweis der Akten wurde die Studie bereits am 21. Dezember 1763 der Akademie vorgelegt, indessen anscheinend erst vier Jahre später in Petersburg publiziert. Als wenigstens dem Ursprung nach geometrisches Problem ist sie erneut abgedruckt im **1. Band** der ***Commentationes geometricae*** (**Band 26** der ***Opera omnia, series*** 1). Ohne vorherige Kenntnis der genaueren Umstände und Eulers besonderer Absichten erkennt man allerdings erst beim Durchblättern des Textes selbst, daß darin in der Tat – indes auch nur nebenbei – von der eigenartigen Eulerschen Geraden die Rede ist.

Zwar beginnt die Abhandlung mit der Vorstellung der vier ausgezeichneten Punkte E (Höhenschnittpunkt), F (Schwerpunkt), H (Umkreismittelpunkt) und G (Inkreismittelpunkt), von denen die Punkte E, F und H die Euler-Gerade bilden. Indessen wird der Leser, der die Euler-Gerade im Unterricht oder aus eigenen Studien immer als eigenständiges Phänomen erfahren hat, erstaunt feststellen, daß der Verfasser zunächst keineswegs beabsichtigte, den Nachweis $E \in HF$ bzw. $F \in HE$ zu erbringen, sondern von einer ganz anderen Aufgabenstellung ausging, und somit die Euler-Gerade offenbar ein zufälliges Nebenprodukt einer Untersuchung anderer Zielsetzung darstellen soll; denn Euler behandelt primär die oben beschriebene Dreieckskonstruktionsaufgabe. Diese nimmt denn auch den überwiegend größeren Teil der neunzehnseitigen Arbeit in Anspruch.

Eulers Originaltext

SOLUTIO FACILIS PROBLEMATUM QUORUMDAM GEOMETRICORUM DIFFICILLIMORUM

Commentatio 325 indicis Enestroemiani
Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 11 (1765), 1767, p. 103-123
Summarium ibidem p. 12-14

SUMMARIUM

Speculatio haec circa certa puncta versatur, quae in quovis triangulo Geometrae contemplari sunt soliti. Primum horum punctorum est id, in quo terna perpendicula, quae ex singulis angulis in opposita latera demittuntur, sese mutuo intersecant, quod punctum in adiectis figuris littera *E* designatur. Secundum punctum, littera *F* notatum, est centrum gravitatis trianguli, quod obtinetur, si ex singulis angulis rectae latera opposita bisecantes ducantur, quippe quae se mutuo in hoc puncto intersecant. Tertium punctum *G* est centrum circuli inscripti, in quo rectae singulos angulos bisecantes sibi mutuo occurrunt. Quartum denique punctum *H* est centrum circuli circumscripti, quod obtinetur, erectis ad quodlibet latus ex puncto eius medio perpendiculis iisque, donec sese mutuo intersecent, prolongatis. Quatuor igitur horum punctorum positionem Illustrissimus Auctor generatim pro quovis triangulo definit, ubi sequentia potissimum hic observari merentur: 1. in triangulo aequilatero haec quatuor puncta in unum coire. 2. Si triangulum sit isosceles, ea puncta in linea recta fore disposita, quae ex angulo verticali perpendiculariter in basin ducta est. 3. in triangulis acutangulis omnia illa quatuor puncta intra triangulum cadere. 4. in triangulis vero obtusangulis tantum duo eorum, scilicet centrum gravitatis et circuli inscripti intra triangulum, reliqua autem duo puncta *E* et *H* extra triangulum fore sita; illud scilicet *E* ultra angulum obtusum, hoc vero *H* ultra latus ei angulo oppositum.

Inprimis vero notatu dignum est, quod Illustrissimus Auctor ostendit tria horum punctorum *E*, *F* et *H* semper in eadem linea recta fore sita atque adeo punctum *F* ita fore intra *E* et *H* constitutum, ut intervallum *EF* duplo sit maius intervallo *FH*; quare eum punctum *H* ex punctis *E* et *F* sponte determinatur: Illustrissimus Auctor sequens problema resolvit, ut sumtis pro lubitu ternis punctis *E*, *F* et *G*, ipsum triangulum, ad quod pertinent, construere doceat; id quod commodissme ad resolutionem aequationis cubicae perduxit, cuius ternae radices latera trianguli quaesiti exprimant. Inprimis autem memorata haec circa positionem punctorum *E*, *F* et *H* observatio Geometrarum attentione digna est, quam sequenti theoremate complecti licet: Si triangulo cuicunque circulus circumscribatur et a centro circuli per centrum gravitatis trianguli linea recta producatur, donec pars producta duplo maior fiat intervallo inter haec ambo centra: tum eius terminus in eo ipso puncto erit situs, ubi terna perpendicula ex singulis trianguli angulis in latera opposita demissa sese mutuo intersecant.

---

1. In omni triangulo quatuor potissimum dantur puncta, quae in Geometria considerari solent:

1. Intersectio ternorum perpendiculorum, quae ex singulis angulis in latera opposita demittuntur.
2. Intersectio ternarum rectarum, quae ex singulis angulis ductae latera opposita bisecant; quod punctum simul est centrum gravitatis trianguli.
3. Intersectio ternarum rectarum, quae singulos angulos bifariam secant, in quod punctum incidit centrum circuli triangulo inscripti.
4. Intersectio ternarum rectarum ad singula latera normalium eaque bisecantium, in quo puncto reperitur centrum circuli triangulo circumscripti.

2. Ex his quatuor punctis si dentur positione terna quaecunque, evidens est triangulum inde determinari, nisi forte illa puncta in uno coalescant, quod cum eveniat in triangulo aequilatero, hoc casu omnia triangula aequilatera problemati aeque satisfacient. Hinc igitur quatuor nascentur problemata, prout quodque eorum quatuor punctorum pro trianguli determinatione praetermittitur, quae quemadmodum commodissime resolvi queant, hic ostendere constitui.

3. Problemata autem haec solutu esse difficillima mox experietur, quicunque ea fuerit aggressus, cum vix perspiciatur, cuiusmodi quantitates incognitas in calculum introduci oporteat, ut saltem ad aequationes solutionem continentes perveniatur. Totum ergo negotium ad idoneam quantitatum incognitarum electionem reducitur, in quo id imprimis est cavendum, ne in calculos taediosissimos et omnino inextricabiles delabamur. Tum vero omnibus difficultatibus feliciter superatis insignes quaedam affectiones inter illa quatuor puncta se prodent, quarum cognitio in Geometria haud levis momenti est censenda.

4. Ne figurae nimia linearum in iis ducendarum multitudine onerentur idem triangulum *ABC* quater exhibeo, in primo scilicet (Fig. 1) rectae *AM*, *BN* et *CP* in latera opposita sunt normales earumque intersectionem littera *E* designo, ubi primum situm est punctum eorum quatuor, quae commemoravi. In secunda figura rectae *Aa*, *Bb* et *Cc* latera opposita bisecant, quarum intersectionem indicat punctum *F*, secundum de quatuor illis punctis memoratis et centrum gravitatis trianguli. In tertia figura rectae $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ angulos *A*, *B*, *C* bisecant earumque intersectio *G* praebet tertium punctum ante memoratum, nempe centrum circuli inscripti. Tandem in quarta figura ex singulorum laterum punctis mediis *S*, *T*, *V* erectae sunt perpendiculares *SH*, *TH* et *VH* sua intersectione *H* centrum circuli circumscripti exhibentes.

5. Quo horum quatuor punctorum positionem facilius definire eaque deinceps inter se comparare queam, ex singulis in latus *AB* pro basi assumtum demitto perpendicula *EP*, *FQ*, *GR* et *HS*, quorum quidem primum et quartum iam in constructione ipsa occurrunt. Tum vero voco terna trianguli latera:

$$AB = c, \qquad AC = b \qquad \text{et} \qquad BC = a\,;$$

praeterea vero etiam aream trianguli in computum duci decet, quae sit = *A*, eritque, uti constat:

$$AA = \frac{1}{16}(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$$

seu

$$AA = \frac{1}{16}(2aabb + 2aacc + 2bbcc - a^4 - b^4 - c^4)\,.$$

Hinc igitur situm cuiusque horum quatuor punctorum respectu basis *AB* seorsim investigo sequenti modo.

I. Pro intersectione perpendiculorum E

6. Primo ex elementis constat fore (Fig. 1):

$$AP = \frac{cc+bb-aa}{2c},$$

similique modo $BM = \dfrac{aa+cc-bb}{2a}$.

Deinde vero ob $\frac{1}{2}AM \cdot BC = A$ erit

$AM = \dfrac{2A}{a}$, unde similitudo triangulorum ABM et AEP praebet $AM : BM = AP : EP$ hincque fit

$$EP = \frac{(cc+bb-aa)(aa+cc-bb)}{8cA}.$$

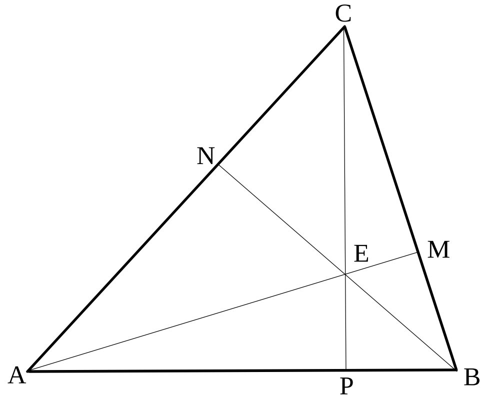


Fig. 1

Quocirca situs puncti E respectu basis AB definitur, ut sit

$$AP = \frac{cc+bb-aa}{2c} \quad \text{et} \quad PE = \frac{(cc+bb-aa)(aa+cc-bb)}{8cA}.$$

II. Pro centro gravitatis F

7. Demisso (Fig. 2) ex angulo C in basin AB perpendiculo CP habemus, ut ante,

$$AP = \frac{cc+bb-aa}{2c} \quad \text{et} \quad CP = \frac{2A}{c}.$$

Iam vero ex elementis constat esse

$FQ = \frac{1}{3}CP = \frac{2}{3}\frac{A}{c}$ et $cQ = \frac{1}{3}cP$.

Cum autem sit $Ac = \frac{1}{2}c$, erit

$cP = \dfrac{bb-aa}{2c}$ ideoque $cQ = \dfrac{bb-aa}{6c}$

et consequenter

$$AQ = \frac{3cc+bb-aa}{6c}.$$

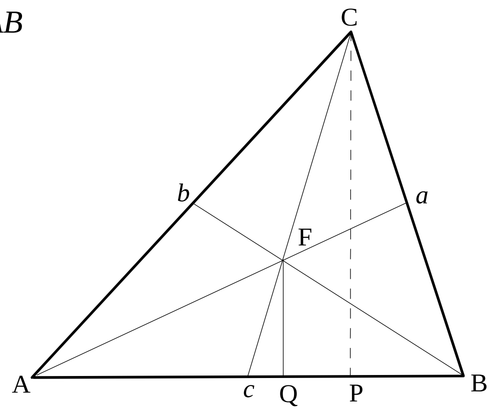


Fig. 2

Quam ob rem situs puncti F respectu basis AB ita definitur, ut sit

$$AQ = \frac{3cc+bb-aa}{6c} \quad \text{et} \quad QF = \frac{2A}{3c}.$$

III. Pro centro circuli inscripti G

8. Cum GR (Fig. 3) sit radius circuli inscripti, erit $\frac{1}{2}GR(a+b+c)$ area trianguli = A, unde fit

$$GR = \frac{2A}{a+b+c}.$$

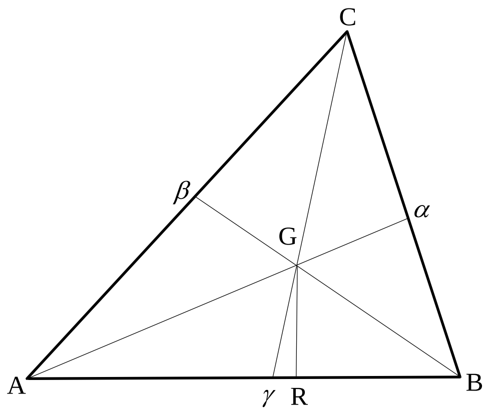


Fig. 3

Tum vero posito segmento $AR = x$, si ab AC ex A par portio rescindatur, habebitur ibi punctum contactus, a quo proinde punctum C distat intervallo = $b-x$. Deinde ob $BR = c-x$, si a latere BC ex B aequale intervallum $c-x$ rescindatur, ibi hoc latus a circulo tangetur, unde punctum C ab isto puncto distabit intervallo = $a - c + x$, quod cum ex circuli natura illi $b - x$ sit aequale, erit $x = \frac{c+b-a}{2}$. Quare hoc punctum G respectu basis AB ita definitur, ut sit

$$AR = \frac{c+b-a}{2} \quad \text{et} \quad RG = \frac{2A}{a+b+c}.$$

IV. Pro centro circuli circumscripti H

9. Hic quidem statim est ex constructione $AS = \frac{1}{2}c$ (Fig. 4.). Tum vero ex A in BC ducto perpendiculo AM, erit

$$AM = \frac{2A}{a} \text{ et } CM = \frac{aa+bb-cc}{2a}.$$

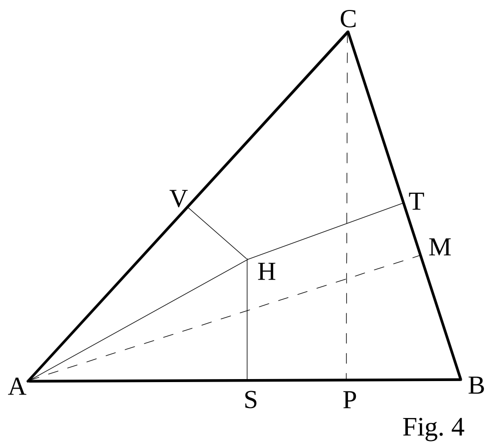


Fig. 4

Iuncta autem recta AH ex natura circuli liquet fore angulum AHS aequalem angulo ACB, ideoque triangulum AHS simile erit triangulo ACM, unde fit $AM : CM = AS : HS$, sicque colligitur

$$HS = \frac{c(aa+bb-cc)}{8A}.$$

Quare situs puncti H respectu basis AB ita definitur, ut sit

$$AS = \tfrac{1}{2}c \quad \text{et} \quad SH = \frac{c(aa+bb-cc)}{8A}.$$

10. Hinc iam definire poterimus distantias inter haec quaterna puncta, siquidem in eadem figura exprimerentur; erit enim

$$\begin{aligned} EF^2 &= (AP-AQ)^2 + (PE-QF)^2 \\ EG^2 &= (AP-AR)^2 + (PE-RG)^2 \\ EH^2 &= (AP-AS)^2 + (PE-SH)^2 \\ FG^2 &= (AQ-AR)^2 + (QF-RG)^2 \\ FH^2 &= (AQ-AS)^2 + (QF-SH)^2 \\ GH^2 &= (AR-AS)^2 + (RG-SH)^2 . \end{aligned}$$

Haec autem intervalla ideo colligi oportet, quod, si proponantur terna horum quatuor punctorum quaeque tanquam data, nihil aliud praeter eorum mutuas distantias pro cognito assumatur, unde deinceps latera trianguli sint investiganda.

11. Hic autem imprimis est observandum distantias illas inter quatuor nostra puncta necessario ita exprimi debere, ut tria trianguli latera in expressiones aequaliter ingrediantur, cum nulli lateri prae reliquis respectu harum distantiarum ulla praerogativa tribui queat. Quam ob causam latera trianguli sine ullo discrimine contemplaturus ponam:

$$a + b + c = p, \quad ab + ac + bc = q \quad \text{et} \quad abc = r ,$$

ita ut loco laterum iam istas ternas quantitates p, q et r ad singula aeque relatas in calculum sim introducturus. Hinc cum sit:

$$aa + bb + cc = pp - 2q ,$$

$$aabb + aacc + bbcc = qq - 2pr ,$$

$$a^4 + b^4 + c^4 = p^4 - 4ppq + 2qq + 4pr , \text{ [1]}$$

area A ita exprimitur, ut sit:

$$AA = \frac{1}{16}p(-p^3 + 4pq - 8r) = \frac{-p^4 + 4ppq - 8pr}{16} .$$

Hoc notato superiores sex distantias ad has novas quantitates seorsim sum revocaturus.

[1] Cf. tabulam p. 59. HTL

I. Investigatio distantiae punctorum E et F

12. Hic primo habemus:

$$AP - AQ = \frac{cc+bb-aa}{2c} - \frac{3cc+bb-aa}{6c} = \frac{bb-aa}{3c}\ ,$$

$$PE - QF = \frac{(cc+bb-aa)(aa+cc-bb)}{8cA} - \frac{2}{3}\frac{A}{c}$$

$$= \frac{3(cc+bb-aa)(aa+cc-bb) - 16AA}{24cA}\ ,$$

quae expressiones ad communem denominatorem reductae fiunt:

$$AP - AQ = \frac{(bb-aa)\sqrt{2aabb+2aacc+2bbcc-a^4-b^4-c^4}}{12cA}\ ,$$

$$PE - QF = \frac{2c^4 - a^4 - b^4 + 2aabb - bbcc - aacc}{12cA}\ ,$$

quarum quadrata addita praebent:

$$EF^2 = \frac{1}{36\,AA}\left\{\begin{array}{l} +a^6+b^6+c^6 \\ -a^4bb - aab^4 - a^4cc - aac^4 - b^4cc - bbc^4 \\ +3\,aabbcc \end{array}\right\},$$

ubi utique litterae *a*, *b*, *c* aequaliter insunt. Est vero:

$$a^4bb + aab^4 + \text{etc.} = ppqq - 2q^3 - 2p^3r + 4pqr - 3rr\ ,$$
$$a^6 + b^6 + c^6 = p^6 - 6p^4q + 9ppqq - 2q^3 + 6p^3r - 12pqr + 3rr\ ,$$ [1]

ex quo obtinemus:

$$EF^2 = \frac{1}{36\,AA}\,(p^6 - 6p^4q + 8ppqq + 8p^3r - 16pqr + 9rr)\ ,$$

quam expressionem ad hanc formam reducere licet:

$$EF^2 = \frac{rr}{4AA} - \frac{4}{9}(pp-2q)\ .$$

[1] Cf. tabulam p 59. HTL

II. Investigatio distantiae punctorum E et G

13. Hic habemus

$$AP - AR = \frac{cc+bb-aa}{2c} - \frac{c+b-a}{2} = \frac{bb-bc-aa+ac}{2c} ,$$

$$PE - RG = \frac{(cc+bb-aa)(aa+cc-bb)}{8cA} - \frac{2A}{a+b+c}$$

seu
$$PE - RG = \frac{c^4 - a^4 - b^4 + 2aabb}{8cA} + \frac{p^3 - 4pq + 8r}{8A}$$

atque ad communem denominatorem reducendo:

$$AP - AR = \frac{(bb-bc-aa+ac)\sqrt{2aabb+2aacc+2bbcc-a^4-b^4-c^4}}{8cA}$$

$$PE - RG = \frac{2c^4-(a+b)c^3-(a-b)^2cc+(a+b)(a-b)^2c-(aa-bb)^2}{8cA} ,$$

quorum quadratorum summa per $4cc$ divisa ad hanc formam redit:

$$EG^2 = \frac{1}{36AA}\left\{\begin{array}{l} +(a^6+b^6+c^6)-(a^5b+ab^5+a^5c+ac^5+b^5c+bc^5) \\ -(a^4bb+aab^4+a^4cc+aac^4+b^4cc+bbc^4) \\ +3(a^4bc+ab^4c+abc^4) \\ -2(a^3bbc+a^3bcc+aab^3c+aabc^3+ab^3cc+abbc^3) \\ +2(a^3b^3+a^3c^3+b^3c^3)+6aabbcc \end{array}\right\} .[1]$$

Antequam hanc expressionem ad litteras p, q et r reduco, observo esse:

$$EG^2 + (aa - ab) + (bb - ac) + (cc - bc)$$
$$= \frac{abc}{4AA}\{(a^3 + b^3 + c^3) - (aab + abb + aac + acc + bbc + bcc) + 3abc\}$$
$$= \frac{abc(aa+bb+cc-2ab-2ac-2bc)(a+b+c) + 9aabbcc}{4AA} .$$

Iam cum sit $aa + bb + cc = pp - 2q$, reductio est facilis, quippe prodit:

$$EG^2 + pp - 3q = \frac{pr(pp-4q)+9rr}{4AA}$$

sicque haec distantia ita definitur, ut sit

$$EG^2 = \frac{r(p^3-4pq+9r)}{4AA} - pp + 3q = \frac{rr}{4AA} - \frac{4r}{p} - pp + 3q .$$

[1] Hic nota numeri 3 in denominatore fractionis $\frac{1}{36AA}$ falsa est. Substitui debet nota 1. Correxit HTL.

III. Investigatio distantiae punctorum E et H

14. Cum hic sit:

$$AP - AS = \frac{cc+bb-aa}{2c} - \frac{1}{2}c$$

$$PE - SH = \frac{(cc+bb-aa)(aa+cc-bb)}{8cA} - \frac{c(aa+bb-cc)}{8A},$$

habebimus:

$$AP - AS = \frac{bb-aa}{2c} \quad \text{et} \quad PE - SH = \frac{2c^4 - (aa+bb)cc - (aa-bb)^2}{8cA}$$

et quadratis addendis divisione facta per $4cc$ obtinetur:

$$EH^2 = \frac{1}{16AA}\left\{\begin{array}{l} +(a^6+b^6+c^6) - (a^4bb + a^4cc + aab^4 \\ +aac^4 + b^4cc + bbc^4) + 3aabbcc \end{array}\right\},$$

quae ob $16AA = -a^4 - b^4 - c^4 + 2aabb + 2aacc + 2bbcc$ reducitur ad hanc formam

$$EH^2 = \frac{9aabbcc}{16AA} - aa - bb - cc,$$

ubi substitutio facile conficitur, resultat enim:

$$EH^2 = \frac{9rr}{16AA} - pp + 2q.$$

IV. Investigatio distantiae punctorum F et G

15. Ex formulis supra inventis habemus hic:

$$AQ - AR \;=\; \frac{3cc + bb - aa}{6c} - \frac{c+b-a}{2} \;=\; \frac{3(a-b)c - aa + bb}{6c} \;,$$

$$QF - RG \;=\; \frac{2A}{3c} - \frac{2A}{a+b+c} \;=\; \frac{2A(a+b-2c)}{3c(a+b+c)} \;,$$

quorum quadratorum summa reducitur ad hanc formam:

$$FG^2 \;=\; \frac{1}{9(a+b+c)^2}\left\{\begin{array}{l} -(a^4+b^4+c^4)+(a^3b+ab^3+a^3c+ac^3+b^3c+bc^3) \\ +4(aabb+aacc+bbcc)-5(abcc+abbc+aabc) \end{array}\right\}.$$

Cum nunc sit:

$$\begin{aligned} a^4+b^4+c^4 &= p^4-4ppq+2qq+4pr\,, \\ aabb+aacc+bbcc &= qq-2pr\,, \\ a^3b+ab^3+a^3c+ac^3+b^3c+bc^3 &= ppq-2qq-pr\,, \\ abcc+abbc+aabc &= pr\,, \end{aligned}$$ [1]

expressio inventa hanc induit formam:

$$FG^2 \;=\; \frac{1}{9pp}(-p^4+5ppq-18pr) \;=\; \frac{-p^3+5pq-18r}{9p} \;.$$

V. Investigatio distantiae punctorum F et H

16. Pro hoc casu habemus:

$$AQ - AS \;=\; \frac{3cc + bb - aa}{6c} - \frac{1}{2}c \;=\; \frac{bb - aa}{6c}$$

$$QF - SH \;=\; \frac{2A}{3c} - \frac{c(aa+bb-cc)}{8A} \;=\; \frac{2c^4 - (aa+bb)cc - (aa-bb)^2}{24cA} \;.$$

Quodsi has formulas cum casu primo comparemus, deprehendimus esse:

$$AQ - AS \;=\; \frac{1}{2}(AP - AQ) \text{ et } QF - SH \;=\; \frac{1}{2}(PE - QF)\,,$$

unde manifestum est fore $FH = \frac{1}{2}EF$ ideoque

$$FH^2 = \frac{1}{16}\frac{rr}{AA} \;-\; \frac{1}{9}(pp-2q)\,.$$

[1] Cf. tabulam p. 59.

VI. Investigatio distantiae punctorum G et H

17. Pro hoc casu postremo habetur:

$$AR - AS = \frac{c+b-a}{2} - \frac{1}{2}c = \frac{b-a}{2}$$

$$RG - SH = \frac{2A}{a+b+c} - \frac{c(aa+bb-cc)}{8A}$$

$$= \frac{(a+b)c^3 + (aa+bb)cc - (a+b)(aa+bb)c - (aa-bb)^2}{8(a+b+c)A},$$

quarum binarum formularum quadrata si addantur, reperitur sequens expressio:

$$GH^2 = \frac{abc}{16(a+b+c)^2 AA}\left\{\begin{array}{l}(a^5+b^5+c^5)+(a^4b+a^4c+b^4c+ab^4+ac^4+bc^4)\\ +(abc^3+ab^3c+a^3bc)\\ -2(a^3bb+a^3cc+b^3cc+aab^3+aac^3+bbc^3)\end{array}\right\},$$

quae per $a + b + c$ reducta abit in hanc:

$$GH^2 = \frac{abc}{16(a+b+c)AA}\left\{\begin{array}{l}(a^4+b^4+c^4)+(aabc+abbc+abcc)\\ -2(aabb+aacc+bbcc)\end{array}\right\},$$

unde facta substitutione colligitur

$$GH^2 = \frac{r}{16pAA}(p^4 - 4ppq + 9pr) = \frac{r(p^3 - 4pq + 9r)}{16AA}$$

seu
$$GH^2 = \frac{rr}{16AA} - \frac{r}{p}.$$

18. En ergo sub uno conspectu quadrata sex horum intervallorum:

$$\begin{array}{rl}
\text{I.} & \boldsymbol{EF^2} = \frac{rr}{4AA} - \frac{4}{9}(pp - 2q)\\
\text{II.} & \boldsymbol{EG^2} = \frac{rr}{4AA} - pp + 3q - \frac{4r}{p}\\
\text{III.} & \boldsymbol{EH^2} = \frac{9rr}{16AA} - pp + 2q\\
\text{IV.} & \boldsymbol{FG^2} = - \frac{1}{9}pp + \frac{5}{9}q - \frac{2r}{p}\\
\text{V.} & \boldsymbol{FH^2} = \frac{rr}{16AA} - \frac{1}{9}(pp - 2q)\\
\text{VI.} & \boldsymbol{GH^2} = \frac{rr}{16AA} - \frac{r}{p},
\end{array}$$

ubi evidens est esse (Fig. 5) $EH = \frac{3}{2}EF$ et $FH = \frac{1}{2}EF$, sicque punctum H per puncta E, F sponte determinatur, scilicet si tria puncta E, F, G forment triangulum EFG, tum quartum punctum H ita in recta EF producta erit situm, ut sit

$$FH = \tfrac{1}{2}EF \quad \text{ideoque} \quad EH = \tfrac{3}{2}EF.$$

Hinc vero deducitur

$$4GH^2 + 2EG^2 = 3EF^2 + 6FG^2,$$

quod cum valoribus inventis apprime congruit.

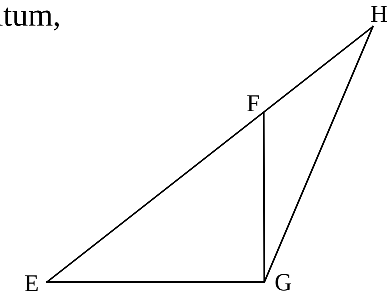


Fig. 5

19. Quo nunc has formulas ad maiorem simplicitatem revocemus, ponamus

$$4pq - p^3 - 8r = 4s, \quad \text{ut sit}$$

$$4AA = ps \quad \text{et} \quad 4q = pp + \frac{8r}{p} + \frac{4s}{p}\ ;$$

tum vero faciamus: $\quad \frac{rr}{ps} = R\ , \quad \frac{r}{p} = Q \quad \text{et} \quad pp = P\ ,$

ita ut P, Q, R sint quantitates duas dimensiones involventes. Quoniam igitur hinc est $\frac{s}{p} = \frac{QQ}{R}$, erit $p = \sqrt{P}$, $q = \frac{1}{4}P + 2Q + \frac{QQ}{R}$ et $r = Q\sqrt{P}$ atque $4AA = \frac{PQQ}{R}$, et intervalla nostra ita exprimentur:

$$\text{I.} \quad \boldsymbol{EF^2} = R - \frac{2}{9}P + \frac{16}{9}Q + \frac{8}{9}\frac{QQ}{R}$$

$$\text{II.} \quad \boldsymbol{EG^2} = R - \frac{1}{4}P + 2Q + 3\frac{QQ}{R}$$

$$\text{III.} \quad \boldsymbol{EH^2} = \frac{9}{4}R - \frac{1}{2}P + 4Q + 2\frac{QQ}{R}$$

$$\text{IV.} \quad \boldsymbol{FG^2} = + \frac{1}{36}P - \frac{8}{9}Q + \frac{5}{9}\frac{QQ}{R}$$

$$\text{V.} \quad \boldsymbol{FH^2} = \frac{1}{4}R - \frac{1}{18}P + \frac{4}{9}Q + \frac{2}{9}\frac{QQ}{R}$$

$$\text{VI.} \quad \boldsymbol{GH^2} = \frac{1}{4}R - Q\ .$$

20. Cum igitur horum quatuor punctorum terna, nisi capiantur haec tria E, F et H, iam contineant determinationem quarti, unicum resultat problema, quod ita se habet:

PROBLEMA

Datis positione his quatuor punctis (*Fig.* 6) [1] *in quolibet triangulo assignabilibus*

1°. *Intersectione perpendicularium ex singulis angulis in latera opposita ductarum E,*
2°. *Centro gravitatis F,*
3°. *Centro circuli inscripti G et*
4°. *Centro circuli circumscripti H,*
construere triangulum.

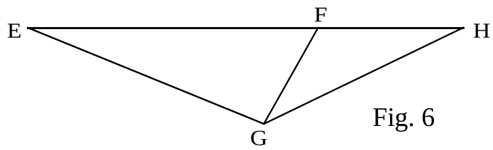


Fig. 6

Quod problema ex hactenus erutis horum punctorum affectionibus satis concinne resolvere licet.

SOLUTIO

21. Cum positio horum quatuor punctorum per eorum distantias detur, vocemus:

$$GH = f, \quad FH = g \quad \text{et} \quad FG = h$$

novimusque fore

$$EF = 2g \quad \text{et} \quad EH = 3g \quad \text{itemque} \quad EG = \sqrt{(6gg + 3hh - 2ff)}\ .$$

Nunc igitur statim habemus has tres aequationes

$$\begin{array}{llll}
\text{I.} & ff & = & \frac{1}{4}R - Q \\
\text{II.} & gg & = & \frac{1}{4}R - \frac{1}{18}P + \frac{4}{9}Q + \frac{2QQ}{9R} \\
\text{III.} & hh & = & \frac{1}{36}P - \frac{8}{9}Q + \frac{5QQ}{9R}\ ,
\end{array}$$

ex quarum resolutione colligimus:

$$R = \frac{4f^4}{3gg + 6hh - 2ff}\ , \quad Q = \frac{3ff(ff - gg - 2hh)}{3gg + 6hh - 2ff} \quad \text{et}$$

$$P = \frac{27f^4}{3gg + 6hh - 2ff} - 12ff - 15gg + 6hh\ , \quad \text{unde fit}$$

$$\frac{QQ}{R} = \frac{9(ff - gg - 2hh)^2}{4(3gg + 6hh - 2ff)}\ .$$

22. His valoribus inventis investigentur tres sequentes expressiones:

$$p = \sqrt{P}\ , \quad q = \frac{1}{4}P + 2Q + \frac{QQ}{R} \quad \text{et} \quad r = Q\sqrt{P}$$

[1] Editio princeps: (Fig. 5). Correxit HTL

indeque formetur haec aequatio cubica:

$$\boldsymbol{z^3 - pzz + qz - r \ = \ 0} \,,$$

cuius tres radices dabunt tria latera trianguli quaesiti, quo pacto eius constructio facillima habetur.

EXEMPLUM

23. Sumtis lateribus trianguli $a = 5$, $b = 6$ et $c = 7$, ut sit area $A = 6\sqrt{6}$, inde colliguntur distantiae quaternorum punctorum:

$$EF^2 = \frac{155}{72},\ EG^2 = \frac{11}{8},\ EH^2 = \frac{155}{32},\ FG^2 = \frac{1}{9},\ FH^2 = \frac{155}{288},\ GH^2 = \frac{35}{32},$$

unde situs horum punctorum talis prodit, uti in Figura 6 repraesentatur.

Cum igitur habeamus:

$$ff = \frac{35}{32}, \qquad gg = \frac{155}{288} \qquad \text{et} \qquad hh = \frac{1}{9} \ ,$$

videamus, num solutio inventa ad triangulum assumtum perducat.

24. Hinc autem fit $3gg + 6hh - 2ff \ = \ \frac{3}{32}$, tum vero

$$ff - gg - 2hh \ = \ \frac{1}{3}, \qquad 4ff + 5\mathrm{gg} - 2hh \ = \ \frac{219}{32} \ ,$$

colligitur

$$R = \frac{1225}{24}\ ,\ Q = \frac{35}{3}\ ,\ P = 324 \quad \text{et} \quad \frac{QQ}{R} \ = \ \frac{24}{9} \ = \ \frac{8}{3} \ ,$$

unde nanciscimur:

$$p = \sqrt{P} = 18\,, \qquad q = 107 \qquad \text{et} \qquad r = \frac{35}{3}\cdot 18 = 5\cdot 6\cdot 7 = 210$$

et aequatio cubica hinc oritur:

$$z^3 - 18zz + 107z - 210 = 0\,,$$

cuius tres radices manifesto sunt 5, 6, 7, quae sunt ipsa tria latera trianguli satisfacientis.

Casus quo quatuor puncta in directum sunt sita

25. Hoc ergo casu cum sit (Fig. 7):

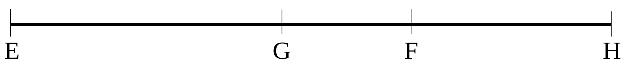


Fig.7

$$FH = g, \quad FG = h, \quad GH = f, \quad EF = 2g, \quad EH = 3g \quad \text{et} \quad EG = 2g - h\,,$$

erit $g = f - h$, unde facta hac substitutione colligimus:

$$R = \frac{4f^4}{(f-3h)^2}\ ,\quad Q = \frac{3ffh(2f-3h)}{(f-3h)^2}\ ,\quad P = \frac{3h(4f-3h)^3}{(f-3h)^2}$$

ideoque

$$\frac{QQ}{R} = \frac{9hh(2f-3h)^2}{4(f-3h)^2}\ .$$

Ex his vero porro elicimus:

$$p = \frac{(4f-3h)\sqrt{3h(4f-3h)}}{f-3h}$$

$$q = \frac{3fh(4f-3h)(5f-6h)}{(f-3h)^2}$$

$$r = \frac{3ffh(2f-3h)(4f-3h)\sqrt{3h(4f-3h)}}{(f-3h)^3}\ .$$

26. Cum iam radices huius aequationis cubicae:

$$z^3 - pzz + qz - r = 0$$

praebeant tria latera a, b, c trianguli quaesiti, ponamus ad eam concinniorem reddendam

$$z = \frac{y\sqrt{3h(4f-3h)}}{f-3h}$$

et prodibit haec aequatio:

$$y^3 - (4f-3h)yy + f(5f-6h)y - ff(2f-3h) = 0\ ,$$

cuius radices manifesto sunt

$$f,\quad f\quad \text{et}\quad 2f-3h\ .$$

Quocirca trianguli quaesiti, quod fit isosceles, latera erunt:

$$a = b = \frac{f\sqrt{3h(4f-3h)}}{f-3h}\quad \text{et}\quad c = \frac{(2f-3h)\sqrt{3h(4f-3h)}}{f-3h}\ .$$

27. Hic autem casus per se solutu est facilis, cum recta illa, in qua sunt puncta data, triangulum in duas partes similes necessario secet ideoque triangulum sit isosceles. Posito autem statim a principio $b = a$, fit

$$A = \frac{1}{4}c\sqrt{(4aa-cc)}\quad \text{et}$$

$$AP = AQ = AR = AS = \frac{1}{2}c$$ [1],

[1] Confer figuras 1, 2, 3, 4. A.S.

tum vero

$$PE = \frac{c^3}{8A}\ ,\quad QF = \frac{2A}{3c}\ ,\quad RG = \frac{2A}{2a+c}\ ,\quad SH = \frac{c(2aa-cc)}{8A}\ ,$$

unde ob puncta P, Q, R, S coincidentia in basis puncto medio, quod sit O, intervalla inter haec puncta erunt:

$$OF–OE = \frac{2(aa-cc)}{3\sqrt{(4aa-cc)}}\ ,\qquad OG–OE = \frac{c(a-c)}{\sqrt{(4aa-cc)}}\ ,\qquad OH–OE = \frac{aa-cc}{\sqrt{(4aa-cc)}}\ ,$$

$$OF–OG = \frac{(a-c)(2a-c)}{3\sqrt{(4aa-cc)}},\qquad OH–OF = \frac{aa-cc}{3\sqrt{(4aa-cc)}}\ ,\qquad OH–OG = \frac{a(a-c)}{\sqrt{(4aa-cc)}}\ .$$

28. Hic duos casus contemplari convenit, prout fuerit vel $a > c$ vel $a < c$, nam si $a = c$ seu triangulum aequilaterum, omnia quatuor puncta in unum coalescunt.

I. Si $a > c$, puncta erunt disposita, uti Figura 8 refert, ubi est $HF = \frac{1}{3}EH$ seu $EF = \frac{2}{3}EH$ et $EG < \frac{1}{2}EH$, hocque casu punctum basis medium O in recta HE producta ultra E cadit, ut sit

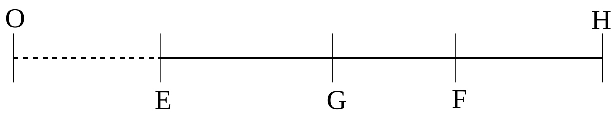


Fig. 8

$$OE = \frac{cc}{2\sqrt{(4aa-cc)}}\ .$$

II. Si $a < c$, puncta erunt disposita, uti Fig. 9 refert, ubi est iterum $HF = \frac{1}{3}EH$ seu $EF = \frac{2}{3}EH$, at $EG > \frac{1}{2}EH$. Hoc autem casu punctum basis medium O in recta EH producta ultra H cadit, ut sit

$$HO = \frac{2aa-cc}{2\sqrt{(4aa-cc)}}\ ,$$

unde, si $2aa < cc$, punctum O adeo intra H et E cadit.

29. Datis ergo in recta punctis tribus E, G et H, ita ut G intra extrema E et H sit situm, videndum est utrum sit $EG < \frac{1}{2}EH$ an $EG > \frac{1}{2}EH$. Priori casu, quo $EG < \frac{1}{2}EH$, solutio ita se habet. Sit (Fig. 8) $EH = 2d$ et $EG = d - e$, hincque reperitur

$$a = b = \frac{(d+e)}{2e}\sqrt{(d+3e)(3d+e)}\ ,$$

$$c = \frac{d-e}{2e}\sqrt{(d+3e)(3d+e)}\qquad \text{et}\qquad OE = \frac{(d-e)^2}{4e}\ .$$

Posteriori casu (Fig.9) $EG > \frac{1}{2}EH$ solutio erit haec: sit $EH = 2d$ et $EG = d + e$, hincque colligitur

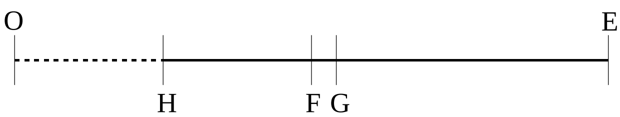


Fig. 9

$a = b = \frac{d-e}{2e}\sqrt{(d-3e)(3d-e)}$, $c = \frac{d+e}{2e}\sqrt{(d-3e)(3d-e)}$ et $OE = \frac{(d+e)^2}{2e}$ [1], unde patet hunc casum locum habere non posse, si d intra limites $3e$ et $\frac{1}{3}e$ contineatur. Cum enim esse debet $2a > c$, necesse est sit $d > 3e$.

30. Ex hoc casu (Fig. 5) colligere licet etiam in genere solutionem concinniorem esse prodituram, si omisso puncto F tria puncta E, G et H considerentur. Ponamus ergo [2]:

$$EG = e,\quad GH = f \quad \text{et} \quad EH = k$$

eritque

$$FH = g = \tfrac{1}{3}k,\quad EF = \tfrac{2}{3}k \quad \text{et} \quad FG = h = \sqrt{(\tfrac{1}{3}ee + \tfrac{2}{3}ff - \tfrac{2}{9}kk)}$$

hincque adipiscimur

$$R = \frac{4f^4}{2ff + 2ee - kk}\ ,\quad Q = \frac{ff(kk - ff - 2ee)}{2ee + 2ff - kk} \quad \text{et}$$

$$P = \frac{27f^4}{2ee + 2ff - kk} + 2ee - 8ff - 3kk = \frac{4e^4 + 11f^4 + 3k^4 - 12eeff + 2ffkk - 8eekk}{2ee + 2ff - kk}\ ,$$

tum vero

$$\frac{QQ}{R} = \frac{(kk - ff - 2ee)^2}{4(2ee + 2ff - kk)}\ ,$$

unde fit

$$p = \sqrt{P}\ ,\quad q = \frac{2e^4 + f^4 + k^4 - 6eeff - 3eekk + 2ffkk}{2ee + 2ff - kk} \quad \text{et} \quad r = Q\sqrt{P}$$

et aequationis $z^3 - pzz + qz - r = 0$ radices dant latera trianguli quaesiti: quae aequatio posito $z = y\sqrt{P}$ abit in hanc:

$$y^3 - yy + \frac{(2e^4 + f^4 + k^4 - 6eeff - 3eekk + 2ffkk)y - ff(kk - 2ee - ff)}{4e^4 + 11f^4 + 3k^4 - 12eeff - 8eekk + 2ffkk} = 0.$$

31. Hic autem observo quantitates has datas e, f, k non solum ita assumi oportere, ut triangulum constituant, sed, quoniam latera trianguli quaesiti a, b, c tanquam positiva spectari possunt, etiam tam P quam Q et R valores positivos recipere debent. Non solum ergo esse debet $kk < 2ee+2ff$, sed etiam $kk > 2ee+ff$, tum vero, ut P fiat positivum, necesse est sit

[1] Nota numeri 2 in denominatore distantiae OE nota 4 substitui debet. Iste denominator vere est $4e$. Emendavit HTL.
[2] Confer § 21. A.S.

$$3kk > 4ee + ff + 2\sqrt{(e^4 + 11eeff - 8f^4)}\,,$$ [3]

qua conditione cum illis collata sequitur esse debere

$$ff > \frac{8}{19}ee \quad \text{et} \quad ff < \frac{11+\sqrt{153}}{16}ee \quad \text{seu} \quad ff < \frac{19}{13}ee\,,$$

alioquin problema nullam admitteret solutionem.

EXEMPLUM

32. Sit $ee = ff$, erit

$$R = \frac{4f^4}{4ff - kk}\,, \quad Q = \frac{ff(kk-3ff)}{4ff-kk}$$

et $\quad P = \dfrac{27f^4}{4ff-kk} - 6ff - 3kk \quad = \quad \dfrac{3(kk-ff)^2}{4ff-kk} \quad$ atque $\quad \dfrac{QQ}{R} \quad = \quad \dfrac{(kk-3ff)^2}{4(4ff-kk)}$

ideoque

$$p = \frac{(kk-ff)\sqrt{3}}{\sqrt{(4ff-kk)}}\,, \quad q = \frac{k^4 - ffkk - 3f^4}{4ff-kk} \quad \text{et} \quad r = \frac{ff(kk-3ff)(kk-ff)\sqrt{3}}{(4ff-kk)\sqrt{(4ff-kk)}}\,,$$

sit iam $\;ee = ff = 2\;$ et $\;kk = 7\;$ fietque

$$p = 5\sqrt{3}\,, \quad q = 23 \quad \text{et} \quad r = 10\sqrt{3}$$

et latera trianguli quaesiti erunt radices huius aequationis cubicae

$$z^3 - 5zz\sqrt{3} + 23z - 10\sqrt{3} = 0\,,$$

quae posito $z = \dfrac{y}{\sqrt{3}}$ abit in

$$y^3 - 15yy + 69y - 90 = 0$$

cuius una radix est $\;y = 6,\;$ unde binae reliquae sunt $y = \dfrac{9+\sqrt{21}}{2}$ et $y = \dfrac{9-\sqrt{21}}{2}$ sicque trianguli quaesiti latera sunt:

$$a = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}\,, \quad b = \frac{3\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2}\,, \quad c = 2\sqrt{3}\,.$$

---

[3] Abhic usque ad finem huius paragraphi EULERI assertiones erroneae sunt. E conditionibus $Q > 0$ et $R > 0$ sequitur

$$2e^2 + f^2 < k^2 < 2e^2 + 2f^2\,.$$

Si ponamus $k^2 = 2e^2 + (1+\alpha)f^2$, $0 < \alpha < 1$, numerator ipsius P *fit*

$$f^2(16f^2 - 4e^2 + 4\alpha(e^2 + 2f^2) + 3\alpha^2 f^2)\,.$$

Sufficit esse $4f^2 > e^2$, ut iste numerator sit positivus.

Numerator ipsius P per 3 multiplicatus fit

$$= (3k^2 - 4e^2 + f^2)^2 - 4e^4 - 28e^2f^2 + 32f^4\,.$$

Unde sequitur radice quadrata extracta (est enim $3k^2 > 4e^2 - f^2$ e conditione $k^2 > 2e^2 + f^2$):

$$3k^2 > 4e^2 - f^2 + 2\sqrt{e^4 + 7e^2f^2 - 8f^4}\,,$$

quae formula differt a formula EULERIANA supra data. Correxit A.S.

33. Verum etiam generalius manente $ee = ff$, quomodocunque accipiatur k, si ponatur $z = \dfrac{y}{\sqrt{3(4ff - kk)}}$, habetur haec aequatio resolvenda:

$$y^3 - 3(kk - ff)yy + 3(k^4 - ffkk - 3f^4)y - 9ff(kk - 3ff)(kk - ff) = 0 ,$$

cui primo satisfacit $y = 3ff$ et duae reliquae radices ex hac aequatione

$$yy - 3(kk - 2ff)y + 3(kk - 3ff)(kk - ff) = 0 ,$$

quae sunt

$$y = \frac{3(kk - 2ff) \pm k\sqrt{3(4ff - kk)}}{2} ,$$

sicque tria latera trianguli quaesiti fiunt:

$$a = \frac{(kk - 2ff)\sqrt{3}}{2\sqrt{(4ff - kk)}} + \frac{1}{2}k ,$$

$$b = \frac{(kk - 2ff)\sqrt{3}}{2\sqrt{(4ff - kk)}} - \frac{1}{2}k ,$$

$$c = \frac{ff\sqrt{3}}{\sqrt{(4ff - kk)}} .$$

34. Reliquis casibus negotium non tam facile expeditur, quia aequatio cubica factores non admittit. Quod ut exemplo ostendatur, sit $ee = 3$, $ff = 2$ et $kk = 9$; unde trianguli latera sunt radices huius aequationis cubicae

$$z^3 - zz\sqrt{71} + 22z - 2\sqrt{71} = 0 ;$$

ad quam resolvendam quaeratur angulus α, cuius cosinus sit $= +\sqrt{\frac{71}{125}}$ [1], qui erit acutus, quo invento latera trianguli erunt:

$$a = \frac{1}{3}\sqrt{71} + \frac{2}{3}\sqrt{5} \cdot \cos(60° - \frac{1}{3}\alpha) ,$$

$$b = \frac{1}{3}\sqrt{71} + \frac{2}{3}\sqrt{5} \cdot \cos(60° + \frac{1}{3}\alpha)$$

et

$$c = \frac{1}{3}\sqrt{71} - \frac{2}{3}\sqrt{5} \cdot \cos\frac{1}{3}\alpha ,$$

ubi est proxime $\alpha = 41°5'30''$ [2] sicque per anguli trisectionem problema semper satis expedite resolvetur.

---

[1] Editio princeps: $\sqrt{\frac{71}{75}}$. Correxit A.S.

[2] Editio princeps: 11°32'13''. Correxit A.S.

Eulers Lösungsstrategie.

Zuerst muß noch einmal darauf hingewiesen werden, daß die vorliegende Studie in Eulers Darstellung nicht primär das Ziel anstrebt, die ***Euler-Gerade*** herzuleiten oder direkt als Verifikation einer Vermutung einzuführen. Das Phänomen soll vielmehr, so sieht es der Verfasser, im Laufe der Untersuchung als Konsequenz einer analytisch-geometrischen Analyse, gleichsam ***zufällig***, herauskommen. Im Titel ist denn auch keineswegs von einer „merkwürdigen Geraden“ die Rede, sondern viel allgemeiner nur von „geometrischen Problemen“.

Der Autor befaßt sich im Gegenteil ausschließlich mit der Aufgabe, ***ein Dreieck zu konstruieren***, wenn drei charakteristische Punkte desselben vorgegeben werden. Allerdings zeigt dann eine genauere Prüfung, daß drei von vier anvisierten Punkten nicht beliebig gewählt werden dürfen, weil sie eben auf einer Geraden liegen.

Euler gibt nur rudimentäre Hinweise auf seinen Arbeitsplan. Durch die Angabe von dreien der vier kritischen Punkte E (Höhenpunkt), F (Schwerpunkt), G (Inkreismittelpunkt) und H (Umkreismittelpunkt) eines Dreiecks meint er, sei dieses bereits durch die gewählten drei Punkte bestimmt. Auf Grund dieser Angaben sollte also das zugehörige Dreieck konstruiert werden können. [11]

Dreiecke besitzen sechs Hauptstücke, nämlich drei Seiten (S) und drei Winkel (W). Die vier klassischen Kongruenzsätze der Schulgeometrie, (SWS), (WSW), (SSS), (SSW), lehren, wie ein Dreieck konstruiert wird, wenn drei Hauptstücke bekannt sind. Die geometrische Aufgabe, ein Dreieck zu konstruieren, verlangt drei Vorgaben. Diese sind im allgemeinen nicht Hauptstücke. Im Arbeitsschritt ***Analysis*** wird zunächst versucht, durch Anwendung bekannter geometrischer Gesetzmäßigkeiten von den vorgegebenen Stücken auf zweckmäßig gelegene Hauptstücke zu schließen, mit deren Hilfe das Dreieck schließlich konstruiert werden kann.

Bisher waren in Konstruktionsaufgaben vorgegebene Stücke gewöhnlich Strekken und Winkel. Eher unkonventionell ist die Akademieaufgabe von 1723, indem sie als vorgegebene Stücke Punkte, konkret den Höhenpunkt E, den Schwerpunkt F und den Inkreismittelpunkt G, wählt. Dem Geometer stellen sich hier zwei Fragen, nämlich, wie die Punkte E, F und G zu definieren sind und auf welche Hauptstücke die ***Analysis*** hinzielen soll.

Die Punkte E, F, G können absolut, durch ihre Koordinaten, oder relativ, durch ihre wechselseitigen Entfernungen voneinander, vorgegeben werden. Euler bevorzugt die zweite Variante, die relative Vorgabe der *Entfernungen* bzw. *Strecken* [12]. Als konstruktionsfähige Größen wählt er andererseits die drei Seiten a, b, c des gesuchten Dreiecks, also ebenfalls *Strecken*. Damit konzentriert sich die Aufgabe auf lauter gleichartige Größen. Eine erste Aufgabe wird es demnach sein, Beziehungen zwischen den Abständen EF, GE, GF und den Seiten a, b, c des gesuchten Dreiecks aufzustellen. Dies wird in Gestalt von algebraischen Formeln geschehen.

[11] *Ex his quatuor punctis si dentur positione terna quaequnque, evidens est triangulum determinari.* (Zif. 2).

[12] *Si proponantur terna horum quatuor punctorum quaeque tanquam data, nihil aliud praeter eorum mutuas distantias pro cognito assumatur ....* (Zif. 10).

Der Arbeitsgang ***Analysis***, Ziffern 6 bis 19 der Eulerschen Studie, nimmt an, die Aufgabe sei gelöst, die Dreiecksseiten a, b, c seien folglich bekannt und dürfen als Operanden benutzt werden. Die Studie beginnt mit der Berechnung der Koordinaten x und y der vier Punkte E, F, G, H bezüglich eines Koordinatensystems bestehend aus der Dreiecksseite AB (= c) als x-Achse und einer zu ihr senkrecht stehend gedachten virtuellen y-Achse. Elementare geometrische Überlegungen liefern schließlich die Koordinaten x, y als gebrochene rationale Funktionen ausschließlich der Variablen a, b, c d.h. der Seiten des gesuchten Dreiecks (Ziff. 6 bis 9). Durch Umdeutung der bekannten in unbekannte Größen und umgekehrt können dann die Dreiecksseiten a, b, c berechnet werden, falls die Koordinaten der Punkte E, F, G, H bekannt sind. Mit Hilfe der Dreiecksseiten a, b, c ist das Dreieck ABC konstruierbar.

Ein Vergleich der Koordinaten der Punkte E, F und H müßte bereits jetzt deren Proportionalität und damit die Existenz der Euler-Geraden enthüllen. Euler verschiebt indessen diese „Entdeckung“ auf den nächsten Schritt.

Im zweiten Schritt, Ziffern 12 bis 17, werden die sechs wechselseitigen Abstände EF, EG, EH, FH, GF, und GH berechnet. In einem rechtwinkligen ebenen Koordinatensystem ist die Entfernung AB zweier Punkte $A = (x_A \mid y_A)$ und $B = (x_B \mid y_B)$ voneinander die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten die Koordinatendifferenzen $\Delta x = x_B - x_A$ und $\Delta y = y_B - y_A$ sind. Auf die Strecken AB, Δx und Δy ist daher der Satz von Pythagoras anwendbar: $AB^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$. Nach diesem Schema werden die sechs Streckenquadrate EF^2, EH^2, FH^2 usw. berechnet.

Da die Koordinaten der Punkte E, F, G, H gebrochene rationale Funktionen der Dreiecksseiten a, b, c sind, müssen sie zur Differenzbildung vorerst gleichnamig gemacht werden. Dies und die nachfolgende Quadrierung erzeugen komplizierte Formeln für die Streckenquadrate EF^2 usw., die weiterhin gebrochene rationale Funktionen ausschließlich der Größen a, b, c d.h. der Seiten des gesuchten Dreiecks sind. Danach wird mit den Streckenquadraten weitergerechnet, wodurch Wurzeln vermieden werden.

Die Ergebnisse, Formeln für die Berechnung der Quadrate EF^2, EH^2, FH^2 usw. der kritischen Strecken EF, EH, FH usw., sind ausnahmslos sog. ***symmetrische Funktionen*** der Variablen a, b und c: symbolisch $f(a,b,c)$. Kennzeichnende Eigenschaft symmetrischer Funktionen ist die Invarianz ihrer Funktionswerte gegenüber Vertauschungen beliebiger zweier Argumente: $f(a,b,c) = f(b,a,c)$. Dies ist dank den kommutativen Gesetzen $a + b = b + a$ und $ab = ba$ immer der Fall, wenn die Argumente additiv und multiplikativ miteinander verknüpft sind: $f(a,b) = a^2b \neq ab^2$ ist nicht symmetrisch, hingegen ist $f(a,b) = a^2b + ab^2$ sehr wohl symmetrisch, denn $f(b,a) = b^2a + ba^2 = a^2b + ab^2 = f(a,b)$.

Wie Eulers nachfolgende Rechnungen belegen, ist er mit symmetrischen Funktionen durchaus vertraut, denn er benutzt ihre Eigenschaften virtuos zur Lösung der skizzierten Konstruktionsaufgabe. Indessen verbietet ihm die auf das Notwendigste beschränkte Darstellungsweise, sie als solche zu definieren und näher auf sie einzutreten. Einzig in Zif. 11 weisen das auf die Dreiecksseiten (Argumente) a, b, c zu beziehende Adverb *aequaliter* und die adverbiale Wendung *sine ullo discrimine* auf deren Vertauschbarkeit in den Formeln hin.

Allerdings könnte die in Zif. 11 gewählte Formulierung *hic imprimis est observandum distantias illas inter quatuor puncta necessario ita exprimi debere, ut trianguli latera in expressiones aequaliter ingrediantur* auf den ersten Blick als Aufforderung an den Analytiker verstanden werden, die Funktionsformeln $EF^2(a,b,c)$ usw. als symmetrische Funktionen zu gestalten. Indessen liegt hier keine Wahlfreiheit vor: ***die Funktionen $EF^2(a,b,c)$ usw. müssen symmetrische Funktionen sein***.

Für die nachfolgenden Überlegungen mögen folgende Vereinbarungen gelten. Die Permutation (*abc*) der Seiten *a, b, c* des Dreiecks ΔABC soll, wie in Eulers Figuren 1 bis 4, das Dreieck so beschreiben, daß „linksherum gezählt" wird und die jeweils zuletzt genannte Seite − hier die Seite *c* − die „Basis" des Dreiecks darstellt. Durch die Vertauschung $a \to b \to a$ entsteht aus (*abc*) die Permutation (*bac*), die folglich ein Dreieck beschreibt, dessen Basis unverändert die Seite *c* ist, das aber aus dem Dreieck ΔABC durch Achsenspiegelung an der Mittelsenkrechten der Seite *c* entstanden ist.

Wird auf die Permutation (*bac*) die Vertauschung $a \to c \to a$ angewandt, entsteht aus (*bac*) die Permutation (*bca*) bzw. die zyklische Vertauschung $a \to b \to c \to a$ von (*abc*). Sie beschreibt das ursprüngliche Dreieck ΔABC mit den selben Seiten *a*, *b*, *c*, jetzt aber mit Basis *a* statt *c*. Die Darstellung (*bca*) kann daher als Drehung des Dreiecks ΔABC um den Umkreismittelpunkt *H* interpretiert werden. [13]

Die Konfiguration eines Dreiecks ist gegenüber Drehungen der Figur invariant: der Umfang und der Flächeninhalt des Dreiecks, die relativen Entfernungen der Eckpunkte sowie der kritischen Punkte voneinander bleiben unverändert, wenn das Dreieck beispielsweise um den Umkreismittelpunkt gedreht wird. Durch die Drehung der Figur ändern indessen alle Punkte, mit Ausnahme des Drehpunktes, ihre Lage, und ihre Koordinaten *x* und *y* nehmen im allgemeinen andere Werte an: $x(bca) \neq x(abc)$ und $y(bca) \neq y(abc)$.

Wird das Dreieck in seinem Umkreis so gedreht, daß nacheinander die Seiten *c*, *b*, *a* die Lage der „Basis" einnehmen, und werden jedesmal nach demselben Verfahren der Flächeninhalt *A* und die sechs relativen Entfernungen *EF, EG, EH, FG, FH* und *GH* bzw. deren Quadrate berechnet, müssen die Ergebnisse *A* und A^2, EF^2, EG^2, EH^2, FG^2, FH^2, GH^2 stets gleich ausfallen. Ebenso müssen die aus den Rechnungen hervorgehenden Berechnungsformeln strukturell identisch sein. Das einzige, das sich ändert, ist die Reihenfolge der Symbole in den Formeln. ***Die Berechnungs - formeln für A^2, EF^2 usw. sind Funktionen der Variablen a, b, c, in denen eine Vertauschung der Variablen keine Veränderung des Funktionswertes bewirken darf: sie sind symmetrische Funktionen von a, b, c***.

Die Zusammenstellung der Ergebnisse in Tabellenform in Zif. 18 läßt erkennen, daß die Quadrate EF^2, EH^2 und FH^2 proportional sind, woraus Euler erst jetzt den

[13] Man überlege sich, daß der Drehwinkel $\delta = -(180° - \beta)$ bzw. $\delta = +(180° + \beta)$, $\beta = \angle B$ im Dreieck ΔABC, beträgt.

Schluß zieht, daß ***Höhenpunkt E, Schwerpunkt F und Umkreismittelpunkt H auf einer Geraden liegen*** und überdies der Schwerpunkt *F* als innerer Teilpunkt die Strecke *EH* drittelt, und zwar so, daß *F* näher bei *H* liegt. Damit sind die drei Punkte *E, F, H* „aequivalent“: wenn zwei von ihnen angegeben werden, ist der dritte automatisch bestimmt.

Die Variablen *a*, *b*, *c*, zugleich Seiten des gesuchten Dreiecks, wurden nur für die Zwecke der Arbeitsphase ***Analysis*** als bekannt angenommen. In Wirklichkeit sind sie vorerst unbekannt und sollen vielmehr durch anschließende Rechnungen bestimmt werden. Drei gleichartige unbekannte, durch Rechnung zu bestimmende, Größen, können als Lösungen eines Systems dreier Gleichungen mit drei Unbekannten oder als Lösungen einer einzigen Gleichung dritten Grades mit einer Unbekannten, die bekanntlich drei Lösungen hat, interpretiert werden. Das bestimmende Rechenverfahren ist in diesem Fall die Auflösung des Gleichungssystems bzw. der Gleichung.

Euler benutzt beide Verfahren. Die entscheidende Schlußgleichung ist aber eine einzige Gleichung dritten Grades. Die umfangreichen und teilweise recht anspruchsvollen Rechnungen zielen auf die Aufstellung einer *kritischen Gleichung* dritten Grades ab, deren drei Lösungen *a, b, c* die Längen der Seiten des gesuchten Dreiecks sein sollen. Sobald die Gleichung gelöst ist, d.h. sobald die Längen *a, b, c* bekannt sind, kann das gesuchte Dreieck gemäß dem dritten Kongruenzsatz (SSS) konstruiert werden.

Als Bindeglied zu der angestrebten kritischen Gleichung dritten Grades dient ein von Euler häufig eingesetztes Rechenhilfsmittel, nämlich die Verwendung einfacher Symbole an Stelle komplizierter, aber für eine bestimmte Operation als konstant zu betrachtender Ausdrücke. In Zif. 11 führt er deswegen die in der Gleichungstheorie universell gewordenen und noch heute benutzten Abkürzungen ***p = a+b+c***, ***q = ab+ac+bc*** und ***r = abc*** ein. Die Abkürzungen *p, q* und *r* sind symmetrische Funktionen dreier Variabler *a, b, c*: durch die Vertauschung beliebiger zweier Variabler werden die Werte weder von *p* oder *q* noch von *r* verändert. Die Funktionen *p, q, r* sind gleichzeitig die einfachsten symmetrischen Funktionen dreier Variabler der ersten, zweiten und dritten Dimension.

Als Begründung für die Wahl der Abkürzungen *p, q, r* führt Euler lediglich an, es sei notwendig, die wechselseitigen Distanzen der Punkte *E, F, G* und *H* so als Funktionen der Dreiecksseiten *a, b, c* zu formulieren, daß letztere „gleichberechtigt“, ohne Bevorzugung der einen oder anderen, in die Formeln eingehen [14]. Der wahre Grund, den Euler hier indessen nicht erwähnt, obwohl er davon später Gebrauch macht, ist jedoch der, daß die von ihm definierten Funktionen *p, q, r* mit alternierenden Vorzeichen die Koeffizienten der kubischen Gleichung

$$\mathbf{z^3 - pz^2 + qz - r = 0} \tag{1}$$

sind, wenn die Argumente *a, b, c* von *p, q, r* die Gleichung (1) befriedigen, und daß ferner beliebige symmetrische Funktionen höherer Dimensionen dreier Variabler als

[14] Zif. 11: ..... *cum nulli lateri prae reliquis respectu harum distantiarum ulla praerogativa tribui queat. Quam ob causam latera trianguli sine ullo discrimine contemplaturus ponam: a+b+c = p, ab+ac+bc = q* et *abc = r*.

Funktionen von p, q, r ausgedrückt werden können. (p, q, r sind gleichsam „Primfunktionen".) Die Auflösung der Gleichung (1) liefert demnach automatisch die Längen der Seiten des gesuchten Dreiecks, womit die Akademieaufgabe gelöst ist [15].

Eine weitere Abkürzung, die wie ein roter Faden alle Rechnungen durchzieht, ist die Heronsche Flächenformel zur Berechnung des Inhalts A eines Dreiecks. Sie gibt den Flächeninhalt eines Dreiecks als eine Funktion $A(a,b,c)$ allein der drei Seiten a, b, c wieder und ist ebenfalls eine symmetrische Funktion, allerdings zweiter Dimension bzw. vierter Dimension, da sie meist als Quadrat A^2 auftritt.

Die Eigenschaften der symmetrischen „Primfunktionen" p, q, r sowie der Funktion A bzw. A^2 werden benutzt, um die quadratischen Streckenformeln EF^2 usw. aus Funktionen von a, b, c in Funktionen von p, q, r zu transformieren. Die Tabellendarstellung der Streckenquadrate EF^2 in Zif. 18 enthält nur noch Formeln mit den Argumenten p, q, r und A.

Im Arbeitsschritt ***Synthesis*** (Zif. 21) wählt Euler zur Lösung der Akademieaufgabe als Vorgaben die Punkte F, G, H, d.h. H statt E, wozu er berechtigt ist, da E, F, H „aequivalent" sind. Mit den Formeln für die Streckenquadrate GH^2, FH^2 und FG^2 als Funktionen von p, q, r und A, und über einen weiteren Zwischenschritt mit neuen Variablen P, Q, R und Funktionen von p,q,r, bildet er ein System von drei Gleichungen für die Unbekannten P, Q, R und gibt dessen Lösungen P, Q, R und endlich p, q, r – nicht aber den Lösungsweg! – an. Mit p, q, r kann er nun in Zif. 22 die kritische Gleichung (1) aufstellen und versuchen, diese zu lösen.

Die numerische Beispielgleichung dritten Grades (Ziff. 23 und 24), die sich aus zum Zwecke der Verifikation der Grundidee angenommenen Werten $a = 5$, $b = 6$ und $c = 7$ ergibt, läßt sich leicht lösen, beinahe durch bloße „Inspektion", und führt erwartungsgemäß auf die Zahlen 5, 6, 7 zurück.

Im Falle der gleichschenkligen Dreiecke sind die kritischen Gleichungen noch algebraisch zu bewältigen. Bei beliebigen Dreiecken muß für die Lösung der kritischen Gleichungen auf die goniometrische Funktion *cos* und die Dreiteilung eines Hilfswinkels α zurückgegriffen werden (Zif. 34).

Der Rest der Studie sind Fallunterscheidungen – gleichschenklig-spitzwinklige, gleichschenklig-stumpfwinklige und beliebige Dreiecke – und daraus resultierende Beschränkungen der Wahlfreiheit für die relativen Entfernungen der Punkte E, F, G, H voneinander. Einige hier auftretende kleinere Rechenfehler dürften bei der Ausarbeitung der Einzelheiten durch Eulers Gehilfen entstanden sein. Sie beeinträchtigen indessen die grundsätzliche Richtigkeit der Folgerungen nicht [16].

---

[15] Man überzeuge sich durch Einsetzen von a, b, c in Gleichung (1), daß diese Größen tatsächlich Lösungen von (1) sind, wenn die Koeffizienten p, q, r die definierten Werte annehmen.

[16] Es ist bekannt, daß Euler mit einem Stab von Gehilfen arbeitete. Er entwickelte seine Ideen und gab Direktiven zu deren Ausarbeitung. Anders ist der gewaltige Umfang seines Oeuvres nicht zu erklären. Auch der Verlust des rechten Auges bereits 1735 ließ die Inanspruchnahme von Unterstützung ratsam erscheinen. Nach der totalen Erblindung 1771 war die Mithilfe Dritter zwingend.

Mathematische Hilfsbegriffe.

Die Heronsche Flächenformel und symmetrische Funktionen.

Heron von Alexandrien (um 120 v.Chr.) benutzte in dem unter dem lateinischen Titel *Metrica* bekannten Werk in einem numerischen Beispiel die nachstehend beschriebene Formel zur Berechnung des Flächeninhalts eines Dreiecks.

Der Flächeninhalt A eines beliebigen Dreiecks ABC ist das Produkt aus einer Seite und der ihr zugeordneten Höhe geteilt durch 2:

$$A = \tfrac{1}{2}ch\ .$$

(Abb. 1). Zur Vermeidung von Wurzeln verwendet Euler das Quadrat des Flächeninhalts:

$$A^2 = \tfrac{1}{4}c^2h^2.$$

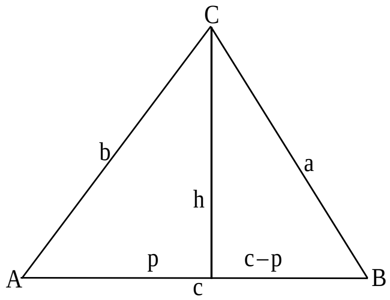


Abb. 1

Mit Hilfe des Satzes von Pythagoras läßt sich die Höhe h durch die Seiten a, b, c ausdrücken: $h^2 = b^2 – p^2 = a^2 – (c–p)^2$, woraus folgt, daß die Projektion der Seite b auf die Seite c, nämlich die Strecke p, eine Funktion von a, b, c ist, und zwar:

$$p = \frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\ .$$

Damit wird
$$\begin{aligned} A^2 &= \tfrac{1}{4}c^2h^2 = \tfrac{1}{4}\, c^2(b^2 - p^2) = \tfrac{1}{4}c^2(b + p)(b - p)\\ &= \tfrac{1}{4}\, c^2\left(\frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right)\left(\frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2c}\right)\\ &= \tfrac{1}{16}\left[\ \left((b+c)^2 - a^2\right)\left(a^2 - (b-c)^2\right)\right]\\ &= \tfrac{1}{16}\,[(b + c + a)(b + c - a)(a + b - c)(a - b + c)]\ , \end{aligned}$$

anders geordnet:

(2a) $$\mathbf{16}\boldsymbol{A^2} = \boldsymbol{(a + b + c)(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b)}\ .$$

Aus $A^2 = \tfrac{1}{4}c^2h^2 = \tfrac{1}{4}c^2(b^2 - p^2)$ folgt auch

$$\begin{aligned} A^2 &= \tfrac{1}{4}\, c^2\left(\frac{4c^2b^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4c^2}\right)\\ &= \tfrac{1}{16}\left(4b^2c^2 - b^4 - c^4 - a^4 - 2b^2c^2 + 2b^2a^2 + 2c^2a^2\right)\\ &= \tfrac{1}{16}\left(2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4\right) \end{aligned}$$

oder:

(2b) $$\mathbf{16}\boldsymbol{A^2} = \boldsymbol{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}\ .$$

Die Formeln (2a) und (2b) belegen, daß der Flächeninhalt eines Dreiecks bereits berechenbar ist, wenn nur die Längen der drei Seiten bekannt sind. In diesem Falle genügen arithmetische Rechenverfahren, ein Rückgriff auf die Trigonometrie ist nicht nötig.

Formel (2b) folgt auch direkt aus (2a) durch Ausmultiplizieren des Produkts. Zugleich sind beide Formeln Beispiele ***symmetrischer Funktionen*** der drei Variablen a, b, c: die ***Funktionswerte*** bleiben gegenüber Vertauschungen beliebiger zweier Variabler ***invariant***.

Auf Grund der assoziativen Gesetze lassen sich die symmetrischen Funktionen (2a) und (2b) in Faktoren und Summanden gliedern:

$$[a+b+c][(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)] \tag{2a}$$

$$2\,[a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2]-[a^4+b^4+c^4]\;. \tag{2b}$$

Man erkennt unschwer, daß jeder der Faktoren und Summanden in eckigen Klammern für sich selbst eine symmetrische Funktion dreier Variabler ist. Beide Formeln sind vierdimensional. Formel (2a) ist das Produkt eines linearen Faktors und eines Produktes von drei linearen Faktoren, Formel (2b) eine Differenz zweier vierdimensionaler Summanden. Sie belegen die – selbstverständliche – Tatsache, daß Summen und Produkte symmetrischer Funktionen wieder symmetrische Funktionen sein müssen; dies auch dann, wenn noch Faktoren oder Summanden F, die nicht von denselben Variablen abhängen, hinzutreten.

Die Forderung der Vertauschbarkeit ist im vorliegenden Fall nicht weiter erstaunlich. Der erste Faktor in Formel (2a), $(a+b+c)$, die Summe der Dreiecksseiten, ist gleich dem Umfang U des Dreiecks, und zur Bestimmung des Umfangs ist es offensichtlich unerheblich, mit welcher Seite man die Zählung beginnt und ob man rechts- oder linksherum zählt: $U = a+b+c = b+a+c = c+a+b = c+b+a$ [17]. In der einfachen symmetrischen Funktion $(a+b+c)$ bewirkt die Vertauschung $a \to c \to a$ im graphischen Bild der Formel $(a+b+c)$ gleichsam eine Punktspiegelung von a bzw. von c am Mittelpunkt b, so daß c das Bild von a und, umgekehrt, a das Bild von c wird: die Formel $(a+b+c) = (c+b+a)$ – auch wenn wie hier als Gleichung aufgefaßt – ist *punktsymmetrisch* und erklärt – *pars pro toto* – die Bezeichnung *symmetrisch* für diese Klasse von Funktionen.

Durch Operationen wie Addition und Multiplikation symmetrischer Funktionen, insbesondere durch Multiplikation und Potenzieren, entstehen vielfach unhandliche und unübersichtliche Ausdrücke. Es ist deshalb zur Vereinfachung der Notation, spätestens im 19. Jahrhundert, leider von Euler in der vorliegenden Studie (noch) nicht, die Konvention eingeführt worden, symmetrische Funktionen durch das Summenzeichen Σ gefolgt von einem repräsentativen Element – am besten dem ersten in

[17] Das Produkt der Vertauschungen $(a \to b \to a)$ und $(a \to c \to a)$ führt auf die zyklische Vertauschung $(abc) \to (bca)$, die als eine Drehung des Dreiecks ABC interpretiert werden kann. Eine bloße Drehung verändert den Umfang des Dreiecks nicht. Vgl. die Überlegungen auf den Seiten 26 und 27.

lexikographischer Anordnung – wiederzugeben. Es sollen also – bei drei Variablen a, b, c – bedeuten:

$$\Sigma a = a+b+c, \qquad \Sigma a^2 = a^2+b^2+c^2,$$

$$\Sigma a^2 b = a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2, \qquad \Sigma a^4b^4 = a^4b^4+a^4c^4+b^4c^4$$

$$\Sigma a^3b^2 = a^3b^2+a^2b^3+a^3c^2+a^2c^3+b^3c^2+b^2c^3, \qquad \Sigma a^3bc = a^3bc+ab^3c+abc^3 \text{ usw.}$$

Der Dreiecksinhalt, Formel (2b), kann damit kürzer dargestellt werden:

(2b') $$\mathbf{16A^2 = 2\Sigma a^2b^2 - \Sigma a^4}\ .$$

Aus den drei einfachsten symmetrischen Funktionen der ersten, zweiten und dritten Dimension, Σa, Σab und abc, können multiplikativ unzählige andere symmetrische Funktionen, insbesondere sämtliche Funktionen dreier Variabler, die Euler in den nachfolgenden Rechnungen benötigt, aufgebaut werden. Man kann sie daher, in Analogie zu den Primzahlen, ***Primfunktionen*** nennen. Euler trägt diesem Umstand dadurch Rechnung, daß er für die drei Primfunktionen die besonderen Abkürzungen p, q und r einführt:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p} &= \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{q} &= \boldsymbol{ab} + \boldsymbol{ac} + \boldsymbol{bc} \\ \boldsymbol{r} &= \boldsymbol{abc}\ . \end{aligned}$$

Damit gewinnt Formel (2a) die „Hybridform“

(2c) $$\mathbf{16}\boldsymbol{A}^\mathbf{2} = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{p} - \mathbf{2}\boldsymbol{a})(\boldsymbol{p} - \mathbf{2}\boldsymbol{b})(\boldsymbol{p} - \mathbf{2}\boldsymbol{c}).$$

Endlich läßt sich noch, wenn $p = 2s$, d.h. s gleich dem *halben* Dreiecksumfang, gesetzt wird, der Dreiecksinhalt wiedergeben als

(2d) $$\boldsymbol{A} = \sqrt{\boldsymbol{s}(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{a})(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{c})} \text{ oder } \boldsymbol{A}^\mathbf{2} = \boldsymbol{s}(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{a})(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{c}).$$

In der Form (2d) erscheint die Heronsche Flächenformel in den meisten Geometrielehrbüchern [18], einst besonders geeignet für Berechnungen mit dem Rechenschieber. Man bemerkt, daß auch (2c) und (2d) symmetrische Funktionen von a, b, c sind. Die Vertauschung beliebiger zweier Variabler, etwa a und b, beeinflußt die Größen p und s nicht und führt lediglich einen Faktor in einen andern über, so daß die Werte der Produkte dank dem kommutativen Gesetz unverändert bleiben.

Der Buchstabe ***A***, vorerst als Initiale des Wortes *Area* verstanden und als Symbol für den Flächeninhalt des Dreiecks gemeint, mutiert zu einem algebraischen Symbol. Er übernimmt eine neue Rolle als ***Abkürzung*** für die algebraischen Ausdrücke (2a) bis (2d). Hinter ihm verbergen sich die algebraischen Größen a, b, c, deren eigentliche Bedeutung als Seiten des Dreiecks ABC erst nach dem Abschluß der umfangreichen Rechnungen der Studie wieder berücksichtigt wird. Die Abkürzung A wird in Eulers Rechnungen, allein oder in der Kombination $16A^2$, als Operand verwendet und nach Bedarf in ihre Elemente aufgelöst.

[18] Nach Michael S. Mahoney (Dictionary of Scientific Biography) ist der Lehrsatz von Archimedes entlehnt.

Durch Quadrieren erhält man aus den Primfunktionen $p = \Sigma a$ und $q = \Sigma ab$ ganze rationale Funktionen höherer Dimensionen, die wieder symmetrische Funktionen von a, b, c sind:

$$\begin{aligned}(\Sigma a)^2 &= p^2 = \Sigma a^2 + 2\Sigma ab = \Sigma a^2 + 2q\\ (\Sigma ab)^2 &= q^2 = \Sigma a^2b^2 + 2\Sigma a^2bc = \Sigma a^2b^2 + 2abc\Sigma a = \Sigma a^2b^2 + 2pr\\ (\Sigma a^2)^2 &= (p^2 - 2q)^2 = \Sigma a^4 + 2\Sigma a^2b^2 = p^4 - 4p^2q + 4q^2\end{aligned}$$

Diese genügen bereits um die Größe $16A^2$ der Formel (2b) durch die Gleichungskoeffizienten auszudrücken:

$$\begin{aligned}16A^2 &= 2\Sigma a^2b^2 - \Sigma a^4 = 2\Sigma a^2b^2 - (p^2 - 2q)^2 + 2\Sigma a^2b^2\\ &= 2(q^2 - 2pr) - (p^4 - 4p^2q + 4q^2) + 2(q^2 - 2pr)\\ &= -p^4 + 4p^2q - 8pr\\ &= p(-p^3 + 4pq - 8r)\,.\end{aligned}$$

Den Klammerausdruck wird Euler noch einmal abkürzen und dafür $4s$ substituieren:

(2e) $$\mathbf{16A^2 = -p^4 + 4p^2q - 8pr = p(-p^3 + 4pq - 8r) = p(4s)} \quad \text{oder} \quad \mathbf{4A^2 = ps}\,.$$ [19]

Noch heute sind dieselben Buchstaben p, q und r im Gebrauche, wann immer Gleichungen diskutiert werden. Eulers Notation ist also gleichsam universell geworden. Ebenfalls üblich geblieben sind Eulers Bezeichnungen der Dreiecksseiten durch die Kleinbuchstaben a, b, c, so nämlich, daß die Seite a der Ecke A, b der Ecke B und c der Ecke C gegenüberliegen. Auch die Orientierung eines Dreiecks ABC „linksherum“, die er seinen Figuren zugrunde legt, entspricht der heutigen Norm.

Die alte euklidsche Formel für den Inhalt eines Dreiecks lautete *Grundlinie a mal Höhe h dividiert durch* 2, symbolisch $\frac{1}{2}ah = A$. Hieraus kann man umgekehrt schließen, daß $h = 2A/a$. Dadurch, daß Euler diese Beziehung benutzt, um die Koordinaten von Punkten bezüglich einer Basislinie darzustellen, gelangt die zweidimensionale Größe A in seine Rechnungen, wegen der Notwendigkeit, Brüche gleichnamig zu machen, meist in Gestalt des ***dreidimensionalen*** Nenners $8cA$ oder $12cA$ der Koordinaten. Die Koordinatendifferenzen Δx und Δy zweier Punkte sind als Längen ***eindimensionale*** Größen. Der zugehörige Zähler muß daher ***vierdimensional*** sein. Weil die Quadrate der Entfernungen der kritischen Punkte voneinander gleich der Summe $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$ sind, treten in den Rechnungen als Folge der Quadrierungen ***achtdimensionale symmetrische Funktionen*** auf, die demnach Summanden der Form $a^ub^vc^w$ enthalten, wo die Summe der Exponenten $u+v+w = 8$, $u,v,w \in \{0,1,2,3,...,8\}$, ist.

Die Zahl 8 kann auf folgende Weise in – höchstens drei – positive ganze Summanden zerlegt werden: 8+0+0, 7+1, 6+2, 6+1+1, 5+3, 5+2+1, 4+4, 4+3+1, 4+2+2

[19] Die Gleichung – bzw. Definition – (2e) ergibt sich auch durch Ausmultiplizieren von (2c):
$$p(p - 2a)(p - 2b)(p - 2c) = -p^4 + 4p^2q - 8pr\,.$$

und 3+3+2. Infolgedessen kommen in den Rechnungen die zehn symmetrischen Funktionen Σa^8, $\Sigma a^7 b$, $\Sigma a^6 b^2$, $\Sigma a^6 bc$, $\Sigma a^5 b^3$, $\Sigma a^5 b^2 c$, $\Sigma a^4 b^4$, $\Sigma a^4 b^3 c$, $\Sigma a^4 b^2 c^2$ und $\Sigma a^3 b^3 c^2$ vor, fünf mit je drei und fünf mit je sechs Summanden. Die Rechnungen werden dadurch sehr umständlich, obwohl nur Additionen und Multiplikationen bzw. Divisionen benötigt werden (siehe Zusammenstellung in Tabelle Seite 59).

Die Formeln (2a) und (2b) stellen Funktionen der drei Variablen *a, b, c* dar. Obwohl äußerlich verschieden, erlauben beide die Berechnung ein und derselben Größe $16A^2$. Sie dürfen daher gleich gesetzt werden. Die Gleichung (2a) = (2b) gilt für beliebige Operanden ohne Rücksicht auf die numerischen Werte, welche die Argumente *a, b, c* im konkreten Fall annehmen. Sie ist eine sog. ***Identität*** oder ***Gleichheit***, deren Gültigkeit nicht aufgehoben wird, wenn für die Variablen *a, b, c* beliebige andere, sogar komplexe Werte eingesetzt werden [20]. Zur Präzisierung wird statt des Gleichheitszeichens = oft das Identitätszeichen $\equiv$ gesetzt.

Von der Eigenschaft ***Identität*** wird Gebrauch gemacht, um symmetrische Funktionen in identische symmetrische Funktionen zu transformieren, z.B. (2b) $\rightarrow$ (2a). Die Funktion (2b) = $F(a,b,c)$ soll in eine identische symmetrische Funktion $G(a,b,c)$ transformiert werden:

$$F = 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4 \equiv G(a,b,c).$$

Da c beliebig gewählt werden kann, darf $c = a+b$ gesetzt werden. Man überzeuge sich durch Substitution von $(a+b)$ für c, daß dann die Funktion $F(a,b,c = a+b) = 0$ wird. Die Funktion G muß daher den Faktor $(a + b - c)$ besitzen, symbolisch: $G = (a + b - c)G'$. Denn dank dem Faktor $(a + b - c)$ wird die Funktion $G = (a + b - c)G'$ wie $F(a,b,c)$ gleich null, sobald $c = a+b$ gesetzt wird. Dieselbe Überlegung mit $b = c+a$ und mit $a = b+c$ zeigt, daß auch $(c + a - b)$ und $(b + c - a)$ Faktoren von G sein müssen:

$$G = (a + b - c)(c + a - b)(b + c - a)G'.$$

Da F bezüglich der Variablen *a, b, c* vierdimensional ist, G aber drei lineare, von *a, b, c* abhängige Faktoren nebst einem unbekannten Faktor G' aufweist, muß dieser linear in *a, b, c* sein, damit auch $G(a,b,c)$ vierdimensional wird. Die einzige lineare Funktion dreier Variabler *a, b, c* ist aber die Summe $a + b + c$, die allerdings noch durch einen dimensionslosen numerischen Faktor E gewichtet sein kann: $G' = (a+b+c)E$. Denn auch $(a+b+c)E$ ist eine lineare symmetrische Funktion von *a, b, c*, sofern nur E von *a, b, c* unabhängig ist:

$$G = (a + b - c)(c + a - b)(b + c - a)(a + b + c)E.$$

Um auch noch den numerischen Faktor E zu konkretisieren, setze man für die Variablen *a, b, c* beliebige numerische Werte ein, tunlichst kleine, um den Rechenaufwand klein zu halten, z.B. $a = b = c = 1$:

$$F(1,1,1) = 2+2+2-1-1-1 = 3 \equiv G(1,1,1) = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot E = 3E \text{ oder } E = 1.$$

[20] Bei Dreiecken unterliegen die Seiten *a, b, c* der Dreiecksungleichung: a < b+c, b < c+a, c < a+b.

Dasselbe Resultat erhält man etwa mit $a = -1$, $b = 1$, $c = 3$:

$$F(-1,1,3) = 2+18+18-1-1-81 = -45 \equiv (-3)(1)(5)(3)E = -45E \text{ oder } E = 1.$$

Die Identität $F(a,b,c) \equiv G(a,b,c)$ lautet somit explizit:

$$\mathbf{2}\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2 + \mathbf{2}\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{c}^2 + \mathbf{2}\boldsymbol{b}^2\boldsymbol{c}^2 - \boldsymbol{a}^4 - \boldsymbol{b}^4 - \boldsymbol{c}^4 \equiv (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\ .$$

Als Heronsche Flächenformel zur Berechnung der Größe $16A^2$ ist sie eingangs dieses Kapitels durch geometrische Überlegungen hergeleitet worden. Die gefundene Funktion $G(a,b,c)$ erweist sich als mit der Formel (2a) identisch.

In Lehrbüchern der klassischen Algebra wird die Identität $F(a,b,c) \equiv G(a,b,c)$, ohne Hinweis auf die Verwandtschaft mit der Heronschen Flächenformel, als Beispiel für identische symmetrische Funktionen verwendet und bildet Gegenstand von Übungsaufgaben.

Gleichungen und symmetrische Funktionen.

Zeichnerisch läßt sich die Konfiguration des Dreiecks *ABC* aus den Strecken *EF*, *EG* usw. nicht ohne weiteres ableiten. Eulers Bemerkung in Zif. 3, *problemata difficillima experietur, cum vix perspiciatur, cuiusmodi quantitates incognitas in calculum introduci oporteat*, läßt durchblicken, daß er selber diverse Möglichkeiten geprüft hat.

Da die direkte Verwendung der gegebenen Strecken *EF*, *EG* usw. offenbar nicht zum Ziele führt, ist es naheliegend, zu versuchen, zwischen ihnen und geeigneten Hauptstücken funktionale Beziehungen herzustellen, so daß die Konstruktion nach der Vorschrift eines Kongruenzsatzes ausgeführt werden kann. Das Hauptproblem ist die geschickte Auswahl der als unbekannt anzusehenden Größen: *totum negotium ad idoneam quantitatum incognitarum electionem reducitur* (Euler, Zif. 3).

Das einfachste Konstruktionsverfahren beschreibt fraglos der dritte Kongruenzsatz der Geometrie der ebenen Dreiecke. Er benötigt nur die Längen der drei Seiten und kommt ohne mit Ungenauigkeiten behaftetes Abtragen von Winkeln aus. Konsequenterweise wählt Euler, aber ohne explizite Begründung, die Dreiecksseiten a, b, c als die *Unbekannten,* die zu *bestimmen* sind.

Die Längen a, b, c sind nach Eulers Analyse die Lösungen der kritischen Gleichung (1) dritten Grades in z. Auf die Aufstellung dieser Gleichung zielt der erste Teil seiner Studie ab. Die Konstruktionsaufgabe läuft somit auf die Auflösung von Gleichungen hinaus, die ein Hauptkapitel der klassischen Algebra darstellte. Die klassische Algebra ist, auch von Euler selbst, als diejenige Wissenschaft definiert worden, welche lehrt, wie aus bekannten Größen unbekannte bestimmt werden können [21].

Voraussetzung, Gleichungen mit *einer* Unbekannten aufzulösen, ist der von *Roth* und *Girard* länger schon vermutete und von *d'Alembert* teilweise bewiesene sog. ***Fundamentalsatz der Algebra*** von Gauß [22]. Dieser sagt aus, daß jede Gleichung mit *einer* Variablen z mindestens *eine* (reelle oder komplexe) Lösung hat.

Folgerungen dieser Aussage sind der sog. ***Restsatz*** und die ***Faktorzerlegung*** des Gleichungspolynoms. Wird ein Polynom n-ten Grades $P_n(z)$ durch ein Binom $(z–a)$ – zu Eulers Zeiten *Residuum* geheißen – dividiert:

$$(\alpha) \qquad \boldsymbol{P_n(z) = (z-a)\cdot Q_{n-1}(z) + R} \,,$$

ist der Quotient $Q_{n-1}(z)$ ein Polynom $(n–1)$-ten Grades und der Divisionsrest R nur noch eine numerische Größe unabhängig von z.

Aus Formel (α) liest man ab, daß $P_n(a) = R$, ferner daß, wenn a eine Nullstelle von $P_n(z)$ ist, der Divisionsrest R verschwindet: $R = 0$. Ein Polynom $P_n(z)$ ist folglich

[21] *Der Werth der Algebra so wie aller Theile der Mathematik besteht darin, den Werth solcher Größen zu bestimmen, die bisher unbekannt gewesen, ….. Daher wird die Algebra auch als die Wissenschaft definirt, welche zeigt, wie man aus bekannten Größen unbekannte findet.* (Leonhard Euler. Vollständige Anleitung zur Algebra (1770-1771). Zweiter Theil. Kapitel 1.)

[22] Johann Carl Friedrich Gauß. *Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse* (1799).

durch ein Residuum ($z-a$) immer ohne Rest teilbar, wenn a eine Nullstelle des Polynoms ist. Umgekehrt ist $z = a$ eine Nullstelle, wenn der Divisionsrest R gleich null ist.[23]

Analoge Überlegungen gelten für das Quotientenpolynom $Q_{n-1}(z)$. Die Division durch Residua ($z-k$) kann offenbar genau n mal wiederholt werden, bis der Quotient $Q_{n-n} = Q_0 = 1$ ein Polynom nullten Grades ist, ohne daß ein Divisionsrest übrigbleibt, sofern nur die verschiedenen Größen $k = a$, b usw. in den Divisoren $(z-k) = (z-a)$, $(z-b)$, ... Nullstellen der jeweiligen Quotientenpolynome $Q_r(z)$ sind. Auf Gleichungen n-ten Grades übertragen heißt dies, daß das Gleichungspolynom in ein Produkt aus n Faktoren $(z-a_r)$ zerlegt werden kann:

$$(\beta) \qquad \boldsymbol{z^n + pz^{n-1} + qz^{n-2} + \dots\dots\dots + r \equiv (z-a_1)(z-a_2) \dots (z-a_r) \dots (z-a_n) = 0}\ ,$$

wo die numerierten Größen a_r Nullstellen des Polynoms $P_n(z)$ bzw. Lösungen der Gleichung $P_n(z) = 0$ sein müssen.

Aus Formel (β) zählt man ab, daß eine Gleichung n-ten Grades genau n Lösungen hat, die reell, imaginär oder beides sein können. Gleichungen ungeraden Grades haben überdies nicht nur laut Fundamentalsatz mindestens *eine* Lösung, sondern aus Gründen der Stetigkeit sogar immer mindestens *eine reelle* Lösung.

Nach Tropfke geht Euler *in der entgegengesetzten Folge* [24] vor. In den Ziffern 6 bis 9 seiner Studie formuliert er die Koordinaten der später durch *Feuerbach* [25] berühmt gewordenen „merkwürdigen Punkte“ E, F, G, H als Funktionen der Dreiecksseiten a, b, c allein, als ob diese bekannte Größen wären. In den Ziffern 12 bis 17 folgen die Entfernungen EF, EG usw. der Punkte E, F, G, H voneinander bzw. deren Quadrate EF^2, EG^2 usw. ebenfalls als Funktionen von a, b, c.

Nachdem in Zif. 11 die symmetrischen Primfunktionen $p = \Sigma a$, $q = \Sigma ab$ und $r = abc$ eingeführt worden sind, ohne sie dort indessen als Koeffizienten der Potenzen der Variablen z in der kritischen Gleichung (1) zu demaskieren, formuliert Euler die Quadrate der Entfernungen ab Zif. 12 gleichzeitig auch als Funktionen von p, q und r. In der Zif. 18 werden die Entfernungen EF^2, EG^2 usw. als Funktionen von p, q, r in Tabellenform zusammengestellt: $EF^2 = EF^2(p,q,r)$ usw.

Die die Koordinaten der Punkte E, F, G, H sowie die Größen EF, EG bzw. EF^2, EG^2 usw. beschreibenden Formeln sind komplexer als einfache Polynomialfunktionen, nämlich gebrochene Funktionen. Die Argumente a, b, c treten nicht nur in den Zählern, sondern entweder allein oder in Gestalt der oben erklärten Heronschen Flächenformel $16A^2$ und der symmetrischen Funktion p auch in den Nennern auf. Wo in Koordinatenformeln die einfache Fläche A des Dreiecks vorkommt, sind die Formeln sogar irrational, denn laut Formel (2d), Seite 32, ist A eine Quadratwurzel, deren Radikand die Größen a, b, c enthält. Die Zurückführung der Brüche auf gemeinsame Nenner und die Quadrierung komplizieren die Formeln zusätzlich.

[23] Die Berechnung des Funktionswertes $P_n(a) = R$ einer Polynomialfunktion $P_n(z)$ für ein Argument $z = a$ mittels Division durch das Residuum $z-a$ dürfte insbesondere für Polynome höheren Grades im allgemeinen erheblich einfacher sein als das Ausmultiplizieren der einzelnen Potenzen von z.

[24] Siehe Seite 2.

[25] Karl Wilhelm Feuerbach (1800-1834). *Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks und mehrerer durch sie bestimmten Linien und Figuren.* Nürnberg, 1822.

In Zif. 19 definiert Euler daher *ad maiorem simplicitatem* zweidimensionale Größen P, Q, R – *duas dimensiones involventes* – als Funktionen der symmetrischen Funktionen p, q, r, und benutzt sie sogleich, um die Quadratentfernungen noch einmal in Tabellenform darzustellen, diesmal als Funktionen der neuen Argumente P, Q, R. In der neuen Tabelle (Seiten 17 und 119) sind die störenden Nenner denn auch weitgehend verschwunden.

Die Ziffer 21 in Eulers Studie erinnert erstmals daran, daß die Quadratentfernungen EF^2, EG^2 usw. Vorgaben, also *bekannte* Größen, die Seitenlängen a, b, c und damit sowohl p, q, r wie P, Q, R als Funktionen von a, b, c hingegen *unbekannte*, zu bestimmende Größen sind. Ab Zif. 21 werden die teilweise sehr komplizierten Formeln als *Bestimmungsgleichungen* für die Unbekannten P, Q, R bzw. p, q, r gelesen. Deren *Auflösung* liefert P, Q, R und p, q, r und schließlich a, b, c.

Es stellt sich die Frage, ob die anfallenden Gleichungen gelöst werden können und wie dies gegebenenfalls zu geschehen hat. Euler geht hier nicht auf Einzelheiten ein. So sagt er in Zif. 21 bloß: *ex quarum resolutione colligimus* ..., in Ziff. 23 und 26: *aequatio cubica cuius tres radices manifesto sunt* ...usw., ohne Erklärung irgendwelcher Art und ohne auf den keineswegs einfachen oder gar selbstverständlichen Lösungsweg einzutreten. Aus dem Blickwinkel des Historikers wären indessen Eulers Überlegungen zu den Herleitungen der zahlreichen Identitäten und zur Auflösung seiner Gleichungen und Gleichungssysteme wissenswerter als die bloße Bekanntgabe der „manifesten Wurzeln“. Der Mangel an Hinweisen des Autors zwingt den historisch interessierten Leser, aus sporadischen Andeutungen und aus den Ergebnissen der Rechnungen eigene Rückschlüsse auf die Rechenverfahren zu ziehen.

Die Dreieckskonstruktionsaufgabe erfordert primär die Bestimmung dreier Unbekannter. Euler löst das Problem in drei Stufen und bestimmt vorerst die Unbekannten P, Q, R, danach p, q, r und schließlich die Längen a, b, c der Seiten des gesuchten Dreiecks.

Die Tabelle in Zif. 19 enthält sechs Formeln, welche die Quadrate der sechs Entfernungen EF, EG usw. als Funktionen der drei Größen P, Q, R definieren. Wenn die Strecken EF, EG usw. vorgegeben werden, dürfen die sechs Formeln als *Bestimmungsgleichungen* für die Unbekannten P, Q, R gedeutet werden.

Zur Bestimmung dreier Unbekannter sind drei simultan gültige Gleichungen nötig. Aus den sechs Gleichungen der Zif. 19 wählt Euler daher drei zur Weiterverarbeitung aus, nämlich die Gleichungen VI, V und IV für die Strecken GH, FH und FG. In Zif. 21 bilden diese, umnumeriert zu I, II und III, ein Dreiersystem. Gleichzeitig werden die Bezeichnungen der Vorgaben GH, FH und FG für die umfangreichen weiteren Rechnungen zu f, g und h vereinfacht. [26]

Die Größen P, Q, R sind zweidimensional, treten aber in den Gleichungen der Ziff. 19 und 21 nur in ihren ersten Potenzen auf. Das Gleichungssystem {I, II, III} kann dennoch nicht als lineares Gleichungssystem gelten, weil noch ein Term Q^2/R stehen geblieben ist. In Handbüchern der klassischen Algebra gilt ein solches Glei-

[26] Man beachte die mnemotechnisch sinnreiche Symbolik: die Notationen $f = GH$, $g = HF$, $h = FG$ gehen durch zyklische Vertauschung ineinander über.

chungssystem als nur in Sonderfällen lösbar. Bedauerlich ist daher, daß Euler auch hier auf Hinweise zum Lösungsverfahren verzichtet, denn es gelingt ihm offensichtlich, *P, Q, R* als Funktionen von *f, g, h* explizit anzugeben. [27]

Die symmetrischen Funktionen *p*, *q*, *r* errechnen sich noch in Zif. 19 vergleichsweise einfach aus den Definitionen von *P, Q, R*, da diese als Funktionen von *p*, *q*, *r* definiert wurden.

Zur abschließenden Bestimmung der drei unbekannten Dreiecksseiten *a*, *b*, *c* benutzt Euler indes kein Gleichungssystem mehr, sondern eine einzige Gleichung, die schon erwähnte kritische Gleichung dritten Grades:

$$\boldsymbol{z^3 - pz^2 + qz - r \;=\; 0}\,, \tag{1}$$

in der nur Potenzen der *einen* Unbekannten *z* auftreten und die bekanntlich drei Lösungen hat. Die Kenntnis der Tatsache, daß die Lösungen gerade *a*, *b*, *c* sind, wenn die in Zif. 11 definierten Abkürzungen und symmetrischen Funktionen $p = \Sigma a$, $q = \Sigma ab$ und $r = abc$ als Koeffizienten der Unbekannten *z* und ihrer Potenzen auftreten, setzt Euler aber stillschweigend voraus. Hinsichtlich des Verfahrens zur Lösung der Gleichung (1) läßt Euler den Leser wiederum im Dunkeln.

Das Auflösen von Gleichungen hat sich als nicht ganz einfach herausgestellt. Mit zunehmendem Grad *n* gestaltet sich die Lösung von Polynomialgleichungen mit *einer* Unbekannten *z* immer schwieriger. Während die Auflösung von Gleichungen zweiten Grades schon in der Antike bekannt war, gelang es erst im sechzehnten Jahrhundert, Gleichungen dritten und vierten Grades mit einer Unbekannten *z* zu lösen. Sie haben Anlaß zu der zeitweilig heftigen Kontroverse zwischen *Tartaglia* und *Cardano* bzw. *Ferrari* gegeben. Ihr verdankt man die berühmte *Ars magna* von Cardano und das geheimnisvolle *Reimrätsel* in venezianischen Terzinen von Tartaglia, von dem behauptet wurde, daß nicht einmal der gelehrte Petrarca es hätte lösen können [28].

Algebraische Verfahren zur Lösung von Gleichungen höheren als des vierten Grades sind bisher nicht gefunden worden. Auf Niels Henrik Abels (1802-1829) Nachweis der Unmöglichkeit, solche Gleichungen mit Hilfe von Wurzeln zu lösen, wird in heutigen Lehrbüchern immer verwiesen, manchmal sogar in Gestalt von Lehrsätzen [29]. Im Gegensatz dazu sind *numerische* Gleichungen auch höheren Grades lösbar, allerdings nur näherungsweise, aber mit beliebiger Genauigkeit.

Die Zerlegbarkeit in Faktoren $(z-a)$, $(z-b)$ usw. deutet bereits eine Möglichkeit der Lösung von Gleichungen an. Gelingt es nämlich, das Polynom $P(z)$ durch geschickte algebraische Transformationen oder bloß empirisch in Faktoren zu zerlegen, können diese nur Polynome niedrigeren Grades und daher allenfalls durch bereits bekannte Verfahren lösbar sein. Eine Nullstelle $z = a$ eines Faktorpolynoms ist immer auch eine Lösung von $P(z)$.

[27] Im Kommentar zu Zif. 21 (Seiten 125ff.) wird versucht, dem Eulerschen Gleichungssystem in vier Schritten beizukommen.

[28] Vgl. [H.Th. Lutstorf.] *Zur Geschichte der Gleichungen dritten Grades mit einer Unbekannten.* Schriftenreihe der ETH-Bibliothek, Nr. 40. Zürich 1996.[Enthält eine Auflösung des Reimrätsels.]

[29] Beispielsweise William L. Hart. *College Algebra*. Heath, Boston, 1938. *Theorem II. If* $n > 4$, *no root of* $f(x) = 0$ *can be expressed by an algebraic formula in terms of the coefficients of* $f(x)$. (Wo $f(x)$ als Polynom *n*-ten Grades in *x* definiert ist.)

Im Falle $n = 3$ generieren die Binomialfaktoren $(z-a)$, $(z-b)$, $(z-c)$ das Tripelprodukt $(z-a)(z-b)(z-c)$. Wird letzteres ausmultipliziert, entsteht die Identität

$$(\gamma) \qquad \boldsymbol{(z-a)(z-b)(z-c) \equiv z^3 - (a+b+c)z^2 + (ab+ac+bc)z - abc} \,.$$

Deren rechte Seite ist offensichtlich ein Polynom dritten Grades in z und die Koeffizienten von z, mit *alternierenden Vorzeichen*, sind genau die drei symmetrischen Primfunktionen Σa, Σab, abc der drei Elemente a, b, c, für welche Euler in Zif. 11 die Abkürzungen p, q, r, mit *Vorzeichen PLUS*, definiert hat [30]. Wird die Identität, mit den Abkürzungen an Stelle der Summen, gleich null gesetzt, entsteht Eulers kritische Gleichung der Zif. 22. *Formetur haec aequatio cubica*:

$$(1) \qquad \boldsymbol{(z-a)(z-b)(z-c) \equiv z^3 - pz^2 + qz - r = 0},$$

deren Lösungen eindeutig $z = a, b, c$ sind. Die Faktorzerlegung rechtfertigt somit den Einsatz der kritischen Gleichung mit den in Zif. 11 definierten symmetrischen Funktionen p, q, r als Koeffizienten.

Da a, b, c in den Herleitungen der Koordinaten der „merkwürdigen Punkte" immer die (reellen) Längen der Seiten des gesuchten Dreiecks *ABC* repräsentierten, werden die Lösungen der kritischen Gleichung (1) die für die Konstruktion benötigten Strecken liefern. Wie die kritische Gleichung gelöst wird, erklärt Euler indessen in diesem Text nicht.

Die Auflösung ***linearer Gleichungen*** des Typs $az + b = 0$, nämlich $z = -b/a$, ist jedem Schulkind geläufig. Schwieriger wird es bereits bei den quadratischen Gleichungen.

Übliche Darstellungen ***quadratischer Gleichungen*** sind:

$$\boldsymbol{az^2 + bz + c = 0} \quad \text{oder} \quad \boldsymbol{z^2 + pz + q = 0}\,,$$

wo a, b, c, und p, q numerische Koeffizienten vertreten. Die a,b,c-Darstellung ist die *allgemeine Form*, die p,q-Darstellung gilt als *Normalform* der quadratischen Gleichungen. Merkmal der letzteren ist der numerische Koeffizient a des quadratischen Terms z^2, nämlich $a = 1$. Mittels Division durch den numerischen Faktor a kann die allgemeine Form in die Normalform umgewandelt werden.

In den meisten Lehrbüchern wird die Lösung der quadratischen Gleichung mit Hilfe einer quadratischen Ergänzung hergeleitet, seltener durch die Substitution einer neuen Variablen $y = z + b/2a$ (bzw. $z = y - b/2a$):

$$az^2 + bz + c = 0 = a(y - b/2a)^2 + b(y - b/2a) + c = ay^2 + b^2/4a - b^2/2a + c$$
$$= ay^2 - b^2/4a + 4ac/4a = a(y^2 - b^2/4a^2 + 4ac/4a^2)$$

woraus folgt: $y^2 - (1/4a^2)(b^2 - 4ac) = 0$ oder $y = \pm(1/2a)\sqrt{(b^2 - 4ac)}$ und

$$\boldsymbol{z_{1,2}} = y - b/2a = \boldsymbol{\frac{1}{2a}\left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right)}$$

bzw. in der Normalform mit $a = 1$, p statt b und q statt c:

$$\boldsymbol{z_{1,2}} = y - p/2 = \boldsymbol{\frac{1}{2}\left(-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}\right)}\,.$$

[30] Vgl. Fußnote 14.

Die quadratische Gleichung eignet sich indessen vorzüglich als Test für die Leistungsfähigkeit des Gaußschen Fundamentaltheorems. Soll die Gleichung $az^2 + bz + c = 0$ eine komplexe Lösung besitzen, muß eine solche die Form $z = \sigma + \tau i$ haben, wo σ und τ reelle Zahlen und $i = \sqrt{-1}$ sind. Für komplexe Zahlen gilt die Aequivalenz $z = 0 \leftrightarrow \sigma = \tau = 0$: eine komplexe Größe ist null, wenn sowohl Realteil wie Imaginärteil gleich null sind.

Mit dem Ansatz $z = \sigma + \tau i$, dessen zunächst unbestimmte Parameter σ und τ noch zu definieren sind, werden:

$$\begin{array}{rcl}
az^2 = & a(\sigma^2 + 2\sigma\tau i + \tau^2 i^2) & = a\sigma^2 - a\tau^2 + 2a\sigma\tau i \\
bz = & b(\sigma + \tau i) & = b\sigma \qquad + b\tau i \\
c = & c & = c \\
\hline
\end{array}$$

zusammen $$0 = (a\sigma^2 - a\tau^2 + b\sigma + c) + \tau(2a\sigma + b)i\ ,$$

eine komplexe Größe gleich null, deren Imaginärteil $\tau(2a\sigma + b)i$ dann null ist, wenn seine Faktoren $\tau = 0$ oder $(2a\sigma + b) = 0$. Der erste Fall, $\tau = 0$, führt auf die ursprüngliche Gleichung $az^2 + bz + c = 0$ mit $z = \sigma$ zurück. Der zweite Fall, nämlich $(2a\sigma + b) = 0$, hingegen liefert für den Realteil σ des Ansatzes $z = \sigma + \tau i$ den Wert $\sigma = -b/2a$ und damit für den Koeffizienten τ des Imaginärteils von z, wegen

$$(a\sigma^2 - a\tau^2 + b\sigma + c) = \left(\frac{ab^2}{4a^2} - a\tau^2 - \frac{b^2}{2a} + c\right) = 0\ ,$$

zunächst für die Quadratzahl τ^2:

$$\tau^2 = \frac{-b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = \frac{1}{4a^2}(-b^2 + 4ac) \quad \text{bzw. für } \tau \text{ allein:} \quad \tau = \frac{\pm 1}{2a}\sqrt{-b^2 + 4ac}\ .$$

Die Gleichung $\boldsymbol{az^2 + bz + c = 0}$ hat somit, übereinstimmend mit den oben hergeleiteten, die zwei Lösungen:

$$\mathbf{z_{1,2}} = \boldsymbol{\sigma + \tau i} = \frac{1}{2a}\left(-b \pm i\sqrt{-b^2 + 4ac}\right) = \boldsymbol{\frac{1}{2a}\left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right)}\ .$$

In der p,q-Darstellung, $a = 1$, p statt b, q statt c, lauten die Lösungen:

$$\mathbf{z_{1,2}} = \boldsymbol{\frac{1}{2}\left(-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}\right)}\ .$$

Da der Radikand als Differenz negativ sein kann, können die beiden Lösungen komplex sein. Die Lösungsformel impliziert zudem, daß irrationale und komplexe Lösungen immer als Paare konjugierter Zahlen auftreten. Dies gilt auch für Gleichungen höheren als des zweiten Grades. [31]

Die Formel $z_{1,2}$ taucht in mathematischen Untersuchungen an den unterschiedlichsten Stellen auf, so daß, wer sich nur etwas mit Algebra befaßt, sie binnen kurzem aus dem Gedächtnis hersagen kann. In deutschen Schulen ist sie unter dem für Uneingeweihte seltsam klingenden Namen ***Mitternachtsformel*** bekannt.

[31] Die formelhafte Lösung der quadratischen Gleichung ist durch das berühmte Lehrbuch ***Al-Gabr wal-muqabalah*** für das Rechnen mit indischen Zahlen des persischen Mathematikers, Astronomen und Geographen ***Mohammed ibn Musa Al-Chwarismi*** (gest. zwischen 835 und 850 n. Chr.) überliefert. Das moderne Substantiv ***Algebra*** leitet sich vom Titel des Werks ab, während der Name des Autors im Wort ***Algorismus*** oder ***Algorithmus*** weiterleben soll.

Addition und Multiplikation der Lösungen z_1 und z_2 ergeben die insbesondere für die unten beschriebenen Verfahren zur Lösung von Gleichungen dritten Grades folgenreichen Beziehungen

$$\mathbf{z_1} + \mathbf{z_2} = -b/a \text{ bzw. } -p \quad \text{und} \quad \mathbf{z_1} \cdot \mathbf{z_2} = +c/a \text{ bzw. } q$$

zwischen den Unbekannten und den Koeffizienten der Gleichung, die als Sätze bzw. *Satzgruppe des Vieta* bezeichnet werden. Sobald demnach *Summe* und *Produkt* zweier unbekannter Größen bekannt sind, können die Unbekannten als Lösungen einer quadratischen Gleichung mit Hilfe der Mitternachtsformel berechnet werden. [32]

Den quadratischen Gleichungen kommt eine besondere Bedeutung zu, weil die algebraische Lösung auch für numerische Gleichungen benutzt werden kann, indem den algebraischen Symbolen numerische Werte unterlegt werden, und weil andererseits die üblichen Versuche zur Auflösung höherer Gleichungen darin bestehen, durch algebraische Transformationen des Gleichungspolynoms entweder Hilfsgleichungen niedrigeren Grades zu finden, die allenfalls lösbar sind, oder das Gleichungspolynom in Faktoren zu zerlegen, die notwendigerweise Polynome niedrigeren Grades sind. Durch Nullsetzen der einzelnen Faktoren erhält man wiederum Gleichungen niedrigeren Grades. Eulers kritische Gleichung, deren Lösungen die Längen der drei Seiten des gesuchten Dreiecks sein werden, ist eine Gleichung dritten Grades. Allfällige Hilfsgleichungen oder gleich 0 gesetzte Faktoren niedrigeren Grades können nur quadratische und lineare Gleichungen sein, die folglich immer lösbar sind. Die quadratische Gleichung mit ihrer Lösungsformel ist deshalb als Hilfsgleichung für Eulers Studie besonders wichtig.

Eine instruktive und für die klassische Algebra wichtige Anwendung der Mitternachtsformel ist die Berechnung der ***dritten Wurzeln*** von **1**. Aus $x = \sqrt[3]{1}$ folgt $x^3 = 1$ oder $x^3 - 1 = 0$, eine unvollständige Gleichung dritten Grades mit der trivialen Lösung $x = 1$. Eine Gleichung dritten Grades hat jedoch drei Lösungen x. In der klassischen Algebra ist für $x = \sqrt[3]{1}$ das Symbol ω üblich geworden: ω_0, ω_1, ω_2.

Betrachtet man die Indizes 0 und 1 als Exponenten, ist formal gemäß den Gesetzen des Rechnens mit Potenzen

$$\omega^0 = 1 = \sqrt[3]{1} \quad \text{und} \quad \omega^1 = \omega .$$

Da ω eine dritte Wurzel von 1 sein soll, muß ferner gelten $\omega^3 = 1$ und folglich $(\omega^3)^2 = \omega^6 = (\omega^2)^3 = 1$, d.h. auch ω^2 ist eine dritte Wurzel von 1. Der Index 2 in ω_2 darf also ebenfalls als Potenzexponent gelesen werden, und die drei Wurzeln von 1 sind:

$$\boldsymbol{x_1 = 1, \quad x_2 = \omega, \quad x_3 = \omega^2} .$$

Um ω arithmetisch explizit zu bestimmen, werde die vollständige Gleichung dritten Grades $x^3 + 0x^2 + 0x - 1 = 0$, mit Koeffizienten $p = q = 0$, mit Hilfe der bekannten Wurzel $x = 1$, wie oben gezeigt, faktorisiert:

[32] Für den Namen „Mitternachtsformel“ werden folgende Erklärungen angeführt: 1) Der Mathematiklehrer Wilhelm Schweizer, Herausgeber und Mitverfasser des bekannten Unterrichtswerks „Lambacher-Schweizer“, ließ eine Schulklasse mit Fackeln um Mitternacht beim Schulhaus antreten, wo die Schüler die Formel bei Fackelschein gleich einem Ritual mehrmals aufsagen mußten. 2) Die Indizes 1,2 im Symbol $z_{1,2}$ erinnern an die Uhrzeit 12 (Mitternacht). 3) Die Formel ist so bedeutsam, daß ein Algebraiker sie um Mitternacht, gleichsam im Schlaf, auswendig hersagen können soll. (Quelle: Wikipedia.)

$$x^3 + 0x^2 + 0x - 1 = (x-1)(x^2+x+1) = 0.$$

Dieses Produkt ist sicher null, wenn $x = x_1 = 1$, aber auch, wenn der zweite Faktor gleich null gesetzt wird:

$$\boldsymbol{x^2 + x + 1 = 0}\,,$$

eine Gleichung zweiten Grades, auf welche die Mitternachtsformel anwendbar ist:

$$\boldsymbol{x_2 = \omega} = \tfrac{1}{2}\left(-1+\sqrt{-3}\right) = \boldsymbol{\tfrac{1}{2}\left(-1+i\sqrt{3}\right)}\,,$$

eine komplexe Zahl. Die dritte Lösung ω^2 muß daher deren Konjugierte sein:

$$\boldsymbol{x_3 = \omega^2 =} \tfrac{1}{2}\left(-1-\sqrt{-3}\right) = \boldsymbol{\tfrac{1}{2}\left(-1-i\sqrt{3}\right)}\,.$$ [33]

Da ω eine Lösung der Gleichung $x^2 + x + 1 = 0$ ist, gilt die in der klassischen Algebra, neben $\omega^3 = 1$, ubiquitäre Beziehung $\omega^2 + \omega + 1 = 0$, die sich verschiedentlich als nützlich erweisen wird.

Die komplexen Zahlen ω und ω^2 spielen für das Rechnen mit Wurzeln eine wichtige Rolle. Im Alltag werden, wenn überhaupt, gewöhnlich nur die arithmetischen Wurzeln einer Zahl benötigt. Es darf aber nicht vergessen gehen, daß eine Zahl A neben der arithmetischen dritten Wurzel $\sqrt[3]{A}$ noch zwei komplexe dritte Wurzeln besitzt. Diese sind $\omega\sqrt[3]{A}$ und $\omega^2\sqrt[3]{A}$, wovon man sich durch Potenzieren leicht überzeugt.

Die Anwendung der Eulerschen Abkürzungen auf die Gleichung $z^3 - 1 = 0$ mit Lösungen $z_1 = 1$, $z_2 = \omega$ und $z_3 = \omega^2$ führt auf $p = \Sigma z_1 = 1 + \omega + \omega^2 = 0$, $q = \Sigma z_1 z_2 = 1\omega + 1\omega^2 + \omega\omega^2 = \omega + \omega^2 + \omega^3 = 1 + \omega + \omega^2 = 0$ und, sinngemäß, $r = \Pi z_1 = 1\omega\omega^2 = \omega^3 = 1$. Damit ist übereinstimmend $z^3 - pz^2 + qz - r = z^3 - 0z^2 + 0z - 1 = z^3 - 1 = 0$.

Unter den Methoden zur Lösung von ***kubischen Gleichungen*** muß man *praktische* und *theoretische* Verfahren unterscheiden. *Praktische* Verfahren drängen sich bei den kubischen Gleichungen von selbst auf. Die von dal Ferro (1505 oder 1515) und Tartaglia (1535) gefundene, als ***Cardansche Regeln*** bekannte, Lösungsformel ist nur von theoretischem Interesse und, anders als die Mitternachtsformel der quadratischen Gleichungen, für die Praxis d.h. für numerische Gleichungen ungeeignet, da sie allenfalls die Berechnung dritter Wurzeln von komplexen Größen verlangt, wofür laut Lehrbüchern der klassischen Algebra kein allgemein gültiger Algorithmus existiert. Paradoxerweise trifft dies sogar immer dann zu, wenn die Lösungen z_1, z_2, z_3 reell sind. Cardano nannte diesen Fall daher den *casus irreducibilis*.

Gelingt es dagegen – allenfalls durch schlichtes „Probieren" – eine Nullstelle a zu „erraten", kann vom Gleichungspolynom ein Linearfaktor $(z-a)$ abgespalten werden. Die Nullstellen des verbleibenden Polynoms, des Quotienten, das nur noch zweiten Grades sein kann, können dann in jedem Fall mit Hilfe der Mitternachtsfor-

[33] Man verifiziere durch Potenzieren, daß $(\omega)^2$ explizit tatsächlich gleich ω^2 ist. Umgekehrt ist diejenige komplexe Zahl $\Psi = \alpha + i\beta$ $(\beta \neq 0)$, deren Quadrat gleich ihrer Konjugierten ist, eine dritte Wurzel von 1. Denn aus $\Psi^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta = \alpha - i\beta$ folgt $(\alpha^2 - \beta^2 - \alpha) + i\beta(2\alpha+1) = 0$, daher, weil $\beta \neq 0$, $\alpha = -\tfrac{1}{2}$ und, wegen $\alpha^2 - \beta^2 - \alpha = \tfrac{1}{4} - \beta^2 + \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{4} - \beta^2 = 0$, $\beta = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{3}$, so daß, wählt man $\beta = +\tfrac{1}{2}\sqrt{3}$, $\Psi = \alpha + i\beta = \tfrac{1}{2}(-1+i\sqrt{3}) = \omega$ und $\Psi^2 = \alpha - i\beta = \tfrac{1}{2}(-1-i\sqrt{3}) = \omega^2$, andernfalls ist $\Psi = \tfrac{1}{2}(-1-i\sqrt{3}) = \omega^2$ und $\Psi^2 = \tfrac{1}{2}(-1+i\sqrt{3}) = \omega$. In beiden Fällen ist Ψ eine dritte Wurzel der reellen Einheit.

mel gefunden werden. In den Ziffern 32 und 33 benutzt Euler offensichtlich dieses quasiempirische Lösungsverfahren, ohne indessen besonders darauf hinzuweisen [34].

Besonders einfach gestaltet sich die Suche nach Lösungen, wenn diese ganzzahlig sind. In diesem Falle sind die Gleichungskoeffizienten ebenfalls ganz, und das absolute Glied r (bzw. $-r$) des kubischen Gleichungspolynoms ist gleich dem negativen Tripelprodukt $-abc$ der drei Lösungen (Euler: $r = +abc$), die im absoluten Glied gleichsam auf dem Präsentierteller dargeboten werden. Es besteht eine gewisse Wahrscheinlichkeit, daß mindestens eine Lösung als Faktor im absoluten Glied einer numerischen Gleichung enthalten ist.

Sogar einige von Eulers ***algebraischen Gleichungen*** dritten Grades lassen durch bloßes Betrachten Lösungen als Faktoren des absoluten Gliedes erkennen. Damit kann ein Faktor $(z–a)$ vom Gleichungspolynom abgespalten und die vollständige Lösung der Gleichung mit Hilfe des verbleibenden Quotientenpolynoms zweiten Grades durch Anwendung der Mitternachtsformel gefunden werden. Die Lösungen werden jeweils ohne Herleitung angegeben. Daß Euler aber bewußt dieses Verfahren in Betracht zog, geht auch aus einer Bemerkung in der Zif. 34 bezüglich nichtspezieller Dreiecke hervor: ..... *quia aequatio cubica factores non admittit*.

Die *theoretischen* Methoden der Lösung von Gleichungen dritten Grades sind mit berühmten Namen verbunden: dal Ferro, Tartaglia, Cardano, Ferrari, Bombelli, Vieta, Descartes.

Das im 16. Jhdt. von dal Ferro (Bologna), Tartaglia (Brescia-Venedig) und Cardano (Mailand) vorgeschlagene algebraische Lösungsverfahren, nachmals bekannt unter dem Namen ***Cardansche Regeln,*** [35] ging wie dasjenige von Vieta mit einem anderen algebraischen Ansatz, von der *reduzierten* kubischen Gleichung, der sog. ***Standardform***, aus, in welcher der Term mit dem Quadrat der Unbekannten z fehlt und die deswegen leichter zu behandeln ist. Eine Einbuße an Allgemeingültigkeit ist indessen damit nicht verbunden, denn durch die Wahl einer geeigneten anderen Variablen y an Stelle von z kann von der allgemeinen Form der Gleichung jederzeit zur Standardform gewechselt werden.

Im Rahmen der formalen Transformationen von Gleichungen untersuchte die klassische Algebra die *Verschiebung* (Vergrößerung oder Verminderung) der Nullstellen oder Wurzeln eines Polynoms bzw. einer Gleichung. Die dazu nötige Transformation wird durch die Substitution einer neuen Variablen $y = z–h$ an die Stelle von z erreicht [36]. Über den zunächst unbestimmten Parameter h wird hernach entsprechend den Bedürfnissen des jeweiligen Problems verfügt.

Durch Anwendung der Transformation $z = y + h$ wird Eulers kritische Gleichung

$$\boldsymbol{z^3 - pz^2 + qz - r = 0} \tag{1}$$

[34] Die meisten der in Eulers Studie vorkommenden Gleichungen lassen diese empirische Methode zu. Dies mag mit ein Grund dafür gewesen sein, daß Euler, nach Meinung A. Speisers, „offenbar erstaunt war, wie einfach sich die Rechnung gestaltete."

[35] Vgl. Fußnote 28.

[36] Betrachtet man das Polynom $f(z)$ der Gleichung $f(z) = 0$ als Vorschrift für die Darstellung einer Kurve $y = f(z)$ in einem rechtwinkligen Koordinatensystem, ist die Transformation $z = y + h$ aequivalent einer Verschiebung der Ordinaten-Achse um die Strecke h auf der Abszissen-Achse.

über folgende Schritte:

$$\begin{array}{rcccl}
z^3 &=& (y+h)^3 &=& y^3+3y^2h+3yh^2+h^3 \\
-pz^2 &=& -p(y+h)^2 &=& -p(y^2+2yh+h^2) \\
+qz &=& +q(y+h) &=& +qy+qh \\
-r &=& -r &=& -r \\
\hline
0 &=& \multicolumn{3}{l}{y^3+(3h-p)y^2+(3h^2-2ph+q)y+(h^3-ph^2+qh-r)}
\end{array}$$

zu einer Gleichung dritten Grades in y. Setzt man für den bisher unbestimmten Parameter h den Wert $h = p/3$, resultiert die *reduzierte* Gleichung

$$\mathbf{0} = y^3 + \left[q - 3\left(\frac{p}{3}\right)^2\right]y - \left[r - q\left(\frac{p}{3}\right) + 2\left(\frac{p}{3}\right)^3\right]$$

(1') $$\mathbf{0} = \boldsymbol{y^3} + \boldsymbol{Qy} - \boldsymbol{R},$$

mit Vorzeichen analog Eulers Gleichung (1), welche offensichtlich kein Glied mit y^2 mehr besitzt. Sie gilt als Standardform der Gleichung dritten Grades mit einer Unbekannten. Die Größen Q und R sind Funktionen von p, q, r und daher mittelbar auch Funktionen der Seiten a, b, c des gesuchten Dreiecks, aber über die Formeln der Zif. 21 auch mit den Vorgaben f, g, h verbunden. Aus den Lösungen y_1, y_2, y_3 ergeben sich die Seiten a, b, c als Lösungen z_r der kritischen Gleichung, nämlich

$$z_r = y_r + p/3 \quad (r = 1, 2, 3).$$

Dal Ferro und Tartaglia experimentierten mit einer Aufspaltung der mutmaßlichen Lösung in zwei Summanden. Ihr Ansatz $y = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$ führt auf eine reduzierte Gleichung dritten Grades mit zwei Hilfsgrößen A und B, die durch die Auflösung einer quadratischen Gleichung bestimmt werden können, was bekanntlich mit Hilfe der Mitternachtsformel möglich ist. Aus $y = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$ folgt:

$$y^3 = (\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B})^3 = A + 3\sqrt[3]{AB}\,(\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}) + B = 3\sqrt[3]{AB}\,y + (A+B) \quad \text{oder}$$

$$\boldsymbol{y^3 - 3\sqrt[3]{AB}\,y - (A+B) = 0},$$

eine Gleichung dritten Grades der Standardform $y^3 + Qy - R = 0$. Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich

$$-3\sqrt[3]{AB} = Q \quad \text{und} \quad A + B = R.$$

Hieraus folgt: $$AB = \left(-\frac{Q}{3}\right)^3 \quad \text{und} \quad A + B = R,$$

d.h. von den Größen A und B sind ihre ***Summe*** $A+B$ und ihr ***Produkt*** AB als Funktionen von p, q, r und daher auch der Dreiecksseiten a, b, c bekannt, sie selbst sind laut Satzgruppe von Vieta daher die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$x^2 - (A+B)x + AB = x^2 - Rx - \left(\frac{Q}{3}\right)^3 = 0,$$

nämlich laut Mitternachtsformel:

$$A = \tfrac{1}{2}\left(R + \sqrt{R^2 + 4\left(\frac{Q}{3}\right)^3}\right) = \left(\frac{R}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2 + \left(\frac{Q}{3}\right)^3}$$

$$B = \tfrac{1}{2}\left(R - \sqrt{R^2 + 4\left(\frac{Q}{3}\right)^3}\right) = \left(\frac{R}{2}\right) - \sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2 + \left(\frac{Q}{3}\right)^3}.$$

Wegen $y = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$ benötigen die Lösungen y der Gleichung (1') die dritten Wurzeln von A und B. Wie jede Zahl haben auch A und B je drei dritte Wurzeln, nämlich $\sqrt[3]{A}$, $\omega\sqrt[3]{A}$, $\omega^2\sqrt[3]{A}$ und $\sqrt[3]{B}$, $\omega\sqrt[3]{B}$, $\omega^2\sqrt[3]{B}$. Damit lassen sich neun Summen des Typs $y = [?]\sqrt[3]{A} + [?]\sqrt[3]{B}$ bilden, doch kommen nur

$$y_1 = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}, \quad y_2 = \omega\sqrt[3]{A} + \omega^2\sqrt[3]{B} \quad \text{und} \quad y_3 = \omega^2\sqrt[3]{A} + \omega\sqrt[3]{B}$$

in Frage. Denn deren Summe als Summe der Lösungen $y_1 + y_2 + y_3$ muß gleich dem Koeffizienten des quadratischen Terms der Gleichung (1') sein, und das heißt in einer Gleichung der Standardform gleich 0. Nur die hier definierten Größen y_1, y_2, y_3 erfüllen wegen $1 + \omega + \omega^2 = 0$ diese Bedingung:

$$y_1 + y_2 + y_3 = \sqrt[3]{A}\,(1 + \omega + \omega^2) + \sqrt[3]{B}\,(1 + \omega + \omega^2) = 0$$ [37].

Die vollständige Lösung der reduzierten Gleichung dritten Grades

(1') $$\boldsymbol{y^3 + Qy - R = 0}$$

ist daher nach dal Ferro-Tartaglia (bekannt als Cardansche Lösungsformel):

$$y_1 = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} = \sqrt[3]{\frac{R}{2} + \sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2 + \left(\frac{Q}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{R}{2} - \sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2 + \left(\frac{Q}{3}\right)^3}}$$

$$y_2 = \omega\sqrt[3]{A} + \omega^2\sqrt[3]{B} = \omega\sqrt[3]{\frac{R}{2} + \sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2 + \left(\frac{Q}{3}\right)^3}} + \omega^2\sqrt[3]{\frac{R}{2} - \sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2 + \left(\frac{Q}{3}\right)^3}}$$

$$y_3 = \omega^2\sqrt[3]{A} + \omega\sqrt[3]{B} = \omega^2\sqrt[3]{\frac{R}{2} + \sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2 + \left(\frac{Q}{3}\right)^3}} + \omega\sqrt[3]{\frac{R}{2} - \sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2 + \left(\frac{Q}{3}\right)^3}}$$

wo Q und R gemäß Gleichung (1'), Seite 45, über p, q und r mit den Vorgaben f, g, h, verknüpft sind. Die Dreiecksseiten ergeben sich schließlich durch

$$a = z_1 = y_1 + p/3 \qquad b = z_2 = y_2 + p/3 \qquad c = z_3 = y_3 + p/3\,.$$

Der Radikand der Quadratwurzel kann wegen $Q = q - 3(p/3)^2$ offenbar negativ, die Wurzel folglich imaginär sein: Cardanos *casus irreducibilis*.

Die Zif. 11 definiert die Größen p, q, r als Funktionen der Dreiecksseiten a, b, c, die Zif. 19 die Größen P, Q, R als Funktionen von p, q, r, letzten Endes also auch als Funktionen von a, b, c. Damit sind p, q, r automatisch auch Funktionen von P, Q, R (Umkehrfunktionen). Die Auflösung des Gleichungssystems {I, II, III} in Zif. 21 erweist P, Q, R als Funktionen der vorgegebenen Strecken $f = GH$, $g = HF$, $h = FG$. Laut Formel (γ) (Seite 40) sind p, q, r auch die Koeffizienten der Potenzen von z in der kritischen Gleichung (1) und bestimmen als solche deren Lösungen a, b, c. Wie die umfangreichen Rechnungen ab Zif. 11 zeigen, können überdies andere *symmetrische* Funktionen von a, b, c als Funktionen von p, q, r dargestellt werden.

Die symmetrischen Funktionen und Abkürzungen $p = \Sigma a$, $q = \Sigma ab$, $r = abc$ erweisen sich somit als die eigentliche Drehscheibe der Eulerschen Studie. Über sie kön-

[37] Man überlege sich, daß auch die Summe der Doppelprodukte, $y_1y_2+y_2y_3+y_3y_1 = Q$ und das Tripelprodukt $y_1y_2y_3 = R$ sind, in Übereinstimmung mit Gleichung (1').

nen aus den Dreiecksseiten *a, b, c* die Koordinaten der „merkwürdigen Punkte" *E, F, G, H* und die Strecken *f, g, h* und umgekehrt aus vorgegebenen *f, g, h* die letztlich gesuchten Seitenlängen *a, b, c* berechnet werden. Diese Zusammenhänge in einer einzigen Formel zusammenzufassen wäre wohl möglich, aber zu kompliziert. Es empfiehlt sich daher, die Rechnungsprozedur in verschiedene Schritte aufzulösen, wie dies ab Zif. 6 vorgeführt wird. Mit der Aufstellung der kritischen Gleichung (1) vollzieht die Zif. 22 den letzten Schritt.

Die symmetrischen Funktionen *p, q, r* kommen im Lösungsversuch nach Tartaglia notwendigerweise als *Koeffizienten* der Gleichung (1) ins Spiel. Die meisten Lehrbücher der klassischen Algebra beschränken sich auf eine Diskussion der Methode nach Tartaglia. Angesichts der Polyvalenz der Funktionen *p, q, r* soll nachfolgend als Gegenstück ein Lösungsverfahren in Erinnerung gerufen werden, in welchem Eulers Größen *p, q, r* auch als *symmetrische Funktionen* zum Zuge kommen.

Weil neben *p* die oben vorgestellte dritte Wurzel ω von 1 dabei eine besondere Rolle spielt, möge das Verfahren der Kürze halber ***ω–p-Methode*** heißen. Die *ω–p*-Methode hat den Vorteil, die allgemeine Gleichung dritten Grades nicht vorgängig auf ihre Standardform reduzieren zu müssen, besitzt aber ebenfalls eine Quadratwurzel, die imaginär werden kann.

Eulers Definition $a+b+c = p$ in Zif. 11, die überhaupt einfachste lineare symmetrische Funktion von drei Variablen *a, b, c*, kann, bei vorgegebener Größe *p*, als unvollständiges System linearer Gleichungen zur Bestimmung der drei Unbekannten *a, b, c* betrachtet werden. Alleinstehend hat $a+b+c = p$ aber unendlich viele Lösungstripel (*a,b,c*), selbst wenn die Grundmenge für die Lösungen auf ganze Zahlen eingeschränkt wird.

Um eindeutige Lösungen *a, b, c* angeben zu können, muß die Gleichung $a+b+c = p$ durch zwei weitere lineare Gleichungen mit den Unbekannten *a, b, c* zu einem System von drei linearen Gleichungen ergänzt werden.

Benutzt man als Koeffizienten der Unbekannten die oben eingeführten dritten Wurzeln ω und ω^2 von 1, kann man zwei weitere lineare Funktionen

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{\omega b} + \boldsymbol{\omega^2 c} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{\omega^2 b} + \boldsymbol{\omega c}$$

bilden, wo die Größe ω bekanntlich die Eigenschaften

$$\omega^3 = 1, \quad 1+\omega+\omega^2 = 0, \quad \omega\omega^2 = 1, \quad \omega+\omega^2 = -1, \quad \omega^4 = \omega$$

hat.

Das gewünschte Gleichungssystem und die Summe der drei Zeilen sind dann wegen der Beziehung $1+\omega+\omega^2 = 0$:

$$\begin{array}{rcrcrcl}
\boldsymbol{a} & + & \boldsymbol{b} & + & \boldsymbol{c} & = & \boldsymbol{p} \\
\boldsymbol{a} & + & \boldsymbol{\omega b} & + & \boldsymbol{\omega^2 c} & = & \boldsymbol{A} \\
\boldsymbol{a} & + & \boldsymbol{\omega^2 b} & + & \boldsymbol{\omega c} & = & \boldsymbol{B} \\
\hline
\boldsymbol{3a} & + & \boldsymbol{0b} & + & \boldsymbol{0c} & = & \boldsymbol{p+A+B} \\
\text{oder} \quad \boldsymbol{a} & & & & & = & \tfrac{1}{3}(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) ,
\end{array}$$

womit bereits eine Lösung ***a*** als rationale Funktion der Größen *p, A, B* feststeht.

Die Funktionen A und B nehmen dann explizite reelle Werte an, wenn sie als Funktionen der bekannten Größen p, q und r dargestellt werden. Sie sind indessen nicht symmetrisch, da Permutierungen der drei Variablen a, b, c die Funktionswerte A und B verändern. Daher können A und B nicht ohne weiteres durch die Primfunktionen p, q, r wiedergegeben werden. Indessen führt hier, wie beim Verfahren nach dal Ferro und Tartaglia, eine *Hilfsgleichung zweiten Grades* weiter.

Es zeigt sich eine interessante Parallele zu Eulers Berechnungen der Streckenquadrate EF^2 usw., wenn die dritten Potenzen der Funktionen A und B betrachtet werden. Die Summen der Quadrate der Koordinatendifferenzen $(\Delta x)^2+(\Delta y)^2$ sind nämlich ausnahmslos *symmetrische* Funktionen von a, b, c, während deren einzelne Summanden $(\Delta x)^2$ und $(\Delta y)^2$ im allgemeinen *keine symmetrischen* Funktionen von a, b, c sind. Ebenso sind die *dritten Potenzen* A^3 und B^3 wegen der beiden mittleren Summanden nicht symmetrisch:

$$\begin{aligned} A^3 &= (a+\omega b+\omega^2 c)^3 = (a^3+b^3+c^3) + 3\omega(a^2b + b^2c + c^2a) \\ &\quad + 3\omega^2(ab^2+bc^2+ca^2) + 6abc \\ B^3 &= (a+\omega^2 b+\omega c)^3 = (a^3+b^3+c^3) + 3\omega(ab^2 + bc^2 + ca^2) \\ &\quad + 3\omega^2(a^2b + b^2c + c^2a) + 6abc\,. \end{aligned}$$

Offensichtlich ergänzen sich aber die Koeffizienten von 3ω und $3\omega^2$ zur symmetrischen Funktion $a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2 = \Sigma a^2b$, so daß, wenn noch berücksichtigt wird, daß $\omega+\omega^2=-1$, die *Summe* von A^3 und B^3 die *reelle* und rationale symmetrische Funktion

$$A^3+B^3 = 2\Sigma a^3 - 3\Sigma a^2b + 12abc$$

ergibt, die mit Hilfe der Tabelle Seite 59 zu der Funktion

$$\boldsymbol{P = A^3 + B^3 = 2p^3 - 9pq + 27r}$$

umgestaltet werden kann.

Andererseits ist bereits das *Produkt* der Größen A und B eine symmetrische Funktion. Wegen $\Sigma a^2 = a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+ac+bc) = p^2 - 2q$ ist das Produkt:

$$\begin{aligned} AB &= (a+\omega b+\omega^2 c)(a+\omega^2 b+\omega c) \\ &= a^2 + \omega^2 ba + \omega ca + \omega ba + \omega^3 b^2 + \omega^2 bc + \omega^2 \mathrm{ca} + \omega^4 bc + \omega^3 c^2 \\ &= \Sigma a^2 + (\omega+\omega^2)\Sigma ab = (p^2-2q) - q = p^2 - 3q \end{aligned}$$

und dessen dritte Potenz folglich $\boldsymbol{Q = A^3B^3 = (p^2-3q)^3}$.

Die Kubatur von A und B bewirkt nicht nur die Elimination der komplexen Faktoren ω und ω^2, sondern führt auch dazu, daß von den dritten Potenzen A^3 und B^3 deren *Summe* A^3+B^3 und *Produkt* A^3B^3 als Funktionen der Koeffizienten p, q, r der kritischen Gleichung (1) bekannt sind. Sie erfüllen damit die Bedingungen, denen die Lösungen quadratischer Gleichungen genügen und müssen daher die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$\boldsymbol{x^2 - (2p^3 - 9pq + 27r)x + (p^2-3q)^3 = x^2 - Px + Q = 0}$$ [38]

sein, laut Mitternachtsformel also:

[38] Vgl. Seiten 40 bis 42.

$$\boldsymbol{A^3 = \tfrac{1}{2}[P + \sqrt{P^2 - 4Q}\,]} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{B^3 = \tfrac{1}{2}[P - \sqrt{P^2 - 4Q}\,]}$$

oder $$\boldsymbol{A^3 = \frac{P}{2} + \sqrt{\left(\frac{P}{2}\right)^2 - Q}} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{B^3 = \frac{P}{2} - \sqrt{\left(\frac{P}{2}\right)^2 - Q}}$$

Die *linearen* Größen A und B sind demnach die dritten Wurzeln:

$$\boldsymbol{A = \sqrt[3]{\frac{P}{2} + \sqrt{\left(\frac{P}{2}\right)^2 - Q}}} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{B = \sqrt[3]{\frac{P}{2} - \sqrt{\left(\frac{P}{2}\right)^2 - Q}}}\ ,$$

und die Länge a einer Seite des gesuchten Dreiecks ist:

$$\boldsymbol{a = \tfrac{1}{3}(p + A + B)}\ ,$$

wo der Kleinbuchstabe p der Koeffizient von z^2 in Gleichung (1) ist, A und B die oben definierten dritten Wurzeln sind und die Großbuchstaben $P = 2p^3 - 9pq + 27r$ bzw. $Q = (p^2 - 3q)^3$ Funktionen von p, q, r bezeichnen. Letztere errechnen sich mit Hilfe der Formeln in Eulers Ziffern 21 und 22 aus den Vorgaben f, g, h.

Als Beispiel diene die (vollständige) Gleichung

$$\boldsymbol{z^3 - 3z^2 - 3z - 4 = 0}\ .$$

Auf Grund der Descartesschen Vorzeichenregeln kann diese Gleichung nur ***eine*** positive reelle Lösung haben, die beiden andern müssen also negativ oder imaginär sein. Da alle Koeffizienten ganze Zahlen sind, sind wahrscheinlich auch die Lösungen a, b, c ganz. Das absolute Glied $4 = abc$, läßt sich auf zweierlei Weise in drei ganze reelle, mit Hilfe von ω und ω^2 aber auch in komplexe Faktoren zerlegen:

$$4 = 1 \cdot 1 \cdot 4, \qquad 4 = 1 \cdot 2 \cdot 2, \qquad 4 = \omega \cdot \omega^2 \cdot 4.$$

Man überzeugt sich durch Einsetzen, daß in der Tat die Faktoren 4, ω und ω^2 als Lösungen in Frage kommen. Die Gleichung hat also eine positive reelle und zwei imaginäre Lösungen. Diese lassen sich formal auch mit Hilfe obiger Formeln finden.

Der Gleichung $z^3 - 3z^2 - 3z - 4 = 0$ entnimmt man $p = 3$, $q = -3$ und $r = 4$. Aus

$$P = (2p^3 - 9pq + 27r) = 243, \qquad Q = (p^2 - 3q)^3 = 5832$$

folgt die Quadratwurzel $\sqrt{P^2 - 4Q} = 189$. Diese liefert:

$$A^3 = \tfrac{1}{2}[P + \sqrt{P^2 - 4Q}\,] = 216 \qquad \text{und} \qquad B^3 = \tfrac{1}{2}[P - \sqrt{P^2 - 4Q}\,] = 27$$

und endlich $A = \sqrt[3]{A^3} = \sqrt[3]{216} = 6$ und $B = \sqrt[3]{B^3} = \sqrt[3]{27} = 3$,

woraus sich als ***eine*** Lösung die reelle Größe a ergibt:

$$\boldsymbol{a = \tfrac{1}{3}(p + A + B) = \tfrac{1}{3}(3 + 6 + 3) = 4}\ .$$

Mit $z = a = 4$ läßt sich ein Linearfaktor $(z - 4)$ vom Gleichungspolynom abspalten:

$$\boldsymbol{z^3 - 3z^2 - 3z - 4 = (z - 4)(z^2 + z + 1) = 0}\ .$$

Die beiden andern Lösungen $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ folgen aus $(z^2 + z + 1) = 0$ mit Hilfe der Mitternachtsformel und können nur $\boldsymbol{\omega}$ und $\boldsymbol{\omega^2}$ sein.

Die Größen A und B haben als dritte Wurzeln nicht nur die Werte $A = 6$ und $B = 3$ sondern auch die Werte $A = 6\omega$ und $A = 6\omega^2$ bzw. $B = 3\omega$ und $B = 3\omega^2$. Benutzt man diese Werte in $a = \frac{1}{3}(p + A + B)$, erhält man formal dieselben Werte ω und ω^2 für die Lösungen b und c, wegen $\omega + \omega^2 = -1$, auch auf folgende Weise:

$$b = \tfrac{1}{3}(3 + 6\omega + 3\omega^2) = \tfrac{1}{3}[3 + 3(\omega + \omega + \omega^2)] = \tfrac{1}{3}[3 + 3(\omega - 1)] = \omega \text{ und}$$
$$c = \tfrac{1}{3}(3 + 6\omega^2 + 3\omega) = \tfrac{1}{3}[3 + 3(\omega^2 + \omega^2 + \omega)] = \tfrac{1}{3}[3 + 3(\omega^2 - 1)] = \omega^2 .$$

Zur Verifikation seiner Rechenergebnisse benutzt Euler in Zif. 24 als Beispiel die Gleichung:

$$\boldsymbol{z^3 - 18z^2 + 107z - 210 = 0} .$$

Deren Lösungen $a = 5$, $b = 6$, $c = 7$ sind als Faktoren im absoluten Glied erkennbar: $abc = 5\cdot6\cdot7 = 210$. Aus den Koeffizienten $p = 18$, $q = 107$ und $r = 210$ lassen sich die Lösungen a, b, c aber auch mit Hilfe der ω–p-Methode berechnen, obwohl die gewählten Größen in der Rechnung imaginäre Zwischenergebnisse auslösen.

Denn die Testgleichung ist für den allgemeinen Fall nicht repräsentativ, da die Lösungen eine arithmetische Folge bilden und somit voneinander abhängig sind. Es handelt sich um einen Sonderfall, der leichter zu lösen ist und insbesondere das ω–p-Verfahren zuläßt. Im vorliegenden Sonderfall ist u.a. die Funktion P immer $P = 0$:

Seien die Lösungen $\boldsymbol{a} = b - d$, $\boldsymbol{b} = b$ und $\boldsymbol{c} = b + d$,
eine arithmetische Folge mit der gemeinsamen Differenz d. Dann sind die Koeffizienten $\boldsymbol{p} = 3b$, $\boldsymbol{q} = 3b^2 - d^2$, $\boldsymbol{r} = b^3 - bd^2$
und $P = (2p^3 - 9pq + 27r) = 2\cdot27b^3 - 3\cdot27b^3 + 27bd^2 + 27b^3 - 27bd^2 = 0$,
unabhängig vom konkreten Wert der Lösung b und der Differenz d.

Im Falle der Eulerschen Testgleichung ist die Größe P

$$P = (2p^3 - 9pq + 27r) = (2\cdot18^3 - 9\cdot18\cdot107 + 27\cdot210) = 0,$$

während $Q = (p^2 - 3q)^3 = (18^2 - 3\cdot107)^3 = 27$ ist. Der Radikand der dritten Wurzel in den Formeln der Größen A und B reduziert sich daher zur Quadratwurzel

$$\sqrt{-Q} = \sqrt{-27} = 3\sqrt{-3} = 3\sqrt{3}\cdot\sqrt{-1} = \left(\sqrt{3}\right)^3\cdot i .$$

Die Größen A und B selbst werden zu:

$$A = \sqrt[3]{\sqrt{-Q}} = \sqrt[3]{\left(\sqrt{3}\right)^3\cdot i} = \sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{i} \text{ und}$$
$$B = \sqrt[3]{-\sqrt{-Q}} = \sqrt[3]{\left(\sqrt{3}\right)^3\cdot(-i)} = \sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{-i} .$$

Die dritten Wurzeln der imaginären Einheit i lassen sich sehr wohl explizit angeben. Sie sind:

$$\sqrt[3]{i} = -i, -i\omega \text{ und } -i\omega^2 \qquad \text{bzw.} \qquad \sqrt[3]{-i} = +i, +i\omega \text{ und } +i\omega^2 ,$$

wovon man sich durch Kubieren leicht überzeugt. Folglich sind

$$A = -i\sqrt{3}, -i\omega\sqrt{3}, \text{ und } -i\omega^2\sqrt{3} \text{ und } B = +i\sqrt{3}, +i\omega\sqrt{3}, \text{ und } +i\omega^2\sqrt{3} .$$

Mit diesen Werten von A und B lassen sich in der Formel zur Berechnung der Dreiecksseiten neun Kombinationen bilden, doch ergeben wegen

$$\omega^2 - \omega = \tfrac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3}) - \tfrac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}) = -i\sqrt{3}$$

nur die folgenden drei Kombinationen für *a, b* und *c* reelle Resultate:

$$\boldsymbol{a} = \tfrac{1}{3}(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \tfrac{1}{3}(18 - i\sqrt{3} + i\sqrt{3}) = \ldots\ldots = \tfrac{1}{3}(18) = \mathbf{6}$$

$$\boldsymbol{b} = \tfrac{1}{3}(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{\omega A}+\boldsymbol{\omega^2 B}) = \tfrac{1}{3}[18 - i\omega\sqrt{3} + i\omega^2\sqrt{3}] = \tfrac{1}{3}[18 + i\sqrt{3}(\omega^2-\omega)]$$

$$= \tfrac{1}{3}[18 + i\sqrt{3}(-i\sqrt{3})] = \tfrac{1}{3}(18+3) = \ldots\ldots\ldots\ldots = \tfrac{1}{3}(18+3) = \mathbf{7}$$

$$\boldsymbol{c} = \tfrac{1}{3}(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{\omega^2 A}+\boldsymbol{\omega B}) = \tfrac{1}{3}(18) - i\omega^2\sqrt{3} + i\omega\sqrt{3} = \tfrac{1}{3}[18 - i\sqrt{3}(\omega^2-\omega)]$$

$$= \tfrac{1}{3}[18 - i\sqrt{3}(-i\sqrt{3})] = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \tfrac{1}{3}(18-3) = \mathbf{5}\,.$$

Die Lösungen der Eulerschen Testgleichung lauten also (*a*, *b*, *c*) = (6, 7, 5) in Übereinstimmung mit $r = abc = 5 \cdot 6 \cdot 7 = 210$.

Nach sorgsamen Untersuchungen zum Fall des gleichschenkligen Dreiecks mit den Untergattungen spitzwinklig, gleichseitig und stumpfwinklig kommt Euler am Schluß der Studie in der Zif. 34 auf ***allgemeine Dreiecke*** zu sprechen. Auch deren Analyse führt schließlich auf eine kritische Gleichung dritten Grades, deren Lösungen *a, b, c* die Seitenlängen des gesuchten Dreiecks sein werden. Indessen entzieht sich die Schlußgleichung des allgemeinen Falles der bisher erfolgreichen, fast trivialen Lösungsmethode des bloßen Ablesens der Lösungen – *Solutio facilis* – als Faktoren des absoluten Terms.

Euler stellt fest: *Reliquis casibus negotium non tam facile expeditur, quia aequatio cubica factores non admittit*. Dies kann freilich auch heißen, das Gleichungspolynom lasse sich nicht ohne Mühe in lineare und quadratische Faktoren zerlegen. Zwar ist auch im allgemeinen Fall der absolute Term gleich dem Produkt *abc* der Lösungen *a*, *b*, *c,* und sollten diese daher durch empirische Zerlegung des absoluten Terms in Faktoren gefunden werden können. Indessen ist, wenn die Lösungen nur schon irrational sind, die Anzahl möglicher Zerlegungen unendlich.

Die oben skizzierten algebraischen Lösungsverfahren sind nur in Sonderfällen anwendbar. Die Methode dal Ferro-Tartaglia besitzt überdies die lange Zeit befremdende Eigenheit, daß der Radikand der dritten Wurzeln in der Lösungsformel, die Quadratwurzel, ausgerechnet dann komplex wird, wenn die Lösungen *a*, *b*, *c* reell sind. Für den allgemeinen Fall sind die Formeln deshalb ungeeignet.

Man muß daher andere, ***allgemein gültige Methoden*** benutzen. Eine solche deutet Euler in der letzten Ziffer der Studie an, allerdings nur kurz in drei Zeilen an Hand eines numerischen Beispiels und ohne jede Erklärung. Zur Lösung der kritischen Gleichung, sagt er, werde ein Winkel α benötigt, der ***dreigeteilt*** und dessen ***cosinus*** aus den Gleichungskoeffizienten hergeleitet werden müsse. Den drei Lösungsformeln des numerischen Beispiels darf man entnehmen, daß es sich um ein Verfahren handelt, das schon von Vieta für Gleichungen mit drei reellen Lösungen vorgeschlagen worden ist, ohne daß aber dessen Name in Eulers Studie erscheint.

Im 16. und 17. Jahrhundert bedienten sich die Kossisten vor der Erfindung der Logarithmen und noch nachher des längst vergessenen sog. prosthaphäretischen Rechnens, das sich auf trigonometrische Identitäten stützte. Auf ganz ähnliche Weise, und wahrscheinlich durch das prosthaphäretische Rechnen inspiriert, benutzte François Viète (Franciscus ***Vieta***, 1540-1603) ebenfalls trigonometrische Identitäten zur Lösung reduzierter Gleichungen 3. Grades, allerdings solcher mit drei reellen Lösungen, und schlug dafür ein verblüffend einfaches Verfahren vor. Vietas Formel basiert auf der Winkelfunktion *cosinus*. Wenig später zeigte Albert ***Girard*** [39], daß das Verfahren auch durch Benutzung der analogen Formel mit der Winkelfunktion ***sinus*** zum Ziele führt.

Aus den Additionstheoremen der Winkelfunktionen *sinus* und *cosinus*:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

gewinnt man die Doppelwinkelfunktionen:

$$\begin{aligned}\sin(2\alpha) &= 2\sin\alpha\cos\alpha\\ \cos(2\alpha) &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \;=\; 2\cos^2\alpha - 1\,.\end{aligned}$$

Durch Kombination beider Formeln ergibt sich die Tripelwinkelfunktion:

$$\begin{aligned}\cos 3\alpha \;=\; \cos(\alpha+2\alpha) &= \cos\alpha\cos 2\alpha - \sin\alpha\sin 2\alpha\\ &= \cos\alpha(2\cos^2\alpha - 1) - 2\sin^2\alpha\cos\alpha\\ &= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha\\ &= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha + 2(\cos^2\alpha - 1)\cos\alpha\\ &= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha \qquad\text{oder}\end{aligned}$$

(3) $$\mathbf{4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha - \cos(3\alpha) \;=\; 0\,.}$$

Die Additionstheoreme wie auch die Tripelwinkelfunktion sind Identitäten**,** d.h. sie sind für beliebige Winkel α und β gültig, während die kritische Gleichung (1) und die reduzierte Gleichung (1') Bedingungsgleichungen sind, die nur für besondere Werte der Variablen *z* und *y* richtig sind. Durch Auflösung der Bedingungsgleichungen werden diese besonderen Werte bestimmt.

Die Einführung einer Hilfsgröße *a*, die noch zu präzisieren sein wird, und Multiplikation von (3) mit $2a^3$ erzeugen aus (3) den Ausdruck

$$2a^3(4\cos^3\alpha) - 2a^3(3\cos\alpha) - 2a^3(\cos 3\alpha) = 0 \qquad \text{oder, etwas anders gegliedert:}$$

$$8a^3\cos^3\alpha - 3a^2(2a\cos\alpha) - 2a^3(\cos 3\alpha) \;=\; 0 \quad \text{bzw.}$$

(3') $$\mathbf{(2a\cos\alpha)^3 - 3a^2(2a\cos\alpha) - 2a^3(\cos 3\alpha) \;=\; 0}\,.$$

Die Gleichung (3') ist immer noch eine Identität: gültig für beliebige Winkel α. Sie enthält einen linearen Term $2a\cos\alpha$ und zugleich dessen 3. Potenz $(2a\cos\alpha)^3$, und erinnert damit an eine reduzierte Gleichung 3. Grades in *y* gleicher Struktur wie die Bedingungsgleichung (1') [40]:

(3') $$(2a\cos\alpha)^3 \;-\; 3a^2(2a\cos\alpha) - 2a^3(\cos 3\alpha) \;=\; 0$$

(1') $$\boldsymbol{y^3 \quad - \quad Q \quad y \quad - \quad R} \quad = \; 0\,.$$

Identifiziert man (3') und (1'), müssen offenbar die drei Gleichheiten:

[39] Girard, Albert. *Invention nouvelle en l'algèbre*. Amsterdam, Guillaume Iansson Blaeuw, 1629.

[40] Seiten 45 und 46.

$$y = 2a\cos\alpha, \qquad 3a^2 = Q, \qquad 2a^3(\cos 3\alpha) = R$$

gelten. Die Unbekannte y ist bekannt, sobald die Parameter a und $\angle\alpha$ bekannt sind.

Aus der zweiten Gleichung folgt:

$$a^2 = \frac{Q}{3} \qquad \text{oder} \qquad a = \sqrt{\frac{Q}{3}} \qquad \text{und} \qquad a^3 = \frac{Q\sqrt{Q}}{3\sqrt{3}}$$

und, zusammen mit der dritten Gleichung,

$$2a^3(\cos 3\alpha) = R = 2\frac{Q\sqrt{Q}}{3\sqrt{3}}\cos 3\alpha \qquad \text{oder} \qquad \cos(3\alpha) = \frac{3\sqrt{3}\,R}{2Q\sqrt{Q}}\ .$$

Da die Größen Q und R, Koeffizient von y und absoluter Term in der reduzierten Gleichung (1'), als Ergebnis der Herleitung der kritischen Gleichung (1) und deren Transformation in die reduzierte Gleichung (1') bekannte Zahlen sind [41], läßt sich der cosinus des Winkels 3α berechnen und der Winkel 3α einer cosinus-Tafel entnehmen. Dreiteilung desselben liefert den Winkel α. Der cosinus-Tafel entnimmt man die Zahl $\cos\alpha$ und berechnet mit den gefundenen Werten den numerischen Wert der Unbekannten y aus deren Definition $y = 2a\cos\alpha$:

$$y = 2a\cos\alpha = 2\left(\sqrt{\frac{Q}{3}}\right)\cos\alpha\ .$$

Damit ist ***eine*** Lösung y_1 der kritischen Gleichung gefunden. Die beiden andern, y_2 und y_3, ergeben sich aus der Suche nach den andern Winkeln $\angle\beta$ und $\angle\gamma$, zu deren Dreifachem derselbe cosinus-Wert gehört.

Euler skizziert das Verfahren in Zif. 34 an Hand des Beispiels

$$z^3 - z^2\sqrt{71} + 22z - 2\sqrt{71} = 0\ ,$$

gibt indessen nur die numerischen Ergebnisse ohne eingehendere Erläuterungen an. Im Kommentar zur Zif. 34, Seiten 177ff., wird Eulers Beispiel im Detail durchgerechnet.

---

[41] Vgl. die Herleitung von Q und R als Funktionen der Koeffizienten p, q, r der kritischen Gleichung (1) auf Seite 45 und Eulers Definitionen von p, q, r als Funktionen der Dreiecksseiten a, b, c in Zif. 11, Seite 11.

Zur Transformation symmetrischer Funktionen.

Das Akademieproblem von 1723 stellte laut Tropfke die Konstruktion eines Dreiecks ABC zur Debatte, wenn die Strecken $e = FG$, $f = GE$, $g = EF$ bzw. deren Quadrate e^2, f^2, g^2 vorgegeben werden. Die quadrierten Größen e^2, f^2, g^2 sind gebrochene rationale symmetrische Funktionen der Dreiecksseiten a, b, c: $e^2 = FG^2(a,b,c)$, $f^2 = GE^2(a,b,c)$ und $g^2 = EF^2(a,b,c)$.

Da die Eulerschen Abkürzungen $p = \Sigma a$, $q = \Sigma ab$, $r = abc$ nur additive und multiplikative Zusammenfassungen der Größen a, b, c sind, können die Funktionen e^2, f^2, g^2 in aequivalente Funktionen von p, q, r transformiert und als Gleichungssystem

$$\begin{aligned} e^2 &= FG^2(p,q,r) = 0 \\ f^2 &= GE^2(p,q,r) = 0 \\ g^2 &= EF^2(p,q,r) = 0 \end{aligned}$$

betrachtet werden. Dessen Auflösung nach p, q, r liefert explizite Funktionen

$$p = p(e^2, f^2, g^2), \qquad q = q(e^2, f^2, g^2), \qquad r = r(e^2, f^2, g^2)$$

der Vorgaben e, f, g. Die Funktionen p, q, r nehmen konkrete numerische Werte an, wenn die Argumente e, f, g als solche vorgeschrieben werden. Mit den Werten p, q, r als Koeffizienten kann endlich die kritische Gleichung

(1) $$z^3 - pz^2 + qz - r = 0$$

als numerische Gleichung aufgestellt werden, deren Lösungen die Längen der Seiten a, b, c des gesuchten Dreiecks ABC sind.

Von zentraler Bedeutung für die Lösung der Aufgabe ist daher die Fähigkeit, rationale symmetrische Funktionen von a, b, c in aequivalente Funktionen von p, q, r zu transformieren.

Die für Eulers Studie benötigten symmetrischen Funktionen sind Summen gleichdimensionaler Summanden. Sie können aus den Primfunktionen $p = \Sigma a$, $q = \Sigma ab$ und $r = abc$ durch Multiplikation untereinander oder mit aus ihnen abgeleiteten Funktionen, Σa^2, $\Sigma a^2 b$ usw., zusammengestellt werden. Beispielsweise Σa^2 aus $p^2 = \Sigma a \times \Sigma a = (a+b+c)(a+b+c) = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc = \Sigma a^2+2\Sigma ab$, wo Σab bereits als $\Sigma ab = q$ definiert ist, so daß $p^2 = \Sigma a^2+2q$ oder $\Sigma a^2 = p^2-2q$. Solche Operationen lassen sich durch Multiplikationstabellen übersichtlich gestalten. Werden die einzelnen Faktoren in die Kopfzeile und die linke Randspalte gesetzt, liest man die Summanden des Ergebnisses aus der Tabelle ab:

$$\begin{aligned} \Sigma a \times \Sigma a = pp = p^2 &= \Sigma a^2 + 2\Sigma ab \\ &= \Sigma a^2 + 2q \\ \rightarrow \quad \boldsymbol{\Sigma a^2} &= \boldsymbol{p^2 - 2q} \end{aligned}$$

Σa×Σa	***a***	***b***	***c***
a	$\boldsymbol{a^2}$	***ab***	***ac***
b	***ab***	$\boldsymbol{b^2}$	***bc***
c	***ac***	***bc***	$\boldsymbol{c^2}$

$$\Sigma a \times \Sigma ab \;=\; pq \;=\; \Sigma a^2 b + 3abc$$
$$=\; \Sigma a^2 b + 3r$$
$$\rightarrow \quad \boldsymbol{\Sigma a^2 b = pq - 3r}$$

Σa×Σab	***ab***	***ac***	***bc***
a	a^2b	a^2c	abc
b	ab^2	abc	b^2c
c	abc	ac^2	bc^2

$$\Sigma a \times \Sigma a^2 \;=\; p(p^2 - 2q)$$
$$=\; p^3 - 2pq \;=\; \Sigma a^3 + \Sigma a^2 b$$
$$\Sigma a^3 \;=\; p^3 - 2pq - pq + 3r$$
$$\rightarrow \quad \boldsymbol{\Sigma a^3 \;=\; p^3 - 3pq + 3r}$$

Σa×Σa²	a^2	b^2	c^2
a	a^3	ab^2	ac^2
b	a^2b	b^3	bc^2
c	a^2c	b^2c	c^3

Die symmetrische Funktion $\boldsymbol{\Sigma a^3 = a^3+b^3+c^3}$ ist implizit in der Gleichung (1) enthalten. Da die Längen a, b, c Lösungen der Gleichung $z^3 - pz^2 + qz - r = 0$ sind, können sie für z substituiert werden:

$$a^3 - pa^2 + qa - r \;=\; 0$$
$$b^3 - pb^2 + qb - r \;=\; 0$$
$$\underline{c^3 - pc^2 + qc - r \;=\; 0}$$

zusammen $\quad \Sigma a^3 - p\Sigma a^2 + q\Sigma a - 3r \;=\; 0$,
wo die Funktionen $\Sigma a^2 = p^2 - 2q$ und $\Sigma a = p$, so daß $\Sigma a^3 - p\Sigma a^2 + q\Sigma a - 3r = \Sigma a^3 - p(p^2 - 2q) + qp - 3r \;=\; \Sigma a^3 - p^3 + 3pq - 3r \;=\; 0$ oder

$$\boldsymbol{\Sigma a^3 = p^3 - 3pq + 3r} \,.$$

Die Ergebnisse der Transformationen der quadratischen Funktion $\Sigma a^2 = p^2 - 2q$ und der kubischen Funktion $\Sigma a^3 = p^3 - 3pq + 3r$ zeigen, daß ihre p,q,r- oder Koeffizienten-Darstellungen Summen von jeweils gleichdimensionalen symmetrischen Funktionen sind. Die Transformation von a,b,c-Darstellungen in p,q,r-Darstellungen ändert die Dimensionalität nicht. Außerdem haben Vertauschungen unter den Argumenten a, b, c keine Auswirkung auf die Funktionswerte, denn auch p, q und r bleiben unverändert, wenn etwa a und b vertauscht werden.

Daß die involvierten symmetrischen Funktionen und ihre Transformierten Identitäten sind, wird sofort deutlich, wenn für p, q, r Eulers Definitionen eingesetzt werden:

$$\boldsymbol{\Sigma a^3 = p^3 - 3pq + 3r \;=\; (\Sigma a)^3 - 3(\Sigma a)(\Sigma ab) + 3abc} \,.$$

Für die Transformation von a,b,c-Darstellungen in p,q,r-Darstellungen lassen sich deshalb mit Vorteil die ***Identitätseigenschaften*** benutzen. Die Transformierte einer n-dimensionalen symmetrischen Funktion $F(a,b,c)$ muß eine Funktion anderer, ebenfalls n-dimensionaler symmetrischer Funktionen sein. Allerdings können diese, wie die Beispiele Σa^2 und Σa^3 zeigen, mit verschiedenen Vorzeichen und konstanten numerischen Faktoren behaftet sein.

Im Ansatz $F \equiv \mathrm{A}f_1 + \mathrm{B}f_2 + \mathrm{C}f_3 + \mathrm{D}f_4$.... für die n-dimensionale Funktion F sind die Koeffizienten A, B, C, D usw. vorerst unbekannte konstante numerische Faktoren, die Funktionen f_1, f_2 usw. ebenfalls n-dimensionale symmetrische Funktionen, deren p,q,r-Darstellung bereits bekannt ist oder leicht gefunden werden kann. Die numerischen Faktoren und ihre Vorzeichen können als Lösungen eines Systems linearer Gleichungen bestimmt werden, wenn für die Argumente a, b, c, konkrete numerische Werte eingesetzt werden. Die Berechnung unbestimmter Faktoren wird besonders einfach, wenn die oben hergeleiteten dritten Wurzeln 1, ω, ω^2 der Einheit benutzt werden.

Beispiele: $\boldsymbol{\Sigma a^2 = a^2+b^2+c^2}$; $\boldsymbol{\Sigma a^2 b = a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2}$; $\boldsymbol{\Sigma a^3 = a^3+b^3+c^3}$.

Die symmetrische Funktion $\boldsymbol{\Sigma a^2 = a^2+b^2+c^2}$ ist quadratisch. Als Summanden kommen nur die beiden andern quadratischen Funktionen $(\Sigma a)^2 = p^2$ und $\Sigma ab = q$ in Frage, die aber noch durch konstante numerische Faktoren A, B modifiziert sein können, denn, wenn die n-dimensionale Funktion $f(a,b,c)$ symmetrisch ist, ist auch $\mathrm{A}f(a,b,c)$ symmetrisch und n-dimensional. Ansatz:

(α) $$\Sigma a^2 \equiv (\Sigma a)^2\mathrm{A} + \Sigma ab\,\mathrm{B} \equiv p^2\mathrm{A} + q\mathrm{B}$$

Die zunächst unbekannten Parameter A und B sind Konstanten und behalten ihren konkreten Zahlenwert bei, gleichgültig, welche Werte für a, b, c gewählt werden.

Durch die Wahl verschiedener numerischer Werte für a, b, c – tunlichst kleiner, damit unnötiger arithmetischer Aufwand vermieden wird – erhält man beliebige zwei lineare Gleichungen für die Unbekannten A und B, die durch Auflösung des auf diese Weise erstellten Gleichungssystems bestimmt werden. Die oben (Seite 42) eingeführten dritten Wurzeln von Eins, 1, ω und ω^2, machen die Rechnungen wegen $1+\omega+\omega^2 = 0$ und $\omega^3 = 1$ besonders einfach:

Hilfstabelle

a	**b**	**c**	**p**	**q**	**r**	$\mathbf{p^3}$	**pq**	$\mathbf{\Sigma a^2 b}$	$\mathbf{\Sigma a^3}$
1	ω	ω^2	0	0	1	0	0	–3	3
1	$-\omega$	ω^2	-2ω	$2\omega^2$	–1	–8	–4	–1	1
1	1	1	3	3	1	27	9	6	3
–1	1	1	1	–1	–1	1	–1	2	1

Zur Bestimmung von A, B im Ausdruck $\Sigma a^2 \equiv (\Sigma a)^2\mathrm{A} + \Sigma ab\mathrm{B} \equiv p^2\mathrm{A} + q\mathrm{B}$ genügen zwei Gleichungen. Mit $(a,b,c) = (1, -\omega, \omega^2)$ und (1,1,1) liefert die Identität (α) die linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= 4\omega^2\mathrm{A} + 2\omega^2\mathrm{B} \quad \text{oder} \quad 2\mathrm{A} + \mathrm{B} = 0 \\ 3 &= 9\mathrm{A} + 3\mathrm{B} \quad \text{oder} \quad 3\mathrm{A} + \mathrm{B} = 1 \end{aligned}$$

denen man entnimmt: A = 1, B = –2. Damit wird die Identität (α) zu

(α’) $$\boldsymbol{\Sigma a^2 \equiv (\Sigma a)^2 - 2\Sigma ab \equiv p^2 - 2q} \,.$$

Die symmetrische Funktion $\boldsymbol{\Sigma a^2 b}$ ist dreidimensional. Mögliche Summanden zur Darstellung als Summe, wieder mit vorerst unbekannten Faktoren A, B, C, sind die andern dreidimensionalen Funktionen $(a+b+c)^3 = p^3$, $(a+b+c)(ab+ac+bc) = pq$ und $abc = r$:

(β) $$\Sigma a^2 b = (a+b+c)^3\mathrm{A} + (a+b+c)(ab+ac+bc)\mathrm{B} + abc\,\mathrm{C} = p^3\mathrm{A} + pq\mathrm{B} + r\mathrm{C} \,.$$

Mit $(a,b,c) = (1,\omega,\omega^2)$, (1,1,1) und (–1,1,1) erhält man die drei Gleichungen

$$\begin{array}{rl} -3 = & 0A + 0B + C \\ 6 = & 27A + 9B + C \\ 2 = & A - B - C \end{array} \qquad \text{mit den Lösungen} \qquad \begin{array}{l} A = 0 \\ B = 1 \\ C = -3\,, \end{array} \quad \text{woraus}$$

(β’) $$\boldsymbol{\Sigma a^2 b = (\Sigma a)(\Sigma ab) - 3abc = pq - 3r.}$$

Auf analoge Weise kann die kubische symmetrische Funktion $\boldsymbol{a^3 + b^3 + c^3 = \Sigma a^3}$ als Summe der drei andern kubischen Funktionen $(\Sigma a)^3$, Σa^2b und abc ermittelt werden. Benutzt man das Ergebnis (β’), lautet der Ansatz:

(γ) $$\Sigma a^3 = (a+b+c)^3 A + \Sigma a^2 b B + abc C = p^3 A + (pq - 3r) B + r C$$

Dieselben Werte für (a,b,c) wie in (β) führen hier zum Gleichungssystem

$$\begin{array}{rl} 3 = & 0A - 3B + C \\ 3 = & 27A + 6B + C \\ 1 = & A + 2B - C \end{array} \qquad \text{mit den Lösungen} \qquad \begin{array}{l} A = 1 \\ B = -3 \\ C = -6 \end{array}$$

Es folgt, mit Hilfe von (β’):

(γ’) $$\boldsymbol{\Sigma a^3 = (a+b+c)^3 - 3\Sigma a^2 b - 6abc = p^3 - 3(pq - 3r) - 6r = p^3 - 3pq + 3r}$$

in Übereinstimmung mit der aus den Multiplikationstabellen abgelesenen p,q,r- oder Koeffizienten-darstellung und der Polynomialentwicklung:

$$\boldsymbol{(a+b+c)^3 = \Sigma a^3 + 3\Sigma a^2 b + 6abc} \ .$$

Mit Hilfe der Beziehungen (α’) und (β’), $\Sigma a^2 = p^2 - 2q$ bzw. $\Sigma a^2 b = pq - 3r$, und der Definition von $p = \Sigma a$ läßt sich die Koeffizientendarstellung von $\boldsymbol{\Sigma a^3}$ auch ohne Rückgriff auf konkrete Werte für (a,b,c) herleiten:

$$\begin{aligned} \Sigma a^2 b &= pq - 3r = a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2 = a^2(b+c) + b^2(a+c) + c^2(a+b) \\ &= a^2(p-a) + b^2(p-b) + c^2(p-c) = p\Sigma a^2 - \Sigma a^3 = p(p^2-2q) - \Sigma a^3 \\ &= p^3 - 2pq - \Sigma a^3 \end{aligned}$$

oder $$\boldsymbol{\Sigma a^3 = p^3 - 2pq - (pq - 3r) = p^3 - 3pq + 3r} \ .$$

Die dreidimensionale symmetrische Funktion $(a+b+c)^3$ enthält als Summanden die drei Kuben $\boldsymbol{a^3, b^3, c^3}$. Betrachtet man die Differenz

$$D = (a+b+c)^3 - (a^3+b^3+c^3);$$

so ändert eine Vertauschung beliebiger zweier der drei Variablen am Wert von D nichts: D ist eine ganze rationale symmetrische Funktion von a, b, c der Dimension 3. Als solche läßt sie für die Argumente a, b, c neben reellen Werten von $-\infty$ bis $+\infty$ auch komplexe Werte zu. Sie enthält nur Summen und Produkte, es genügen die Operationen Addition und Multiplikation. Mit $a = -b$ wird die Funktion $D = 0$. Eine rationale Funktion von a und b, welche für $a = -b$ null wird, muß den Faktor $(a+b)$ enthalten. Dasselbe gilt für $a = -c$ und $b = -c$. Somit ist

$$D = (a+b+c)^3 - (a^3+b^3+c^3) = p^3 - \Sigma a^3 = (a+b)(a+c)(b+c)D',$$

wo der Faktor D' nur noch eine numerische Größe unabhängig von a, b, c sein kann, da das Tripelprodukt $(a+b)(a+c)(b+c)$ bereits dreidimensional ist. Um D' zu bestimmen, setze man $(a,b,c) = (1,\omega,\omega^2)$ gleich den dritten Wurzeln von 1. Für die Größe ω gelten die Beziehungen $\omega^3 = 1$, $1+\omega+\omega^2 = 0$ und $\omega = \frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$ bzw. $\omega^2 = \frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3})$:

$$\begin{aligned} D &= (a+b+c)^3 - (a^3+b^3+c^3) = p^3 - \Sigma a^3 &&= (a+b)(a+c)(b+c)D' \\ &= (1+\omega+\omega^2)^3 - (1+\omega^3+\omega^6) &&= (-\omega^2)(-\omega)(-1)D' \\ &= \quad 0 \quad - \quad 3 \quad = \quad -3 &&= \quad -\omega^3 D' \quad = -1D' = -D' \end{aligned}$$

oder $D' = 3$.

Damit erhält man

$$\begin{aligned} D \quad = p^3 - \Sigma a^3 &= 3(a+b)(a+c)(b+c) \\ &= 3(p-c)(p-b)(p-a) \\ &= 3(p^3 - p^2\Sigma a + p\Sigma ab - abc) \\ &= 3(p^3 - p^2 p + pq - r) \;=\; 3(pq-r) \end{aligned}$$

oder $\boldsymbol{\Sigma a^3 = p^3 - 3pq + 3r}$.

Wie zu erwarten, liefern alle Rechenverfahren dasselbe Resultat, womit die Summe der dritten Potenzen der Dreiecksseiten ausschließlich durch die Koeffizienten p, q, r der Gleichung

(1) $$\boldsymbol{z^3 - pz^2 + qz - r = 0}$$

ausgedrückt ist.

Ähnliche Überlegungen führen bei allen symmetrischen Funktionen der Variablen a, b, c auf analoge Darstellungen durch die Größen p, q, r. Die nachfolgende Tabelle enthält die ganzen symmetrischen Funktionen dreier Variabler a, b, c der Dimensionen 1 bis 8 und ihre aequivalenten Koeffizientendarstellungen bezüglich der Gleichung (1), wenn, nach Eulers Festsetzungen, $p = +\Sigma a$, $q = +\Sigma ab$ und $r = +abc$.

TABELLE Bezugsgleichung $\mathbf{z^3 - pz^2 + qz - r = 0}$

Dimension	Σ–Darstellung	Koeffizienten-Darstellung
1	Σa	p Koeffizient
2	Σa^2 Σab	p^2-2q q Koeffizient
3	Σa^3 Σa^2b Σabc	$p^3-3pq+3r$ $pq-3r$ r Koeffizient
4	Σa^4 Σa^3b Σa^2b^2 Σa^2bc	$p^4-4p^2q+4pr+2q^2$ $p^2q-pr-2q^2$ $-2pr+q^2$ pr
5	Σa^5 Σa^4b Σa^3b^2 Σa^3bc Σa^2b^2c	$p^5-5p^3q+5p^2r+5pq^2-5qr$ $p^3q-p^2r-3pq^2+5qr$ $-2p^2r+pq^2-qr$ p^2r-2qr qr
6	Σa^6 Σa^5b Σa^4b^2 Σa^4bc Σa^3b^3 Σa^3b^2c $\Sigma a^2b^2c^2$	$p^6-6p^4q+6p^3r+9p^2q^2-12pqr-2q^3+3r^2$ $p^4q-p^3r-4p^2q^2+7pqr+2q^3-3r^2$ $-2p^3r+p^2q^2+4pqr-2q^3-3r^2$ $p^3r-3pqr+3r^2$ $-3pqr+3r^2+q^3$ $pqr-3r^2$ r^2
7	Σa^7 Σa^6b Σa^5b^2 Σa^5bc Σa^4b^3 Σa^4b^2c Σa^3b^3c $\Sigma a^3b^2c^2$	$p^7-7p^5q+7p^4r+14p^3q^2-21p^2qr-7pq^3+7pr^2+7q^2r$ $p^5q-p^4r-5p^3q^2+9p^2qr+5pq^3-4pr^2-7q^2r$ $-2p^4r+p^3q^2+6p^2qr-3pq^3-7pr^2+3q^2r$ $(p^4-4p^2q+4pr+2q^2)r = p^4r-4p^2qr+4pr^2+2q^2r$ $-3p^2qr+pq^3+5pr^2-q^2r$ $(p^2q-pr-2q^2)r = p^2qr-pr^2-2q^2r$ $(-2pr+q^2)r = -2pr^2+q^2r$ pr^2
8	Σa^8 Σa^7b Σa^6b^2 Σa^6bc Σa^5b^3 Σa^5b^2c Σa^4b^4 Σa^4b^3c $\Sigma a^4b^2c^2$ $\Sigma a^3b^3c^2$	$(p^4-4p^2q+4pr+2q^2)^2-2(2p^2r^2-4pq^2r+q^4+4qr^2) =$ $p^8-8p^6q+8p^5r+20p^4q^2-32p^3qr-16p^2q^3+12p^2r^2+24pq^2r+2q^4-8qr^2$ $p^6q-p^5r-6p^4q^2+11p^3qr-5p^2r^2+9p^2q^3-17pq^2r+8qr^2$ $-2p^5r+p^4q^2+8p^3qr-4p^2q^3-9p^2r^2+2q^4+2qr^2$ $(p^5-5p^3q+5p^2r+5pq^2-5qr)r$ $-3p^3qr+p^2q^3 3p^2r^2+6pq^2r-2q^4-7qr^2$ $(p^3q-p^2r-3pq^2+5qr)r$ $2p^2r^2-4pq^2r+q^4+4qr^2$ $(-2p^2r+pq^2-qr)r$ $(p^2-2q)r^2$ qr^2

Deutsche Version mit Kommentar

LEICHT BEFUNDENE LÖSUNG UNTERSCHIEDLICHER RÄTSEL GEOMETRISCHER ART, DAZU NOCH DER SCHWIERIGSTEN STUFE

Nummer 325 im Verzeichnis Eneström.
Neue Berichte der Petersburger Akademie der Wissenschaften 11(1765), 1767, p. 103-123.
Zusammenfassung a.a.O., p. 12-14.

ZUSAMMENFASSUNG

Die vorliegende Abhandlung befaßt sich mit bestimmten Punkten in beliebigen Dreiecken, welche immer wieder das Interesse der Geometer beansprucht haben. Der erste dieser Punkte ist der gemeinsame Schnittpunkt der Höhen und ist in den beigefügten Figuren durch den Buchstaben *E* bezeichnet. Der zweite, durch *F* bezeichnete Punkt ist der Schwerpunkt des Dreiecks, der gewonnen wird, wenn aus den Ecken des Dreiecks nach den Mitten der Gegenseiten gerade Linien gezogen werden, die sich bekanntlich alle drei im Schwerpunkt schneiden. Der dritte Punkt *G* ist der Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises, identisch mit dem gemeinsamen Schnittpunkt der drei Winkelhalbierenden des Dreiecks. Der vierte Punkt *H* endlich ist der Mittelpunkt des Umkreises, der erhalten wird, wenn die Mittelsenkrechten aller Dreiecksseiten bis zu ihrem gemeinsamen Schnittpunkt verlängert werden. Der illustre Verfasser bestimmt im folgenden die Lagen dieser vier Punkte allgemein für ein beliebiges Dreieck. Dabei ist vornehmlich festzuhalten:

1. im gleichseitigen Dreieck fallen alle vier Punkte in einem einzigen zusammen;
2. im gleichschenkligen Dreieck liegen die vier Punkte auf der Mittelsenkrechten vom Scheitel zur Basis;
3. im spitzwinkligen Dreieck liegen alle vier Punkte im Innern des Dreiecks;
4. im stumpfwinkligen Dreieck liegen nur zwei, nämlich der Schwerpunkt und der Mittelpunkt des Inkreises, im Innern des Dreiecks, die verbleibenden Punkte *E* und *H* hingegen außerhalb des Dreiecks, nämlich *E* jenseits des stumpfen Winkels und *H* jenseits der Gegenseite des stumpfen Winkels.

Besondere Erwähnung verdient der Nachweis, den der illustre Autor liefert, daß drei dieser Punkte, *E*, *F* und *H*, immer auf ein und derselben Geraden liegen und außerdem der Punkt *F* so zwischen *E* und *H* liegt, daß die Strecke *EF* doppelt so lang wie die Strecke *FH* und folglich der Punkt *H* durch die Punkte *E* und *F* bereits bestimmt ist. Der illustre Verfasser löst ferner das weitere Problem, wie, wenn etwa die drei Punkte *E*, *F* und *G* beliebig angenommen werden, das Dreieck, dem sie angehören, konstruiert werden kann. Diese Aufgabe führt er geschickt auf die Lösung einer kubischen Gleichung zurück, deren drei Wurzeln die Seiten des gesuchten Dreiecks darstellen. Die erwähnte Beobachtung hinsichtlich der Lage der Punkte *E*, *F* und *H*, verdient seitens der Geometer um so größere Beachtung, als sie folgenden Satz auszusprechen gestattet:

Wird einem beliebigen Dreieck der Umkreis umbeschrieben und durch dessen Mittelpunkt H und den Schwerpunkt F des Dreiecks eine Gerade gelegt und von F aus die Entfernung HF des Punktes F von H auf der Verlängerung von HF zweimal abgetragen, so wird der so gefundene Endpunkt mit dem Höhenschnittpunkt E des Dreiecks zusammenfallen.

<u>Betrachtung zur *Zusammenfassung*</u>.

Der Herausgeber A. Speiser setzt die *Zusammenfassung* dem Text direkt voran, in den *Petersburger Berichten* steht sie an anderer Stelle. Die *Zusammenfassung* wirft in verschiedener Hinsicht Fragen auf.

Ohne Zweifel entstammt sie der Hand eines Dritten. Zur Mitteilung eigener Beobachtungen und Absichten benutzt Euler selbst die *erste* Person singularis [42]. In der *Zusammenfassung* ist vom *Verfasser* der Studie hingegen ausschließlich in der *dritten* Person als vom *illustren Autor* die Rede, wobei das einfache Adjektiv *illustris*, trotz elativer Bedeutung bereits im Positiv, nicht genügt, sondern noch in den Superlativ erhoben und mit großem Anfangsbuchstaben geschrieben werden muß: *Illustrissimus Auctor*. Es ist unwahrscheinlich, daß ausgerechnet Euler in dieser Weise von sich selbst gesprochen haben sollte. Während die Mehrzahl seiner Berufsgenossen hohe militärische Würden innehatte oder Adelstitel trug und *Hofrat* oder *Geheimrat* noch die simpelsten Titulaturen von wissenschaftlich tätigen Personen waren [43], ist von Euler nichts dergleichen bekannt. Nie ist von ihm als einem General, Baron oder dergleichen die Rede. Weder das kurzfristige Gastspiel in der zaristischen Marine noch seine preisgekrönten Arbeiten über die Bemastung von Segelschiffen gaben Anlaß zur Verleihung des Titels eines Admirals. Derartige Auszeichnungen hat Euler nie angestrebt. Der einzige ihm angemessene und als solcher schon von den Zeitgenossen wahrgenommene Titel waren die fünf Buchstaben *EULER.*

Die *Zusammenfassung* und „Lobrede“ auf den *Illustrissimus Auctor* stammt vermutlich von einem Redaktor der *Berichte*, einem Akademiesekretär oder anderen Mitglied der Petersburger Akademie. Eulers Studie – vor 1763 – , obwohl in Petersburg veröffentlicht, wurde noch in Berlin verfaßt. Möglicherweise war der Rezensent daher sogar ein Preuße und mit der Preußischen Akademie verbunden. Das *Summarium* hat den Charakter einer Buchbesprechung. Dabei muß auffallen, daß der Rezensent in der *Zusammenfassung* Eulers Studie ganz anders gewichtet als ihr Verfasser selbst.

Von der ersten Zif. 1 bis zur letzten Zif. 34 spricht Euler von nichts anderem als von der Konstruktionsaufgabe, wie sie die Preußische Akademie 1723 vorgelegt hatte, ja verfolgt sogar verschiedene Varianten derselben bis in feinste Einzelheiten. Vom Phänomen der Euler-Geraden ist, wie zufällig, nur gerade in Zif. 18 in zwei kurzen Sätzen, unterstrichen durch eine Figur und eine Formel, auf merkwürdig unterkühlte Weise die Rede. Kein Jubel über eine Neuentdeckung, im Gegenteil, man gewinnt den Eindruck, es handle sich um die bloße Bestätigung mit andern Mitteln einer längst bekannten Selbstverständlichkeit. Einzig der Schlußsatz der Zif. 3 spricht von „für die Geometrie bedeutsamen Beziehungen unter den vier kritischen Punkten“, die sich aus der Lösung der Konstruktionsaufgabe ergeben, nennt sie aber nicht explizit [44]. Es *kann* sich dabei um die Kollinearität handeln, aber auch um Einschränkungen der gegenseitigen Lage, die ebenfalls aus Eulers Analyse hervorgehen.

Ganz anders der Rezensent. Er sieht den Hauptzweck der Studie in der Untersuchung der kritischen Punkte *E* (Höhenpunkt), *F* (Schwerpunkt), *G* (Inkreismittelpunkt) und *H* (Umkreismittelpunkt), erwähnt deren Zusammenfallen in einem einzigen Punkt im gleichseitigen Dreieck, ihre Lage auf der Mittelsenkrechten in gleichschenkligen Dreiecken und ferner, daß nur in spitzwinkligen Dreiecken

[42] *ostendere constitui* (Zif. 2); *exhibeo* (Zif. 3); *littera E designo* (Zif. 4); *demitto perpendicula* (Zif. 5); *investigo sequenti modo* (Zif. 5) usw.

[43] Beispielsweise *General* Poncelet, Pierre-Louis Moreau *de Maupertuis, Marquis* de Laplace, *Baron* von Cuvier usw. – Die einstige Hochburg und Monopolistin mathematischer Studien in Paris, die *Ecole Polytechnique*, zielte direkt auf militärische Ehren ab. Ihre Zöglinge waren militärisch organisiert, trugen Uniform und gingen im Normalfall als Artillerie- oder Genieoffiziere an die Armee ab. Berühmte Absolventen waren neben dem General Poncelet etwa der General Carnot oder Guillaume Henri Dufour, langjähriger Generalstabschef und schließlich Oberbefehlshaber der schweizerischen Armee. Selbst der Zürcher Salomon Landolt, Landvogt von Greifensee, konnte es nicht lassen, in seiner Heimat, die nur eine Bürgermiliz kannte, für sich auf privater Basis ein Jägerkorps aufzustellen, um dem polytechnischen Anspruch Genüge zu tun. Für Absolventen, die nicht als Militärs im Festungsbau tätig sein wollten oder konnten, mußte eine eigene Berufsbezeichnung geschaffen werden: die deutschen *Bauingenieure* zählen in der Frankophonie und im angelsächsischen Raum noch heute zum *Génie civil* bzw. *Civil engineering*.

[44] *.... insignes quaedam affectiones inter illa quatuor puncta se prodent, quarum cognitio in Geometria haud levis momenti est censenda*. (Zif. 3)

alle Punkte im Innern liegen, bei stumpfwinkligen Dreiecken hingegen Umkreismittelpunkt und Höhenpunkt außerhalb: alles Tatsachen, die Euler eigentlich als bekannt voraussetzt.

Als besonders wichtig gilt dem Rezensenten der Nachweis der Kollinearität der Punkte E, F und H und des Streckenverhältnisses $EF : FH = 2 : 1$, gültig für jedes Dreieck, und, daß dadurch der Punkt H durch die Punkte E und F bestimmt ist, kurz *das Phänomen Euler-Gerade*, das Euler selbst in 34 Abschnitten ganze zwei Sätze wert ist! Als eine Folgerung dieser Tatsachen wird der Satz ausgesprochen, daß – wie wir heute sagen würden – der Höhenpunkt E das Ergebnis einer zentrischen Streckung des Umkreismittelpunkts H am Schwerpunkt F mit der Streckungszahl 2 (genauer –2) ist.

Zwar stimmt diese Aussage, der große Hauptteil der Eulerschen Studie, die Konstruktion des Dreiecks ABC aus den Vorgaben $f = GH$, $g = FH$ und $h = FG$ mit Hilfe der kritischen Gleichung dritten Grades hingegen, an die zwanzig Seiten Text, Formeln und Figuren, ist dem Rezensenten seinerseits ganze zwei Sätze wert, oder sogar nur einen einzigen, wenn man berücksichtigt, daß sie bloß durch einen Strichpunkt getrennt sind. Je nach Interpretation könnte man sogar meinen, mit dem attributiv verwendeten Partizip *sequens* werde Eulers eigentliche Leistung als minder bedeutendes Anhängsel gesehen.

Außerdem soll nach Meinung des Rezensenten diese Zusatzaufgabe darin bestehen, aus den beliebig anzunehmenden Punkten E (Höhenpunkt), F (Schwerpunkt) und G (Mittelpunkt des Inkreises) das zugehörige Dreieck zu konstruieren [45]. Diese Vorgaben entsprechen zwar der Aufgabenstellung von 1723, doch hat Euler die Aufgabe tatsächlich mit Hilfe der Punkte F, G und H (Umkreismittelpunkt) gelöst, d.h. statt des Höhenpunktes E den Umkreismittelpunkt H verwendet [46]. Man mag einwenden, der Unterschied sei wegen des fixen Streckenverhältnisses $EF : FH$ unwesentlich, und das EFG-Problem sei daher durch das FGH-Problem implizit gelöst. Dennoch ist festzuhalten, daß sich der Kommentar nicht an die Tatsachen hält. Der Rezensent verrät mit seiner Aussage Kenntnis der Akademieaufgabe. Ab Zif. 10 tritt Eulers Untersuchung in eine Phase höchst langwieriger Berechnungen ein und mündet in Formeln, die, obwohl elementar, sich oft über mehrere Zeilen erstrecken und geradezu nach der Einführung von Abkürzungen schreien. Es ist unwahrscheinlich, daß ein Leser, der sich nicht aus biographischen, editorischen oder methodologischen Gründen mit Eulers diffizilen Überlegungen bis ins letzte befassen muß, die Geduld aufbringt, diesen Text in allen Einzelheiten bis ans Ende durchzulesen. Er begnügt sich mit den Ergebnissen und hält sich an die *Zusammenfassung*.

Es dürfte dem Rezensenten ähnlich ergangen sein. Er hat sich bis zur Zif. 18 durchgelesen, die dort festgehaltene Erklärung der Kollinearität der Punkte E, F und H noch verstanden, den komplizierten Rest der Studie jedoch nur noch überflogen. Ihm mußte daher die Zif. 18 bzw. die Kollinearität als Höhepunkt der Studie erscheinen, und als solchen hat er sie schließlich in seiner *Zusammenfassung* vorgestellt. In Kenntnis des Akademieproblems von 1723 mit der EFG-Variante und verschiedener gescheiterter Lösungsversuche hat er darauf unbewußt Eulers erfolgreiche Lösung der FGH-Variante als Zusatzaufgabe dazugerechnet. Die Wirklichkeit war umgekehrt: die Zusatzaufgabe war die eigentliche Hauptaufgabe. Bei deren Behandlung nach Eulers Methode stößt man ungewollt auf die Kollinearität.

Man kann sich füglich die Frage stellen, ob nicht am Ende die von Euler gar nicht selbst verfaßte *Zusammenfassung* die Ursache dafür gewesen sei, daß eine geometrische Selbstverständlichkeit, die sich in seinen Rechnungen notwendigerweise manifestieren mußte, seinem Namen zugeschrieben worden ist. Denn die meisten Leser begnügen sich mit der *Zusammenfassung*.

Die Beurteilung durch den Petersburger Rezensenten ist entschieden zu einseitig. Die Kollinearität der Punkte E, F, H ist rein geometrisch mit elementaren Mitteln herleitbar und wäre bereits einem Euklid zuzutrauen. Die Konstruktion eines Dreiecks aus den vorgegebenen Strecken GH, FH und FG hingegen ist keineswegs trivial. Eulers meisterhafte Behandlung derselben verdient eine gründlichere Würdigung.

---

[45] So auch Tropfke l.c. Vgl. Seite 2 und Fußnote 5.

[46] Vgl. Euler Zif. 21.

Ziffern 1 bis 34

1. In jedem Dreieck gibt es vier ausgezeichnete Punkte, die oft untersucht worden sind:

1. Der Schnittpunkt der drei Höhen.
2. Der Schnittpunkt der drei Seitenhalbierenden, identisch mit dem Schwerpunkt des Dreiecks.
3. Der Schnittpunkt der drei Winkelhalbierenden, zugleich Mittelpunkt des Inkreises.
4. Der Schnittpunkt der drei Mittelsenkrechten der Seiten, zugleich Mittelpunkt des Umkreises.

Betrachtung zu Ziffer 1.

In Zif. 1 werden die, später nach der Abhandlung K. W. Feuerbachs [47] als „merkwürdige Punkte des Dreiecks" bekannt gewordenen, vier Punkte – Höhenpunkt *E*, Schwerpunkt *F* und die Mittelpunkte *G* und *H* des In- und des Umkreises – vorgestellt.

Als bekannt vorausgesetzt, aber immerhin angedeutet, wird die Tatsache, daß die je drei Höhen, Mittellinien, Winkelhalbierenden und Mittelsenkrechten der Seiten eines Dreiecks sich jeweils in *einem* Punkt – dem Höhenpunkt *E*, dem Schwerpunkt *F*, dem Mittelpunkt *G* des Inkreises und dem Mittelpunkt *H* des Umkreises – schneiden – eine nicht ganz triviale Tatsache, die eines Beweises bedarf und in den Anfangsgründen der Planimetrie bewiesen wird. Tropfke erwähnt, daß Euklid, und noch Archimedes bezüglich der Schwerlinien, jeweils den Schnittpunkt nur zweier Geraden betrachteten und als selbstverständlich angenommen hatten, daß die dritte gleichartige Gerade durch denselben Schnittpunkt gehe.

Die ***vier*** Punkte *E*, *F*, *G*, *H* sind Eulers Ausgangspunkte für die nachfolgende Untersuchung. Die Ausschreibung der Preußischen Akademie von 1723 verlangte jedoch die Konstruktion des zugehörigen Dreiecks, wenn nur die ***drei*** Punkte *E*, *F* und *G* vorgegeben werden [48]. Wie immer zwei Punkte, bestimmen auch die Punkte *E* und *F* eine Gerade. Daß die Gerade *EF* die Euler-Gerade ist, wird erst deutlich, wenn noch der Umkreismittelpunkt *H* hinzugenommen wird. Dadurch, daß Euler von sich aus, ohne andere Begründung, als daß die vier merkwürdigen Punkte Gegenstand geometrischer Untersuchungen zu sein pflegen, von allem Anfang an den Umkreismittelpunkt *H* miteinbezieht und diesen schließlich zielstrebig an Stelle des Höhenpunktes *E* für die Dreieckskonstruktion benutzt, verrät er bereits bestehende Vorkenntnisse. Ob diese das Resultat eigener Studien waren oder aus andern Quellen stammten, muß offen bleiben. Die Einfachheit der rein geometrischen Tatsache läßt eher auf Altbekanntes schließen. Euklid, Archimedes, Ptolemaeus u.a. haben jedenfalls schon anspruchsvollere Themen behandelt. Eulers Darstellung soll den Eindruck einer Dreiecken immanenten Nebenbedingung erwecken.

Ersichtlich hat der Rezensent lediglich Eulers Aufzählung in der Zif. 1 für die *Zusammenfassung* übernommen, hält sich indessen bezüglich der Dreieckskonstruktion, im Gegensatz zu Euler, an die *EFG*-Variante der Akademie. Offensichtlich kennt er die Akademieaufgabe.

---

[47] Vgl. Fußnote 25.

[48] Vgl. Seite 2 und Fußnote 5.

2. Wenn beliebige drei dieser vier Punkte vorgegeben werden, ist das Dreieck offenbar durch sie bestimmt, sofern jene Punkte nicht wie in einem gleichseitigen Dreieck in einen zusammenfallen. In diesem Falle genügen alle gleichseitigen Dreiecke in gleicher Weise den Vorgaben. Daraus ergeben sich vier Aufgaben, je nachdem welcher der vier Punkte für die Bestimmung des Dreiecks weggelassen wird. Wie diese vier Fälle zweckentsprechend gelöst werden können, zeige ich im folgenden.

Betrachtung zu Ziffer 2.

Zif. 2 definiert die zu lösende Aufgabe. Es soll evident sein, daß durch die Angabe der Lage dreier der vier genannten Punkte, das Dreieck, dem sie angehören, bestimmt ist. Eine Ausnahme findet dann statt, wenn alle vier Punkte in einem zusammenfallen, was bei gleichseitigen Dreiecken der Fall ist. In diesem Falle gibt es unendlich viele Lösungen, da jedes gleichseitige Dreieck die Forderung erfüllt.

Damit ein n-Eck konstruiert werden kann, müssen im allgemeinen $2n–3$ Stücke vorgegeben werden, bei einem Dreieck folglich 3. Diese sind in den meisten Fällen Strecken (Seiten, Diagonalen und andere Transversalen) und Winkel. Eher ungewöhnlich ist die Vorgabe von Punkten. Die Konstruktion ist trivial, wenn die drei Eckpunkte vorgegeben werden. Keineswegs trivial ist hingegen die Aufgabe, das zugehörige Dreieck zu konstruieren, wenn drei der „merkwürdigen“ Punkte vorgegeben werden. Aus vier angegebenen bzw. angenommenen Punkten können drei auf viererlei Art und Weise:

$$\binom{4}{3} = 4$$

ausgewählt werden. Grundsätzlich ergeben sich so vier Aufgaben für die Bestimmung des Dreiecks. Zweck der vorliegenden Studie soll sein, zu zeigen, wie diese vier Aufgaben „auf bequemste Art“ (*commodissime*) gelöst werden können. Dabei wird sich erweisen, daß unter den drei ausgesuchten Punkten der Inkreismittelpunkt G keinesfalls fehlen darf.

3. Wer immer sich anschickt, diese Aufgaben aufzugreifen, wird indessen bald feststellen, daß sie sehr schwierig zu behandeln sind, weil kaum auszumachen ist, auf welche Weise unbekannte Größen in die Rechnung einzubeziehen sind, damit man zum mindesten zu Gleichungen gelangt, die sich lösen lassen. Das gesamte Unterfangen läuft letztlich auf die geschickte Wahl der unbekannten Größen hinaus, wobei wir Sorge tragen müssen, uns nicht in langwierige oder gar gänzlich unentwirrbare Rechnungen zu verlieren. Sind jedoch die Schwierigkeiten glücklich überwunden, ergeben sich zwischen jenen vier Punkten gewisse merkwürdige Beziehungen, deren Kenntnis als von einiger Bedeutung für die Geometrie beurteilt werden darf.

Betrachtung zu Ziffer 3.

Euler gilt die Algebra, und die Mathematik überhaupt, als die Wissenschaft, welche lehrt, wie von bekannten Größen auf unbekannte geschlossen werden kann [49], eine Deutung, die sicher auf die Bereiche der Anwendungen wie Physik, Astronomie, Vermessungswesen usw. zutrifft. Die Konstruktionsaufgabe der Eulerschen Studie darf dazu gerechnet werden: es gilt, unbekannte Größen zu definieren, die gestatten, das gesuchte Dreieck zu konstruieren, sobald sie bekannt sind. Die Umwandlung in bekannte Größen geschieht durch Mittel der klassischen Algebra, wie der Hinweis auf lösbare Gleichungen andeutet.

Aus dem Wortlaut der Zif. 3 geht hervor, daß selbst Euler Mühe aufwenden mußte, um geeignete andere, von den vorgegebenen Punkten E, F, G und H abhängige, Stücke des Dreiecks zu finden, mit deren Hilfe dieses schließlich konstruiert werden kann. Die Warnung vor *calculis taediosissimis et inextricabilibus* läßt sogar an Sackgassen, aus denen kaum mehr ein Ausweg zu finden war, denken. Der Hinweis auf die Schwierigkeit, lösbare Gleichungen aufzustellen, deutet an, daß das Problem algebraisch, d.h. in diesem Falle analytisch-geometrisch, behandelt werden soll. Das dazu nötige Koordinatensystem wird in Zif. 5 angedeutet.

Zwar mündet die Untersuchung ab der Zif. 10 in Formeln, die man füglich als *calculi taediosi*, wenn auch nicht *inextricabiles*, bezeichnen kann, dennoch rechtfertigt sie grundsätzlich das Adjektiv *facilis* im Titel. Gerade deshalb ist es zu bedauern, daß Euler nicht konkreter von den offensichtlich notwendig gewesenen Versuchen, unbekannte Größen zu finden, spricht. Als bekannte Größen gehen sicher die vorgegebenen Punkte E, F, G und H, und zwar in Gestalt ihrer insgesamt sechs wechselseitigen Abstände voneinander, in die Rechnung ein. Die drei gesuchten „Unbekannten“, welche die Konstruktion eines Dreiecks gestatten sollen, können Strecken und Winkel sein. Der Prüfung haben schließlich die drei Dreiecksseiten a, b, c standgehaltenen. Diese gilt es zu berechnen. Damit müssen nur gleichartige Größen, nämlich Strecken, miteinander verglichen und in Beziehung gesetzt werden.

Sollte es gelingen, die Dreiecksseiten a, b, c direkt zu berechnen, wäre dies der einfachste Fall. Der zweite Weg, in zwei Stufen, wäre jedoch, die Rechnungen bis zur Aufstellung einer Gleichung voranzutreiben, als deren Lösung sich die Dreiecksseiten a, b, c ergeben. In Zif. 3 wird diese zweite Möglichkeit angedeutet, und sie wird schließlich auch benutzt. Eulers Untersuchung zielt auf die Aufstellung einer kritischen Gleichung dritten Grades ab, deren Lösungen die Dreiecksseiten a, b, c sind.

Die „merkwürdigen“ Beziehungen zwischen den kritischen Punkten E, F, G, H werden in Zif. 3 nur angedeutet, nicht explizit genannt. Es *kann* sich dabei um die Kollinearität der Punkte E, F, H handeln.

---

[49] Siehe Fußnote 21.

4. Damit die Figuren nicht durch eine Vielzahl von Linien überlastet werden, zeige ich das Dreieck *ABC* viermal. In der ersten Figur (Fig. 1) stehen die Geraden *AM*, *BN* und *CP* senkrecht auf den Gegenseiten der Punkte *A*, *B* und *C*. Ihren Schnittpunkt bezeichne ich mit dem Buchstaben *E*. *E* ist der erste der fraglichen vier Punkte. In der zweiten Figur halbieren die Geraden *Aa*, *Bb*, *Cc* die Gegenseiten von *A*, *B*, *C*. Ihren Schnittpunkt, den zweiten der merkwürdigen Punkte, soll der Punkt *F* bezeichnen. *F* ist der Schwerpunkt des Dreiecks. In der dritten Figur halbieren die Geraden $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ die Winkel *A*, *B*, *C*. Ihr Schnittpunkt *G* liefert den dritten der vorerwähnten Punkte, nämlich den Mittelpunkt des Inkreises. In der vierten Figur schließlich werden in den Seitenmittelpunkten *S*, *T*, *V* die Senkrechten *SH*, *TH*, *VH* errichtet, deren Schnittpunkt *H* den Mittelpunkt des Umkreises darstellt.

Betrachtung zu Ziffer 4.

In den Ziffern 6 bis 9 werden die den weiteren Überlegungen zugrundeliegenden Beziehungen zwischen den „merkwürdigen Punkten“ und den Seiten bzw. Ecken des gesuchten Dreiecks durch vier Figuren veranschaulicht. Es handelt sich dabei immer um dasselbe Dreieck *ABC*. Dadurch soll vermieden werden, daß die Vielzahl der nötigen Linien den Beschauer verwirrt.

Als Vorbereitung für die nachfolgenden Rechnungen werden in den Ziffern 4 und 5 die Bezeichnungen der geometrischen Objekte der Figuren 1 bis 4 eingeführt, die später als Symbole in den langatmigen algebraischen Formeln auftreten werden. Im Text des Herausgebers *A. Speiser* werden grundsätzlich alle algebraischen und geometrischen Symbole als ***kursive*** Groß- und Kleinbuchstaben des lateinischen Alphabets geschrieben. Ausgenommen sind Winkel: sie werden durch kursive griechische Kleinbuchstaben bezeichnet. Im allgemeinen bezeichnen, wie heute noch üblich, Großbuchstaben Punkte und Kleinbuchstaben Strecken bzw. deren Längen. Digramme von Großbuchstaben bezeichnen Strecken. So bedeutet *AB* die durch die Endpunkte *A* und *B* begrenzte (gerade) Strecke. Das Buchstabentripel *ABC* bezeichnet das Dreieck, dessen Eckpunkte die Punkte *A*, *B*, *C* sind.

In der **Figur 1** sind die Strecken *AM*, *BN*, *CP* die Höhen im Dreieck *ABC*. Ihre Fußpunkte sind demnach die Punkte *M*, *N*, *P*, ihr Schnittpunkt *E* der Höhenschnittpunkt oder kurz Höhenpunkt.

In der **Figur 4** sind die Punkte $S \in AB$, $T \in BC$ und $V \in CA$ die Mittelpunkte der Dreiecksseiten $c = AB$, $a = BC$ und $b = CA$. Ihnen entspringen die Mittelsenkrechten auf den Dreiecksseiten *AB*, *BC*, *CA*. Schnittpunkt der Mittelsenkrechten ist der Punkt *H*. Nach einem elementargeometrischen Satz ist *H* der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks *ABC*.

Offen bleibt, weswegen in der **Figur 2** die Mittelpunkte der Seiten $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ mit denselben Kleinbuchstaben *c*, *a*, *b* benannt werden müssen, da doch nachher dafür die Großbuchstaben *S*, *T*, *V* benutzt werden. Dementsprechend heißen die Seitenhalbierenden oder Schwerlinien in Ziffer 4 *Aa*, *Bb* und *Cc* statt *AT*, *BV* und *CS*. Der Schnittpunkt *F* der Seitenhalbierenden *Aa*, *Bb*, *Cc* ist der Schwerpunkt des Dreiecks *ABC*. Die Bezeichnung der Seitenmittelpunkte durch die Kleinbuchstaben *a*, *b*, *c* verletzt nicht nur den Grundsatz, Punkte generell durch Großbuchstaben und Strecken durch Digramme von Großbuchstaben zu bezeichnen, sondern zwingt Verfasser wie Leser, Doppeldeutigkeiten in Kauf zu nehmen.

In Zif. 7 finden sich die Strecken *cQ*, *cP* und *Ac*, deren linker bzw. rechter Endpunkt der Mittelpunkt *c* der Dreiecksseite *AB* (= *c*) ist. Folgerichtig gilt denn auch die den heutigen Leser befremdlich anmutende „Gleichung“ $Ac = \frac{1}{2}c$.

Der Mißstand wird noch dadurch verschlimmert, daß in der Ziffer 5, wohl als Abkürzung des lateinischen Wortes *Area*, auch der Flächeninhalt des Dreiecks *ABC* mit dem Großbuchstaben *A* bezeichnet wird, obwohl der Buchstabe *A* bereits für den Eckpunkt *A* des Dreiecks *ABC* (und linken Endpunkt der „Basis“ *AB*) beansprucht worden ist.

Im Laufe der Rechnungen wird sich die Notwendigkeit ergeben, den Flächeninhalt A mit den Strecken a, b, c und deren Summe $p = a+b+c$ zu multiplizieren, so in den Ziffern 6, 12, 13, 14, 16 und 17. Es finden sich daher dort ***Produkte*** wie cA, $(a+b+c)A$, pA, die somit dreidimensionale Größen darstellen, während die ***Strecke*** Ac eindimensional ist. Zu argumentieren, das Digramm cA bedeute ein Produkt, dessen Permutation Ac hingegen eine Strecke, ist kaum statthaft, da andererseits cQ und cP nicht Produkte, sondern Strecken bezeichnen. Hier ist also $cA \neq Ac$! Im übrigen ist das kommutative Gesetz der Multiplikation in der Studie keineswegs aufgehoben.

Andere „merkwürdige Gleichungen" sind etwa $\frac{1}{2}AM \cdot BC = A$ bzw. $AM = \frac{2A}{a}$ in Zif. 6, wo der Buchstabe A bald Stellvertreter eines Punktes bald einer Fläche ist. Solche Schreibweisen würde man heute vermeiden, wenn gleich sie den Sachverständigen nicht beirren können. Sie kommen indessen nur sporadisch bei der Berechnung von Koordinaten vor und werden danach nicht mehr gebraucht.

Gleiches ist zu **Figur 3** zu bemerken. Hier werden die Winkelhalbierenden der Winkel $\alpha = \angle A$, $\beta = \angle B$ und $\gamma = \angle C$ durch die Digramme $A\alpha$, $B\beta$ und $C\gamma$ bezeichnet. Der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden $A\alpha$, $B\beta$ und $C\gamma$ ist der Mittelpunkt G des Inkreises des Dreiecks ABC. Die kursiven *griechischen* Kleinbuchstaben α, β, γ bedeuten demnach nicht nur die Winkel $\angle A$, $\angle B$ und $\angle C$, sondern zugleich die Schnittpunkte ihrer Winkelhalbierenden mit den Seiten a, b, c (siehe Fig. 3).[50]

Die Doppeldeutigkeiten ließen sich formal beheben, wenn die zweifelhaften Buchstabenpaare als indexierte Buchstaben A_c, B_β usw. interpretiert werden dürften. Es ist ja denkbar, daß eine noch unbeholfene Drucktechnik des 18. Jhdts. nicht erlaubte, deutlich genug zwischen Ac und A_c usw. zu unterscheiden. Diese Auffasssung wird allerdings weder von der zeichnerischen Darstellung in den Figuren 1 bis 4 noch von den Formeln im Begleittext unterstützt. Es ist nicht wegzudeuten, daß die Kleinbuchstaben a, b, c in Fig. 2 die Mittelpunkte der Seiten a, b, c, die griechischen Kleinbuchstaben α, β, γ in Fig. 3 dagegen die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden der Winkel α, β, γ und der gegenüberliegenden Dreiecksseiten bezeichnen sollen. Der einzige auszumachende Unterschied ist der, daß in den Figuren 1 bis 4 a, b, c und α, β, γ *kursive* Kleinbuchstaben, A, B, C hingegen *aufrechtstehende* Großbuchstaben sind.

---

[50] In den vom Editor vermutlich aus dem Originaldruck unverändert übernommenen Figuren sind die Eckpunkte und andere Punkte des Dreiecks durch große Normalbuchstaben (aufrecht) A, B, C,..., die Mittelpunkte der Seiten hingegen durch *kursive* Kleinbuchstaben a, b, c beschriftet. Gleiches gilt für die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden mit den Seiten, die mit kursiven griechischen Minuskeln α, β, γ bezeichnet sind. Im Text der Speiserschen Edition werden hingegen alle Symbole, die Zahlzeichen ausgenommen, konsequent kursiv wiedergegeben, wodurch eine vielleicht beabsichtigte Differenzierung wieder entfällt.

5. Um die Örter dieser vier Punkte leichter angeben und hernach vergleichen zu können, fälle ich von jedem Punkt auf die als Basis betrachtete Dreiecksseite *AB* die Lote *EP*, *FQ*, *GR* und *HS*. Das erste Lot *EP* und das vierte *HS* sind schon in der Konstruktion enthalten. Sodann benenne ich die drei Dreiecksseiten

$$AB = c, \quad AC = b \quad \text{und} \quad BC = a.$$

Zur rechnerischen Behandlung der Fläche *A* des Dreiecks diene ferner die bekannte Formel

$$AA = \frac{1}{16}(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$$

oder

$$AA = \frac{1}{16}(2aabb + 2aacc + 2bbcc - a^4 - b^4 - c^4)\ .$$

Alsdann untersuche ich die Lage jedes einzelnen der vier Punkte bezüglich der Basis *AB* gesondert in den nachfolgenden Abschnitten.

<u>Betrachtung zu Ziffer 5</u>.

In Zif. 5 werden für die Dreiecksseiten als Abkürzungen die Kleinbuchstaben *a*, *b*, *c* eingeführt, die heute noch in gleicher Bedeutung – gleichsam normiert – verwendet werden: $a = BC$, $b = CA$ und $c = AB$. Auch die positive Drehrichtung („linksherum“) als generelle Orientierung der Dreiecke ist bis heute beibehalten worden. Die Seite *a* liegt also dem Eckpunkt *A*, die Seite *b* dem Eckpunkt *B*, die Seite *c* dem Eckpunkt *C* gegenüber. In Zif. 21 folgen noch die Abkürzungen *f*, *g* und *h* für die Strecken $GH = f$, $FH = g$ und $FG = h$, endlich in Zif. 30 *e* und *k* für die Strecken $EG = e$ und $EH = k$.

Algebraiker und Geometer wissen, daß durch geschickte Wahl der Bezeichnungen, verzwickte Rechnungen transparent gemacht werden können. Oft enthüllen zugehörige Formeln ungeahnte Symmetrien und gewinnen durch geeignete Symbole sogar einen aesthetisch ansprechenden Aspekt; der sich auch mnemotechnisch nutzen läßt [51]. Vereinbart man etwa, daß das Tripel (*ABc*), wo das dritte Element ein Kleinbuchstabe ist, die Definition $AB = c$ bezeichnen soll, erhält man die beiden andern durch zyklische Vertauschung der Elemente: $(BCa) = BC = a$ und $(CAb) = CA = b$. Dasselbe Prinzip gilt für die Abkürzungen in Zif. 21: $(FGh) = FG = h$, $(GHf) = GH = f$ und $(HFg) = HF = g$, wo (*FGh*) ebenfalls ein zyklisch permutierbares Buchstabentripel in strikter alphabetischer Folge wie (*ABc*) ist.

Als weitere Abkürzung wird in Zif. 5 der Großbuchstabe *A* zur Bezeichnung des Flächeninhalts des Dreiecks *ABC* eingeführt. Er erklärt sich zwar als Abkürzung des lateinischen Wortes *Area*, droht aber mit dem Eckpunkt *A* des Dreiecks in Konflikt zu geraten, da er dem Prinzip der Eindeutigkeit von Bezeichnungen und Symbolen widerspricht [52].

Im Gegensatz zur sonst gültigen Vereinbarung, daß Buchstabenpaare wie *AB* Strecken bezeichnen sollen, deren Endpunkte die Punkte *A* und *B* sind, vertritt das Paar *AA* hier nicht folgerichtig die Strecke null, sondern bezeichnet das Produkt $A \cdot A = A^2$. Potenzen sind Produkte von identischen Faktoren. Werden diese ausgeschrieben, wird die Lektüre eines Textes mit höheren Potenzen sehr umständlich: der Leser sieht sich ständig gezwungen, die Faktoren abzuzählen. Es drängt sich auf, die jeweilige Anzahl der identischen Faktoren im Schriftbild anzudeuten. Am einfachsten läßt sich dies wohl durch einen numerischen Index bewerkstelligen. Die Einführung dieser Methode rechnet Tropfke Descartes als Verdienst an.

[51] Nach S. Günther (ADB) soll Gauß die Meinung geäußert haben, in der Berechnung der Logarithmen liege eine gewisse *Poesie*. Man betrachte unter dem Gesichtspunkt der Aesthetik die Mitternachtsformel (S. 40 und 41) oder die Lösungen der Gleichung dritten Grades (S. 46 und 49). Gleiches gilt von Eulers Formeln in den nachfolgenden Ziffern.

[52] Vgl. *Betrachtung zu Ziffer* 4.

Die Indexierung von Potenzen durch hochgestellte Exponenten läßt das Grundgesetz des Potenzrechnens, $a^n a^m = a^{n+m}$, fast als Selbstverständlichkeit erscheinen und ruft der Erweiterung der Exponenten n und m auf negative und gebrochene Zahlen. Das Potenzgesetz ist im Prinzip das gleiche Gesetz, das dem Rechnen mit Logarithmen zugrunde liegt, $\log(xy) = \log x + \log y$, welches ebenfalls die Multiplikation auf eine Addition zurückführt. Es war nur eine Frage der Zeit, bis die beiden Rechenarten identifiziert werden sollten. Gardiner in London nennt im Vorwort zu seiner Logarithmentafel 1742 die Logarithmen Exponenten zur Basis 10, laut Tropfke erstmals. Nach andern hätte zwanzig Jahre früher bereits Euler diese Identifikation vorgeschlagen.

Descartes wandte seine Erfindung allerdings nur auf Produkte mit drei und mehr identischen Faktoren an. Quadrate a^2 schrieb er weiterhin als Produkte aa aus. Ersichtlich blieb diese Gewohnheit bis ins späte 18. Jahrhundert erhalten. Euler schreibt deshalb in Zif. 5 noch AA statt A^2 und $aabb$ statt a^2b^2 usw. Den Exponenten 2 verwendet er jedoch für Streckenquadrate wie EF^2 und für Quadrate von Klammerausdrücken wie $(a+b)^2$, $(a+b+c)^2$ usw. Eulers Formeln präsentieren deshalb dem heutigen Leser einen ungewohnten Aspekt; am fremdartigsten erscheint wohl $aabbcc$ für $(abc)^2$

Die in Zif. 5 eingeführten Formeln für das Quadrat der Dreiecksfläche A, also $A^2 = AA$, sind die oben hergeleiteten Formeln (2a) und (2b), die sog. Heronsche Flächenformel [53]. Die Größe A wird in den meisten Formeln auftreten, meistens im Nenner von Brüchen und als Quadrat $AA = A^2$.

In Zif. 5 wird schließlich das rechtwinklige Koordinatensystem eingeführt, bezüglich dessen die verschiedenen Dreieckspunkte angegeben werden sollen. Durch geschickte Wahl des Koordinatensystems können Rechnungen oft erheblich vereinfacht werden. Bei Dreiecken empfiehlt es sich, eine Achse in eine Dreiecksseite zu legen. Abszissenachse (x-Achse) ist daher die – von Euler noch „Basis“ genannte – Seite AB des Dreiecks. Die Ordinatenachse (y-Achse) wird nicht explizit bezeichnet, sie bleibt virtuell: die Ordinate eines Punktes ist sein senkrechter Abstand von der Basis AB. Nullpunkt des Systems ist der Eckpunkt A des Dreiecks ABC, obwohl nicht ausdrücklich als solcher bezeichnet.

Als Beispiele mögen die Eckpunkte A, B, C des Dreiecks ABC bezüglich der Bezugsgeraden AB mit Nullpunkt A als Funktionen der Seiten a, b, c angegeben werden: $A = (0|0)$, $B = (c|0)$. Die Abszisse des Punktes C ist offenbar weniger trivial, nämlich gleich der Projektion $p = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2c}$ der Seite b auf die Seite c [54]; seine Ordinate andererseits ist gleich der Höhe h des Dreiecks bezüglich der Seite $AB = c$. Steht, nach Euler, der Buchstabe A als Symbol für den Dreiecksinhalt $A = \frac{1}{2}ch$, ist die Ordinate $h = 2A/c$. Berechnet man h mit Hilfe des Satzes von Pythagoras, erhält man

$$h^2 = b^2 - p^2 = b^2 - \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)^2 = \frac{1}{4c^2}(4b^2c^2 - b^4 - c^4 - a^4 - 2b^2c^2 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2)$$

$$= \frac{1}{4c^2}(2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4)\ ,$$

wo der Ausdruck in der Klammer nichts anderes als die Funktion $16A^2$ des Dreiecksinhalts A nach Formel (2b) ist: $16A^2 = 2\Sigma a^2b^2 - \Sigma a^4$. Die Identität

$$h = \frac{2A}{c} = \sqrt{\frac{1}{4c^2}(2\Sigma a^2b^2 - \Sigma a^4)} = \sqrt{\frac{1}{4c^2}16A^2} = \frac{1}{2c}4A$$

erlaubt somit, auch die Koordinaten des (hypothetischen) Dreieckspunktes C ausschließlich als Funktion der Dreiecksseiten a, b, c anzugeben:

$$C = (p|h) = \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\,\middle|\,\frac{4A}{2c}\right) = \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\,\middle|\,\frac{1}{2c}\sqrt{2\Sigma a^2b^2 - \Sigma a^4}\right).$$

[53] Siehe Seite 30ff., Formeln (2a) bis (2e).

[54] Vgl. Abb. 1, Seite 30.

Das Symbol A erscheint hier als Abkürzung für die Formel $\frac{1}{4}\sqrt{(2\Sigma a^2b^2 - \Sigma a^4)}$ und wird in den nachfolgenden Rechnungen häufig als solche wahrgenommen werden. Gleiches wird in den folgenden Ziffern 6 bis 9 mit den „merkwürdigen Punkten“ E, F, G und H vorgenommen.

Durch Verschiebung mittels Verschiebungsvektoren $\mathfrak{v}$ entstehen aus dem Nullpunkt O des Koordinatensystems Punkte V als Abbildungen von O. Die Vektoren $\mathfrak{v}$ heißen Ortsvektoren der Punkte V und sollen für die nachfolgenden Überlegungen durch die entsprechenden deutschen Kleinbuchstaben bezeichnet werden. Im zweidimensionalen Raum der Zeichenebene ist folglich der Ortsvektor des Eckpunktes C der zweidimensionale Vektor $\mathfrak{c}$:

$$\mathfrak{c} = (c_x|c_y) = (\boldsymbol{p}|\boldsymbol{h}) = \left(\frac{\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2-\boldsymbol{a}^2}{2\boldsymbol{c}} \,\middle|\, \frac{4\boldsymbol{A}}{2\boldsymbol{c}}\right).$$

In dieser Vorschau auf die gestellte Aufgabe fehlt jeglicher Hinweis auf eine allenfalls nachzuweisende ***Kollinearität*** merkwürdiger Punkte; nicht einmal die Vermutung einer solchen wird ausgesprochen, es sei denn, man betrachte das unspezifische Urteil in Zif. 3 als solche:

..... ***insignes quaedam affectiones inter illa quatuor puncta se prodent***, ***quarum cognitio in Geometria haud levis momenti est censenda***.

Daß die Punkte E, F und H auf einer Geraden liegen, wird sich – in Eulers Darstellung – vielmehr erst als Folge der Berechnung ihrer Koordinaten und der Angabe ihrer wechselseitigen Abstände voneinander in Gestalt algebraischer Formeln, gleichsam zufällig, beim Interpretieren der Formeln herausstellen. Die „Euler-Gerade“ ist somit eine Zufallsentdeckung, oder soll, so will es offenbar der Autor, zumindest als solche wahrgenommen werden!

I. Der Höhenschnittpunkt E

6. Zunächst ist aus der Elementargeometrie bekannt (Fig. 1)

$$AP = \frac{cc+bb-aa}{2c},$$

ebenso

$$BM = \frac{aa+cc-bb}{2a}.$$

Aus $\frac{1}{2}AM \cdot BC = A$ folgt alsdann $AM = \frac{2A}{a}$, und die Ähnlichkeit der Dreiecke *ABM* und *AEP* liefert

$$AM : BM = AP : EP,$$

woraus sich ergibt

$$EP = \frac{(cc+bb-aa)(aa+cc-bb)}{8cA}.$$

Damit ist die Lage des Punktes *E* hinsichtlich der Basis *AB* bestimmt, nämlich durch

$$AP = \frac{cc+bb-aa}{2c} \quad \text{und} \quad PE = \frac{(cc+bb-aa)(aa+cc-bb)}{8cA}.$$

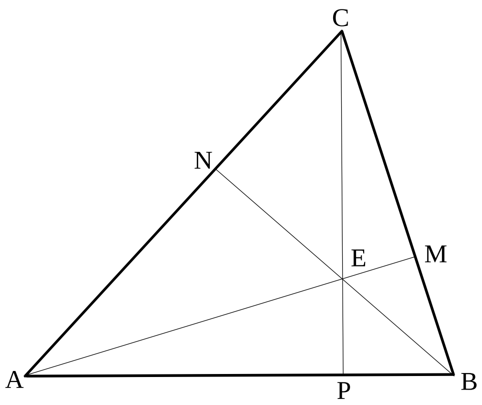


Fig. 1

Betrachtung zu Ziffer 6.

Die Ziffern 6 bis 9 bilden zusammen ein besonderes Kapitel. In ihnen werden die Koordinaten der „merkwürdigen Punkte“ *E, F, G* und *H* als Funktionen der Dreiecksseiten *a, b, c* berechnet. Ziel ist jedoch die Berechnung der vorerst unbekannten Dreiecksseiten *a*, *b*, *c*, mit deren Hilfe das gesuchte Dreieck *ABC* konstruiert werden kann, sobald sie bekannt sind.

In den Ziffern 6 bis 9 wird im Sinne der geometrischen Arbeitsstufe *Analysis* angenommen, die Aufgabe sei gelöst, d.h. das Dreieck *ABC*, das die Punkte *E*, *F*, *G* und *H* enthält, sei durch die Lage seiner Eckpunkte *A*, *B* und *C* und insbesondere durch die Längen der Seiten $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ bekannt. Aus den Koordinatendifferenzen der Punkte *E*, *F*, *G*, *H* können deren sechs relative Entfernungen *EF*, *EG*, *EH*, *FG*, *FH*, *GH* voneinander als Funktionen von *a*, *b*, *c* berechnet werden.

Laut Aufgabenstellung sollen von diesen die drei Distanzen *EG*, *FG* und *EF*, d.h. die Ergebnisse der Arbeitsstufe *Analysis*, vorgegeben sein. Durch „Rückwärtsrechnen“ von *EF*, *EG* usw. werden endlich die gesuchten Dreiecksseiten *a*, *b*, *c* gefunden. Ab Zif. 21 werden Ausgangsgrößen und Zielgrößen vertauscht.

Für die Berechnung der Koordinaten von *E*, *F*, *G*, *H* genügen einige wenige fundamentale Beziehungen unter den Stücken der Dreiecke, wie sie aus der Schulgeometrie bekannt sind. Statt *ex elementis constat fore* hätte Euler, Bezug nehmend auf das bis in die Neuzeit richtungweisende, unter dem lateinischen Kurztitel *Elementa* bekannte Sammelwerk Euklids, durchaus *ex Elementis constat fore* schreiben können. Denn mehr als die bekannten Sätze aus Euklids Geometrie sind für das Verständnis von Eulers Argumenten nicht erforderlich.

Die nachfolgenden Überlegungen benutzen folgende Vereinbarungen (Abkürzungen):

— für jeden Winkel α, seien $\alpha' = 90° - \alpha$ und $\alpha'' = 180° - \alpha$;
— für jede Dreiecksseite *a* sei h_a die auf ihr senkrecht stehende Höhe;
— die Bezeichnung des Ortsvektors eines Punktes bezüglich des Nullpunkts des Koordinatensystems geschieht durch deutsche Buchstaben: $\overrightarrow{OA} = (a_x | a_y) = \mathfrak{a}$.

In Zif. 6 werden die Koordinaten des Höhenschnittpunkts (Höhenpunkts) berechnet (Fig. 1). Die drei Höhen schneiden sich alle drei im Höhenpunkt *E* . Zur Bestimmung des Punktes *E* genügen zwei Höhen. Euler entscheidet sich für h_a und h_c.

Durch die Höhen h_a und h_c entstehen drei rechtwinklige ähnliche Dreiecke: *BCP*, *ABM* und *AEP*. Ihre Winkel sind, neben 90°, die Winkel $\beta = \angle B$ und β'. Die Katheten des Dreiecks *AEP* sind die gesuchten Koordinaten des Punktes *E*: $e_x = AP$ und $e_y = EP$.

Die *x*-Koordinate e_x ist schon berechnet worden. Sie ist gleich der Projektion *p* der Seite *CA* auf die Seite *AB* [55]:

$$e_x = p = AP = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} \ .$$

Den beiden andern Teildreiecken entnimmt man:

$$\operatorname{tg}\beta' = \frac{e_y}{p} = \frac{c-p}{h_c} = \frac{BM}{h_a} \quad \text{und folglich} \quad e_y = \frac{p(c-p)}{h_c} = \frac{pBM}{h_a} \ .$$

Euler argumentiert mit *BM* und h_a. Aus Figur 1 liest man ab, daß *BM* aus *AP* durch zyklische Vertauschung von *a*, *b*, *c* entsteht:

$$BM = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a} \ .$$

[55] Vgl. Abb. 1, Seite 30.

Nach Euklid ist ferner der Inhalt A des Dreiecks ABC : $A = \frac{1}{2} a h_a$, woraus sich die Höhe h_a als

$$h_a = \frac{2A}{a}$$

errechnet. Die y-Koordinate des Punktes E ist somit

$$e_y = \frac{a}{2A} \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2a}\right) = \frac{1}{8cA}(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2) ,$$

wo das Symbol A im Nenner eine Abkürzung für den Flächeninhalt des Dreiecks ABC ist.

Derselbe Wert e_y ergibt sich aus $e_y = \frac{p(c-p)}{h_c}$. Die Höhe h_c ist analog h_a:

$$h_c = \frac{2A}{c}$$

und folglich

$$e_y = \frac{c}{2A} \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)\left(c - \frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right) = \frac{1}{8cA}(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2) .$$

Für den Ortsvektor des Höhenpunktes E folgt:

$$\mathbf{e} = (e_x | \, e_y) = \left(\frac{\boldsymbol{c^2+b^2-a^2}}{\mathbf{2}\boldsymbol{c}} \,\middle|\, \frac{\boldsymbol{(c^2+b^2-a^2)\,(a^2+c^2-b^2)}}{\mathbf{8}\boldsymbol{cA}} \right) .$$

Aus den Formeln (2a) und (2b) ist bereits bekannt, daß der Flächeninhalt A zwar eine Quadratwurzel, aber dennoch nur eine Funktion der Dreiecksseiten a, b und c ist. Die x-und y-Koordinaten und damit der Ortsvektor $\mathbf{e} = (e_x | \, e_y)$ des Höhenpunktes E sind daher ebenfalls Funktionen der Dreiecksseiten a, b, c allein. Sie sind indessen keine symmetrischen Funktionen: die Vertauschung beliebiger zweier oder aller drei Argumente bewirkt sehr wohl eine Änderung des Funktionswertes. In der Tat hätte eine Drehung des Dreiecks eine Änderung der Position des Höhenpunktes zur Folge.

Strecken sind eindimensional oder linear; ihre physikalische Dimension ist *Länge*, formal $[L^1]$. Flächen sind zweidimensional oder quadratisch, nämlich Produkte von Strecken, formal $[L^1 \times L^1] = [L^2]$. Die Koordinaten e_x und e_y sind Strecken. Die Formeln zu ihrer Berechnung aus den Dreiecksseiten a, b, c sind gebrochene rationale Funktionen bestehend aus Zähler und Nenner. Der Nenner (Divisor) von e_x ist linear (eindimensional). Damit der Quotient e_x eindimensional ist, muß der Zähler zweidimensional sein: als Summe von Streckenquadraten ist er in der Tat quadratisch (zweidimensional). Somit ist die Dimension von e_x formal $[L^2 / L^1] = [L^1]$. Der Zähler von e_y ist ein Produkt von zwei quadratischen Faktoren, also vierdimensional, formal $[L^2 \times L^2] = [L^4]$. Der Nenner ist dreidimensional, nämlich das Produkt einer Strecke und einer Fläche, formal $[L^1 \times L^2] = [L^3]$. Als Strecke muß der Quotient e_y linear sein, seine Dimension ist denn auch formal $[L^4 / L^3] = [L^1]$. Überlegungen zur Dimension von Operanden und Rechenergebnissen dienen als Rechenproben analog den früher oft verwendeten Neuner- und Elferproben.

In den Ziffern 6 bis 9 wird an Hand der Figuren 1 bis 4 noch geometrisch argumentiert. Dabei werden Beziehungen benutzt, die aus Euklids *Elementen* bekannt sind: Eigenschaften ähnlicher Dreiecke und daraus folgende Proportionen sowie Eigenschaften des Kreises (Tangenten und ihre Berührungspunkte, Peripherie- und Zentriwinkel). Ab Zif. 10, wo es um die Berechnung der Quadrate der Abstände der Punkte E, F, G und H voneinander geht, wird die Argumentation rein algebraisch.

II. Der Schwerpunkt F

7. Wird aus der Ecke C (Fig. 2) das Lot CP auf die Basis AB gefällt, haben wir nach dem Vorherigen

$$AP = \frac{cc+bb-aa}{2c} \quad \text{und} \quad CP = \frac{2A}{c}\ .$$

Ferner ist aus der Elementargeometrie bereits bekannt, daß

$$FQ = \frac{1}{3}CP = \frac{2}{3}\frac{A}{c} \quad \text{und} \quad cQ = \frac{1}{3}cP\ .$$

Weil andererseits $\quad Ac = \frac{1}{2}c\,,$

wird $\quad cP = \frac{bb-aa}{2c}$ und daher $cQ = \frac{bb-aa}{6c}\ .$

Es folgt $\quad AQ = \frac{3cc+bb-aa}{6c}\ .$

Damit ist der Ort des Punktes F bezüglich der Basis AB bestimmt, nämlich durch

$$AQ = \frac{3cc+bb-aa}{6c} \quad \text{und} \quad QF = \frac{2A}{3c}\ .$$

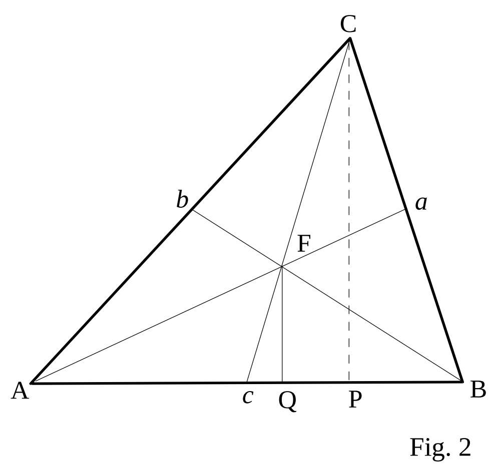


Fig. 2

<u>Betrachtung zu Ziffer 7</u>.

Die Berechnung der Koordinaten f_x und f_y des Schwerpunkts F benutzt die Tatsache, daß der Schwerpunkt die Schwerlinien im Verhältnis 1 : 2 teilt. Die doppeldeutige Verwendung des Kleinbuchstabens c und des Großbuchstabens A in ein und derselben Argumentationsfolge ist unter *Betrachtung zu Ziffer 4* (Seite 66) diskutiert worden. Der Kleinbuchstabe c bezeichnet sowohl die Dreiecksseite AB bzw. deren Länge als auch den Mittelpunkt der Seite AB; der Großbuchstabe A bedeutet bald den Flächeninhalt des Dreiecks ABC, bald dessen einen Eckpunkt bzw. den linken Endpunkt der Dreiecksseite AB (und Nullpunkt des Koordinatensystems).

Die Digramme Ac, cP und cQ sind hier folglich Strecken (eindimensional). In Zif. 6 ist hingegen das formal gleiche Digramm cA im Nenner der y-Koordinate e_y des Höhenpunktes E das Produkt einer Länge und einer Fläche (dreidimensional), nämlich der Seite c und der Dreiecksfläche A. Gleichungen wie $Ac = \frac{1}{2}c$, wo c in jeweils verschiedener Bedeutung auftritt, scheinen heute seltsam. Ansonsten wird durch die ganze Studie der Grundsatz, Punkte durch Großbuchstaben zu bezeichnen, konsequent befolgt. Im Ergebnis werden die Seitenmittelpunkte c usw. nicht mehr benötigt. Die Buchstaben a, b und c bedeuten wieder die Längen der Dreiecksseiten, und der Großbuchstabe A steht für die Dreiecksfläche, wie schon in Zif. 6.

Wie in Zif. 6 ist P der Fußpunkt der Höhe h_c. Der Buchstabe Q bezeichnet den Fußpunkt des Lots von F auf die Seite AB (Basis). (In Zif. 19 wird der Buchstabe Q in anderer Bedeutung benutzt, nämlich als Symbol für den Quotienten r/p, wo r und p die aus der Diskusssion der symmetrischen Funktionen bekannten Abkürzungen für die Gleichungskoeffizienten – und symmetrischen Funktionen – $p = \Sigma a = a+b+c$ und $r = abc$ sind. Q ist dort also eine zweidimensionale Größe.)

Die x-Koordinate des Schwerpunkts F ist $f_x = AQ$, seine y-Koordinate $f_y = FQ$ (Fig.2). Die rechtwinkligen Dreiecke CcP und FcQ sind ähnlich. Die Seite Cc ist eine Schwerlinie und wird vom Schwerpunkt F gedrittelt: $Fc = \frac{1}{3}Cc$, daher auch $f_y = FQ = \frac{1}{3}CP = \frac{1}{3}h_c = \frac{2}{3}\frac{A}{c}$ und $cQ = \frac{1}{3}cP = \frac{1}{3}(AP–Ac)$. Da c zugleich die Mitte der Seite $AB = c$ bezeichnet, ist, immer in Eulers undifferenzierter Schreibweise, die Strecke $Ac = \frac{1}{2}c$. Die x-Koordinate $f_x = AQ$ ist folglich

$$f_x = AQ = Ac+cQ = \tfrac{1}{2}c+\tfrac{1}{3}(AP-Ac) = \tfrac{1}{2}c-\tfrac{1}{6}c+\tfrac{1}{3}AP = \frac{1}{6c}(2c^2+b^2+c^2-a^2) = \frac{1}{6c}(3c^2+b^2-a^2).$$

Der Ortsvektor f des Schwerpunkts F bezüglich des Nullpunkts A und der Basis AB ist somit:

$$\mathsf{f} = (f_x|\, f_y) = \left(\left.\frac{\mathbf{3c^2+ b^2 - a^2}}{\mathbf{6c}}\,\right|\,\frac{\mathbf{2A}}{\mathbf{3c}}\right),$$

wo der Buchstabe A im Zähler der y-Komponente f_y wieder die Fläche des Dreiecks ABC bezeichnet. Die Koordinaten sind Funktionen der Variablen a, b, c allein, aber keine symmetrischen Funktionen. Die Kontrolle der Dimensionen bestätigt die Eindimensionalität der Koordinaten. Sowohl x-wie y-Koordinate haben die Dimension $[L^2/L^1] = [L^1]$.

III. Der Mittelpunkt G des Inkreises

8. Da GR (Fig. 3) der Radius des Inkreises ist, ist $\frac{1}{2}GR{\cdot}(a+b+c)$ gleich der Fläche des Dreiecks = A, woraus

$$GR = \frac{2A}{a+b+c} \; .$$

Der Tangentenabschnitt von A zum Berührungspunkt R sei $AR = x$. Wird die gleiche Strecke von A aus auf AC abgetragen, ist deren Endpunkt der zweite Berührungspunkt, der folglich von der Ecke C um die Distanz $b - x$ entfernt ist. Ebenso ist $BR = c - x$ ein Tangentenabschnitt. Wird die Strecke $c - x$ von B aus auf BC abgetragen, gelangt man zum dritten Berührungspunkt, der von C um die Strecke $a - c + x$ entfernt sein wird. Letztere ist gemäß den Gesetzen der Kreisgeometrie gleich $b - x$ und folglich $x = AR = \frac{c+b-a}{2}$. Damit ist der Punkt G bezüglich der Basis AB bestimmt, nämlich durch

$$AR = \frac{c+b-a}{2} \quad \text{und} \quad RG = \frac{2A}{a+b+c} \; .$$

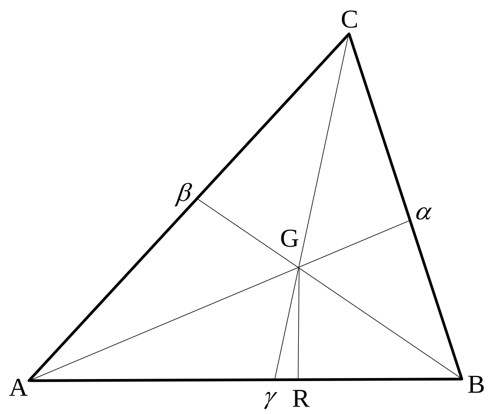


Fig. 3

Betrachtung zu Ziffer 8.

Der Inkreismittelpunkt *G* eines Dreiecks ist identisch mit dem Schnittpunkt der Winkelhalbierenden. In Zif. 4 werden die Winkelhalbierenden des Dreiecks *ABC* als die Strecken $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ durch ihre Endpunkte angegeben. Sie entspringen also den Eckpunkten *A*, *B* und *C* und enden in den Schnittpunkten auf den gegenüberliegenden Dreiecksseiten. Letztere werden, auch in Fig. 3, durch die griechischen Kleinbuchstaben α, β, γ bezeichnet.

In der euklidschen Geometrie ist es üblich, Winkel durch griechische Kleinbuchstaben zu bezeichnen. Auch Euler hält sich an diese Vereinbarung: in Zif. 34, wo er einen Winkel bzw. dessen *cosinus*-Wert benötigt, bezeichnet er den Winkel mit dem griechischen Buchstaben α. Man darf annehmen, daß die Winkel des Dreiecks *ABC*, $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, dementsprechend α, β und γ heißen, obwohl dies aus Fig. 3 nicht hervorgeht. Analog den Seitenmittelpunkten *a*, *b*, *c* in Fig. 2 (Zif. 7) werden also in Fig. 3 die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden mit den Dreiecksseiten ebenfalls mit Kleinbuchstaben bezeichnet, die zudem eine doppelte Bedeutung haben. Mißverständnisse sind indessen nicht zu befürchten, da die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden mit den Dreiecksseiten für die nachfolgenden Argumente keine Bedeutung haben und nicht weiter verwendet werden.

In jedem Dreieck sind die Dreiecksseiten Tangenten des Inkreises. Die Verbindungsgeraden vom Inkreismittelpunkt zu den Berührungspunkten sind Radien des Inkreises und stehen senkrecht auf den Seiten. In der Fig. 3 ist nur der Berührungspunkt $R \in AB$ eingezeichnet. Die beiden fehlenden Berührungspunkte mögen für die unten folgenden Überlegungen mit $S \in BC$ und $T \in CA$ bezeichnet werden. Die *x*-Koordinate des Inkreismittelpunktes ist $g_x = AR$, die *y*-Koordinate $g_y = GR$. Die Länge von g_y ist gleich dem Inkreisradius ρ.

Aus Symmetriegründen sind die beiden Tangentenabschnitte von einem Punkt *A* außerhalb des Kreises gleich lang: $AR = AT = x$, $CT = CS = b-x$ und $BR = BS = c-x$. Der Fig. 3 entnimmt man, daß $(c-x) + (b-x) = a$, woraus folgt:

$$x = AR = g_x = \tfrac{1}{2}(c+b-a).$$

Die Winkelhalbierenden mit dem gemeinsamen Schnittpunkt *G* zerlegen das Dreieck *ABC* in drei Teildreiecke *ABG*, *BCG* und *CAG*. Die Berührungsradien $GR = GS = GT$ sind zugleich deren Höhen. Die Dreiecksfläche *A* ist daher:

$$A = ABG + BCG + CAG = \tfrac{1}{2}GR(a+b+c) \ ,$$

woraus folgt:

$$GR = g_y = \frac{2A}{a+b+c} \ .$$

Der Ortsvektor $\mathbf{g}$ des Inkreismittelpunkts *G* ist somit:

$$\mathbf{g} = (g_x \mid g_y) = \left(\frac{\boldsymbol{c+b-a}}{\mathbf{2}} \middle| \frac{\mathbf{2}\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{a+b+c}} \right) .$$

Die Koordinaten und damit der Ortsvektor des Inkreismittelpunktes sind vergleichsweise einfache algebraische Formen. Sie sind wiederum Funktionen ausschließlich der Dreiecksseiten *a, b, c*. Die *x*-Koordinate g_x ist keine symmetrische Funktion, wohl aber die *y*-Koordinate g_y, denn laut Formeln (2a) und (2b) ist die Flächenformel *A* symmetrisch bezüglich *a, b, c*.

Dies ist nicht verwunderlich, denn, wenn durch Drehungen nacheinander die Seiten $AB = c$, $BC = a$ und $CA = b$ die Rolle der Basis übernehmen, wird der Inkreismittelpunkt *G* immer dieselbe *y*-Koordinate $g_y = \frac{2A}{a+b+c}$ gleich dem Inkreisradius ρ haben. Die *y*-Koordinate g_y ist invariant gegenüber Drehungen der genannten Art, d.h. Vertauschungen der Argumente *a, b, c* haben keinen Einfluß auf den Funktionswert: die Funktion $g_y(a, b, c)$ ist symmetrisch.

Die *x*-Koordinate g_x hat die Dimension $[L^1]$; die *y*-Koordinate g_y $[L^2/L^1] = [L^1]$: beide sind linear, d.h. Strecken.

IV. Der Mittelpunkt H des Umkreises

9. Aus der Konstruktion (Fig. 4) geht hervor, daß jedenfalls $AS = \frac{1}{2}c$. Ferner ist die von *A* nach *BC* gezogene Höhe *AM*

$$AM = \frac{2A}{a} \quad \text{und} \quad CM = \frac{aa+bb-cc}{2a}.$$

Aus der Kreisgeometrie erhellt, daß die Winkel *AHS* und *ACB* gleich und deshalb die Dreiecke *AHS* und *ACM* ähnlich sind. Daraus folgt die Proportion

$$AM : CM = AS : HS,$$

und zusammen $$HS = \frac{c(aa+bb-cc)}{8A}.$$

Die Örter des Punktes *H* bezüglich der Basis *AB* sind damit bestimmt, nämlich

$$AS = \frac{1}{2}c \quad \text{und} \quad SH = \frac{c(aa+bb-cc)}{8A}.$$

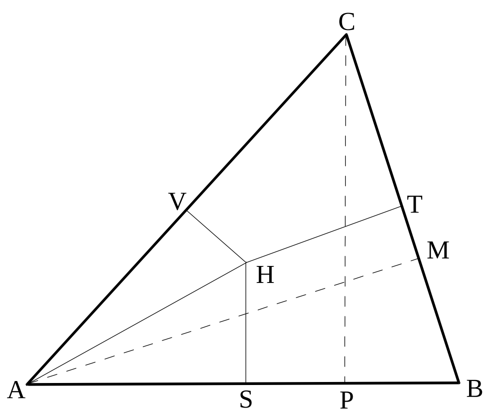


Fig. 4

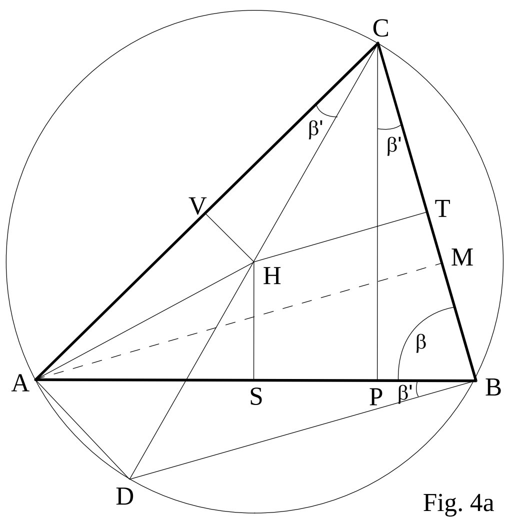


Fig. 4a

<u>Betrachtung zu Ziffer 9</u>.

Der Umkreismittelpunkt *H* eines Dreiecks *ABC* ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten. Die Mittelsenkrechten schneiden die Seiten *a*, *b*, *c* des Dreiecks *ABC* in deren Mittelpunkten. In Fig. 4 werden die Mittelpunkte der Seiten *a*, *b*, *c* durch $S\ (\in AB)$, $T\,(\in BC)$ und $V\ (\in CA)$ bezeichnet, diesmal, anders als in Fig. 2 und 3, in Übereinstimmung mit dem Prinzip, daß Punkte durch (lateinische) Großbuchstaben zu bezeichnen sind. Fußpunkt des Lots von *H* nach der Seite *AB* ist der Punkt *S*, Fußpunkt der Höhe $h_c = CP$ der Punkt *P*, Fußpunkt der Höhe h_a der Punkt *M*.

Die Koordinaten h_x und h_y des Umkreismittelpunkts *H* bezüglich der *x*-Achse *AB* und des Nullpunkts *A* sind gemäß Fig. 4:

$$h_x = AS = \tfrac{1}{2}c \quad \text{und} \quad h_y = HS\,.$$

Um auch $HS = h_y$ als Funktion der Dreiecksseiten *a*, *b*, *c* auszudrücken, konstruiert Euler die Höhe $h_a = AM$. Das dadurch entstandene rechtwinklige Dreieck *AMC* enthält den Winkel $\gamma = \angle C$. Der Winkel γ ist ein Peripheriewinkel des Umkreises. Der zugehörige Zentriwinkel $\angle BHA = 2\gamma$ im gleichschenkligen Dreieck *BHA* wird durch die Mittelsenkrechte *HS* halbiert: $\angle SHA = \gamma$. Die rechtwinkligen Dreiecke *AMC* und *AHS* sind folglich ähnlich und gestatten die Bildung der Proportion:

$$\operatorname{ctg}\gamma = \frac{HS}{AS} = \frac{CM}{AM}\ ,$$

wo $AM = h_a = \dfrac{2A}{a}$ und *CM* die Projektion der Seite *CA* auf die Seite *BC* ist: $CM = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2a}$ [56].

Die *y*-Koordinate h_y ist demnach $h_y = HS = \frac{1}{2}c\,\dfrac{a}{2A}\left(\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2a}\right) = \dfrac{c}{8A}(a^2+b^2-c^2)$.

Der Ortsvektor $\mathfrak{h}$ des Mittelpunktes *H* ist somit

$$\mathfrak{h} = (h_x \mid h_y) = \left(\boldsymbol{\frac{1}{2}c} \,\Big|\, \boldsymbol{\frac{c\,(a^2+b^2-c^2)}{8A}}\right),$$

nur von den Argumenten *a*, *b*, *c* abhängig und keine symmetrische Funktion.

Der Fig. 4 entnimmt man, daß die gesuchten Koordinaten h_x und h_y des Punktes *H* als Katheten im rechtwinkligen Dreieck *ASH* enthalten sind. Die *x*-Koordinate h_x kann aus der Figur direkt abgelesen werden: $h_x = AS = \frac{1}{2}c$. Hypotenuse ist die Strecke *HA*. Weniger trivial ist die *y*-Koordinate $HS = h_y$. Zur Bestätigung der von Euler gefundenen Formel für den Ortsvektor $\mathfrak{h}$ des Umkreismittelpunkts *H* kann der Satz von Pythagoras benutzt werden: $AS^2 + HS^2 = HA^2$.

Da *H* der Mittelpunkt des Umkreises ist, ist die Hypotenuse des Dreiecks *ASH*, die Strecke *HA*, ein Radius des Umkreises des Dreiecks *ABC*. Für die Arbeitsphase *Analysis* sind die Dreiecksseiten *a*, *b*, *c* als bekannt angenommen worden. Das Dreieck *ABC* ist damit bestimmt bzw. konstruierbar, d.h. auch alle andern Stücke des Dreiecks, insbesondere dessen Umkreisradius $HA = r$, sind mittelbar bekannt.

Um den Umkreisradius $HA = r$ als Funktion der Dreiecksseiten *a*, *b*, *c* angeben zu können, werde von *C* über *H* bis *D* ein Durchmesser $CHD = 2r$ gelegt (Fig. 4a). Dieser teilt den Umkreis in zwei Thaleskreise: die Winkel $\angle CAD$ und $\angle DBC$ sind rechte. Die Winkel $\angle DBA$ und $\angle DCA$ sind Peripheriewinkel über ein und derselben Sehne *AD*: $\angle DBA = \angle DCA = \beta'$ ($\beta + \beta' = 90°$). Die spitzen Winkel der rechtwinkligen Dreiecke *DCA* und *CPB* sind β und β', die Dreiecke folglich ähnlich, d.h.

$$\cos\beta' = \frac{b}{CD} = \frac{b}{2r} = \frac{h_c}{a} \quad \text{oder} \quad \frac{ab}{2} = rh_c\,,$$

[56] Vgl. Abb. 1, Seite 30.

und nach Erweiterung mit $\frac{c}{2}$:

$$\frac{abc}{4} = \frac{rh_c c}{2} = rA \quad \text{oder} \quad r = \frac{abc}{4A},$$

wo $A = \frac{h_c c}{2}$ der Flächeninhalt des Dreiecks ABC ist.

Die gefundenen Werte gestatten es nunmehr, die y-Koordinate h_y mit Hilfe des Satzes von Pythagoras zu berechnen:

$$HS^2 = HA^2 - AS^2 = h_y^2 = r^2 - (\tfrac{c}{2})^2 = (\tfrac{abc}{4A})^2 - (\tfrac{c}{2})^2$$

$$= \frac{c^2}{16A^2}(a^2b^2 - 4A^2) = \frac{c^2}{4{\cdot}16A^2}(4a^2b^2 - 16A^2),$$

und, wenn die Größe $16A^2$ in der Klammer gemäß Formel (2b) entwickelt wird:

$$h_y^2 = \frac{c^2}{64A^2}[4a^2b^2 - (2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4)]$$

$$= \frac{c^2}{64A^2}(a^4+b^4+c^4+2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2) = \left(\frac{c}{8A}\right)^2(a^2+b^2-c^2)^2,$$

woraus folgt $\quad h_y = \frac{c}{8A}(a^2+b^2-c^2)$, da für die Strecke h_y nur die positive Wurzel in Frage kommt. Der Ortsvektor von H ist, wie oben bereits hergeleitet,

$$\mathbf{h} = (h_x \mid h_y) = \left(\tfrac{1}{2}\boldsymbol{c} \;\middle|\; \frac{\boldsymbol{c(a^2+b^2-c^2)}}{\boldsymbol{8A}}\right).$$

Die Koordinaten von H bzw. die Komponenten von $\mathbf{h}$, h_x und h_y, sind Strecken; ihre Dimensionen sind $[L^1]$, denn $[h_x] = [L^1]$, $[h_y] = [L^1{\times}L^2/L^2] = [L^3/L^2] = [L^1]$.

Hätte der Verfasser nur die Existenz der Euler-Geraden nachweisen wollen, wäre die Studie mit Zif. 9 bereits beendet. Nachdem die Ortsvektoren $\mathbf{h}$, $\mathbf{f}$ und $\mathbf{e}$ der Punkte H, F und E bezüglich A und AB festgestellt worden, liegt die Konfiguration der nachstehenden Abbildung (Abb. 2, Seite 81) vor. Nennen wir die Verschiebung des Punktes H nach F den *Euler-Vektor* $\mathbf{v}$, so haben wir mit Hilfe der in den Ziff. 6 bis 9 gefundenen Koordinaten

$$\mathbf{v} = \mathbf{f} - \mathbf{h} = \left(\frac{3c^2+b^2-a^2}{6c} - \frac{c}{2} \;\middle|\; \frac{2A}{3c} - \frac{c\,(a^2+b^2-c^2)}{8A}\right)$$

$$= \left(\frac{b^2-a^2}{6c} \;\middle|\; \frac{c^2\,(2c^2-a^2-b^2)-(a^2-b^2)^2}{24cA}\right),$$

wo, nach der Bestimmung des gemeinsamen Nenners $24cA$, im Zähler der y-Koordinate abermals die „Entwicklung“ $16A^2 = 2\Sigma a^2b^2 - \Sigma a^4$ gemäß der Heronschen Flächenformel (2b) benützt worden ist.

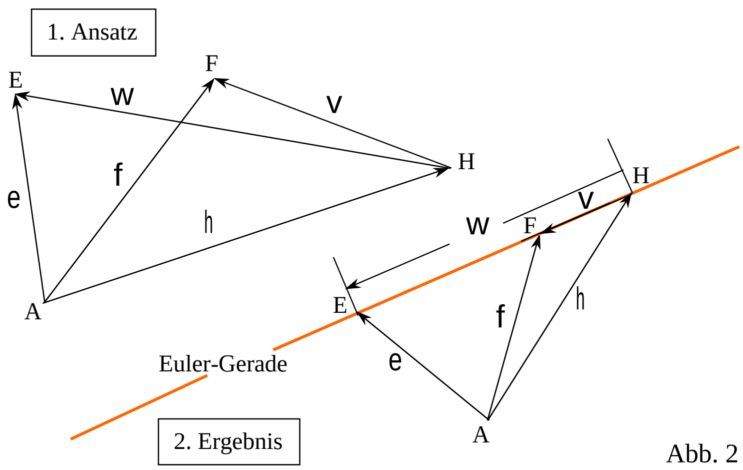


Abb. 2

Andererseits ist die Verschiebung $\mathbf{w}$ von H nach E

$$\mathbf{w} = \mathbf{e} - \mathbf{h} = \left(\frac{b^2 - a^2}{2c} \,\middle|\, \frac{c^2\,(2c^2 - a^2 - b^2) - (a^2 - b^2)^2}{8cA} \right),$$

und man erkennt leicht, daß die Zähler der Brüche in den Koordinaten von $\mathbf{w}$ mit den Zählern von $\mathbf{v}$ identisch, ihre Nenner hingegen proportional sind, konkret daß $\mathbf{w} = 3\mathbf{v}$.

Vektoren sind nicht nur durch ihre absolute bzw. skalare Größe charakterisiert, sondern besitzen auch eine Richtung. Geometrische Vektoren sind gerichtete Strecken. Der Proportionalitätsfaktor 3 beeinflußt die Richtung nicht. Die Vektoren $\mathbf{w}$ und $\mathbf{v}$ haben daher die selbe Richtung. Das heißt, daß sie zunächst jedenfalls parallel sind. Da sie aber beide an den Punkt H gebunden bleiben, liegen sie sogar auf einer und derselben Trägergeraden $HF = HE$ – der ***Euler-Geraden***! Des weiteren ergibt sich bereits, daß der Schwerpunkt F die Strecke HE im Verhältnis 2 : 1 teilt. F ist somit das Zentrum einer zentrischen Streckung mit der Streckungszahl -2 bzw. $-\frac{1}{2}$, je nach Blickrichtung (das Minuszeichen bedeutet, daß der Bildpunkt jenseits des Streckungszentrums liegt):

$$H \xrightarrow{\quad F;\,-2\quad} H' = E \quad \text{oder} \quad E \xrightarrow{\quad F;\,-\frac{1}{2}\quad} E' = H$$

Der Umkreismittelpunkt H ist identisch mit dem Bildpunkt E' des Höhenpunktes E, ebenso ist E gleich dem Bildpunkt H' von H. Diese Erkenntnisse, die sich allein aus den Koordinaten der Punkte E, F und H ergeben, sind Charakteristika der Euler-Geraden und werden gewöhnlich in Lehrbüchern der Schulgeometrie hergeleitet.

Im Sprachgebrauch der Schulbücher heißt es etwa:

— Im Dreieck bilden Höhenpunkt E, Schwerpunkt F und Umkreismittelpunkt H eine Gerade, oder
— Höhenpunkt E, Schwerpunkt F und Umkreismittelpunkt H eines Dreiecks liegen auf einer Geraden, oder
— Wenn E der Höhenpunkt, F der Schwerpunkt und H der Umkreismittelpunkt eines Dreiecks sind, ist der Winkel $\angle EFH$ gleich 180°.

Euler hat nicht mit Vektoren argumentiert. Der Begriff des Vektors ist erst im 19. Jahrhundert, etliche Zeit nach Euler, eingeführt worden. Zur Erkenntnis der Kollinearität der Punkte E, F und H hätte aber bereits die Betrachtung der Koordinatendifferenzen Δx und Δy je zweier Punkte genügt. Dies um so mehr, als Euler die Koordinatendifferenzen für die Bedürfnisse seines Rechenprogramms in den nachfolgenden Ziffern selbst zu berechnen gezwungen ist.

Mit Zif. 9 sind die Berechnungen der Koordinaten von Höhenpunkt E, Schwerpunkt F, Inkreismittelpunkt G und Umkreismittelpunkt H bezüglich der „Basis“ AB und des Nullpunkts A abgeschlossen. Die Koordinaten haben sich ergeben als rationale Funktionen der Dreiecksseiten a, b, c und des Dreiecksinhalts A. Laut Heronscher Flächenformel ist auch A eine Funktion der Seiten a, b, c. Folglich sind die Koordinatendifferenzen Δx und Δy der Punkte E, F, G, H und insbesondere die Strecken EF, FH und EH ebenfalls Funktionen der Seiten a, b, c.

Die Koordinatendifferenzen Δx und Δy zweier Punkte in einem rechtwinkligen Koordinatensystem sind die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse die Verbindungsstrecke zwischen den beiden Punkten ist. Für die Strecken FH, EF und EH erhält man mit Hilfe der Ergebnisse der Ziff. 6, 7 und 9, wenn die Größe $16A^2$ nach Formel (2b) entwickelt wird:

$$FH\colon\ \Delta x_1 = h_x - f_x = \tfrac{1}{2}c - \frac{3c^2+b^2-a^2}{6c} = 1\left[\frac{1}{6c}(a^2-b^2)\right] = 1\Delta x_1$$

$$EF\colon\ \Delta x_2 = f_x - e_x = \frac{3c^2+b^2-a^2}{6c} - \frac{c^2+b^2-a^2}{2c} = 2\left[\frac{1}{6c}(a^2-b^2)\right] = 2\Delta x_1$$

$$EH\colon\ \Delta x_3 = h_x - e_x = \tfrac{1}{2}c - \frac{c^2+b^2-a^2}{2c} = 3\left[\frac{1}{6c}(a^2-b^2)\right] = 3\Delta x_1$$

$$FH\colon\ \Delta y_1 = h_y - f_y = \frac{c(c^2+b^2-a^2)}{8A} - \frac{2A}{3c} = 1\,\frac{\left[c^2(a^2+b^2)+(a^2-b^2)^2-2c^4\right]}{24cA} = 1\Delta y_1$$

$$EF\colon\ \Delta y_2 = f_y - e_y = \frac{2A}{3c} - \frac{(c^2+b^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)}{2c} = 2\,\frac{\left[c^2(a^2+b^2)+(a^2-b^2)^2-2c^4\right]}{24cA} = 2\Delta y_1$$

$$EH\colon\ \Delta y_3 = h_y - e_y = \frac{c(c^2+b^2-a^2)}{8A} - \frac{2a^2b^2-a^4-b^4+c^4}{8cA} = 3\,\frac{\left[c^2(a^2+b^2)+(a^2-b^2)^2-2c^4\right]}{24cA} = 3\Delta y_1$$

Die durch die Differenzen bzw. Katheten Δx und Δy aufgespannten rechtwinkligen Dreiecke sind offensichtlich ähnlich. Die Proportionalitätsfaktoren sind 1, 2 und 3. Die Katheten Δx sind parallel zur x-Achse des Koordinatensystems („Basis“ AB nach Euler), die Katheten Δy stehen auf ihnen senkrecht. Die Neigungswinkel α_r (r = 1,2,3) der Hypotenusen errechnen sich aus den Tangensfunktionen:

$$\operatorname{tg}\alpha_r = \frac{\Delta y_r}{\Delta x_r} = \frac{c^2(a^2+b^2)+(a^2-b^2)^2-2c^4}{4A(a^2-b^2)}$$

in allen drei Fällen: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$. Die Dimension der Funktion $\operatorname{tg}\alpha_r$ ist $[L^4/L^4] = [L^0]$, d.h. eine reine Zahl. Die Strecken EF und EH sind parallel und liegen sogar aufeinander, ebenso die Strecken FH und EH. Denn die Strecke EH enthält nicht nur ihre Endpunkte E und H, sondern auch den Punkt F. Der Winkel $\angle EFH$ beträgt 180°, womit das Phänomen ***Euler-Gerade*** bewiesen gewesen wäre.

Es ist unvorstellbar, daß Euler diese elementaren Zusammenhänge hätten entgangen sein sollen. Weshalb er sie nicht benützt hat und erst nach der Diskussion der Quadratdistanzen EF^2, FH^2, EH^2 auf die komplizierteren quadratischen Proportionen $FH^2 : EF^2 : EH^2 = 1 : 4 : 9$ hingewiesen hat, ist leicht zu erraten. Die Streckenquadrate FH^2, EF^2 und EH^2 sind nicht nur Funktionen der Dreiecksseiten a, b, c wie die linearen Strecken FH, EF und EH, sondern überdies ***symmetrische Funktionen*** von a, b, c. Als solche lassen sie sich als Funktionen der „Zusammenfassungen“ $p = \Sigma a$, $q = \Sigma ab$ und $r = abc$ wiedergeben. Letztere sind aber zugleich die Koeffizienten der kritischen Gleichung (1), auf welche die Studie hinzielt und deren Lösungen die Seiten a, b, c des gesuchten Dreiecks sein werden.

Aus alledem geht hervor, daß Herleitung und Beweis des Phänomens Euler-Gerade nicht erste Priorität genießen, sondern der Diskussion der Möglichkeit, ein Dreieck aus drei vorgegebenen „merkwürdigen Punkten“ zu konstruieren, gleichsam als Nebenergebnis, untergeordnet bleiben.

10. Mit den gefundenen Ergebnissen können wir nunmehr die relativen Entfernungen der vier Punkte voneinander zusammen angeben: sie hätten eigentlich in ein und derselben Figur dargestellt werden sollen. Die Entfernungen sind:

$$\begin{aligned}
EF^2 &= (AP - AQ)^2 + (PE - QF)^2 \\
EG^2 &= (AP - AR)^2 + (PE - RG)^2 \\
EH^2 &= (AP - AS)^2 + (PE - SH)^2 \\
FG^2 &= (AQ - AR)^2 + (QF - RG)^2 \\
FH^2 &= (AQ - AS)^2 + (QF - SH)^2 \\
GH^2 &= (AR - AS)^2 + (RG - SH)^2 \,.
\end{aligned}$$

Diese Entfernungen müssen deswegen betrachtet werden, weil, wenn drei bestimmte dieser vier Punkte vorgegeben werden, einzig ihre relativen Entfernungen voneinander als bekannt und als Ausgangsgrößen für die nachfolgende Suche nach den Dreiecksseiten gelten sollen.

<u>Betrachtung zu Ziffer 10</u>.

Mit der Ziffer 10 beginnt ein neues Kapitel. In den Ziffern 6 bis 9 wurden die x- und y-Koordinaten der Punkte E, F, G, H als Funktionen der Dreiecksseiten a, b, c bestimmt, so als ob diese bekannt wären. In den Ziffern 12 bis 19 werden die Koordinaten benutzt, um die Entfernungen je zweier der vier Punkte voneinander zu berechnen. Die Ergebnisse werden wieder Funktionen der Seiten a, b, c sein.

In einem rechtwinkligen Koordinatensystem ist die Entfernung zweier Punkte A und B voneinander die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten die Differenzen der Koordinaten der Punkte A und B, $\Delta x = b_x - a_x$ und $\Delta y = b_y - a_y$ sind. Nach dem Satze des Pythagoras ist das Quadrat der Hypotenuse $AB^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$.

Vier Punkte definieren sechs, $\binom{4}{2} = 6$, Strecken. In der Zusammenstellung der Zif. 10 sind die sechs Differenzen – nach alter Terminologie „Residuen“– $(AP - AQ)$ usw. im ersten Summanden jeweils die x-Koordinatendifferenzen (Δx), bzw. die sechs Differenzen $(PE - QF)$ usw. im zweiten Summanden die y-Koordinatendifferenzen (Δy).

Die Berechnung der Entfernungen erfolgt in drei Stufen. Da die Koordinaten von E, F, G, H ausnahmslos Brüche sind – die in Gestalt des Dreiecksinhalts A zudem eine irrationale Größe (Quadratwurzel) enthalten – , werden die Brüche in einem ersten Schritt gleichnamig gemacht. Die so gefundenen bereinigten Werte von Δx und Δy werden sodann in einem zweiten Schritt quadriert und addiert und schließlich in einem dritten Schritt ab Zif. 11 von der a,b,c-Darstellung in die p,q,r-Darstellung transformiert.

Die x- und y-Koordinaten der Punkte E, F, G, H sind vergleichsweise einfache Funktionen der Variablen a, b, c. Aber schon die Reduktion auf einen gemeinsamen Nenner verwandelt sie in komplizierte Formeln. Erst recht wird der Rechenvorgang des Quadrierens von Δx und Δy zu $(\Delta x)^2$ und $(\Delta y)^2$ umständlich. Er benötigt zwar nur die elementaren Operationen Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division und ist daher vom höheren Standpunkt aus uninteressant. Euler führt ihn deshalb im einzelnen nicht vor, sondern gibt nur apodiktisch die Ergebnisse bekannt. Diese sind aber dank möglichen Zusammenfassungen, Ausklammerungen und Kürzungen von Gliedern wieder vergleichsweise einfache symmetrische Funktionen und täuschen so große Einfachheit auch des Rechenganges vor. Die Vielzahl der involvierten Elemente, die vielen verschiedenen Exponenten und wechselnden Vorzeichen verlangen einen erheblichen, oft fast abschreckenden arithmetischen Aufwand und verleiten zu häufigen Rechenfehlern. Euler dürfte diese Aufgaben im Visier gehabt haben, als er in Zif. 3 vor *calculis taediosissimis et omnino inextricabilibus* warnte.

Vektorgeometrische Überlegungen zur Berechnung des Abstandes AB zwischen den zwei Punkten A und B helfen hier nicht weiter. Betrachtet man die Verschiebung des Punktes A nach dem Punkte B als Vektor $\overrightarrow{AB} = \Delta x\mathbf{i} + \Delta y\mathbf{j}$ mit den Einheitsvektoren $\mathbf{i}$ in der x-Richtung und $\mathbf{j}$ in der y-Richtung, ist das Skalarprodukt $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = AB^2 = (\Delta x\mathbf{i} + \Delta y\mathbf{j})^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$, da das Skalarprodukt der Einheitsvektoren $\mathbf{i}$ und $\mathbf{j}$ gleich null ist. Das Ergebnis $AB^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$ ist somit identisch mit dem durch klassisch geometrische, pythagoräische Überlegungen gefundenen und kann von der nachfolgenden mühsamen Arithmetik nicht entbinden.

Eulers knappe Darstellung ohne Andeutung von Zwischenschritten wirkt oft verblüffend, so daß es sich aufdrängt, Überlegungen anzustellen, wie er zu seinen Resultaten gefunden haben könnte.

Da die Koordinaten x, y sowohl der Eckpunkte A, B, C wie der „merkwürdigen Punkte" E, F, G, H, des Dreiecks ABC als Funktionen der Seiten a, b, c angegeben werden können, sind auch ihre Differenzen Δx und Δy Funktionen von a, b, c, ebenso die Quadrate $(\Delta x)^2$, $(\Delta y)^2$ und deren Summen AB^2, EF^2, EG^2 usw. Während aber die Koordinaten x, y aller Punkte, insbesondere also der „merkwürdigen" Punkte, eines bestimmten Dreiecks ABC, je nach der Lage des Dreiecks bezüglich des Koordinatensystems im allgemeinen andere sein werden, sind die ***Entfernungen*** je zweier Punkte desselben Dreiecks voneinander nur von dessen Konfiguration, nicht aber von seiner Lage in der Ebene abhängig. Insbesondere sind also die Funktionen AB^2, EF^2, EG^2 usw. der Argumente a, b, c gegenüber Drehungen des Dreiecks ABC invariant. Konkret heißt dies, daß Permutationen der Argumente a, b, c keine Veränderungen der Funktionswerte von AB^2, EF^2, EG^2 usw. bewirken, die Funktionen AB^2, EF^2, EG^2 usw. folglich symmetrische Funktionen von a, b, c sind, was für die eindimensionalen Koordinatendifferenzen Δx und Δy und deren Quadrate $(\Delta x)^2$ und $(\Delta y)^2$ keineswegs gilt.[57] Diese Eigenschaften werden für die nachfolgenden Rechnungen eine überragende Rolle spielen.

Zif. 10 erinnert noch einmal daran, daß für die Grundaufgabe der Studie, das zugehörige Dreieck zu konstruieren, wenn drei der vier Punkte E, F, G und H vorgegeben werden, nur deren relative Entfernungen voneinander als bekannt angenommen werden sollen. Wenn diese als Funktionen der Dreiecksseiten a, b, c dargestellt werden können, muß es möglich sein, auf die Seiten a, b, c zurückzuschließen. Dies wird ab Zif. 19 der Studie geschehen.

---

[57] Vgl. hiezu die Überlegungen S. 26 und 27 zu symmetrischen Funktionen und ihrer Invarianz gegenüber Drehungen des Dreiecks ABC bzw. Permutationen der Argumente a, b, c, wenn letztere als Seiten dieses Dreiecks aufgefaßt werden.

11. Hier ist vorerst zu bemerken, daß die relativen Entfernungen unserer vier Punkte voneinander notwendigerweise so ausgedrückt werden müssen, daß die drei Seiten des Dreiecks in gleicher Form in den Formeln auftreten, weil keiner Dreiecksseite bezüglich dieser Entfernungen irgendwelche Vorzugsbehandlung zugestanden werden kann. Um folglich die Dreiecksseiten ohne Unterschied gleich zu behandeln, setze ich:

$$a+b+c=p, \quad ab+ac+bc=q \quad \text{und} \quad abc=r\,,$$

so daß ich an Stelle der Dreiecksseiten die drei Einzelgrößen p, q und r in die Rechnung einbeziehen werde. Wegen:

$$aa+bb+cc=pp-2q\,,$$
$$aabb+aacc+bbcc=qq-2pr\,,$$
$$a^4+b^4+c^4=p^4-4ppq+2qq+4pr$$ [58]

läßt sich die Dreiecksfläche folgendermaßen wiedergeben:

$$\mathrm{AA}=\frac{1}{16}p\left(-p^3+4pq-8r\right)=\frac{-p^4+4ppq-8pr}{16}\,.$$

Die Darstellung der sechs oben eingeführten Entfernungen mit Hilfe dieser neuen Größen werde ich in eigenen Abschnitten behandeln.

Betrachtung zu Ziffer 11.

In Zif. 11 werden erstmals die Abkürzungen oder Zusammenfassungen $p = \Sigma a$, $q = \Sigma ab$ und $r = abc$ eingeführt. Fortan soll statt mit den drei Größen *a, b, c* mit den Abkürzungen *p, q, r* weitergerechnet werden. Diese Absicht wird damit begründet, daß die wechselseitigen Entfernungen der Punkte *E*, *F*, *G*, *H* voneinander in den Formeln auf eine solche Weise angegeben werden müßen, daß die Dreiecksseiten *a, b, c* gleichberechtigt – *aequaliter* – in die Formeln eingehen, damit hinsichtlich der relativen Distanzen keiner Dreiecksseite gegenüber den andern irgendwelche Vorrechte eingeräumt werden.

Das Verbot jeglicher Sonderbehandlung wie auch das Adverb *aequaliter* erinnern an Eigenschaften symmetrischer Funktionen. In der Tat sind *p*, *q* und *r* symmetrische Funktionen der Argumente *a, b, c*. Nicht explizit gesagt, aber sogleich durch ein Beispiel belegt wird, daß höherdimensionale symmetrische Funktionen von *a, b, c* mit Hilfe der neuen Variablen *p, q, r* als Funktionen von *p, q, r* dargestellt werden können. Diese Eigenschaft symmetrischer Funktionen wird in Lehrbüchern der klassischen Algebra bewiesen. Man überlegt sich leicht, daß Funktionen von symmetrischen Funktionen ihrerseits wieder symmetrische Funktionen sind.

Ebenso wird nicht erwähnt, daß die Abkürzungen *p, q, r* in Gleichungen *n*-ten Grades mit einer Unbekannten *z* als Koeffizienten der Unbekannten auftreten, nämlich *p* als Koeffizient von z^{n-1}, *q* als Koeffizient von z^{n-2}, *r* als Koeffizient von z^{n-3} usw., wenn die Argumente *a, b, c* usw. Lösungen der Gleichung sind. In der vorliegenden Studie ist der Parameter *n* in den Exponenten der Unbekannten $n = 3$, was die Arithmetik in Grenzen hält, obwohl sie so noch komplex genug ist.

Die zweite Eigenschaft von *p, q, r* ist für Eulers Studie entscheidend. Ohne Zweifel sind *p, q, r* ihretwegen als neue Variable eingeführt worden, denn die nachfolgenden umfangreichen Rechnungen zielen geradeswegs auf die Aufstellung einer kritischen Gleichung dritten Grades hin, deren Lösungen

[58] Vgl. Tabelle Seite 59.

die Längen der Dreiecksseiten a, b, c sind. Durch die Auflösung der kritischen Gleichung ist auch die Konstruktionsaufgabe gelöst. In Zif. 22 erfolgt der Übergang zur Gleichung

$$\text{(1)} \qquad \boldsymbol{z^3 - pz^2 + qz - r = 0} \text{ ,}$$

ohne besondere Erklärung. Kenntnis dieser Tatsachen ist indes Voraussetzung für das Verständnis der Argumente des Verfassers.

In der Folge treten die Rechenergebnisse in zweierlei Gestalt auf, einerseits als Funktionen von a, b, c in a,b,c-Notation oder, in der verkürzten Schreibweise, als Σ-Darstellung, andererseits in p,q,r-Notation oder Koeffizientendarstellung. Ein Großteil der Eulerschen Studie besteht in der Transformation der a,b,c-Notationen in Koeffizientendarstellungen mit den Variablen p, q, r.

Als erstes Beispiel der Transformation einer höherdimensionalen a,b,c-Darstellung in eine aequivalente p,q,r-Darstellung wird die aus den Heronschen Formeln (2a) und (2b) bekannte zentrale Größe $16A^2$ vorgestellt, die ständig wiederkehrt, oft in den Nennern von Brüchen. Euler geht von der symmetrischen Funktion (2b) aus, die zur Wiedergabe der Größe $16A^2$ bisher erst als Funktion der Variablen bzw. Dreiecksseiten a, b, c bekannt gewesen ist:

$$16A^2 = (2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2) - (a^4 + b^4 + c^4) = 2\Sigma a^2b^2 - \Sigma a^4.$$ [59]

Sie kann als Differenz ihrer beiden Teile in Koeffizientendarstellung angegeben werden, sobald die Koeffizientendarstellung von Σa^2b^2 und Σa^4 bekannt ist. Ohne Herleitung, gleichsam als Auszug aus einer Tabelle der symmetrischen Funktionen und ihrer Transformierten, gibt Euler die Koeffizientendarstellungen der folgenden symmetrischen Funktionen an, die als „Brücke“ zwischen der a,b,c-Notation von $2\Sigma a^2b^2 - \Sigma a^4$ und der gewünschten aeqivalenten Koeffizientendarstellung dienen sollen:

$$\Sigma a^2 = p^2 - 2q, \qquad \Sigma a^2b^2 = q^2 - 2pr, \qquad \Sigma a^4 = p^4 - 4p^2q + 2q^2 + 4pr \text{ .}$$ [60]

Auf Grund der Definitionen von p, q und r führen folgende Schritte zu den „Brückenfunktionen“:

– aus der Polynomialentwicklung $(a+b+c)^2 = (\Sigma a)^2 = p^2 = (a^2+b^2+c^2) + 2(ab+ac+bc) = \Sigma a^2+2q$ folgt:
$$\Sigma a^2 = p^2 - 2q.$$
– aus der Entwicklung von $(\Sigma ab)^2 = q^2 = \Sigma a^2b^2 + 2\,\Sigma a^2bc = \Sigma a^2b^2 + 2abc\Sigma a = \Sigma a^2b^2 + 2rp$ folgt:
$$\Sigma a^2b^2 = q^2 - 2pr.$$
– aus der Entwicklung von $(\Sigma a^2)^2 = (p^2-2q)^2 = (\Sigma a^4) + 2\Sigma a^2b^2 = (\Sigma a^4) + 2(q^2-2pr) = p^4 - 4p^2q + 4q^2$ folgt:
$$\Sigma a^4 = (p^4 - 4p^2q + 4q^2) - 2(q^2 - 2pr) = p^4 - 4p^2q + 2q^2 + 4pr$$

Für $16A^2$ ergibt sich

$$\begin{array}{rcll} 2\Sigma a^2b^2 & = & & +2q^2 - 4pr \\ -\Sigma a^4 & = & -p^4 + 4p^2q & -2q^2 - 4pr \\ \hline \textbf{(2e)} \quad \boldsymbol{16A^2} & = & \boldsymbol{-p^4 + 4p^2q} & \boldsymbol{- 8pr} \\ & = & \boldsymbol{-p(p^3 - 4pq + 8r)} \text{ .} & \end{array}$$

Die Größe $16A^2$ wird in den Rechnungen eine Schlüsselrolle spielen und je nach Bedarf in ihren verschiedenen Formen auftreten, als symmetrische Funktion der Dreiecksseiten a, b, c – in a,b,c- oder Σ-Notation – oder als Funktion der „Abkürzungen“ p, q, r in p,q,r- oder Koeffizientendarstellung:

(2a) $\qquad 16A^2 = (a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$

(2b) $\qquad 16A^2 = (2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2) - (a^4 + b^4 + c^4)$

(2b’) $\qquad 16A^2 = 2\Sigma a^2b^2 - \Sigma a^4$

(2e) $\qquad 16A^2 = - p^4 + 4p^2q - 8pr = -p(p^3 - 4pq + 8r)$

[59] Vgl. Seiten 30 bis 33.

[60] Vgl. Tabelle Seite 59.

Aus Formel (2a) leitet sich mit $p = a+b+c$ die „Hybridformel“

$$16A^2 = p(p-2a)(p-2b)(p-2c) \tag{2c}$$

her, und schließlich, wenn $p = 2s$ gesetzt wird, s also den halben Umfang des Dreiecks bezeichnet, die „Lehrbuchformel“:

$$16A^2 = 16s(s-a)(s-b)(s-c) \text{ bzw. } A^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)\,. \tag{2d}$$

Durch Ausmultiplizieren der Formel (2c) und Anwendung der Eulerschen Definitionen ergibt sich ebenfalls die Formel (2e):

$$\begin{aligned} 16A^2 = p(p-2a)(p-2b)(p-2c) &= p^4 - 2p^3(a+b+c) + 4p^2(ab+ac+bc) - 8pabc \\ &= p^4 - 2p^4 + 4p^2q - 8\,pr \\ &= -\,p^4 + 4p^2q - 8\,pr\,. \end{aligned}$$

Die Formeln (2a) bis (2d) sind alle vom selben Dreieck geometrisch hergeleitet worden [61]. Ausgehend von den Längen a, b, c der Dreiecksseiten, dienten sie primär der Berechnung des Dreiecksinhalts A in Gestalt der Größe $16A^2$. Sie sind daher Identitäten, da der Dreiecksinhalt durch die jeweiligen Längen der Seiten eindeutig bestimmt ist.

Als Rechenvorschriften bzw. Funktionen für die Berechnung der Größe $16A^2$ sind die Formeln (2a) bis (2d), und (2e) mit den Zwischenschritten p, q, r, aequivalent. Gleichgültig welche konkreten Werte die Argmente a, b, c annehmen und welche der fünf Formeln für die Berechnung gewählt wird, das Ergebnis $16A^2$ wird stets dasselbe sein. Vertauschungen der Argmente a, b, c haben auf die Berechnung des Funktionswertes $16A^2$ keine Auswirkung; die Funktionen (2a) bis (2d) sind daher bezüglich ihrer Argumente a, b, c symmetrische Funktionen. Da sie durch algebraische Manipulationen wechselseitig von der einen Gestalt in die andere übergeführt werden können, sind sie auch Identitäten, so daß statt des Gleichheitszeichens = das Identitätsymbol $\equiv$ gesetzt werden darf. [62]

Als Dreiecksseiten gehorchen die Argumente a, b, c den Dreiecksungleichungen $a < b+c$ usw. Sieht man von dieser Einschränkung ab, umfaßt der Definitionsbereich der Formeln (2a) bis (2d) alle reellen Zahlen zwischen $-\infty$ und $+\infty$ (Grundmenge $\mathbb{R}$). Selbst komplexe Werte sind formal zulässig (Grundmenge $\mathbb{C}$). Setzt man für die Argumente (a,b,c) etwa die Einheitswurzeln $(1,\omega,\omega^2)$, werden die Funktionen (2a) und (2b) beide gleich null. (Formal: $16A^2(1,\omega,\omega^2) = \mathbb{R} \cap \mathbb{C}$.)

Die Größe $16A^2$ ist vierdimensional: als Flächeninhalt eines Dreiecks ist A zweidimensional, das Quadrat A^2 folglich vierdimensional. Die Vierdimensionalität auch der verallgemeinerten Funktion $16A^2(a,b,c)$ wird durch die Formeln bestätigt: laut (2a) ist $16A^2$ ein Produkt von 4 linearen Faktoren, laut (2b) eine Summe von Produkten der Faktoren a, b, c, deren Exponentensumme je 4 beträgt. Auch Formel (2e) belegt die Vierdimensionalität; denn die Summanden von $16A^2$, nämlich $-p^4$, $+4p^2q$, und $-8pr$ sind alle ebenfalls vierdimensional:

$$p^4 = (a+b+c)^4, \qquad p^2q = (a+b+c)^2(ab+ac+bc), \qquad pr = (a+b+c)abc\,.$$

Eine erste Anwendung der Formel (2e) – Darstellung der Größe $16A^2$ als Funktion der Abkürzungen p, q, r – erfolgt sogleich in der nachfolgenden Zif. 12. Nach der Transformation der resultierenden symmetrischen Funktion aus der Σ-Darstellung in die aequivalente p,q,r-Darstellung kann in dieser der Faktor $16A^2$ gemäß Formel (2e) abgespalten und sogar wegdividiert werden. Das Ergebnis ist eine vergleichsweise einfache Funktion der Variablen p, q, r. Euler unterläßt es allerdings, die Zwischenschritte aufzuzeigen, und setzt das zunächst überraschende, einfache Resultat nur durch den kurzen Satz *quam expressionem ad hanc formam reducere licet* in Szene.

Die Formeln (2a) bis (2d) sind ein instruktives Beispiel für die Eigenart der symmetrischen Funktionen, durch Zerlegung in Summanden oder Faktorisieren äußerlich ganz andersgeartete Gestalten annehmen zu können, deren Identität erst nach sorgfältiger Prüfung erkennbar wird. Die nachfolgenden Rechnungen werden von der Größe $16A^2$ in ihren verschiedenen Erscheinungsformen beherrscht.

---

[61] Vgl. Seiten 30 und 31 und Abb. 1.

[62] Vgl. Seiten 32 und 35.

I. Die Entfernung zwischen den Punkten E und F

12. Hier haben wir vorerst

$$AP - AQ = \frac{c^2+b^2-a^2}{2c} - \frac{3c^2+b^2-a^2}{6c} = \frac{b^2-a^2}{3c} ,$$

$$PE - QF = \frac{(c^2+b^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)}{8cA} - \frac{2A}{3c}$$

$$= \frac{3(c^2+b^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)-16A^2}{24cA} ,$$

beziehungsweise mit dem gemeinsamen Nenner $12cA$:

$$AP - AQ = \frac{(b^2-a^2)\sqrt{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}}{12cA} ,$$

$$PE - QF = \frac{2c^4-a^4-b^4+2a^2b^2-b^2c^2-a^2c^2}{12cA} ,$$

und nach Quadrierung und Addition:

$$EF^2 = \frac{1}{36A^2}\left\{\begin{array}{l} +a^6+b^6+c^6 \\ -a^4b^2-a^2b^4-a^4c^2-a^2c^4-b^4c^2-b^2c^4 \\ +3a^2b^2c^2 \end{array}\right\} ,$$

wo die Größen a, b, c in der Tat unter sich gleiche Geltung haben.

Des weiteren ist:

$$a^4b^2 + a^2b^4 + \text{etc.} = p^2q^2 - 2q^3 - 2p^3r + 4pqr - 3r^2,$$

$$a^6 + b^6 + c^6 = p^6 - 6p^4q + 9p^2q^2 - 2q^3 + 6p^3r - 12pqr + 3r^2 ,$$

womit wir erhalten:

$$EF^2 = \frac{1}{36A^2}(p^6 - 6p^4q + 8p^2q^2 + 8p^3r - 16pqr + 9r^2) ,$$

was sich noch zur folgenden Form vereinfachen läßt:

$$EF^2 = \frac{r^2}{4A^2} - \frac{4}{9}(p^2 - 2q) .$$

<u>Betrachtung zu Ziffer 12</u>.

Die Ziffern 12 bis 17 bilden ein weiteres geschlossenes Kapitel, dessen Inhalt die Berechnung der Quadrate der sechs relativen Entfernungen der vier „merkwürdigen Punkte“ *E*, *F*, *G*, *H* ist:

$$EF^2,\ EG^2,\ EH^2,\ FG^2,\ FH^2,\ GH^2.$$

Ab Zif. 11 findet eine Änderung der Präsentationsweise statt. Während Euler in den Ziff. 6 bis 9 knapp, aber verständlich genug auf die für die Herleitung der Koordinatenformeln benötigten elementaren Gesetze der Dreiecks- und Kreisgeometrie hinweist, reiht er in den Ziff. 12 bis 17 nur noch die Ergebnisse der Rechnungen durch lakonische Floskeln wie

quarum quadrata addita praebunt,
quorum quadratorum summa reducitur ad hanc formam u.ä.m.

aneinander, ohne auf Einzelheiten des Rechnungsweges einzugehen.

Die Ziff. 6 bis 9 halten mit geometrischen Argumenten einen gewissen didaktischen Anspruch aufrecht. Die Ziff. 12 bis 17 hingegen konfrontieren den Leser ohne Vorbereitung mit wohlgeordneten, höherdimensionalen, mehrzeiligen symmetrischen Funktionen, deren Abkunft von den Koordinatenformeln der Ziff. 6 bis 9 auf den ersten Blick kaum glaubhaft erscheinen will.

Auch daß die Rechenergebnisse symmetrische Funktionen von *a*, *b*, *c*, sein müssen und deswegen durch die Abkürzungen $p = \Sigma a$, $q = \Sigma ab$, $r = abc$ wiedergegeben werden können und daß die Abkürzungen *p*, *q*, *r* die Koeffizienten einer kubischen Gleichung sind, deren Lösungen *a*, *b*, *c* die Längen der Seiten des eigentlich gesuchten Dreiecks sein werden, erwähnt er mit keinem Wort. Offenbar durfte Euler bei den zeitgenössischen Lesern allgemeine Versiertheit mit arithmetischen und algebraischen Rechenverfahren und ansehnliche Kenntnisse der klassischen Gleichungstheorie voraussetzen.

Wer sich mit dem Argument, was ein Euler sage, müsse wahr sein, nicht zufrieden geben will, muß Eulers Formeln selber verifizieren. Er wird dabei allerdings erfahren, daß das Urteil *taediosissimi calculi* (Zif. 3) keineswegs zu hoch gegriffen war. Die Rechnungen erfordern in der Tat einen erheblichen arithmetischen Aufwand.

In Zif. 12 wird als erste die Entfernung *EF* des Höhenpunktes *E* vom Schwerpunkt *F* bzw. deren Quadrat EF^2 berechnet. Mit den in den Ziff. 6 und 7 gefundenen Werten der Koordinaten von *E* und *F* werden die Koordinatendifferenzen Δx und Δy zu $\Delta x = AP - AQ$ und $\Delta y = PE - QF$ (Fig. 1 und 2). Die Differenzen Δx und Δy sind Brüche. Durch Quadrieren wird der gemeinsame, dreidimensionale Nenner $12cA$ zu $144c^2A^2$.

Um einiges komplizierter sind dagegen die Zähler. Im Prinzip können ihre Quadrate mit Hilfe von Multiplikationstabellen gefunden werden. Die Zähler der (linearen) Koordinatendifferenzen sind notwendigerweise vierdimensional, wenn ihr gemeinsamer Nenner $12cA$ bereits dreidimensional ist. Sie enthalten daher Elemente des Typs $ka^ub^vc^w$, wo die Summe der Exponenten $u+v+w = 4$ und *k* ein numerischer Faktor ist. Die Quadrate $(\Delta x)^2$ und $(\Delta y)^2$ werden folglich achtdimensional sein, also $u+v+w = 8$ und $u,v,w \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$.

Der Zähler von Δx ist das Produkt eines Binoms – nach alter Terminologie eines *Residuums* (Differenz zweier Größen) – und einer Quadratwurzel, deren Radikand 6 Summanden enthält. Das Quadrat $(\Delta x)^2$ wird daher das Produkt eines Faktors mit 3 und eines Faktors mit 6 Summanden sein und insgesamt $3\times 6 = 18$ Elemente enthalten. Der Zähler von Δy enthält 6 Elemente, $(\Delta y)^2$ daher $6\times 6 = 36$. Die Summe EF^2 endlich wird $18+36 = 54$, allerdings großenteils gleichartige, Elemente zählen.

Die Differenz Δx ist eine alternierende Funktion der Variablen *a* und *b*: durch Vertauschung von *a* und *b* bleibt wie bei symmetrischen Funktionen zwar der absolute Wert von Δx erhalten, wegen des Faktors (b^2-a^2) ändert jedoch das Vorzeichen. Durch Quadrierung verschwindet dieser Unterschied, und der Zähler von $(\Delta x)^2$ – $(b^2-a^2)^2(\Sigma a^2b^2 - \Sigma a^4)$ – ist symmetrisch bezüglich *a* und *b*.

Die Ordinatendifferenz $\Delta y = PE - QF$, und folglich auch $(\Delta y)^2$, ist wie $(\Delta x)^2$ symmetrisch bezüglich a und b. Daher wird auch die Summe $EF^2 = (\Delta x)^2+(\Delta y)^2$ mindestens bezüglich a und b symmetrisch sein. Obwohl $(\Delta x)^2$ und $(\Delta y)^2$ nur bezüglich der zwei Variablen a und b symmetrisch sind, ergänzen sie sich derart, daß die Summe $EF^2 = (\Delta x)^2+(\Delta y)^2$, wie zu erwarten, eine symmetrische Funktion aller drei Variablen a, b, c sein wird und daher als eine Funktion der Gleichungskoeffizienten p, q, r dargestellt werden kann [63].

Die Verwendung von Multiplikationstabellen ist hier allerdings wegen der Vielzahl der Elemente und Variablen wenig sinnvoll. Von den 54 Elementen heben sich viele gegenseitig auf, wie etwa die Terme a^8 und b^8, oder lassen sich zusammenfassen, denn in Eulers Ergebnis bleiben im Zähler nur 10 Elemente als Summanden übrig. Multiplikationstabellen benötigen im vorliegenden Fall überflüssigen Rechenaufwand mit der Gefahr von Rechenfehlern.

Durch nachfolgende Umstellungen werden die Rechnungen übersichtlicher:

$$12cA(\Delta x) = (b^2 - a^2)\sqrt{2c^2(a^2+b^2)-c^4-(a^2-b^2)^2}$$
$$12cA(\Delta y) = 2c^4 - c^2(a^2+b^2) - (a^2-b^2)^2\,.$$

Quadrieren ergibt, berücksichtigt man noch, daß $(b^2 - a^2)^2 = (a^2 - b^2)^2$:

$$\begin{aligned}144c^2A^2(\Delta x)^2 &= (a^2-b^2)^2[2c^2(a^2+b^2) - c^4 - (a^2-b^2)^2] \\ &= 2c^2(a^2+b^2)(a^2-b^2)^2 - c^4(a^2-b^2)^2 - \boldsymbol{(a^2-b^2)^4} \\ 144c^2A^2(\Delta y)^2 &= [2c^4 - a^4 - b^4 + 2a^2b^2 - b^2c^2 - a^2c^2]^2 \\ &= [c^2(2c^2-a^2-b^2) - (a^2-b^2)^2]^2 \\ &= c^4(2c^2-a^2-b^2)^2 - 2c^2(2c^2-a^2-b^2)(a^2-b^2)^2 + \boldsymbol{(a^2-b^2)^4}.\end{aligned}$$

In der Summe $EF^2 = (\Delta x)^2+(\Delta y)^2$ werden sich die Summanden $(a^2-b^2)^4$, die keine Elemente mit der Variablen c enthalten, wegen der ungleichen Vorzeichen vernichten. Die übrig bleibenden Elemente enthalten alle die Variable c^2 als Faktor, wie obige Darstellung zeigt. Folglich wird sich der Faktor c^2, der auch im Faktor $144c^2A^2$ links des Gleichheitszeichens vorkommt, wegdividieren lassen. Es bleibt:

$$144A^2EF^2 = 144A^2[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2] = 4\{\Sigma a^6 - \Sigma a^4b^2 + 3a^2b^2c^2\}$$

oder, da auch durch den Faktor 4 dividiert werden kann,

$$EF^2 = \frac{1}{36A^2}\{\Sigma a^6 - \Sigma a^4b^2 + 3a^2b^2c^2\}\,,$$

eine quadratische Größe mit sechsdimensionalem Zähler und vierdimensionalem Nenner und überdies eindeutig eine symmetrische Funktion der Variablen a, b, c, da auch A bzw. A^2 im Nenner symmetrisch bezüglich a, b, c ist.

Die oben angegebenen umgestellten Darstellungen $12cA(\Delta x)$ und $12cA(\Delta y)$ werden vom Binom $B = a^2 + b^2$ und vom Residuum $R = a^2 - b^2$ beherrscht, jenes eine symmetrische, dieses eine alternierende Funktion der Variablen a und b. Sie bieten sich gleichsam an, zur Erleichterung der Rechnung den von Euler in Zif. 11 an Hand der Beispiele p, q, r eingeführten Kunstgriff der Zusammenfassung unter einem je eigenen Symbol auch hier anzuwenden und so die Hilfsvariablen

$$B = a^2 + b^2 \quad \text{und} \quad R = a^2 - b^2$$

einzuführen. Dann sind $\quad B^2 - R^2 = (a^4 + 2a^2b^2 + b^4) - (a^4 - 2a^2b^2 + b^4) = 4a^2b^2$

und $\quad BR^2 = (a^2 + b^2)(a^4 - 2a^2b^2 + b^4) = (a^6 + b^6) - (a^4b^2 + a^2b^4)\,.$

Mit den Hilfsvariablen B und R werden $12cA(\Delta x)$ und $12cA(\Delta y)$ zu

$$12cA(\Delta x) = (-R)\sqrt{2c^2B - c^4 - R^2}$$
$$12cA(\Delta y) = 2c^4 - c^2B - R^2\,,$$

[63] Vgl. Seiten 26 und 27: Invarianten gegenüber Drehungen des Dreiecks.

und ihre Quadrate $144c^2A^2(\Delta x)^2$ und $144c^2A^2(\Delta y)^2$ zu

$$\begin{aligned}144c^2A^2(\Delta x)^2 &= 2c^2BR^2 - c^4R^2 - R^4\\ 144c^2A^2(\Delta y)^2 &= 2c^2BR^2 \qquad + R^4 + 4c^8 + c^4B^2 - 4c^6B - 4c^4R^2 .\end{aligned}$$

Schließlich wird die Summe zu

$$\begin{aligned}144c^2A^2[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2] = 144c^2A^2EF^2 &= 4c^2BR^2 + c^4(B^2-R^2) + 4c^2(c^6-c^4B-c^2R^2)\\ &= 4c^2BR^2 + 4c^4a^2b^2 + 4c^2(c^6-c^4B-c^2R^2)\\ &= 4c^2[(a^6+b^6+c^6) - (a^4b^2+a^2b^4+a^4c^2+a^2c^4+b^4c^2+b^2c^4) + 3a^2b^2c^2]\end{aligned}$$

oder

$$\boldsymbol{EF^2 = \frac{1}{36A^2}\left[\Sigma a^6 - \Sigma a^4b^2 + 3(abc)^2\right].}$$

Dieser Rechenprozeß, der zu Eulers Zeiten mit Gänsekiel und Tinte, ohne Mithilfe eines programmierbaren Rechners, „von Hand“ erarbeitet werden mußte – *taediosissimi calculi* –, war sicher mit zahlreichen Fehlern behaftet, die laufend ausgemerzt werden mußten. Zur Überprüfung des Ergebnisses mögen folgende Überlegungen, welche die Eigenschaften symmetrischer Funktionen ausnützen, dienen.

Die Summe $EF^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$ ist eine zweidimensionale symmetrische Funktion der Variablen Δx und Δy: durch Vertauschung von Δx und Δy wird das Ergebnis EF^2 nicht verändert. Soll EF^2 als Summe zweidimensionaler symmetrischer Funktionen und als Identität dargestellt werden, kommen nur das Quadrat $(\Delta x + \Delta y)^2$ der einzigen eindimensionalen symmetrischen Funktion der Variablen Δx und Δy und das Produkt $\Delta x\cdot\Delta y$ in Frage, denn außer $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$ sind dies die einzigen zweidimensionalen symmetrischen Funktionen von Δx und Δy. Es gilt der Ansatz:

$$EF^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = \mathrm{A}(\Delta x + \Delta y)^2 + \mathrm{B}\Delta x\Delta y,$$

wo die Größen A und B aus Gründen der Dimension nur numerische Faktoren, die nicht von den Variablen abhängen, sein können. Die Identität EF^2 gilt für beliebige Werte von Δx und Δy. Benutzt man etwa die drei dritten Wurzeln von 1: 1, ω und ω^2, mit $1 + \omega + \omega^2 = 0$ und $\omega^3 = 1$, z.B. $(\Delta x,\Delta y) = (1,\omega)$, ferner $(\Delta x,\Delta y) = (1,0)$, erhält man das Gleichungssystem

$(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = 1 + \omega^2 = -\omega = \mathrm{A}(1+\omega)^2 + \mathrm{B}(1\omega) = \mathrm{A}(-\omega^2)^2 + \mathrm{B}\omega = \mathrm{A}\omega^4 + \mathrm{B}\omega = \mathrm{A}\omega + \mathrm{B}\omega$ bzw.
$(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = 1 + 0 = 1 = \mathrm{A}(1+0)^2 + \mathrm{B}(1\cdot 0) = \mathrm{A} + 0 = \mathrm{A}$ oder, nach Division durch ω, kürzer zusammengestellt:

$$\begin{aligned}-1 &= \mathrm{A} + \mathrm{B} &\quad \text{d.h. } \mathrm{A} &= 1\\ 1 &= \mathrm{A} & \mathrm{B} &= -2 .\end{aligned}$$

Es folgt $\quad \boldsymbol{EF^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \mathrm{A}(\Delta x + \Delta y)^2 + \mathrm{B}\Delta x\Delta y = \boldsymbol{(\Delta x + \Delta y)^2 - 2\Delta x\Delta y}$

in Übereinstimung mit der Binomialentwicklung von $(\Delta x + \Delta y)^2$. Zur Berechnung der Quadratsumme $EF^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$ braucht man also nur die Summe der linearen Größen Δx und Δy, $\Delta x + \Delta y$, zu quadrieren und das Zweifache ihres Produktes zu subtrahieren.

Zur Behandlung von

$$\begin{aligned}12cA(\Delta x) &= (b^2-a^2)\sqrt{2c^2(a^2+b^2) - c^4 - (a^2-b^2)^2}\\ 12cA(\Delta y) &= 2c^4 - c^2(a^2+b^2) - (a^2-b^2)^2\end{aligned}$$

mögen wieder die oben verwendeten Abkürzungen benutzt werden:

$B = a^2 + b^2$, $R = a^2 - b^2$, ferner das Symbol $\surd = \sqrt{2c^2(a^2+b^2) - c^4 - (a^2-b^2)^2} = \sqrt{2c^2B - c^4 - R^2}$.

Ohne den Faktor $12cA$ bzw. sein Quadrat $144c^2A^2$, der am Ende der Rechnung wieder berücksichtigt werden muß, hat man dann für die Zähler von Δx und Δy:

$$\Delta x = (-R)\surd \qquad \text{und} \qquad \Delta y = 2c^4 - c^2B - R^2$$

und deren Summe $\quad (\Delta x + \Delta y) = 2c^4 - c^2B - R^2 + (-R)\surd$.

Das Quadrat $(\Delta x + \Delta y)^2$, das Produkt $2\,\Delta x\Delta y$ und ihre Differenz

$$EF^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = (\Delta x + \Delta y)^2 - 2\,\Delta x\Delta y$$

werden:

$$\begin{array}{lcl}
(\Delta x + \Delta y)^2 & = & 4c^8 + c^4B^2 + R^4 + R^2(\surd\,)^2 - 4c^6B - 4c^4R^2 \;\; - 4c^4R\surd + 2c^2BR^2 + 2c^2BR\surd + 2R^3\surd \\
-2\,\Delta x\Delta y & = & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad + 4c^4R\surd \qquad\qquad\quad - 2c^2BR\surd - 2R^3\surd \\
\hline
EF^2 & = & 4c^8 + c^4B^2 + R^4 + R^2(\surd\,)^2 - 4c^6B - 4c^4R^2 \qquad\qquad + 2c^2BR^2
\end{array}$$

In der Summe heben sich alle einfachen Wurzeln weg; es war somit nicht nötig, sie auszuschreiben. Es bleibt einzig der Term $R^2(\surd\,)^2 = R^2(2c^2B - c^4 - R^2) = 2c^2BR^2 - c^4R^2 - R^4$ übrig, der aber wieder rational ist. Insgesamt ergibt sich für den Zähler von $EF^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$:

$$4c^8 - 4c^6B + c^4(B^2 - R^2 - 4R^2) + 4c^2BR^2\,,$$

und, wenn für B und R wieder $(a^2 + b^2)$ bzw. $(a^2 - b^2)$ substituiert werden und der Nenner $144c^2A^2$ berücksichtigt wird:

$$\begin{aligned}
&= 4c^8 - 4a^2c^6 - 4b^2c^6 + 4a^2b^2c^4 - 4a^4c^4 + 8a^2b^2c^4 - 4b^4c^4 + 4a^6c^2 - 4a^4b^2c^2 - 4a^2b^4c^2 + 4b^6c^2 \\
&= 4c^2[(a^6 + b^6 + c^6) - (a^2c^4 + b^2c^4 + a^4c^2 + b^4c^2 + a^4b^2 + a^2b^4) + 3a^2c^2b^2] \\
&= 4c^2[\Sigma a^6 - \Sigma a^4b^2 + 3a^2c^2b^2] = 144c^2A^2[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2] = 144c^2A^2EF^2,
\end{aligned}$$

und schließlich für EF^2 allein wie oben: $\boldsymbol{EF^2 = \dfrac{1}{36A^2}\,[\Sigma a^6 - \Sigma a^4b^2 + 3(abc)^2]}$.

Mit Hilfe der Tabelle (Seite 59) der symmetrischen Funktionen von a, b, c läßt sich die symmetrische Funktion EF^2 leicht in die p,q,r– oder Koeffizientendarstellung transformieren:

$$\begin{array}{lcl}
+\Sigma a^6 & = & p^6 - 6p^4q + 6p^3r + 9p^2q^2 - 12pqr - 2q^3 + 3r^2 \\
-\Sigma a^4b^2 & = & \qquad\qquad\; + 2p^3r - \;\; p^2q^2 - \;\; 4pqr + 2q^3 + 3r^2 \\
+3(abc)^2 & = & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad + 3r^2 \\
\hline
36A^2\,EF^2 & = & p^6 - 6p^4q + 8p^3r + 8p^2q^2 - 16pqr \qquad\quad + 9r^2\,.
\end{array}$$

Das vergleichsweise simple Schlußresultat ergibt sich durch eine einfache Umstellung:

$$\begin{aligned}
36A^2\,EF^2 &= p^6 - 6p^4q + 8p^3r + 8p^2q^2 - 16pqr \qquad + 9r^2 \\
&= p^6 - 4p^4q + 8p^3r - 2p^4q + 8p^2q^2 - 16pqr + 9r^2\,,
\end{aligned}$$

wo der in Zif. 11 hergeleitete Ausdruck für $16A^2 = -p^4 + 4p^2q - 8pr$ abgespalten werden kann:

$$\begin{aligned}
36A^2EF^2 &= -p^2[-p^4 + 4p^2q - 8pr] + 2q[-p^4 + 4p^2q - 8pr] + 9r^2 \\
&= -p^2[16A^2] \qquad\qquad + 2q[16A^2] \qquad\qquad + 9r^2\,.
\end{aligned}$$

Division durch $36A^2$ liefert schließlich das einfache Ergebnis:

$$\boldsymbol{EF^2 = \frac{r^2}{4A^2} - \frac{4}{9}(p^2 - 2q)}\,.$$

Euler überläßt die Verifikation der Koeffizientendarstellung dem Leser.

Die abgekürzte Schreibweise in Eulers Originaltext mit „+ etc.“ (s. Seite 12):

$$\boldsymbol{a^4bb + aab^4} + \textbf{etc.} \quad \text{für} \quad a^4b^2{+}a^2b^4{+}a^4c^2{+}a^2c^4{+}b^4c^2{+}b^2c^4$$

ist eine Vorwegnahme der modernen Σ-Schreibweise, denn Σa^4b^2 besagt ja auch nichts anderes als, „man summiere alle (sechs) Doppelprodukte der Variablen a, b, c, so daß jede den Exponenten 4 erhält und mit dem Quadrat jeder anderen multipliziert wird“. Euler besitzt offenbar genauere Kenntnisse der symmetrischen Funktionen, ohne in der vorliegenden Studie näher auf sie einzutreten.

Das vorgeführte Rechenmuster – Quadrierung der Koordinatendifferenzen Δx und Δy zu $(\Delta x)^2$ und $(\Delta y)^2$ und Bildung der Summe $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$ – wiederholt sich noch fünfmal in den Ziff. 13 bis 17. Die Differenzen Δx und Δy werden als Funktionen der Dreiecksseiten a, b, c berechnet und vorerst in a,b,c-Notation festgehalten. Erst am Schluß der Rechnungen wird jeweils mit Hilfe der Tabelle der (a,b,c)-(p,q,r)-Aequivalenzen (Seite 59) in p,q,r-Darstellungen transformiert und allenfalls durch Dividieren vereinfacht.

In Zif. 12 lautet das a,b,c-Ergebnis:

$$(\alpha) \qquad EF^2 = \frac{1}{36A^2}\left\{\Sigma a^6 - \Sigma a^4b^2 + 3(abc)^2\right\}.$$

Da gemäß Definition bereits $abc = r$, müssen nach Eulers Vorgabe zur Erstellung der p,q,r-Darstellung von (α) nur die p,q,r-Aequivalenzen von Σa^6 und Σa^4b^2 der Tabelle entnommen und in (α) substituiert werden, was oben durchexerziert worden ist. Nach Formel (2b) ist $16A^2$ eine Abkürzung für $2\Sigma a^2b^2 - \Sigma a^4$, und, wenn (α) zu

$$(\alpha') \qquad EF^2 = \frac{1}{36A^2}\{....\} = \frac{1}{9\cdot 4A^2}\{....\} = \frac{4}{9}\cdot\frac{1}{16A^2}\{....\}$$

umgedeutet wird und der sechsdimensionale Klammerausdruck $\left\{\Sigma a^6 - \Sigma a^4b^2 + 3(abc)^2\right\}$ bereits auf der a,b,c-Stufe durch die vierdimensionale Größe $16A^2 = 2\Sigma a^2b^2 - \Sigma a^4$ dividiert wird, lautet das Ergebnis – mit Quotient $-\Sigma a^2$ und Divisionsrest $9(abc)^2$ –:

$$(\beta) \qquad \boldsymbol{EF^2} = \frac{4}{9}\cdot\frac{1}{16A^2}\{....\} = \frac{4}{9}\left\{-\Sigma a^2 + \frac{9}{16A^2}(abc)^2\right\} = \boldsymbol{\frac{(abc)^2}{4A^2} - \frac{4}{9}\Sigma a^2}\,.$$

Von dieser erheblich vereinfachten Formel ausgehend, ist die Umsetzung in die p,q,r-Darstellung noch anspruchsloser: das Tripelprodukt abc ist die symmetrische Primfunktion r und Σa^2 ist $p^2{-}2q$, woraus wie oben folgt:

$$\boldsymbol{EF^2 = \frac{r^2}{4A^2} - \frac{4}{9}(p^2 - 2q)}\,.$$

In der Zif. 14 wird die Strecke EH berechnet werden, womit die drei kritischen Punkte E, F und H – die schließlich die Euler-Gerade bilden – durch ihre Quadratdistanzen EF^2 und EH^2 faßbar werden.

Das a,b,c-Resultat der Zif. 14 lautet:

$$(\gamma) \qquad EH^2 = \frac{9}{16A^2}(abc)^2 - \Sigma a^2$$

Vergleicht man (β) und (γ), ergibt sich bereits auf der a,b,c-Stufe die eklatante Beziehung

$$\boldsymbol{(\gamma) = \frac{9}{4}(\beta)}\,;$$

denn $$\frac{9}{4}EF^2 = \frac{9}{4}\left\{\frac{(abc)^2}{4A^2} - \frac{4}{9}\Sigma a^2\right\} = \frac{9}{16A^2}(abc)^2 - \Sigma a^2 = EH^2\,.$$

Diese Beziehung gilt selbstverständlich auch für die *p,q,r*-Darstellungen. In der Tat ist

$$\frac{9}{4}\,EF^2 \;=\; \frac{9}{4}\left\{\frac{r^2}{4A^2}-\frac{4}{9}\left(p^2-2q\right)\right\} \;=\; \frac{9}{16A^2}\,r^2-\,p^2+2q \;=\; EH^2$$

Für die *linearen* Distanzen heißt dies:

$$\boldsymbol{EH} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\,\boldsymbol{EF}\ .$$

In Worten: Die Distanz Höhenpunkt-Umkreismittelpunkt ist dreimal so groß wie die halbe Distanz Höhenpunkt-Schwerpunkt, und der Schwerpunkt F teilt die Strecke Höhenpunkt-Umkreismittelpunkt im Verhältnis 1 : 2.

Notwendigerweise ist die Distanz HF – Umkreismittelpunkt-Schwerpunkt – dann $HF = \frac{1}{2}EF$. Zif. 16 untersucht die Distanz $FH = HF$ und findet:

$$FH^2 = \frac{r^2}{16A^2} - \frac{1}{9}(p^2-2q) \;=\; \frac{1}{4}\left\{\frac{r^2}{4A^2} - \frac{4}{9}(p^2-2q)\right\} = \frac{1}{4}EF^2\ .$$

Diesen zweiten Weg – Division der resultierenden symmetrischen Funktion für die Quadratdistanz in *a,b,c*-Notation durch $16A^2 = 2\Sigma a^2b^2 - \Sigma a^4$ vor der Transformation in die *p,q,r*-Darstellung – beschreitet Euler in Zif. 13 (EG^2) – dort allerdings in etwas verschlüsselter Form – und in Zif. 14 (EH^2). In fünf der sechs Quadratdistanzen tritt die Größe $16A^2$ im Nenner auf; in zwei Formeln kann zudem der numerische Faktor 16 zu 4 gekürzt werden. Einzig in der Formel für das Quadrat der Strecke Schwerpunkt-Inkreismittelpunkt (FG^2) fehlt dieser Nenner.

Die Entfernung EF des Höhenpunktes E vom Schwerpunkt F wird später (Zif. 21) für Zwecke der weiteren Rechnung kürzer $EF = 2g$ benannt werden.

II. Die Entfernung zwischen den Punkten E und G

13. Hier haben wir

$$AP - AR = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2c} - \frac{c + b - a}{2} = \frac{b^2 - bc - a^2 + ac}{2c} \ ,$$

$$PE - RG = \frac{(c^2 + b^2 - a^2)(a^2 + c^2 - b^2)}{8cA} - \frac{2A}{a + b + c}$$

oder

$$PE - RG = \frac{c^4 - a^4 - b^4 + 2a^2b^2}{8cA} + \frac{p^3 - 4pq + 8r}{8A}$$

und auf den gemeinsamen Nenner gebracht:

$$AP - AR = \frac{(b^2 - bc - a^2 + ac)\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}}{8cA}$$

$$PE - RG = \frac{2c^4 - (a+b)c^3 - (a-b)^2c^2 + (a+b)(a-b)^2c - (a^2 - b^2)^2}{8cA} \ ,$$

deren Quadrate summiert und durch $4c^2$ dividiert folgende Formel ergeben:

$$EG^2 = \frac{1}{36A^2}\{\Sigma a^6 - \Sigma a^5 b - \Sigma a^4 b^2 + 3\Sigma a^4 bc - 2\Sigma a^3 b^2 c + 2\Sigma a^3 b^3 + 6a^2b^2c^2\}\ .$$ [1]

Bevor ich diesen Ausdruck in die Darstellung durch die Größen p, q und r überführe, bemerke ich, daß

$$EG^2 + (a^2 - ab) + (b^2 - ac) + (c^2 - bc) = \frac{abc}{4A^2}\{\Sigma a^3 - \Sigma a^2 b + 3abc\}$$

$$= \frac{abc(a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc)(a+b+c) + 9a^2b^2c^2}{4A^2}\ .$$

Da $a^2 + b^2 + c^2 = p^2 - 2q$, ist die Transformation jetzt einfach, nämlich

$$EG^2 + p^2 - 3q = \frac{pr(p^2 - 4q) + 9r^2}{4A^2}\ ,$$

so daß sich die gesuchte Distanz folgendermaßen darstellt:

$$EG^2 = \frac{r(p^3 - 4pq + 9r)}{4A^2} - p^2 + 3q = \frac{r^2}{4A^2} - \frac{4r}{p} - p^2 + 3q\ .$$

---

[1] Im Originaltext Druckfehler im Nenner. Setze $\frac{1}{16A^2}$ statt $\frac{1}{36A^2}$. HTL

Betrachtung zu Zif. 13.

Die Koordinatendifferenzen Δx und Δy der Punkte E und G sind Brüche mit dem gemeinsamen Nenner $8cA$. Nach Quadrierung haben $(\Delta x)^2$ und $(\Delta y)^2$ den gemeinsamen Nenner $(8cA)^2 = 64c^2A^2$. Die Rechnung wird zeigen, daß ihre Summe $(\Delta x)^2+(\Delta y)^2 = EG^2$ im Zähler den Faktor $4c^2$ enthält, der auch im Nenner auftritt und daher gehoben werden kann. Nach Abspaltung von $4c^2$ aus $64c^2A^2$ bleibt im Nenner $16A^2$. Im Nenner $36A^2$ des Originaltextes – offenbar aus Zif. 12 übernommen – muß daher ein Druckfehler korrigiert werden. Dieser, obwohl irritierend, hat indessen keine weiteren Konsequenzen, da die Rechnung mit dem korrekten Wert $16A^2$ weitergeführt wird.

Im Subtrahenden $\frac{2A}{a+b+c}$ der Ordinatendifferenz Δy benutzt Euler bereits auf dieser Stufe die Möglichkeit der Darstellung durch die Abkürzungen (Koeffizienten) p, q, r:

$$\frac{2A}{a+b+c} = -\frac{p^3-4pq+8r}{8A} .$$

Es ist leicht zu erraten weshalb. Vorerst kann der Nenner $a+b+c$ durch die Eulersche Abkürzung $p = a+b+c = \Sigma a$ ersetzt werden. Sodann zeigt sich, daß der kleinste gemeinsame Nenner der Brüche Δx und Δy nur das Produkt $8cA$ sein kann, wo A die Fläche des Dreiecks ABC bedeutet. Erweitert man den Bruch $\frac{2A}{a+b+c} = \frac{2A}{p}$ mit $8A$, vorläufig noch ohne den Faktor c:

$$\frac{2A}{a+b+c} = \frac{2A}{p} = \frac{2A8A}{p8A} = \frac{16A^2}{p8A} ,$$

erscheint im Zähler die aus Zif. 11 bekannte Größe $16A^2$:

$$16A^2 = -p^4+4p^2q-8pr , \tag{2e}$$

die den Faktor p enthält, der mit dem Faktor p im Nenner gekürzt werden kann.

$$\frac{2A}{a+b+c} = \frac{2A}{p} = \frac{16A^2}{p8A} = \frac{-p^3+4pq-8r}{8A} .$$

Der Bruch $\frac{2A}{a+b+c} = \frac{1}{8A}[-p^3+4pq-8r]$ muß zur Bildung der Ordinatendifferenz $\Delta y = PE-RG$ von $\frac{1}{8cA}[c^4-(a^2-b^2)^2]$ abgezogen werden. Zwecks Homogenisierung der Bezeichnungen und Reduktion auf die Variablen a, b, c kann die Tabelle Seite 59 zu Rate gezogen werden. Nach zweckmäßiger Zerlegung in Summanden liest man für den Zähler aus der Tabelle ab:

$$-p^3+4pq-8r = -[p^3-4pq+8r] = -[(p^3-3pq+3r)-(pq-3r)+2r] = -[\Sigma a^3-\Sigma a^2b+2abc] .$$

Wird jetzt noch der oben übergangene Faktor c ergänzt, ergibt sich für die Ordinatendifferenz Δy mit Berücksichtigung der Vorzeichen:

$$\begin{aligned}\Delta y &= \frac{1}{8cA}[c^4-(a^2-b^2)^2+c\Sigma a^3-c\Sigma a^2b+2abc^2]\\ &= \frac{1}{8cA}[c^4-(a^2-b^2)^2+ca^3+cb^3+c^4-ca^2b-cab^2-c^2a^2-c^3a-c^2b^2-c^3b+2abc^2] ,\end{aligned}$$

und, wenn nach Potenzen von c geordnet:

$$= \frac{1}{8cA}[2c^4-c^3(a+b)-c^2(a-b)^2+c(a+b)(a-b)^2-(a^2-b^2)^2] .$$

Die Berechnung der Quadrate $(\Delta x)^2$ und $(\Delta y)^2$ ist hier wegen der großen Zahl von Elementen (Produkten der Variablen a, b, c) erheblich umständlicher. $(\Delta x)^2$ liefert $6\times 16 = 96$, $(\Delta y)^2$ $15^2 = 225$ Elemente, von denen etliche zusammengefaßt werden können bzw. sich aufheben. Die Zähler von Δx und Δy sind vierdimensional, ihre Quadrate folglich wieder achtdimensional. Hohe Dimensionen, Vorzeichenwechsel und unterschiedliche Exponenten bewirken große Fehleranfälligkeit beim Rechnen.

Durch Umstellung der Elemente in Δx und Δy wird die Rechnung vereinfacht:

$$\begin{aligned} 8cA\Delta x &= (b^2 - bc - a^2 + ac)\sqrt{2\sum a^2b^2 - \sum a^4} \\ &= [c(a-b) - (a^2 - b^2)]\sqrt{c^2(2a^2 + 2b^2 - c^2) - (a^2 - b^2)^2}\ \text{. Daher} \\ (8cA\Delta x)^2 &= [c(a-b) - (a^2 - b^2)]^2[c^2(2a^2 + 2b^2 - c^2) - (a^2 - b^2)^2] \\ &= [c^2(a-b)^2 - 2c(a-b)(a^2 - b^2) \mathbf{+ (a^2 - b^2)^2}][c^2(2a^2 + 2b^2 - c^2) \mathbf{- (a^2 - b^2)^2}]. \end{aligned}$$

Daneben ist

$$(8cA\Delta y)^2 = [2c^4 - (a+b)c^3 - (a-b)^2c^2 + (a+b)(a-b)^2c \mathbf{- (a^2 - b^2)^2}]^2 .$$

Aus dieser Gegenüberstellung geht hervor, daß $(\Delta x)^2$ nach dem Ausmultiplizieren bzw. Quadrieren den Summanden $\mathbf{-(a^2 - b^2)^4}$, $(\Delta y)^2$ indes den Summanden $\mathbf{+(a^2 - b^2)^4}$ enthalten wird. In der Summe $EG^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$ heben sich diese Summanden folglich gegenseitig auf. Da die Binomialpotenz $(a^2 - b^2)^4$ sämtliche Elemente der Menge $\{a^u b^v c^w \mid u,v,w \in \mathbf{N}_0 \ \&\ u+v+w = 8\}$ enthält, in denen der Faktor c nicht vorkommt, formal also $w = 0$, enthält EG^2 nur noch Elemente, in denen der Faktor c mindestens einmal auftritt und folglich ausgeklammert werden kann.

Analoge Überlegungen bezüglich der Produkte von a, b, c, welche den Faktor c nur einmal aufweisen, ergeben, daß diese in $(\Delta x)^2$ im Summanden

$$+2c(a-b)(a^2 - b^2)(a^2 - b^2)^2 = \mathbf{+2c(a-b)(a^2 - b^2)^3},$$

in $(\Delta y)^2$ hingegen im Summanden

$$-2(a+b)(a-b)^2c(a^2 - b^2)^2 = -2c(a-b)(a^2 - b^2)(a^2 - b^2)^2 = \mathbf{-2c(a-b)(a^2 - b^2)^3}$$

enthalten sein müssen. In der Summe $EG^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$ werden diese beiden Summanden sich wegen des gegensätzlichen Vorzeichens ebenfalls aufheben, so daß schließlich die Summe EG^2 im Zähler nur Elemente enthalten kann, die mindestens den Faktor c^2 enthalten. Es brauchen also für die Σ–Darstellung der quadrierten Entfernung EG^2 nur die Elemente mit mindestens einem Faktor c^2 berechnet zu werden. Der Faktor c^2 findet sich auch im Nenner $64c^2A^2$ und kann wegdividiert werden. Dadurch erniedrigt sich die Dimension des Zählers von EG^2 um 2 Einheiten von 8 auf 6, diejenige des Nenners von 6 auf 4, was die Transformation in die Koeffizientendarstellung erheblich vereinfacht. Die im Zähler von EG^2 verbleibenden Elemente sind also Produkte der Variablen a, b, c der Form $a^u b^v c^w$, wo $u+v+w = 6$ und auf jeden Fall $w \neq 0$ und $w \neq 1$. Euler gibt nur das Ergebnis der – allerdings sehr umständlichen – Rechnungen an – *summa ad hanc formam redit* –, ohne genaueren Hinweis auf den gewählten Rechenweg als möglicherweise die Ordnung der Elemente in Δy nach Potenzen des Faktors c.

Die Rechnung ergibt, daß zusätzlich ein numerischer Faktor 4 wegdividiert werden kann. Das korrekte Ergebnis – nach Division durch $4c^2$ – lautet in vereinfachender Σ-Notation:

$$16A^2EG^2 = \Sigma a^6 - \Sigma a^5 b - \Sigma a^4 b^2 + 3\Sigma a^4 bc - 2\Sigma a^3 b^2 c + 2\Sigma a^3 b^3 + 6a^2 b^2 c^2 ,$$

eine aus sieben sechsdimensionalen symmetrischen Funktionen additiv zusammengesetzte symmetrische Funktion der Variablen a, b, c bzw. der Seiten des gesuchten Dreiecks, die mit Hilfe der Tabelle (Seite 59) der symmetrischen Funktionen in die Koeffizientendarstellung transformiert werden kann.

Während für die ebenfalls sechsdimensionale symmetrische Funktion des Quadrats der Entfernung EF in Zif. 12 nur die drei symmetrischen Funktionen Σa^6, $\Sigma a^4 b^2$ und $a^2b^2c^2$ benötigt wurden, beansprucht das Quadrat EG^2 die Gesamtheit aller sieben überhaupt möglichen sechsdimensionalen symmetrischen Funktionen dreier Variabler — mit schlimmen Folgen für die nachfolgende Arithmetik!

Das Ergebnis der Transformation in die Koeffizientendarstellung mit Hilfe der Tabelle der Funktionen

$$16A^2EG^2 \;=\; p^6 - 7p^4q + 12p^3r + 12p^2q^2 - 40pqr + 36r^2$$

kann als Polynom sechsten Grades in p gedeutet werden. Um die gesuchte Größe EG^2 zu erhalten, muß durch $16A^2$ dividiert werden. Entwickelt man den Divisor nach Formel (2e) in ein Polynom vierten Grades in p, $16A^2 = -p^4 + 4p^2q - 8pr = p(-p^3 + 4pq - 8r)$, liefert die Division den zweidimensionalen Quotienten $\boldsymbol{Q = -p^2 + 3q}$ und den sechsdimensionalen Divisionsrest $\boldsymbol{R = 4p^3r - 16pqr + 36r^2}$, aus dem der Faktor $4r$ bzw. $-4r$ ausgeklammert werden kann

$$\begin{aligned} 16A^2EG^2 \;&=\; (-p^2+3q)\, 16A^2 - 4r(-p^3+4pq-9r) \\ &=\; (-p^2+3q)\, 16A^2 - 4r(-p^3+4pq-8r) + 4r^2 \,. \end{aligned}$$

Nach Formel (2e) ist aber die Klammer $(-p^3+4pq-8r) = 16A^2/\text{p}$. Wir erhalten daher

$$16A^2EG^2 \;=\; (-p^2 + 3q)16A^2 - 4r16A^2/\text{p} + 4r^2$$

und schließlich, nach Division durch $16A^2$, für die gesuchte quadrierte Entfernung EG den vergleichsweise einfachen Ausdruck

$$\boldsymbol{EG^2 \;=\; (-p^2 + 3q) - 4r/p + r^2/4A^2} \,.$$

Dasselbe Ergebnis der sehr umständlichen Rechnungen erhält Euler auf eine weit elegantere, auf den ersten Blick leicht mysteriöse Weise. Die knappe, arithmetisch absolut korrekte Bemerkung mit *observo esse* erweckt beim unvorbereiteten Leser den Eindruck, die Addition eines – selber sehr einfachen – simplifizierenden Summanden vermöge die Rechnung auf einen Schlag von der sechsten auf die dritte Dimension herabzusetzen und damit einen erheblichen Rechenaufwand einzusparen. Gerne hätte man erfahren, woher ein solcher Summand zu beziehen sei. Indessen ist die Erklärung der Herkunft des „simplifizierenden Summanden" weniger geheimnisvoll, als Eulers Bemerkung vermuten läßt. Man kann sich sogar fragen, ob die Formulierung im Originaltext nicht spaßhaft gemeint war.

Statt EG^2 betrachtet Euler die Summe $EG^2 + S$ und wählt für den Summanden S, allerdings ohne dafür eine Begründung anzugeben, die zweidimensionale symmetrische Funktion

$$S = (a^2 - ab) + (b^2 - ac) + (c^2 - bc) = \Sigma a^2 - \Sigma ab,$$

die sich leicht als Funktion der Gleichungskoeffizienten p, q, r angeben läßt:

$$\Sigma a^2 = p^2 - 2q,\ \Sigma ab = q, \quad \text{folgt} \quad S = \Sigma a^2 - \Sigma ab = p^2 - 3q.$$

Man erkennt leicht, daß $S = -Q$, also $-S = Q$, gleich dem Quotienten $(-p^2+3q)$ im obenstehenden Ausdruck für EG^2 ist.

Die Identität $EG^2 \equiv Q + R/16A^2$, wo Q und R den Quotienten bzw. den Divisionsrest bei Division durch $16A^2$ darstellen, gilt unabhängig davon, ob EG^2, Q und der Divisor $16A^2$ als Funktionen von a, b, c oder von p, q, r dargestellt werden. Geht man auf die Darstellung durch a, b, c zurück, hat man, wegen $Q = -S$, $EG^2 \equiv -S + R/16A^2$ oder $EG^2 + S \equiv R/16A^2$, wo R jetzt der Divisionsrest in Σ-Darstellung ist.

Substituiert man in der symmetrischen Funktion

$$16A^2EG^2 = \Sigma a^6 - \Sigma a^5b - \Sigma a^4b^2 + 3\Sigma a^4bc - 2\Sigma a^3b^2c + 2\Sigma a^3b^3 + 6a^2b^2c^2$$

$2\Sigma a^2b^2 - \Sigma a^4$ für $16A^2$ nach der Heronschen Flächenformel (2b) und dividiert man durch $16A^2 = 2\Sigma a^2b^2 - \Sigma a^4$, erhält man den Quotienten $Q = -\Sigma a^2 + \Sigma ab = -S$ und den Divisionsrest $R = 4\Sigma a^4bc - \Sigma a^3b^2c + 12a^2b^2c^2$, wo $-Q = S = \Sigma a^2 - \Sigma ab$ der oben erwähnte simplifizierende Summand in Σ–Notation ist:

$$EG^2 \;=\; -S + \frac{1}{16A^2}\left\{4\Sigma a^4bc - 4\Sigma a^3b^2c + 12a^2b^2c^2\right\} \,.$$

Weiter kann der numerische Faktor 4 ausgeklammert und mit der Zahl 16 im Nenner $16A^2$ gekürzt werden. Die Klammer enthält nur sechsdimensionale symmetrische Funktionen, deren Elemente Produkte aller drei Variablen a, b, c sind und aus denen die dreidimensionale symmetrische Funktion abc ausgeklammert werden kann, so daß in der Klammer schließlich nur noch dreidimensionale Funktionen stehen bleiben:

$$EG^2 + \mathrm{S} = \frac{abc}{4A^2}\left\{\Sigma a^3 - \Sigma a^2 b + 3abc\right\} .$$

Hier ist bereits $abc = r$ eine Primfunktion, während $\Sigma a^3 = \Sigma a^2 \times \Sigma a - \Sigma a^2 b$ und $\Sigma a^2 b = \Sigma ab \times \Sigma a - 3abc$, so daß die geschweifte Klammer zu

$$\left\{\Sigma a^2 \times \Sigma a - 2\Sigma ab \times \Sigma a + 6abc + 3abc\right\} = \left\{(\Sigma a^2 - 2\Sigma ab) \times \Sigma a + 9abc\right\}$$

wird, wo nur noch Σa^2 keine Primfunktion ist. Die Transformation in die Koeffizientendarstellung ist nun ein Kinderspiel – *reductio est facilis, quippe prodit*:

$$EG^2 + p^2 - 3q = \frac{r}{4A^2}\left\{(p^2 - 4q)p + 9r\right\} = \frac{pr(p^2 - 4q) + 9r^2}{4A^2}$$

oder direkt mit Hilfe der Tabelle der symmetrischen Funktionen:

$$EG^2 + p^2 - 3q = \frac{r}{4A^2}\left\{p^3 - 3pq + 3r - pq + 3r + 3r\right\} = \frac{r}{4A^2}\left\{p^3 - 4pq + 9r\right\},$$

woraus wie oben $$\boldsymbol{EG^2 = (-p^2 + 3q) - 4r/p + r^2/4A^2}.$$

Die Entfernung EG des Höhenpunktes E vom Mittelpunkt G des Inkreises wird später mit neuen Variabeln g, h, f auch als $\sqrt{6g^2 + 3h^2 - 2f^2}$ bezeichnet werden.

III. Die Entfernung zwischen den Punkten E und H

14. Weil hier

$$AP–AS = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2c} - \frac{1}{2}c$$

$$PE–SH = \frac{(c^2 + b^2 - a^2)(a^2 + c^2 - b^2)}{8cA} - \frac{c(a^2 + b^2 - c^2)}{8A} ,$$

haben wir die Differenzen:

$$AP–AS = \frac{b^2 - a^2}{2c} \quad \text{und} \quad PE–HS = \frac{2c^4 - (a^2+b^2)c^2 - (a^2-b^2)^2}{8cA}$$

und die durch $4c^2$ dividierte Summe ihrer Quadrate gibt:

$$EH^2 = \frac{1}{16A^2}\{(a^6 + b^6 + c^6) - (a^4b^2 + a^4c^2 + a^2b^4 + a^2c^4 + b^4c^2 + b^2c^4) + 3a^2b^2c^2\} .$$

Dieser Ausdruck kann, weil $16A^2 = -a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2$, reduziert werden zu:

$$EH^2 = \frac{9a^2b^2c^2}{16A^2} - a^2 - b^2 - c^2 ,$$

$$EH^2 = \frac{9r^2}{16A^2} - p^2 + 2q ,$$

wo die Substitution leicht zu bewerkstelligen ist.

<u>Betrachtung zu Ziffer 14</u>.

Zif. 14 untersucht die Entfernung *EH* des Höhenpunktes *E* vom Mittelpunkt *H* des Umkreises. Die linearen Koordinatendifferenzen bezüglich des Nullpunkts *A* und der Bezugsgeraden *AB* sind hier (Fig. 1 und 4):

$$\Delta x = AP - AS \quad \text{und} \quad \Delta y = PE - SH.$$

Beide Differenzen sind Brüche, und ihr gemeinsamer Nenner ist offensichtlich $8cA$, wie schon in Zif. 13. Δx muß mit $4A$ erweitert werden:

$$\Delta x = \frac{b^2 - a^2}{2c} = \frac{4A(b^2 - a^2)}{4A \cdot 2c} = \frac{4A(b^2 - a^2)}{8cA} \; ,$$

während Δy bereits den Nenner $8cA$ besitzt:

$$\Delta y = \frac{2c^4 - (a^2 + b^2)c^2 - (a^2 - b^2)^2}{8cA} \; .$$

Ihre Quadrate sind:

$$64c^2A^2(\Delta x)^2 = 16\mathrm{A}^2(b^2 - a^2)^2 \quad \text{und} \quad 64c^2A^2(\Delta y)^2 = [2c^4 - (a^2 + b^2)c^2 - (a^2 - b^2)^2]^2 \; ,$$

wo in $(\Delta x)^2$ der Faktor $16A^2$ nach Formel (2b) zu $2\Sigma a^2b^2 - \Sigma a^4$ entwickelt werden muß:

$$64c^2A^2(\Delta x)^2 = (2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4)(b^2 - a^2)^2.$$

Durch Umstellung wird dieserAusdruck zu

$$64c^2A^2(\Delta x)^2 = [\mathrm{c}^2(2a^2 + 2b^2 - c^2) - (a^2 - b^2)^2](a^2 - b^2)^2 \; .$$

Nach dem Ausmultiplizieren wird, wie schon in Zif. 13, $(\Delta x)^2$ den Summanden $-(a^2 - b^2)^4$, $(\Delta y)^2$ aber den Summanden $+(a^2 - b^2)^4$ enthalten, die sich beide in der Summe $EH^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$ wegen der ungleichen Vorzeichen aufheben, so daß die Summe EH^2 nur noch Elemente mit dem Faktor c enthält. Da schon in den linearen Koordinatendifferenzen Δx und Δy die niedrigste Potenz der Variablen c deren Quadrat ist, enthalten auch $(\Delta x)^2$ und $(\Delta y)^2$ in allen Elementen auf jeden Fall einen Faktor c^2, der folglich ausgeklammert und mit c^2 im Nenner $64c^2A^2$ gehoben werden kann. Die Rechnung erweist, daß zudem wieder mit dem numerischen Faktor 4 dividiert werden kann. Die Summe EH^2 besitzt daher den Nenner $16A^2$.

Die Zähler von $(\Delta x)^2$ und $(\Delta y)^2$ sind bereits bezüglich der Variablen a und b symmetrisch, und der Zähler der Summe $EH^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$ besteht nach Bereinigung nur noch aus den sechsdimensionalen symmetrischen Funktionen Σa^6, Σa^4b^2 und $(abc)^2$, wie schon in der Summe EF^2 der quadrierten Distanz *EF* von Höhen- und Schwerpunkt in Zif. 12. EH^2 ist also ebenfalls bezüglich aller drei Variablen a, b und c symmetrisch:

$$EH^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = \frac{1}{16A^2}\{\Sigma a^6 - \Sigma a^4b^2 + 3a^2b^2c^2\} \; .$$

Ein Vergleich von EF^2 und EH^2 zeigt, daß sogar die numerischen Faktoren von Σa^6, Σa^4b^2 und $(abc)^2$ identisch sind, nämlich +1, –1 und +3. Der einzige Unterschied zwischen EF^2 und EH^2 besteht in den numerischen Faktoren ihrer Nenner:

$$\frac{1}{36} \text{ in } EF^2 \quad \text{und} \quad \frac{1}{16} \text{ in } EH^2 \; .$$

Mit andern Worten: die Distanzen *EF* und *EH* sind proportional:

$$EF^2 : EH^2 = 1/36 : 1/16 = 16 : 36 = 4 : 9$$

oder

$$\frac{EF^2}{EH^2} = \left(\frac{EF}{EH}\right)^2 = \frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2,$$

woraus folgt

$$\frac{EF}{EH} = \frac{2}{3} \quad \text{oder} \quad EF = \frac{2}{3}EH \; ,$$

und dieses Verhältnis ist offensichtlich unabhängig von konkreten Werten der Variablen *a*, *b*, *c* und bedeutet nichts anderes als, daß, wenn drei Punkte zur Konstruktion eines Dreiecks vorgegeben werden sollen, die Punkte *E*, *F* und *H* nicht genügen, da, wenn zwei von ihnen angegeben werden, der Abstand des dritten von den beiden andern bereits bestimmt ist, ferner daß, wie Euler zeigen wird, die drei Punkte *E*, *F*, *H* auf einer Geraden liegen müssen. Diese Einschränkungen gelten für jedes beliebige Dreieck.

Das Verhältnis $\frac{2}{3}$ mit den Spielarten $\frac{3}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}$ und $\frac{2}{1}$ wird im Laufe der Studie noch eine Rolle spielen. In der Geometrie der Geraden ist $EF+FH = EH$ oder $EF-EH = -FH$, und durch den Prozeß *dividendo*, nach alter Terminologie, folgt aus $\frac{EF}{EH} = \frac{2}{3}$ die Proportion $\frac{EF-EH}{EH} = \frac{2-3}{3} = -\frac{1}{3}$, d.h. $\frac{FH}{EH} = +\frac{1}{3}$. Ebenso folgt durch den Prozeß *invertendo* aus $\frac{EF}{EH} = \frac{2}{3}$ die Proportion $\frac{EH}{EF} = \frac{3}{2}$ und wiederum durch *dividendo* $\frac{EH-EF}{EF} = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2}$, d.h. $\frac{FH}{EF} = \frac{1}{2}$. Zwecks Erleichterung der weiteren Rechnungen gelten ab Zif. 21 die Kurzbezeichnungen $g = FH$, $2g = EF$ und konsequenterweise $3g = EH$. Dieser erste Hinweis auf die Kollinearität der Punkte *E*, *F* und *H* wird in Zif. 10 von Euler indessen noch nicht erwähnt, geschweige denn benutzt.

Die symmetrische Funktion EH^2 der Variablen *a*, *b*, *c* in Σ-Notation läßt sich mit Hilfe der Tabelle leicht in die Koeffizientendarstellung überführen:

$$\begin{array}{lcl}
+\Sigma a^6 & = & p^6 - 6p^4q + 6p^3r + 9p^2q^2 - 12pqr - 2q^3 + 3r^2 \\
-\Sigma a^4b^2 & = & \qquad\qquad + 2p^3r - p^2q^2 - 4pqr + 2q^3 + 3r^2 \\
+3a^2b^2c^2 & = & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + 3r^2 \\
\hline
16A^2EH^2 & = & p^6 - 6p^4q + 8p^3r + 8p^2q^2 - 16pqr \qquad + 9r^2
\end{array}$$

Durch Umstellung erhält man schließlich:

$$\begin{aligned}
16A^2\,EH^2 &= +p^6 - 6p^4q + 8p^3r + 8p^2q^2 - 16pqr + 9r^2 \\
&= -p^2(-p^4+4p^2q-8pr) + 2q(-p^4+4p^2q-8pr) + 9r^2\,,
\end{aligned}$$

wo die Klammern die bekannte Entwicklung $16A^2 = -p^4+4p^2q-8pr$ nach Formel (2e) enthalten:

$$16A^2\,EH^2 = -p^2(16A^2) + 2q(16A^2) + 9r^2\,,$$

woraus folgt: $$EH^2 = -p^2 + 2q + \frac{9r^2}{16A^2}\,.$$

Euler führt die Division vor der Transformation in die Koeffizientendarstellung aus. Er benutzt die Darstellung

$$EH^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = \frac{1}{16A^2}\,\{\Sigma a^6 - \Sigma a^4b^2 + 3a^2b^2c^2\}\,,$$

entwickelt den Nenner $16A^2$ zu $2\Sigma a^2b^2 - \Sigma a^4$ und dividiert das Zählerpolynom. Es resultiert ein Quotient $-\Sigma a^2$ und ein Divisionsrest $9(abc)^2$:

$$16A^2\,EH^2 = (-\Sigma a^2)16A^2 + 9(abc)^2$$

oder $$EH^2 = (-\Sigma a^2) + \frac{1}{16A^2}\,9(abc)^2\,.$$

Durch Umsetzung der symmetrischen Funktionen $-\Sigma a^2$ und *abc* ergibt sich das Resultat in Koeffizientendarstellung:

$$\boldsymbol{EH^2 = -p^2 + 2q + \frac{9r^2}{16A^2}}\,,$$

wie oben. Die Allgegenwart der Größe $16A^2$ in allen Rechnungen ist eklatant.

IV. Die Entfernung zwischen den Punkten F und G

15. Aus den oben gefundenen Formeln haben wir hier:

$$AQ - AR = \frac{3c^2 + b^2 - a^2}{6c} - \frac{c + b - a}{2} = \frac{3(a-b)c - a^2 + b^2}{6c} \ ,$$

$$QF - RG = \frac{2A}{3c} - \frac{2A}{a+b+c} = \frac{2A(a+b-2c)}{3c(a+b+c)} \ ,$$

deren Quadratsumme sich auf die folgende Form zurückführen läßt:

$$FG^2 = \frac{1}{9(a+b+c)^2}\{-(a^4+b^4+c^4) + (a^3b + ab^3 + a^3c + ac^3 + b^3c + bc^3)$$
$$+4(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - 5(abc^2 + ab^2c + a^2bc)\} \ .$$

Wegen:

$$a^4 + b^4 + c^4 = p^4 - 4p^2q + 2q^2 + 4pr \ ,$$
$$a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 = q^2 - 2pr \ ,$$
$$a^3b + ab^3 + a^3c + ac^3 + b^3c + bc^3 = p^2q - 2q^2 - pr \ ,$$
$$abc^2 + ab^2c + a^2bc = pr :$$ [1]

nimmt der erhaltene Ausdruck folgende Gestalt an:

$$\boldsymbol{FG^2 = \frac{1}{9p^2}(-p^4 + 5p^2q - 18pr) = \frac{-p^3 + 5pq - 18r}{9p}} \ .$$

[1] Vgl. Tabelle Seite 59.

<u>Betrachtung zu Ziffer 15</u>.

In Zif. 15 wird die Distanz zwischen Schwerpunkt F und Mittelpunkt G des Inkreises berechnet. Die Koordinatendifferenzen

$$\Delta x \;=\; AQ - AR \quad \text{und} \quad \Delta y \;=\; QF - RG$$

(Fig. 2 und 3) sind Brüche mit dem gemeinsamen Nenner $6c(a + b + c) = 6cp$. Die Berechnung der zweidimensionalen Quadrate $(\Delta x)^2$ und $(\Delta y)^2$ als Brüche sechsdimensionaler Zähler und vierdimensionaler Nenner ist umständlich:

$$36c^2p^2(\Delta x)^2 \;=\; [(a + b) + c]^2[3(a - b)c - (a^2 - b^2)]^2 \quad \text{bzw.}$$

$$36c^2p^2(\Delta y)^2 \;=\; [4A(a + b - 2c)]^2 \;=\; [2c^2(a^2 + b^2) - c^4 - (a^2 - b^2)^2][(a + b) - 2c]^2 \,.$$

Der Faktor $4A$ in Δy wird $16A^2 = 2\Sigma a^2b^2 - \Sigma a^4$ im Quadrat $(\Delta y)^2$ und läßt sich nach Formel (2b) umformen zu $2c^2(a^2 + b^2) - c^4 - (a^2 - b^2)^2$.

Ordnet man nach dem Ausmultiplizieren die Summanden in den Zählern von Δx und Δy nach Potenzen von c, stellt man fest, daß $(\Delta x)^2$ die Summanden $+(a + b)^2(a^2 - b^2)^2$ und $-4c(a + b)(a^2 - b^2)^2$, $(\Delta y)^2$ aber dieselben Summanden mit umgekehrten Vorzeichen enthält, die sich somit in der Summe $FG^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$ aufheben. Der erste Summand enthält alle Elemente ohne die Variable c, der zweite alle Elemente mit einem Faktor c in der ersten Potenz. Die übrigen Elemente der Summe FG^2 werden daher alle mindestens den Faktor c^2 enthalten, der somit durch den Faktor c^2, zusätzlich zu einem numerischen Faktor 4, im Nenner $36c^2p^2$ wegdividiert wird. Im Ergebnis erscheint nur noch der zweidimensionale Nenner $9p^2$.

Der Zähler der Summe $FG^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$ ist eine symmetrische Funktion der Variablen a, b, c, additiv zusammengesetzt aus den nur noch vierdimensionalen symmetrischen Funktionen Σa^4, Σa^3b, Σa^2b^2 und Σa^2bc. Diese können mit Hilfe der Tabelle (Seite 59) der symmetrischen Funktionen vergleichsweise leicht in die Koeffizientendarstellung umgesetzt werden. Zu diesem Zweck fügt Euler selbst eine rudimentäre Tabelle ein. Im Ergebnis kann noch mit p gekürzt werden:

$$\boldsymbol{FG^2 \;=\; \frac{1}{9p^2}(-p^4 + 5p^2q - 18pr) \;=\; \frac{-p^3 + 5pq - 18r}{9p}} \,.$$

Laut Zif. 10 sollen die Vorgaben für die Konstruktion des Dreiecks ABC ausschließlich die relativen Entfernungen der Punkte E, F, G, H voneinander, also Strecken, sein. Im Interesse einer übersichtlicheren Gestaltung der weiteren Rechnungen erhält deshalb die Strecke FG ab Zif. 21, entsprechend den in der Geometrie üblichen Streckenangaben durch Minuskeln, die einfacher zu handhabende Bezeichnung h.

V. Die Entfernung zwischen den Punkten F und H

16. In diesem Falle haben wir:

$$AQ - AS = \frac{3c^2+b^2-a^2}{6c} - \frac{1}{2}c = \frac{b^2-a^2}{6c}$$

$$QF - SH = \frac{2A}{3c} - \frac{c(a^2+b^2-c^2)}{8A} = \frac{2c^4-(a^2+b^2)c^2-(a^2-b^2)^2}{24cA} .$$

Wenn wir diese Formeln mit dem ersten Fall (Zif. 12) vergleichen, erkennen wir, daß

$$AQ - AS = \frac{1}{2}(AP - AQ) \quad \text{und} \quad QF - SH = \frac{1}{2}(PE - QF) ,$$

woraus hervorgeht, daß $FH = \frac{1}{2}EF$, also ist

$$\boldsymbol{FH^2 = \frac{r^2}{16A^2} - \frac{1}{9}(p^2 - 2q)} .$$

Betrachtung zu Ziffer 16.

Aus den Koordinatendifferenzen

$$\Delta x = AQ - AS \quad \text{und} \quad \Delta y = QF - SH$$

wird die Distanz FH zwischen dem Schwerpunkt F und dem Mittelpunkt H des Umkreises berechnet (Fig. 2 und 4).

Es ist unschwer zu erkennen, daß

$$\Delta x = \frac{b^2 - a^2}{6c} = \frac{1}{2}\frac{b^2 - a^2}{3c} ,$$

wo $\frac{b^2 - a^2}{3c}$ die lineare Abszissendifferenz von $EF = AP - AQ$ (Zif. 12) ist.

Von der linearen Ordinatendifferenz $\Delta y = PE - QF$ von EF (Zif. 12) wird erst durch Ausmultiplizieren *manifest*, daß sie doppelt so groß ist wie die Ordinatendifferenz von FH. In Zif. 12 war:

$$\begin{aligned} 24cA\Delta y &= 24cA(PE - QF) = 3[c^2 + (b^2 - a^2)][c^2 - (b^2 - a^2)] - 16A^2 \\ &= 3(c^4 - (b^2 - a^2)^2) - 16A^2 = 3c^4 - 3b^4 + 6a^2b^2 - 3a^4 - 16A^2 \\ &= 4a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 + 4c^4 - 2b^4 - 2a^4 = 2[2c^4 - a^4 - b^4 + 2a^2b^2 - b^2c^2 - a^2c^2] \\ &= 2[2c^4 - (a^2 - b^2)^2 - (a^2 + b^2)c^2] = 2\cdot 24cA(QF - SH) . \end{aligned}$$

Die Verwandtschaft zwischen den Punkten E, F und H; nämlich $FH = \frac{1}{2}EF$ bzw. $EF = 2FH$, wird, obwohl sie sich bereits in Zif. 14 ankündigte, erst hier kurz erwähnt, ohne vorerst andere Folgerungen daraus zu ziehen, als daß die komplizierte Berechnung der Koordinatendifferenzen und ihrer Quadrate übersprungen werden darf, da sie aus Zif. 14 übernommen werden kann.

Die linearen Koordinatendifferenzen von FH sind ersichtlich halb so groß wie diejenigen von EF. Folglich sind die Quadrate der Koordinatendifferenzen von FH ein Viertel der entsprechenden Differenzen von EF. Diese Erkenntnis darf direkt auf die Koeffizientendarstellungen übertragen werden. Da

$$EF^2 = \frac{r^2}{4A^2} - \frac{4}{9}(p^2 - 2q) ,$$

wird FH^2 ein Viertel von EF^2:

$$\boldsymbol{FH^2} = \frac{1}{4}\left[\frac{r^2}{4A^2} - \frac{4}{9}(p^2 - 2q)\right] = \boldsymbol{\frac{r^2}{16A^2} - \frac{1}{9}(p^2 - 2q)} .$$

Als Korollar resultiert die Beziehung $EH = 3FH$ und für ihre Quadrate $EH^2 = 9FH^2$, womit bereits wichtige Eigenschaften der Euler-Geraden beschrieben sind. In der Tat ist laut Zif. 14

$$EH^2 = \frac{9}{16}\frac{r^2}{A^2} - (p^2 - 2q) = 9[\frac{r^2}{16A^2} - \frac{1}{9}(p^2 - 2q)] = 9FH^2 .$$

Zur Erleichterung der weiteren Rechnungen wird die Strecke FH ab (Zif. 21), ebenfalls mit einer Minuskel, als g bezeichnet.

VI. Die Entfernung zwischen den Punkten G und H

17. In diesem letzten Fall haben wir:

$$AR - AS = \frac{c+b-a}{2} - \frac{1}{2}c = \frac{b-a}{2}$$

$$RG - SH = \frac{2A}{a+b+c} - \frac{c(a^2+b^2-c^2)}{8A}$$

$$= \frac{(a+b)c^3+(a^2+b^2)c^2-(a+b)(a^2+b^2)c-(a^2-b^2)^2}{8(a+b+c)A},$$

deren Quadratsumme folgenden Ausdruck erzeugt:

$$GH^2 = \frac{abc}{16(a+b+c)^2A^2}\{(a^5+b^5+c^5)+(a^4b+a^4c+b^4c+ab^4+ac^4+bc^4)$$
$$+(abc^3+ab^3c+a^3bc) - 2(a^3b^2+a^3c^2+b^3c^2+a^2b^3+a^2c^3+b^2c^3)\},$$

der sich, wenn durch $a + b + c$ dividiert, vereinfacht zu:

$$GH^2 = \frac{abc}{16(a+b+c)A^2}\{(a^4+b^4+c^4)+(a^2bc+ab^2c+abc^2)-2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)\},$$

und nach erfolgter Substitution von p, q, r

$$GH^2 = \frac{r}{16pA^2}(p^4-4p^2q+9pr) = \frac{r(p^3-4pq+9r)}{16A^2},$$

oder
$$\boldsymbol{GH^2 = \frac{r^2}{16A^2} - \frac{r}{p}}.$$

Betrachtung zu Ziffer 17.

Die Länge der Strecke GH muß wieder aus den Koordinatendifferenzen ihrer Endpunkte G und H berechnet werden. Die Entfernung des Mittelpunktes G des Inkreises des gesuchten Dreiecks vom Mittelpunkt H seines Umkreises ist diejenige Distanz, die Benjamin Bramer laut Tropfke, einer Anregung seines Lehrmeisters Jost Bürgi folgend, 1618 erstmals berechnet hatte. Bramers Unternehmung findet sich unten (Seiten 200-220) beschrieben und mit Eulers Verfahren verglichen.

Die Abszissendifferenz $\Delta x = AR - AS$
wie auch die Ordinatendifferenz $\Delta y = RG - SH$ (Fig. 3 und 4) sind wie bisher Brüche.

Ihr gemeinsamer Nenner N ist $N = 8(a+b+c)A = 8pA$,
der Nenner ihrer Quadrate folglich $N^2 = 64p^2A^2 = 4p^2\,16A^2$,

wo A wieder die Fläche des gesuchten Dreiecks bedeutet und das Produkt $16A^2$ sich nach Formel (2b) in die symmetrische Funktion $2\Sigma a^2b^2 - \Sigma a^4$ bzw. nach Formel (2e) mit p, q, r zur Koeffizientendarstellung $-p^4 + 4p^2q - 8pr$ entwickeln läßt. Das so einfach aussehende $\Delta x = \frac{b-a}{2}$ muß mit dem Faktor $4(a+b+c)A = 4pA$ erweitert werden:

$$8pA(\Delta x) = (b-a)[(b+a)+c]4A = [(b^2-a^2)+c(b-a)]\sqrt{2\sum a^2b^2 - \sum a^4}\,.$$

Die Funktion Δx ist alternierend bezüglich der Variablen a und b: durch Vertauschung von a und b ändert wegen des Faktors (b – a) lediglich das Vorzeichen von Δx. Das Quadrat $(\Delta x)^2$

$$\begin{aligned}64p^2A^2(\Delta x)^2 &= [c(b-a)+(b^2-a^2)]^2\,[2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4]\\ &= [c(b-a)+(b^2-a^2)]^2\,[-c^4+2c^2(a^2+b^2)-(a^2-b^2)^2]\end{aligned}$$

ist indessen, wie auch Δy und $(\Delta y)^2$, bezüglich a und b symmetrisch:

$$8pA(\Delta y) = (a+b)c^3+(a^2+b^2)c^2-(a+b)(a^2+b^2)c-(a^2-b^2)^2\,.$$

Die Summe $GH^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$ wird daher mindestens bezüglich a und b eine symmetrische Funktion sein.

Die Strecken Δx und Δy sind ihrer Natur nach eindimensional, ihre Quadrate zweidimensional. Der gemeinsame Nenner $8pA$ ist dreidimensional, sein Quadrat folglich sechsdimensional. Dementsprechend sind die Zähler der Brüche Δx und Δy vier-, diejenigen ihrer Quadrate $(\Delta x)^2$ und $(\Delta y)^2$ hingegen achtdimensional.

Die Berechnung der Quadrate $(\Delta x)^2$ und $(\Delta y)^2$, ist, obwohl sie nur Additionen und Multiplikationen benötigt und von einem Schulkind bewältigt werden könnte, wieder umständlich und zeitraubend. Euler gibt wohlweislich nur das Ergebnis an. Da aber in Zif. 13 bereits ein Druckfehler registriert werden mußte, ist es ratsam, wenigstens stichprobenweise einige Rechnungen zu überprüfen.

Der Radikand von Δx enthält sechs Elemente, der Faktor vor der Wurzel vier. Die Multiplikationstabelle zum Ausmultiplizieren wird daher für das Quadrat der x-Koordinatendifferenz $6\times 4^2 = 96$ Elemente generieren, von denen allerdings einige gleichartig sein werden. Selbst wenn man bereits im Quadrat der eckigen Klammer gleichartige Elemente zusammenfaßt, bleiben noch zehn verschiedene stehen.

Die Ordinatendifferenz Δy besitzt bereits den Nenner $N = 8(a+b+c)A = 8pA$. Ihr Zähler besteht aus vier zusammengesetzten und nach Potenzen der Variablen c geordneten Summanden. Durch Ausmultiplizieren würden diese elf Elemente des Typs $ka^ub^vc^w$ liefern, wo a, b, c wie bisher die Längen der Seiten des (gesuchten) Dreiecks und k einen numerischen Faktor $k \in \mathbf{Z}$ bedeuten, während die Summe der Exponenten $u+v+w = 4$ beträgt. Das Quadrat des Zählers umfaßt folglich $11^2 = 121$ solche Elemente, wovon freilich eine Anzahl ähnlich oder gar gleich sein werden.

Eine Überprüfung der linearen Koordinatendifferenzen aller sechs relativen Entfernungen der Punkte E, F, G und H voneinander zeigt, daß in ihnen, als Abkömmlingen der Heronschen Flächenformel und ihres Umfeldes, ständig die Kombinationen (und symmetrischen bzw. alternierenden Funktionen) $a + b$, $a - b$, $a^2 + b^2$ und $a^2 - b^2$ auftreten. In Zif. 11 führte Euler den Kunstgriff ein, die drei symmetrischen Primfunktionen $a + b + c$, $ab + ac + bc$ und abc durch die Abkürzungen p, q und r zu bezeichnen, die später als die konstanten numerischen Koeffizienten einer Gleichung dritten Grades gedeutet werden dürfen. Benutzen wir wie in Zif. 12 den gleichen Kunstgriff, um, in Anlehnung an die alten Bezeichnungen *Binom* – die noch im Terminus *Binomialtheorem* nachklingt – und *Residuum*, die Summe durch den Buchstaben B, die Differenz durch R und sinngemäß die quadratische Funktion durch Q^2 abzukürzen. Es seien also:

$$(a + b) = B, \quad (a - b) = R, \quad \text{und} \quad (a^2 + b^2) = Q^2 \quad \text{ferner} \quad a^2 - b^2 = BR.$$

Damit werden, nach Potenzen der Variablen c geordnet:

$$\begin{aligned} 64p^2A^2(\Delta x)^2 &= [c(b-a) + (b^2 - a^2)]^2[-c^4 + 2c^2(a^2+b^2) - (a^2 - b^2)^2] \\ &= [c(-R) + (-BR)]^2[-c^4 + 2c^2Q^2 - (BR)^2] \\ &= [c^2R^2 + 2cBR^2 + (BR)^2][-c^4 + 2c^2Q^2 - (BR)^2] \\ &= -c^6R^2 - 2c^5BR^2 + c^4[2Q^2R^2 - (BR)^2] + 4c^3BQ^2R^2 \\ &\quad + c^2(BR)^2[2Q^2 - R^2] - 2cBR^2(BR)^2 \qquad \boldsymbol{-(BR)^4} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} 64p^2A^2(\Delta y)^2 &= [(a+b)c^3 + (a^2+b^2)c^2 - (a+b)(a^2+b^2)c - (a^2-b^2)^2]^2 \\ &= [Bc^3 + Q^2c^2 - BQ^2c - (BR)^2]^2 \\ &= c^6B^2 + c^4Q^4 + c^2B^2Q^4 + (BR)^4 + 2c^5BQ^2 - 2c^4B^2Q^2 \\ &\quad - 2c^3B(BR)^2 - 2c^3BQ^4 - 2c^2(BR)^2Q^2 + 2cBQ^2(BR)^2 \\ &= c^6B^2 + 2c^5BQ^2 + c^4Q^2[Q^2 - 2B^2] - 2c^3B[(BR)^2 + Q^4] \\ &\quad + c^2B^2Q^2[Q^2 - 2R^2] + 2cBQ^2(BR)^2 \qquad \boldsymbol{+(BR)^4}, \end{aligned}$$

wo im Endergebnis offenbar alle Summanden achtdimensional sind.

In dieser Gegenüberstellung fällt auf, daß die absoluten Werte $(BR)^4$ der beiden Glieder ohne Faktor c identisch sind, aber umgekehrte Vorzeichen aufweisen. In der Summe heben sie sich also auf, wie bereits in früheren Rechnungen. Die Summe der quadrierten Koordinatendifferenzen liefert nach Bereinigung schließlich, wieder nach Potenzen von c geordnet:

$$\begin{aligned} 64p^2A^2[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2] &= c^6[B^2 - R^2] + 2c^5B[Q^2 - R^2] + c^4[2Q^2(R^2 - B^2) + Q^4 - (BR)^2] \\ &\quad + 2c^3B[2Q^2R^2 - (BR)^2 - Q^4] + c^2B^2[Q^4 - R^4] + 2cB(BR)^2[Q^2 - R^2], \end{aligned}$$

formal ein Polynom sechsten Grades der Variablen c ohne konstantes Glied, deren Koeffizienten sukzessive zwei- bis siebendimensionale symmetrische Funktionen der Variablen a und b sind. Zusammen mit den zugehörigen Potenzen von c bilden alle Produkte von a und b achtdimensionale Elemente. Die Summe der quadrierten Koordinatendifferenzen $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$ wird eine symmetrische Funktion sein.

Auf Grund der oben eingeführten Definitionen von B, R und Q^2 sind

$$\begin{aligned} &B^2 - R^2 = 4ab, \quad Q^2 - R^2 = 2ab, \quad Q^4 - (BR)^2 = 4a^2b^2, \quad (BR)^2 + Q^4 = 2(a^4 + b^4), \\ &Q^2R^2 = a^4 - 2a^3b + 2a^2b^2 - 2ab^3 + b^4, \quad Q^4 - R^4 = 4a^3b - 4a^2b^2 + 4ab^3, \end{aligned}$$

somit

$$\begin{aligned} 64p^2A^2[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2] &= c^6[4ab] + 2c^5B[2ab] + c^4[2Q^2(-4ab) + 4a^2b^2] \\ &\quad + 2c^3B[-4a^3b + 4a^2b^2 - 4ab^3] + 4c^2B^2[a^3b - a^2b^2 + ab^3] \\ &\quad + 2cB(BR)^2[2ab], \end{aligned}$$

wo offenbar ein Faktor $4abc$, der, bis auf den numerischen Faktor 4, zugleich die dreidimensionale symmetrische Primfunktion r von a, b, c ist, vor die Klammern gesetzt werden kann:

$$\begin{aligned} 64p^2A^2[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2] &= 4abc(c^5) + 4abc(c^4B) + 4abc(c^3[-2Q^2 + ab]) \\ &\quad + 4abc(c^2B[-2a^2 + 2ab - 2b^2] + 4abc(cB^2)[a^2 - ab + b^2] + 4abc(B(BR)^2) \\ &= 4abc\{c^5 + c^4B + c^3[-2Q^2 + ab] + c^2B[-2a^2 + 2ab - 2b^2] \\ &\quad + cB^2[a^2 - ab + ab^3] + a^5 - 2a^3b^2 + ab^4 + a^4b - 2a^2b^3 + b^5\}. \end{aligned}$$

Die in den geschweiften Klammern verbleibenden Elemente sind daher nur noch fünfdimensional, was die nachfolgenden Rechnungen vereinfacht. Nach Bereinigung der Klammern und Substitution von a, b, c für B, Q, R ergibt sich:

$$\begin{aligned}64p^2A^2[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2] \;=\;& 4abc\{c^5+ac^4+bc^4-2a^2c^3-2b^2c^3+abc^3-2a^3c^2+2b^3c^2\\ &+a^4c+a^3bc+ab^3c+b^4c+a^5-2a^3b^2+ab^4+a^4b-2a^2b^3+b^5\}\end{aligned}$$

und, wenn gleichartige Summanden zusammengefaßt werden:

$$\begin{aligned}64p^2A^2[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2] \;=\;& 4abc\{(a^5+b^5+c^5)+(a^4b+ab^4+a^4c+ac^4+b^4c+bc^4)\\ &-2(a^3b^2+a^2b^3+a^3c^2+a^2c^3+b^3c^2+b^2c^3)+(a^3bc+ab^3c+abc^3)\}\\ \;=\;& 4abc\{\Sigma a^5+\Sigma a^4b-2\Sigma a^3b^2+\Sigma a^3bc\}\ ,\end{aligned}$$

auch hier, wie zu erwarten, wieder eine symmetrische Funktion der Variablen a, b, c, multiplikativ zusammengesetzt aus der dreidimensionalen Primfunktion $abc = r$ und der Summe der vier fünfdimensionalen symmetrischen Funktionen Σa^5, Σa^4b, $2\Sigma a^3b^2$, Σa^3bc, die sich mit Hilfe der Tabelle Seite 59 leicht in die Koeffizientendarstellung umsetzen läßt.

Werden beide Seiten dieses Ausdrucks durch $64p^2A^2$ dividiert, folgt endlich das Quadrat der gewünschten Entfernung GH:

$$GH^2 \;=\; (\Delta x)^2+(\Delta y)^2 \;=\; \frac{4\,abc}{64\,p^2\,A^2}\ \{\Sigma a^5+\Sigma a^4b-2\Sigma a^3b^2+\Sigma a^3bc\}\ ,$$

wo der numerische Faktor 4/64 noch zu 1/16 gekürzt werden kann:

$$\boldsymbol{GH^2} \;=\; (\Delta x)^2+(\Delta y)^2 \;=\; \frac{abc}{16\,p^2\,A^2}\ \boldsymbol{\{\Sigma a^5+\Sigma a^4b-2\Sigma a^3b^2+\Sigma a^3bc\}}\ .$$

Euler transformiert nicht sofort in die Koeffizientendarstellung, die ja das Ziel der gesamten Operation ist, sondern dividiert vorher durch $a+b+c = p$. Mit Hilfe der Tabelle Seite 59 verifiziert man leicht, daß die Summe in der geschweiften Klammer den Faktor $p = \Sigma a$ ohne Rest abspalten läßt. Euler sagt nicht, ob er die Teilbarkeit durch $a+b+c = p$ ohne Rest hier zufällig „durch Probieren" entdeckt habe, oder ob er sie infolge früherer Beschäftigung mit symmetrischen Funktionen vermutet oder sogar bereits gekannt habe. Durch die Division wird die Dimension der in der Klammer verbleibenden symmetrischen Funktionen jedenfalls um eine Stufe herabgesetzt, was die nachfolgende Transformation entsprechend vereinfacht. Zur Vermeidung der umständlichen Polynomialdivision kann die oben skizzierte Methode der unbestimmten Koeffizienten herangezogen werden.

Der Divisor $p = a+b+c$, der den fünfdimensionalen Dividenden $\Sigma a^5 + \Sigma a^4b - 2\Sigma a^3b^2 + \Sigma a^3bc$ teilen soll, ist eine eindimensionale symmetrische Funktion. Der Quotient wird daher eine vierdimensionale symmetrische Funktion sein, bestehend aus einer additiven Kombination der, höchstens durch einen konstanten numerischen Faktor zu praezisierenden, (einzigen) vierdimensionalen Funktionen Σa^4, Σa^3b, Σa^2b^2, Σa^2bc. Es gilt daher folgender Ansatz für die gesuchte symmetrische Funktion:

$$\{\Sigma a^5+\Sigma a^4b-2\Sigma a^3b^2+\Sigma a^3bc\} \;\equiv\; \Sigma a\times(\,\Sigma a^4\mathbf{A}+\Sigma a^3b\mathbf{B}+\Sigma a^2b^2\mathbf{C}+\Sigma a^2bc\mathbf{D}),$$

wo die vier Symbole A, B, C, D Platzhalter für zu bestimmende konstante, rein numerische Größen bedeuten. Oben stehende Gleichheit ist eine Identität, die für beliebige Werte der Variablen a, b, c richtig ist. Durch willkürliche Festsetzung von vier konkreten Wertesätzen für a, b, c gewinnt man vier simultan geltende Gleichungen für die vier dimensionslosen numerischen Unbekannten A, B, C und D, die als lineares Gleichungssystem aufgefaßt und u.a. mit Hilfe der bekannten Determinantenmethode (*Cramersche Regeln*) aufgelöst werden können. Den Unbekannten A, B, C, D werden dadurch konkrete Zahlenwerte zugeordnet. Für die Variablen a, b, c wählt man dabei tunlichst einfache skalare Größen kleineren numerischen Wertes, um überflüssigen Rechenaufwand zu vermeiden. Die nachfolgende Tabelle enthält für vier einfache Zahlentripel (a,b,c) die Zahlenwerte der involvierten symmetrischen Funktionen:

Tabelle

	a	***b***	***c***	$\boldsymbol{\Sigma a^5}$	$\boldsymbol{\Sigma a^4 b}$	$\boldsymbol{\Sigma a^3 bc}$	$\boldsymbol{\Sigma a^3 b^2}$	$\boldsymbol{\Sigma a}$	$\boldsymbol{\Sigma a^4}$	$\boldsymbol{\Sigma a^3 b}$	$\boldsymbol{\Sigma a^2 b^2}$	$\boldsymbol{\Sigma a^2 bc}$
(1)	0	1	1	2	2	0	2	2	2	2	1	0
(2)	0	1	2	33	18	0	12	3	17	10	4	0
(3)	1	1	1	3	6	3	6	3	3	6	3	3
(4)	–1	1	1	1	2	–3	2	1	3	–2	3	–1

Mit Hilfe der hier tabellierten Werte der symmetrischen Funktionen liefert die Identität

$$\{\Sigma a^5 + \Sigma a^4 b - 2\Sigma a^3 b^2 + \Sigma a^3 bc\} \;\equiv\; \Sigma a \times (\Sigma a^4 \mathrm{A} + \Sigma a^3 b \mathrm{B} + \Sigma a^2 b^2 \mathrm{C} + \Sigma a^2 bc \mathrm{D})$$

das Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lrcl}
(1) & 0 & = & 2\mathrm{A} + 2\mathrm{B} + \mathrm{C} \\
(2) & 9 & = & 17\mathrm{A} + 10\mathrm{B} + 4\mathrm{C} \\
(3) & 0 & = & \mathrm{A} + 2\mathrm{B} + \mathrm{C} + \mathrm{D} \\
(4) & -4 & = & 3\mathrm{A} - 2\mathrm{B} + 3\mathrm{C} - \mathrm{D}\ ,
\end{array}$$

wo sich eine Zusammenfassung der Gleichungen (3) und (4) aufdrängt, so daß das System

$$\begin{array}{rcl}
0 & = & 2\mathrm{A} + 2\mathrm{B} + \mathrm{C} \\
9 & = & 17\mathrm{A} + 10\mathrm{B} + 4\mathrm{C} \\
-1 & = & \mathrm{A} \qquad\quad + \mathrm{C}
\end{array} \qquad \text{mit der Eliminanten } \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 17 & 10 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -16$$

übrigbleibt. Nach der Elimination des Faktors D benötigen die verbleibenden Faktoren A, B und C nur noch Determinaten dritter Ordnung, deren arithmetische Behandlung erheblich einfacher ist. Die Determinanten zur Bestimmung der Faktoren A, B, C sind:

$$\Delta_\mathrm{A} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 9 & 10 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -16, \qquad \Delta_\mathrm{B} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 17 & 9 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \Delta_\mathrm{C} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 17 & 10 & 9 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 32\ ,$$

und die Faktoren A, B, C sind folglich $\mathrm{A} = \frac{-16}{-16} = 1$, $\mathrm{B} = \frac{0}{-16} = 0$, $\mathrm{C} = \frac{32}{-16} = -2$. Wenn die Größen A, B, C bekannt sind, kann der noch fehlende Faktor D aus Gleichung (3) oder (4) bestimmt werden, z.B. 0 = A + 2B + C + D = 1 + 0 − 2 + D oder D = 1. Da $\Sigma a = p$, folgt für die quadrierte Distanz GH:

$$\begin{aligned}
GH^2 \;=\; (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 &= \frac{4abc}{64 p^2 A^2} \{\Sigma a^5 + \Sigma a^4 b - 2\Sigma a^3 b^2 + \Sigma a^3 bc\} \\
&= \frac{abc}{16 p^2 A^2}\, p \{\Sigma a^4 + 0\Sigma a^3 b - 2\Sigma a^2 b^2 + \Sigma a^2 bc\} \\
&= \frac{abc}{16\ p A^2} \{\Sigma a^4 - 2\Sigma a^2 b^2 + \Sigma a^2 bc\}\ .
\end{aligned}$$

Die Transformation in die Koeffizientendarstellung benötigt nun nur noch die vergleichsweise einfachen symmetrischen Funktionen Σa^4, $\Sigma a^2 b^2$ und $\Sigma a^2 bc$.

Da bereits $abc = r$, ist die Summe der letzteren:

$$\begin{array}{rcl}
\Sigma a^4 & = & p^4 - 4p^2 q + 4pr + 2q^2 \\
\Sigma a^2 bc & = & \qquad\qquad\quad + pr \\
-2\Sigma a^2 b^2 & = & \qquad\qquad\quad + 4pr - 2q^2 \\
\hline
\end{array}$$

$$\Sigma a^4 + \Sigma a^2 bc - 2\Sigma a^2 b^2 \;=\; p^4 - 4p^2 q + 9pr \qquad = -(-p^4 + 4p^2 q - 8pr) + pr\ ,$$

wo der Ausdruck in der Klammer die aus Formel (2e) bekannte Entwicklung der Größe $16A^2$ ist und durch $16A^2$ im Nenner wegdividiert wird, so daß, wenn für *abc* noch das Symbol *r* gesetzt wird:

$$\boldsymbol{GH^2} = \frac{abc}{16\,p\,A^2}\{\Sigma a^4 - 2\Sigma a^2b^2 + \Sigma a^2bc\} = \frac{r}{16\,p\,A^2}\{-16A^2 + pr)\} = \frac{-\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{p}} + \frac{\boldsymbol{r^2}}{\mathbf{16}\,\boldsymbol{A^2}} .$$

Dasselbe Resultat hätte sich, sogar direkter, ergeben, wenn schon auf der Stufe der fünfdimensionalen symmetrischen Funktionen

$$GH^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = \frac{abc}{16\,p^2A^2}\{\Sigma a^5 + \Sigma a^4b - 2\Sigma a^3b^2 + \Sigma a^3bc\}$$

in die Koeffizientendarstellung transformiert worden wäre, Kenntnis der fünfdimensionalen allerdings vorausgesetzt.

Der Tabelle der symmetrischen Funktionen entnimmt man:

$$\begin{array}{rcl}
\Sigma a^5 & = & p^5 - 5p^3q + 5p^2r + 5pq^2 - 5qr \\
\Sigma a^4b & = & + p^3q - p^2r - 3pq^2 + 5qr \\
\Sigma a^3bc & = & + p^2r - 2qr \\
-2\Sigma a^3b^2 & = & + 4p^2r - 2pq^2 + 2qr \\
\hline
\{\Sigma a^5 + ...\} & = & p^5 - 4p^3q + 9p^2r \\
 & = & -p(-p^4 + 4p^2q - 8pr) + p^2r = -p(16A^2) + p^2r ,
\end{array}$$

so daß auch hier
$$\boldsymbol{GH^2} = \frac{abc}{16\,p^2A^2}\{\Sigma a^5 + \Sigma a^4b - 2\Sigma a^3b^2 + \Sigma a^3bc\}$$
$$= \frac{abc}{16\,p^2A^2}\{-p(16A^2) + p^2r\} = \frac{rp}{16\,p^2A^2}\{-16A^2 + pr\} = \frac{\boldsymbol{r^2}}{\mathbf{16}\,\boldsymbol{A^2}} - \frac{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{p}} .$$

Die aufwendigen Rechnungen mit oft mehrzeiligen Formeln, die selbstverständlich auch Euler nicht erspart blieben, obwohl die Angaben bloßer Ergebnisse den Eindruck erwecken, über elegante Schnellverfahren verfügt zu haben, laufen schließlich auf vergleichsweise einfache Formeln in Koeffizientendarstellung hinaus, und die zuletzt erhaltene Formel ist die einfachste aller sechs Darstellungen der relativen Entfernungen überhaupt.

Auch die Strecke *GH* wird später (Zif. 21) abgekürzt als $GH = f$ bezeichnet werden. Ihr Quadrat, die Größe $GH^2 = f^2$, hier als Funktion $f^2(a,b,c)$ der Dreiecksseiten *a*, *b*, *c* bzw. der „Abkürzungen“ $p = \Sigma a$ und $r = abc$ hergeleitet, wird, zusammen mit den Funktionen $g^2(a,b,c)$ und $h^2(a,b,c)$, in Zif. 21 zu einer unabhängigen Variablen umgedeutet und zur Berechnung der Dreiecksseiten *a*, *b*, *c* benutzt. Zu diesem Zweck muß ein Gleichungssystem, das zu einem nur in Sonderfällen lösbaren Typ zählt, gelöst werden. Dabei wird ihrem Quadrat, der Größe f^4, eine Schlüsselrolle zufallen.

18. Zusammenstellung der Quadrate der sechs Entfernungen:

$$
\begin{array}{rlll}
\text{I.} & EF^2 & = & \dfrac{r^2}{4A^2} - \dfrac{4}{9}(p^2 - 2q) \\
\text{II.} & EG^2 & = & \dfrac{r^2}{4A^2} - p^2 + 3q - \dfrac{4r}{p} \\
\text{III.} & EH^2 & = & \dfrac{9r^2}{16A^2} - (p^2 - 2q) \\
\text{IV.} & FG^2 & = & -\dfrac{1}{9}p^2 + \dfrac{5}{9}q - \dfrac{2r}{p} \\
\text{V.} & FH^2 & = & \dfrac{r^2}{16A^2} - \dfrac{1}{9}(p^2 - 2q) \\
\text{VI.} & GH^2 & = & \dfrac{r^2}{16A^2} - \dfrac{r}{p},
\end{array}
$$

wo augenscheinlich (Fig. 5) $EH = \frac{3}{2}EF$ und $FH = \frac{1}{2}EF$ ist, und daher der Punkt H durch die Punkte E, F automatisch bestimmt ist, wenn nämlich die drei Punkte E, F, G ein Dreieck EFG bilden, wird der vierte Punkt H so auf der Verlängerung der Geraden EF liegen, daß

$$FH = \frac{1}{2}EF \text{ und daher } EH = \frac{3}{2}EF.$$

Daraus läßt sich ferner schließen, daß

$$4GH^2 + 2EG^2 = 3EF^2 + 6FG^2,$$

was mit den vorher gefundenen Werten übereinstimmt.

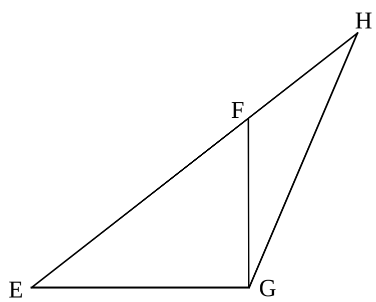


Fig. 5

<u>Betrachtung zu Ziffer 18</u>.

Mit Zif. 18 erreicht die Studie ihren ersten Höhepunkt, nämlich die Entdeckung, besser Herleitung, der ***Euler-Geraden***.

In den Ziffern 12 bis 17 sind die Quadrate der relativen Entfernungen der „merkwürdigen Punkte“ *E*, *F*, *G* und *H* eines Dreiecks *ABC* voneinander berechnet worden. Zur Berechnung der sechs Strekken *EF*, *EG*, *EH*, *FG*, *FH* und *GH* bzw. ihrer Quadrate sind die sechs Berechnungsformeln I bis VI aufgestellt worden, die in Zif. 18 systematisch zusammengestellt sind. Die Rechnungen beruhten auf der Annahme, daß die Seiten *a, b, c* des Dreiecks *ABC* bekannt sind. Demzufolge sind die Streckenquadrate EF^2 usw. primär Funktionen der Argumente *a, b, c* und, als gegenüber Drehungen des Dreiecks invariante Größen, sogar *symmetrische Funktionen* von *a, b, c*.

In der Zif. 11 wurden für *a, b, c* die „Abkürzungen“ – und symmetrischen Funktionen – $p = \Sigma a$, $q = \Sigma ab$ und $r = abc$ eingeführt, nominell, um die „Gleichbehandlung“ der Variablen *a, b, c* zu garantieren, in Wahrheit aber, weil *p, q, r* als Koeffizienten der kubischen Gleichung $z^3 - pz^2 + qz - r = 0$ gedeutet werden dürfen, wenn deren drei Lösungen genau $z_1 = a$, $z_2 = b$ und $z_3 = c$ sind. Höherdimensionale symmetrische Funktionen der Argumente *a, b, c* lassen sich überdies als Funktionen von *p, q, r* darstellen. Ein Hauptteil der Ziffern 12 bis 17 besteht in der Transformation der symmetrischen Funktionen von *a, b, c* in Funktionen von *p, q, r*. Die Streckenformeln EF^2 usw. erscheinen daher in zweierlei Gestalt, einerseits in *a,b,c*-Darstellung oder Σ-Darstellung, andererseits in *p,q,r*- oder Koeffizientendarstellung. Die Zif. 18 kennt nur noch Funktionen der Argumente *p, q, r,* also Koeffizientendarstellungen.

Die Akademieaufgabe von 1723 verlangte aber die Konstruktion des Dreiecks *ABC*, wenn dessen „merkwürdige Punkte“ *E, F* und *G*, konkret die Strecken *EF* (Höhenpunkt-Schwerpunkt), *EG* (Höhenpunkt-Inkreismittelpunkt) und *FG* (Schwerpunkt-Inkreismittelpunkt) vorgegeben sind. Zweck der Studie ist es deshalb, mit Hilfe der Streckenformeln der Zif. 18 die Dreiecksseiten *a, b, c* zu berechnen.. Zu diesem Behufe werden die Streckenformeln I bis VI als Gleichungssystem zur Bestimmung zunächst der Unbekannten *p, q, r* und, in einem zweiten Schritt, der Dreiecksseiten *a, b, c* umgedeutet.

Das „Gleichungssystem“ (I-VI) besteht aus sechs Gleichungen, in denen die drei Unbekannten *a*, *b*, *c*, camoufliert durch die Stellvertreter *p, q, r,* auftreten. Zur Bestimmung von drei Unbekannten werden indessen nur drei Gleichungen benötigt. Das System (I-VI) ist daher redundant und muß auf allfällige Widersprüche geprüft werden. Die Prüfung ergibt jedoch, daß solche Befürchtungen grundlos sind, da drei Gleichungen sich als abhängig voneinander erweisen. Die Rechnungen begründen sogar das Faktum, daß die Punkte *E* (Höhenpunkt), *F* (Schwerpunkt) und *H* (Umkreismittelpunkt) auf einer Geraden liegen. In Lehrbüchern wird diese Gerade heute ***Euler-Gerade*** genannt.

Nicht ganz unerwartet nach der knappen Andeutung in Zif. 16, kann sogar ein ungeübtes Auge nicht übersehen, daß drei der sechs Formeln, nämlich die Streckenquadrate FH^2, EF^2 und EH^2 miteinander verwandt sind. Die Struktur ihrer Formeln ist identisch, sie selbst unterscheiden sich nur durch numerische Faktoren. Es sind:

$$FH^2 = \frac{r^2}{16A^2} - \frac{1}{9}(p^2 - 2q) \quad = \quad 1 \cdot \left[\frac{r^2}{16A^2} - \frac{1}{9}(p^2 - 2q)\right] = 1\, FH^2,$$

$$EF^2 = \frac{r^2}{4A^2} - \frac{4}{9}(p^2 - 2q) \quad = \quad 4 \cdot \left[\frac{r^2}{16A^2} - \frac{1}{9}(p^2 - 2q)\right] = 4\, FH^2,$$

$$EH^2 = \frac{9r^2}{16A^2} - \quad (p^2 - 2q) \quad = \quad 9 \cdot \left[\frac{r^2}{16A^2} - \frac{1}{9}(p^2 - 2q)\right] = 9\, FH^2.$$

Die charakteristischen Proportionalitätsfaktoren sind die Quadratzahlen 1, 4 und 9, so daß sich die entprechenden linearen Grundgrößen *FH*, *EF* und *EH* wie 1 : 2 : 3 verhalten. Da es sich bei *FH*, *EF* und *EH* nicht um arithmetische Größen, sondern um geometrische Distanzen, d.h. Längen > 0, handelt, kommen nur die positiven Wurzeln +1, +2 und +3 in Betracht.

In Zif. 21 führt Euler Kleinbuchstaben als Symbole für die Längen der bisher durch ihre Endpunkte bezeichneten Strecken ein, wie dies heute noch üblich ist. Die kürzeste der fraglichen Strecken, *FH*, wird durch *g* gekennzeichnet: $FH = g$. Demnach gilt $EF = 2g$ und $EH = 3g$ und folgerichtig $EF + FH = 2g + g = 3g = EH$. Dies bedeutet jedenfalls, daß, wenn etwa durch Definition der Länge *g* die Punkte *E* und *F* vorgegeben werden, der Punkt *H* nicht mehr frei gewählt werden kann, genauer gesagt aber, daß *H* nach Maßgabe der Distanzgröße *g* auf der durch die Punkte *E* und *F* definierten Geraden – der ***Euler-Geraden*** – liegen muß:

quartum punctum H in recta EF producta erit situm. (Zif. 18).

Eine „Zufallsentdeckung“? – Mindestens soll sie sich nach Eulers Darstellung aus der Analyse der Positionen der Punkte *E*, *F*, *H* und ihrer wechselseitigen Entfernungen voneinander als solche ergeben.

Um einzusehen, daß dem so ist, braucht man nur die Dreiecksungleichung zu bemühen. In den Anfangsgründen des Geometrieunterrichts wird bewiesen, daß in jedem beliebigen ebenen Dreieck die Summe zweier beliebig gewählter Seiten stets größer als die dritte sein wird. Wenn die drei Punkte *E*, *F* und *H* ein Dreieck *EFH* bilden, wird daher immer $EF + FH > EH$, $HE + EF > HF$, $EH + HF > EF$ sein. Da Eulers Rechnungen jedoch ergeben haben, daß die Gleichheit $EF + FH = EH$ gilt, können *E*, *F* und *H* kein Dreieck bilden, d.h. sie liegen auf ein und derselben Geraden. [64]

Die Gleichheit $EF + FH = EH$ kann geradezu als Definition einer Geraden dienen: die Punktefolge *EFH* beschreibt dann eine Gerade, wenn $EF + FH = EH$. [65]

Zur Erhärtung dieser Tatsache schließt Euler – indes ohne zu erklären wie und warum – , daß unter den Punkten *E*, *F*, *G*, *H* die Beziehung

$$(\alpha) \qquad \mathbf{4GH^2 + 2EG^2 = 3EF^2 + 6FG^2}$$

statthabe, wo zu den Punkten *E*, *F*, *H* nun noch der Inkreismittelpunkt *G* tritt.

Die Formeln I bis VI der Zusammenstellung in Zif. 18 bestätigen diese Behauptung:

$$\begin{array}{llrrrr}
4GH^2 & = \dfrac{r^2}{4A^2} & & & & -\ 4\dfrac{r}{p} \\
2EG^2 & = \dfrac{2r^2}{4A^2} & -\ 2p^2 & +\ 6q & & -\ 8\dfrac{r}{p} \\
\hline
\Sigma & = \dfrac{3r^2}{4A^2} & -\ 2p^2 & +\ 6q & & -\ 12\dfrac{r}{p} \\
 & & & & & \\
3EF^2 & = \dfrac{3r^2}{4A^2} & -\ \dfrac{4}{3}p^2 & +\ \dfrac{8}{3}q & & \\
6FG^2 & = & -\ \dfrac{2}{3}p^2 & +\ \dfrac{10}{3}q & & -\ 12\dfrac{r}{p} \\
\hline
\Sigma & = \dfrac{3r^2}{4A^2} & -\ 2p^2 & +\ 6q & & -\ 12\dfrac{r}{p}
\end{array}$$

[64] Die Dreiecksungleichung gilt nicht für sphärische Dreiecke. Wählt man etwa als Spitze eines sphärischen Dreiecks mit dem Kugelradius r den Nordpol N und zwei Punkte A und B auf dem Aequator als die anderen Eckpunkte, sind die Seiten NA und NB Quadranten mit der Bogenlänge ½πr, ihre Summe folglich NA+NB = πr, ein Halbkreis. Durch Variieren des Stundenwinkels ∠ N kann man sehr wohl die Punkte A und B auf dem Aequator wandern lassen bis AB = πr und größer, im Grenzfall sogar AB = 2πr, wobei NAB immer ein sphärisches Dreieck bleibt.

[65] Für ebene Dreiecke *ABC* sind die Dreiecksungleichungen $a+b > c$, $b+c > a$, $c+a > b$ eine mathematische Formulierung der banalen Alltagserfahrung, daß Umwege immer länger als der direkte Weg sind.

Zur Herleitung der Beziehung $4GH^2{+}2EG^2 = 3EF^2{+}6FG^2$ betrachte man, unter Voraussetzung der Kollinearität der Punkte E, F und H mit den gefundenen Streckenverhältnissen, die Fig. 5 als Vektordreieck mit den Basisvektoren $\mathfrak{n} = \overrightarrow{EF}$ und $\mathfrak{m} = \overrightarrow{EG}$. (Vektoren in Fraktur, Beträge in Antiqua.) Dann sind GF und GH als Vektordifferenzen darstellbar:

$$\overrightarrow{GF} = \mathfrak{n} - \mathfrak{m} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{GH} = \frac{3}{2}\mathfrak{n} - \mathfrak{m}\,,$$

und ihre Skalarprodukte sind:

$$\overrightarrow{GF}\cdot\overrightarrow{GF} = GF^2 = \mathrm{n}^2 + \mathrm{m}^2 - 2\,\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{m} \quad \text{und}$$

$$\overrightarrow{GH}\cdot\overrightarrow{GH} = GH^2 = \frac{9}{4}\,\mathrm{n}^2 + \mathrm{m}^2 - 3\,\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{m}\,.$$

Um den Bruch $\frac{9}{4}$ und die beiden Skalarprodukte $\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{m}$ zu eliminieren, multipliziere man die obere Gleichung mit 6, die untere mit 4. Bildet man danach die Differenz der beiden Gleichungen, folgt :

$$6GF^2 - 4GH^2 = (6\mathrm{n}^2 + 6\mathrm{m}^2 - 12\,\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{m}) - (9\mathrm{n}^2 + 4\mathrm{m}^2 - 12\,\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{m}) = -3\mathrm{n}^2 + 2\mathrm{m}^2,$$

oder $\qquad 4GH^2 + 2\mathrm{m}^2 = 3\mathrm{n}^2 + 6GF^2$

bzw. wegen $\mathrm{m} = EG$ und $\mathrm{n} = EF$:

$$(\alpha) \qquad \boldsymbol{4GH^2 + 2EG^2 = 3EF^2 + 6FG^2}\,,$$

Eulers Folgerung – *deducitur* – , immer vorausgesetzt, die Punkte E, F, H bilden eine Gerade. Da indessen die Beziehung durch die Formeln I bis VI, wie gezeigt, bestätigt wird, ist die Annahme der Kollinearität von E, F, und H statthaft.

Euler dürfte, vor der Aera der Vektorgeometrie, mit dem verallgemeinerten Satz des Pythagoras argumentiert und dabei im wesentlichen die gleichen Formeln gefunden haben:

$$FG^2 = EG^2 + EF^2 - 2EG\cdot EF\cos(\angle E)$$

$$GH^2 = EG^2 + \frac{9}{4}EF^2 - 2EG\cdot\frac{3}{2}EF\cos(\angle E)\,.$$

Die in Zif. 21 eingeführten Kurzbezeichnungen benützen für die Verbindungsstrecken der kollinearen Punkte E, F, H zum vierten „merkwürdigen Punkt“ G, dem Inkreismittelpunkt, die Symbole $f = GH$, $h = FG$ und $EG = \sqrt{6g^2 + 3h^2 - 2f^2}$. Die Strecke EG erscheint hier folgerichtig als eine Funktion der schon benannten Längen f, g, h. Aus Fig. 5 geht hervor, daß die Strecke EG automatisch bestimmt ist, sobald die Lage des Punktes G durch Vorgabe der Strecken $GH = f$ und $FG = h$ definiert wird. Die Strecke EG muß daher mindestens eine Funktion von f und h sein. Die explizite Formulierung $EG = \sqrt{6g^2 + 3h^2 - 2f^2}$ bzw. $EG^2 = 6g^2 + 3h^2 - 2f^2$ ist leicht abzuleiten aus Eulers „*Hinc vero deducitur*“ (α). Aus der Formel (α) folgt:

$$2EG^2 = 3EF^2 + 6FG^2 - 4GH^2\,,$$

und mit den Abkürzungen f, g, h:

$$2EG^2 = 3\cdot 4g^2 + 6h^2 - 4f^2$$

bzw. $$\boldsymbol{EG^2 = 3\cdot 2g^2 + 3h^2 - 2f^2 = 6g^2 + 3h^2 - 2f^2}\,.$$

In der Betrachtung zur Zif. 9 wurde darauf hingewiesen, daß die Existenz der Euler-Geraden bereits durch eine Vergleichung der linearen Koordinaten der Punkte E, F und H hätte nachgewiesen werden können und daher die umständlichen Quadrierungen der sechs Paare Koordinatendifferenzen (Δx, Δy) zum Nachweis desselben Ergebnisses unnötig sind. Die Euler-Gerade wäre, selbst mit Eulers analytisch-geometrischem Ansatz, erheblich leichter herzuleiten gewesen.

In der Tat sind:

Zif. 16: Δx von $FH = h_x - f_x = \dfrac{b^2-a^2}{6c}$

Δy von $FH = h_y - f_y = \dfrac{1}{24cA}[2c^4 - (a^2+b^2)c^2 - (a^2-b^2)^2]$

Zif. 12: Δx von $EF = f_x - e_x = \dfrac{b^2-a^2}{3c}$

Δy von $EF = f_y - e_y = \dfrac{1}{24cA}[3(c^2+b^2-a^2)(a^2+c^2-b^2) - 16A^2]$

$= \dfrac{2}{24cA}[2c^4 - (a^2+b^2)c^2 - (a^2-b^2)^2]$

Zif. 14: Δx von $EH = h_x - e_x = \dfrac{b^2-a^2}{2c}$

Δy von $EH = h_y - e_y = \dfrac{3}{24cA}[2c^4 - (a^2+b^2)c^2 - (a^2-b^2)^2]$,

woraus leicht ablesbar, daß $EF = 2FH = 2g$ und $EH = 3FH = 3g$, wenn $FH = g$. Die ***Geraden*** EF und EH durchlaufen beide den Punkt E. Überdies haben sowohl EF wie auch EH denselben Steigungswinkel α mit $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{4}\mathrm{k}$, wo k gleich dem numerischen Faktor $\frac{[\ldots\ldots\ldots\ldots]}{A(b^2-a^2)}$ ist: die Geraden EF und EH sind identisch. Da sie auch die Punkte F und H durchlaufen, liegen die drei Punkte E, F und H auf ein und derselben Geraden – der ***Euler-Geraden***. Man überzeugt sich leicht, daß die Gerade FH die selbe Steigung $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{4}\mathrm{k}$ hat.

Euler wäre nicht Euler, wenn er diese Zusammenhänge nicht erkannt hätte. Die Verwandtschaft zwischen den linearen Koordinatendifferenzen von EH und FH ist unmittelbar einleuchtend, da deren Formeln identisch sind und sich nur durch den numerischen Faktor 3 bzw. $\frac{1}{3}$ unterscheiden. Schwieriger ist es um die Strecke EF bestellt, weil deren y-Koordinate Δy erst nach Ausmultiplikation und Substitution von $16A^2$ nach Formel (2b) als mit EH und FH verwandt erscheint und daher übersehen werden könnte. Indessen hat Euler selbst in Zif. 16 das Verhältnis $FH = \frac{1}{2}EF$ benutzt, um die umständlichen Quadrierungen und die Transformation von der a,b,c- in die p,q,r-Darstellung auf Zif. 12 zurückzuführen. Er besaß also die nötigen Kenntnisse. Man fragt sich, warum er diesen vereinfachten Weg nicht auch in Zif. 14 beschritten, da doch offensichtlich $EH = 3FH = \frac{3}{2}EF$.

Die Bevorzugung der **Streckenquadrate** $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = EF^2$ usw. ist dadurch zu erklären, daß diese im Gegensatz zu den linearen Koordinatendifferenzen Δx und Δy symmetrische Funktionen von a, b, c sind und daher durch die „Zusammenfassungen" $p = \Sigma a$, $q = \Sigma ab$ und $r = abc$ dargestellt werden können, wie dies das Formelsystem (I-VI) der Zif. 18 exemplifiziert.

Die Größen p, q und r werden jedoch als Koeffizienten der kritischen Gleichung

(1) $$\mathbf{z^3 - pz^2 + qz - r = 0}\ ,$$

deren Lösungen genau $z_1 = a$, $z_2 = b$, $z_3 = c$ sind, benötigt und werden mit Hilfe einer Umdeutung des Gleichungssystems (I-VI) der Zif. 18 berechnet. Wie dies im einzelnen geschieht, wird in den Ziff. 19 und 20 vorgeführt.

Der Rezensent und Verfasser des *Summarium* (Seiten 7 und 60) hat Eulers Studie offenbar bis zu diesem Punkt einigermaßen aufmerksam gelesen. Er war augenscheinlich stolz darauf, die Kollinearität der Punkte E, F, H nach Eulers Erklärungen verstanden zu haben, und stellte sie deshalb als Hauptergebnis der Eulerschen Arbeit dar. Aus Begeisterung weist er sogar zweimal auf die Mitteilungswürdigkeit des Phänomens hin:

Inprimis vero notatu dignum est und *Inprimis memorata haec observatio Geometrarum digna est.*

Den Rest der Studie hat er aber höchstens noch kursorisch überflogen. Wohl erwähnt er Eulers Lösung der Dreieckskonstruktionsaufgabe mit Hilfe einer kritischen Gleichung dritten Grades, nennt aber als Ausgangspunkte die beliebig vorzugebenden Punkte *E*, *F*, *G*, während Euler selbst mit den Punkten *F*, *G*, *H* operierte. Auf weitere Einzelheiten wie die Behandlung der verschiedenen Gleichungssysteme und Gleichungen sowie die scharfsinnigen Fallunterscheidungen bis Zif. 34 tritt er aber – absichtlich oder gezwungenermaßen? – nicht mehr ein.

Bekannt ist der Fall jenes Schneidergesellen, den Euler von Berlin als Kammerdiener nach Petersburg mitgebracht hatte und dem er später seine „Vollständige Anleitung zur Algebra“ (1770-1771), offenbar in deutscher Sprache, diktierte. Eine bemerkenswerte Leistung beiderseits! Von diesem Manne heißt es, er sei später selber noch ein passabler Algebraiker geworden, obwohl er begreiflicherweise keine höhere Bildung genossen hatte. Es fragt sich, wie er die Zif. 18 bewältigt hätte.

Die Figur 5 kann man interpretieren als Bild einer durch den Höhenpunkt *E* und den Umkreismittelpunkt *H* definierten Strecke, auf der als innerer Teilpunkt der Schwerpunkt *F* liegt, der die Strecke im Verhältnis 2 : 1 teilt. Vom Schwerpunkt ist bekannt, daß er auch die Schwerlinien im gleichen Verhältnis 2 : 1 teilt. Man darf daher vermuten, daß eine besondere Gesetzmäßigkeit vorliegt, in welcher dem Schwerpunkt eine eigene Bedeutung zukommt.

19. Um diese Formeln einfacher zu gestalten, setzen wir

$$4pq - p^3 - 8r = 4s.$$

Damit werden $$4A^2 = ps \quad \text{und} \quad 4q = p^2 + 8\frac{r}{p} + 4\frac{s}{p}\ ,$$

ferner wollen wir definieren:

$$\frac{r^2}{ps} = R\,, \qquad \frac{r}{p} = Q \qquad \text{und} \qquad p^2 = P$$

so daß P, Q, R zweidimensionale Größen darstellen. Da folglich

$$\frac{s}{p} = \frac{Q^2}{R}\,, \quad p = \sqrt{P}\,, \quad q = \frac{1}{4}P + 2Q + \frac{Q^2}{R} \quad \text{und} \quad r = Q\sqrt{P} \quad \text{sowie}$$

$$4A^2 = \frac{PQ^2}{R}\ ,$$

lassen sich unsere Intervalle auch folgendermaßen angeben:

$$\begin{array}{rll}
\text{I.} & EF^2 = & R - \frac{2}{9}P + \frac{16}{9}Q + \frac{8}{9}\frac{Q^2}{R} \\
\text{II.} & EG^2 = & R - \frac{1}{4}P + 2\,Q + 3\,\frac{Q^2}{R} \\
\text{III.} & EH^2 = & \frac{9}{4}R - \frac{1}{2}P + 4\,Q + 2\,\frac{Q^2}{R} \\
\text{IV.} & FG^2 = & \quad + \frac{1}{36}P - \frac{8}{9}Q + \frac{5}{9}\frac{Q^2}{R} \\
\text{V.} & FH^2 = & \frac{1}{4}R - \frac{1}{18}P + \frac{4}{9}Q + \frac{2}{9}\frac{Q^2}{R} \\
\text{VI.} & GH^2 = & \frac{1}{4}R - Q\,.
\end{array}$$

Betrachtung zu Ziffer 19.

Mit den Ziff. 18 und 19 ist die Phase *ANALYSIS* der Aufgabe abgeschlossen, wobei die Zif. 19 als Übergang zur Arbeitsphase *SYNTHESIS* oder als Vorbereitung derselben gesehen werden kann.

Die Berechnungsformeln der Zif. 18 enthalten ausnahmslos quadratische (zweidimensionale) Elemente. Mit Hilfe des in der Physik gebräuchlichen Symbols [...] für *Dimension* lassen sich die in den Summanden auftretenden Ausdrücke r^2/A^2, p^2, q und r/p formal alle als Potenzen der Dimension Länge $[L]$ erkennen: $[L^2]$ = (Länge×Länge):

$$\begin{aligned}
\left[\frac{r^2}{A^2}\right] &= \left[\frac{(L^3)^2}{(L^2)^2}\right] &&= \left[\frac{L^6}{L^4}\right] &&= [L^2] \\
[p^2] &= [p\times p] &&= [L\times L] &&= [L^2] \\
[q] &= [\Sigma ab] &&= [L\times L] &&= [L^2] \\
\left[\frac{r}{p}\right] &= \left[\frac{abc}{p}\right] &&= \left[\frac{L^3}{L}\right] &&= [L^2].
\end{aligned}$$

Für die weitere Rechnung – von Hand! – sind die zahlreichen Brüche und Quadrate in den Formeln der Zif. 18 unhandlich. Der bewährte, von Euler gern gehandhabte Kunstgriff, komplizierte, öfter wiederkehrende Gebilde unter einfachen Symbolen als Abkürzungen zusammenzufassen, drängt sich förmlich auf. Die Terme r^2/A^2, p^2 und q treten fünfmal auf, r/p dreimal. Die von Euler gewählten Stellvertreter mögen auf den ersten Blick willkürlich scheinen, indes liegt ihnen im Hinblick auf die weitere Verarbeitung doch eine gewisse Logik zugrunde. Als neue Variable führt Euler folgende einfache Symbole ein:

$$P = p^2, \qquad Q = \frac{r}{p} \qquad \text{und} \qquad R = \frac{r^2}{4A^2}\,.$$

Ferner variiert er die ubiquitäre Größe $16A^2$ gemäß Formel (2e), $16A^2 = -p^4 + 4p^2q - 8pr$, zu

$$-p^3 + 4pq - 8r = \frac{16A^2}{p} = \frac{4(4A^2)}{p} = \frac{4ps}{p} = 4s\,,$$

so daß $$4A^2 = ps\,.$$

Die neue Variable s ist somit dreidimensional. Die Abspaltung des Faktors 4 erfolgt zwecks Vereinfachung der nachfolgenden Arithmetik, damit die Größe R, und infolgedessen auch Q^2/R, den numerischen Koeffizienten 1 erhalten, der bekanntlich nicht ausgeschrieben zu werden braucht.

Denn nun errechnet sich $$4q = \frac{4s+p^3+8r}{p} = p^2 + \frac{8r}{p} + \frac{4s}{p} = P + 8Q + 4\frac{Q^2}{R}\,,$$

und es folgt $$R = \frac{r^2}{4A^2} = \frac{r^2}{ps} \quad \text{und} \quad \frac{Q^2}{R} = \frac{r^2}{p^2}\,\frac{ps}{r^2} = \frac{s}{p}\,,$$

sowie für späteren Gebrauch:

$$p = \sqrt{P}\,, \qquad q = \frac{1}{4}P + 2Q + \frac{Q^2}{R}, \qquad r = Q\sqrt{P}\,, \qquad 4A^2 = \frac{PQ^2}{R}\,,$$

wo nur noch in der Formel für q der gebrochene numerische Koeffizient $\frac{1}{4}$ vorkommt.

In den Rechnungen werden anschließend die Minuskeln p, q, r durch die Majuskeln P, Q, R ersetzt.

Die Prüfung der Dimensionen von P, Q, R ergibt, daß

$$
\begin{aligned}
[P] &= [p^2] &&= [p \times p] && &&= [L^2] \\
[Q] &= \left[\frac{r}{p}\right] &&= \left[\frac{abc}{p}\right] &&= \left[\frac{L^3}{L}\right] &&= [L^2] \\
[R] &= \left[\frac{r^2}{4A^2}\right] &&= \left[\frac{(L^3)^2}{(L^2)^2}\right] &&= \left[\frac{L^6}{L^4}\right] &&= [L^2]\,.
\end{aligned}
$$

P, Q und R sind also zweidimensional und von Euler bewußt so definiert:

faciamus ita ut P, Q, R sint quantitates duas dimensiones involventes (Zif. 19),

denn sie sollen die Zweidimensionalität der Quadratdistanzen EF^2, EG^2 usw. gewährleisten.

Die sechs Distanzformeln der Zif. 18 erhalten mit P, Q, R an Stelle von p, q, r in Zif. 19 schließlich folgenden Aspekt:

$$
\begin{array}{rll}
\text{I.} & EF^2 = & R - \frac{2}{9}P + \frac{16}{9}Q + \frac{8}{9}\frac{Q^2}{R} \\
\text{II.} & EG^2 = & R - \frac{1}{4}P + 2\,Q + 3\,\frac{Q^2}{R} \\
\text{III.} & EH^2 = & \frac{9}{4}R - \frac{1}{2}P + 4\,Q + 2\,\frac{Q^2}{R} \\
\text{IV.} & FG^2 = & + \frac{1}{36}P - \frac{8}{9}Q + \frac{5}{9}\frac{Q^2}{R} \\
\text{V.} & FH^2 = & \frac{1}{4}R - \frac{1}{18}P + \frac{4}{9}Q + \frac{2}{9}\frac{Q^2}{R} \\
\text{VI.} & GH^2 = & \frac{1}{4}R - Q\,.
\end{array}
$$

Die Distanzen EF^2 usw. sind als Summen erkennbar, deren Summanden einerseits die zweidimensionalen, nur durch numerische Faktoren präzisierten Größen P, Q, R und andererseits verschiedene Multipel der gebrochenen Funktion Q^2/R sind, welch letztere indessen ebenfalls zweidimensional ist. Die Formeln I bis VI bestätigen die Zweidimensionalität der Größen EF^2 bis GH^2, die als Quadrate von eindimensionalen Strecken in der Tat zweidimensional sein müssen.

Die tabellenartige Darstellung der Formeln I bis VI der Zif. 19 kann nunmehr als System von sechs Gleichungen mit den Unbekannten P, Q, R gedeutet werden. Die weiteren Rechnungen werden sie in der Tat als solche behandeln.

Damit ist die Phase *ANALYSIS* der Konstruktionsaufgabe nach bemerkenswerten arithmetischen Anstrengungen erfolgreich zu Ende gebracht. Die vollständige Lösung einer geometrischen Konstruktionsaufgabe fordert nach der Analyse den Nachweis der Richtigkeit der erschlossenen Ergebnisse. Da die bisherigen Ergebnisse der Studie jedoch durch strenge algebraische Folgerungen zustande gekommen sind, können sie nicht anders als richtig sein. Der sonst übliche besondere Abschnitt *DEMONSTRATIO* darf als in der Phase *ANALYSIS* enthalten betrachtet werden. Die nachfolgenden Ziffern befassen sich deswegen bereits mit der *SYNHESIS*.

20. Weil drei der vier Punkte, sofern nicht *E*, *F* und *H* gewählt werden, den vierten bereits festlegen, stellt sich nur *eine* Aufgabe. Sie lautet:

Aufgabe

Ein Dreieck zu konstruieren, wenn folgende vier ihm angehörige Punkte durch ihre Lage vorgegeben sind:

1. *der Schnittpunkt E der drei Höhen,*
2. *der Schwerpunkt F,*
3. *der Mittelpunkt des Inkreises G,*
4. *der Mittelpunkt des Umkreises H*

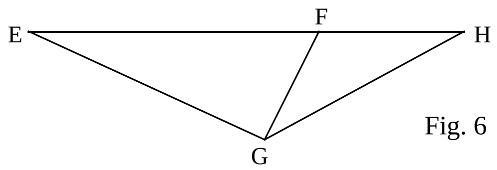


Fig. 6

Die bisher nachgewiesenen Eigenschaften der genannten Punkte genügen, um die gestellte Aufgabe zu lösen.

Betrachtung zu Ziffer 20.

Mit Zif. 20 beginnt die Phase *SYNTHESIS* der Konstruktionsaufgabe.

Lehrbüchern der Geometrie entnimmt man zur Frage der geometrischen Synthese etwa Erklärungen der folgenden Art: „Die Synthesis (Konstruktion) geht den von der Analysis gefundenen Weg rückwärts vom Bekannten zum Gesuchten, indem sie aus den Bestimmungsstücken gemäß den Folgerungen der Analysis das Gesuchte erzeugt."

Genau das findet in den Ziff. 21 und 22 statt. Vorerst wird aber in Zif. 20 noch einmal an die Grundaufgabe, den eigentlichen Gegenstand der Studie, erinnert, nämlich, das zugehörige Dreieck zu konstruieren, wenn drei seiner „merkwürdigen Punkte" bzw. deren wechselseitige Entfernungen voneinander vorgegeben sind. Ursprünglich sollten dies der Höhenschnittpunkt E, der Schwerpunkt F und der Inkreismittelpunkt G bzw. die Strecken EF, EG und FG sein [66].

In Zif. 20 nimmt indessen Euler noch einen vierten Punkt, den Umkreismittelpunkt H, hinzu. Mit den Punkten E, F, G und H stehen somit vier Punkte zur Auswahl, obwohl zur Konstruktion eines Dreiecks nur drei Stücke vorgegeben werden müssen. Die Aufgabe ist dennoch nicht überbestimmt: wegen der in Zif. 18 nachgewiesenen Beziehung $EF + FH = EH$, wo $FH = g$, $EF = 2g$ und $EH = 3g$, kann aus zweien der drei Punkte E, F, H sofort der dritte berechnet werden.

Theoretisch würden sich vier Aufgaben stellen, je nachdem welcher der vier Punkte weggelassen wird [67]. Aus dem selben Grunde reduzieren sich diese jedoch auf eine einzige Aufgabe:

unicum resultat problema (Zif. 20).

Die Wahl der drei Punkte E, F und H wäre gleichbedeutend der Vorgabe von nur zwei Punkten bzw. einer einzigen Strecke mit einem inneren oder äußeren Teilpunkt. Die Aufgabe wäre unterbestimmt. Zu den drei für die Konstruktion vorgegebenen Punkten muß also auf jeden Fall der Punkt G, der Mittelpunkt des Inkreises, gehören.

Die drei noch möglichen Vorgaben:

(1) GE, GF und EF,
(2) GE, GH und EH,
(3) GF, GH und FH,

unterscheiden sich nur durch numerische (konstante) Parameter. Ihre weitere Behandlung ist grundsätzlich die gleiche, so daß von den drei möglichen Aufgaben nur eine gelöst werden muß, da die beiden andern auf sie zurückgeführt werden können. Auch für diese drei Varianten gilt, daß bei jeder der noch fehlende vierte Punkt wegen der Ergebnisse der Zif. 18 sofort angegeben werden kann.

Entgegen der Behauptung des Rezensenten in der *Zusammenfassung* und Tropfkes [68] wählt Euler die dritte Variante und nimmt an, daß die Punkte F, G und H durch ihre Entfernungen voneinander gegeben sind. Zwei von diesen, der Schwerpunkt F und der Mittelpunkt H des Umkreises, liegen auf der Euler-Geraden. Ihr Abstand voneinander, die Strecke $FH = g$, ist eine der drei Vorgaben für die Konstruktion des Dreiecks.

---

[66] Vgl. Seite 2 und Fußnote 5.

[67] Vgl. Zif. 2.

[68] Vgl. Seiten 2, 7 und 60.

Lösung

21. Da die Lage der vier Punkte durch ihre relativen Entfernungen voneinander gegeben werden soll, nennen wir:

$$GH = f, \qquad FH = g \qquad \text{und} \qquad FG = h\,,$$

außerdem wissen wir, daß

$$EF = 2g \quad \text{und} \quad EH = 3g \quad \text{und zudem} \quad EG = \sqrt{(6gg+3hh-2ff)}.$$

Damit haben wir sogleich folgende drei Gleichungen:

$$\begin{array}{llllllll} \text{I.} & ff & = & \frac{1}{4}R & & & - & Q \\ \text{II.} & gg & = & \frac{1}{4}R & - & \frac{1}{18}P & + & \frac{4}{9}Q & + & \frac{2}{9}\frac{QQ}{R} \\ \text{III.} & hh & = & & + & \frac{1}{36}P & - & \frac{8}{9}Q & + & \frac{5}{9}\frac{QQ}{R}\,, \end{array}$$

deren Lösung wir entnehmen:

$$R = \frac{4f^4}{3gg+6hh-2ff}\,, \qquad Q = \frac{3ff(ff-gg-2hh)}{3gg+6hh-2ff} \qquad \text{und}$$

$$P = \frac{27f^4}{3gg+6hh-2ff} - 12ff - 15gg + 6hh\,,$$

woraus
$$\frac{QQ}{R} = \frac{9(ff-gg-hh)^2}{4(3gg+6hh-2ff)}\,.$$

Betrachtung zu Ziffer 21.

Die Zif. 21 enthält die eigentliche *SYNTHESIS*, das Hauptstück der Studie. Die Berechnungsformeln der Zif. 19 werden jetzt umgedeutet zu einem System von Bestimmungsgleichungen für die Unbekannten P, Q, R. Aus diesen wiederum können die Größen p, q, r berechnet werden, die auf Grund ihrer Definitionen als Koeffizienten einer Gleichung dritten Grades betrachtet werden dürfen und schließlich die Aufstellung der kritischen Gleichung $z^3 - pz^2 + qz - r = 0$ gestatten.

Konkret sollen aus den nun als gegeben betrachteten Punkten E (Höhenpunkt), F (Schwerpunkt), G (Mittelpunkt des Inkreises), H (Mittelpunkt des Umkreises) – genauer aus den Strecken EF, EG, EH usw. – mit Hilfe der durch die *ANALYSIS* gefundenen Beziehungen die Dreiecksseiten a, b, c bestimmt werden. (Die Konstruktion des gesuchten Dreiecks ABC mit Hilfe von Zirkel und Lineal ist dann nur noch eine Anwendung des dritten Kongruenzsatzes (SSS) der ebenen Dreiecke.)

Die Ziff. 18 und 19 enthalten je sechs Berechnungsformeln. Da zur Bestimmung von P, Q, R jedoch nur drei Bestimmungsgleichungen benötigt werden, muß eine Auswahl getroffen werden. Euler beschränkt sich auf die Punkte F, G, H. Er darf dies ohne Einbuße an Allgemeingültigkeit tun, weil dank der in Zif. 18 bewiesenen Existenz der Euler-Geraden und ihrer Eigenschaften die Punkte F, G, H jederzeit angegeben werden können, falls etwa statt H oder F der Punkt E vorgeschrieben sein sollte. Der Punkt G muß auf jeden Fall berücksichtigt, also auch vorgeschrieben werden.

Für die Durchführung und übersichtliche Darstellung der weiteren Rechnungen sind die Bezeichnungen GH, FH und FG ungeeignet. Euler führt deshalb als Stellvertreter für die umständlichen Digramme GH, FH, FG ein weiteres Mal einfachere Symbole, nämlich Minuskeln, ein, die in der traditionellen Geometrie immer schon stellvertretend für Streckenlängen eingesetzt worden sind:

$$GH = f, \qquad FH = g \qquad \text{und} \qquad FG = h\,.$$

Auf Grund der Erkenntnisse der Zif. 18 sind die Kurzbezeichnungen $EF = 2g$ und $EH = 3g$ zwingend, sobald die Länge g vorgeschrieben ist. Etwas weniger selbstverständlich ist die Bezeichnung der noch fehlenden sechsten Strecke EG, nämlich der Quadratwurzel $EG = \sqrt{(6g^2 + 3h^2 - 2f^2)}$. Aus den Figuren 5 und 6 liest man jedoch leicht ab, daß, wenn die Längen g, f und h vorgegeben werden, die Lage des Punktes G bestimmt ist. Die Strecke EG muß daher eine Funktion von f, g und h sein. Die explizite Formulierung $EG = \sqrt{(6g^2 + 3h^2 - 2f^2)}$ bzw. $EG^2 = 6g^2 + 3h^2 - 2f^2$ leitet sich leicht aus der Formel (α) in Zif. 18, $4GH^2 + 2EG^2 = 3EF^2 + 6FG^2$ ab.

Die zu GH, FH und FG gehörenden Formeln IV, V, VI mit den zusammenfassenden Variablen P, Q, R der Zif. 19, jetzt aber mit I bis III numeriert, werden folglich zu:

$$\begin{array}{lrcl}
\text{(I)} & f^2 & = & \frac{1}{4}R \qquad\qquad - \quad Q \\
\text{(II)} & g^2 & = & \frac{1}{4}R - \frac{1}{18}P + \frac{4}{9}Q + \frac{2}{9}\frac{Q^2}{R} \\
\text{(III)} & h^2 & = & \qquad + \frac{1}{36}P - \frac{8}{9}Q + \frac{4}{9}\frac{Q^2}{R}
\end{array}$$

Diese drei Gleichungen enthalten insgesamt 9 Terme, sind also, auch für die nachfolgende Verarbeitung etwas einfacher als die andern drei, die 12 Terme benötigen. Eulers Bevorzugung der Punkte F, G, H dürfte sich deswegen empfohlen haben.

Als Ergebnisse der *ANALYSIS*, ausgehend von den Dreiecksseiten a, b, c, stellen die Formeln (I) bis (III) die Strecken f, g, h als Funktionen der Argumente P, Q, R und, mittelbar über die Zwischenstufe p, q, r, der Argumente a, b, c, dar, z.B. die Formel (I):

$$f^2 = \frac{1}{4}R - Q = \frac{1}{4}\frac{r^2}{ps} - \frac{r}{p} = \frac{r}{p\,4s}[r - 4s] = \frac{abc}{2\sum a^2b^2 - \sum a^4}\;\left[\Sigma a^3 - \Sigma a^2b + 3abc\right].$$

Angesichts der Komplexität des Ausdrucks in Σ-Darstellung ist die Einfachheit des aequivalenten Ausdrucks $\frac{1}{4}R - Q$, die durch die wiederholte Zusammenfassung der Variablen a, b, c, zunächst als p,q,r-, dann als P,Q,R-Notationen, erreicht worden ist, eklatant. Das Gleiche gilt für die Funktionen

g^2 und h^2. Ohne diese Zwischenschritte wäre die Untersuchung wohl, wie in Zif. 3 befürchtet, in *calculis inextricabilibus* versandet. Die Verwendung einfacher und sinnreicher Bezeichnungen der involvierten Größen ist überhaupt ein besonderer Vorzug der Eulerschen Darstellung. Im Hinblick auf die weiteren Rechnungen rechtfertigt die Wahl der Abkürzungen *p*, *q*, *r* und *P*, *Q*, *R* als Stellvertreter der Variablen *a*, *b*, *c* das Adjektiv *facilis* in der Überschrift der Studie. Auch aus mnemotechnischen und didaktischen Gründen sind die Gegenüberstellung der Großuchstaben *P*, *Q*, *R* und der Kleinbuchstaben *p*, *q*, *r* sowie die Buchstabenfolgen $f = GH$, $g = HF = FH$ und $h = FG$ in zyklischer Vertauschung instruktiv.

Die *SYNTHESIS* geht den von der *ANALYSIS* durchmessenen Weg zurück. Die Dreiecksseiten *a*, *b*, *c* und die Rechenergebnisse *GH*, *FH* und *FG*, jetzt *f*, *g* und *h* genannt, vertauschen ihre Rollen: Ausgangsgrößen sind nicht mehr die Seiten *a*, *b*, *c*, sondern die Strecken *f*, *g*, *h*, und als Ergebnisse der Rechnung sollen die Seitenlängen *a*, *b*, *c* herauskommen. Die Dreiecksseiten *a*, *b*, *c*, früher Argumente von Funktionen, sind jetzt *Unbekannte*. Als Werkzeuge für deren Berechnung stehen die Funktionen (I) bis (III) (Zif. 21) zur Verfügung.

Die Rechnung geht auch hier stufenweise vor sich. Als Unbekannte erster Stufe gelten die Stellvertreter *P*, *Q*, *R*. Zur Berechnung dreier Unbekannter werden Beziehungen zwischen ihnen in Gestalt dreier Gleichungen benötigt. Demzufolge werden die drei Formeln (I), (II), (III) als System dreier Gleichungen mit den drei Unbekannten *P*, *Q*, *R* gedeutet und deren Auflösung ermittelt.

Die Unbekannten *P*, *Q*, *R* treten, obwohl sie ihrer Natur nach zweidimensionale Größen sind (vgl. Zif.19), in ihren ersten Potenzen auf. Das System (I)-(II)-(III) der Zif. 21 erinnert auf den ersten Blick an ein System linearer Gleichungen, das etwa mit Hilfe der Cramerschen Regeln leicht lösbar wäre. Dem stehen jedoch die Terme mit dem gebrochenen Ausdruck Q^2/R, welcher zwei der Unbekannten durch Division verknüpft, entgegen. Lehrbücher der Algebra behaupten von solchen Systemen, sie seien nur in besonderen Fällen lösbar.

In seiner „Vollständigen Anleitung zur Algebra“ (1770-1771) spricht Euler von der Auflösung algebraischer Gleichungen und weist der klassischen Algebra wie der Mathematik überhaupt die Rolle zu, den Wert solcher Größen zu bestimmen, die bisher unbekannt gewesen, ja er definiert die Algebra geradezu als „die Wissenschaft, welche zeigt, wie man aus bekannten Größen unbekannte findet.“ Leider benutzt er im vorliegenden Beispiel das (I)-(II)-(III)-System der Zif. 21 nicht zur Demonstration einer Nutzanwendung dieser These und zur Erhärtung des Sonderfalles, sondern begnügt sich wiederum nur mit der Angabe des Ergebnisses. Dieses ist zwar auf seine Richtigkeit überprüfbar und genügt somit für den Nachweis der Möglichkeit der gewünschten Dreieckskonstruktion, läßt aber das Bedürfnis nach Vollständigkeit unbefriedigt.

Konkret geht es also in Zif. 21 darum, das – zu den nur in Sonderfällen auflösbaren zählende – Gleichungssystem (I)-(II)-(III), in welchem die Größen *P*, *Q*, *R* als Unbekannte gedeutet werden, „aufzulösen“, d.h. es so zu transformieren, daß daraus drei neue Gleichungen hevorgehen, welche die drei Größen *P*, *Q*, *R* ausschließlich als Funktionen der Strecken *f*, *g*, *h* erscheinen lassen. Sobald *Q* und *R* bestimmt sind, steht natürlich auch die Größe Q^2/R fest.

Eulers Ergebnis deutet an, daß die Lösung in vier Schritten stattgefunden hat, deren erster die vierte Potenz der Strecke *f* zum Ziele hat. Der Größe f^4 kommt eine Schlüsselrolle zu, tritt sie doch in allen vier Formeln für *P*, *Q*, *R* und Q^2/R auf, explizit in $P(f,g,h)$ und $R(f,g,h)$, implizit in den beiden andern Funktionen. Man kann daher die Herleitung von $f^4(Q,R)$ als Lemma betrachten.

<u>Erster Schritt</u>. Lemma: Quadrierung von (I).

$$(\mathrm{I})^2 = f^2 \cdot f^2 = \left(\frac{R}{4} - Q\right)^2 = \frac{R^2}{16} - 2\,\frac{QR}{4} + Q^2 \quad \text{oder nach Multiplikation mit 4}$$

$$4f^4 = \left(\frac{R^2}{4} - 2QR + 4Q^2\right).$$

Wann immer der in runde Klammern gesetzte Ausdruck auftritt, wird er durch die Größe $4f^4$ ersetzt werden dürfen.

<u>Zweiter Schritt</u>. Elimination von P durch (II) + 2×(III) und Berechnung von R.

$$\begin{array}{rcrcrrrrr} \text{(II)} & = & g^2 & = & \frac{1}{4}R & - \frac{1}{18}P & + \frac{4}{9}Q & + \frac{2}{9}\frac{Q^2}{R} \\ 2\times\text{(III)} & = & 2h^2 & = & & + \frac{1}{18}P & - \frac{16}{9}Q & + \frac{10}{9}\frac{Q^2}{R} \\ \hline & & g^2+2h^2 & = & \frac{1}{4}R & & - \frac{4}{3}Q & + \frac{4}{3}\frac{Q^2}{R} \end{array} .$$

Durch Multiplikation mit 3 und Subtraktion von $2f^2$ ergibt sich:

$$3g^2+6h^2-2f^2 = \frac{3}{4}R - 4Q + 4\frac{Q^2}{R} - \frac{2}{4}R + 2Q$$

$$3g^2+6h^2-2f^2 = \frac{1}{4}R - 2Q + 4\frac{Q^2}{R}$$

Die linke Seite dieser letzten Gleichung, die nachher als gemeinsamer Nenner auftreten wird, werde durch N abgekürzt:

$$N = 3g^2+6h^2-2f^2 .$$

Wird noch im Ausdruck auf der rechten Seite der Faktor $\frac{1}{R}$ ausgeklammert, erhält man:

$$\boldsymbol{N = \frac{1}{R}\left[\frac{1}{4}R^2 - 2QR + 4Q^2\right]} ,$$

wo der Ausdruck in der eckigen Klammer die im Lemma oben gefundene „Entwicklung“ von $4f^4$ ist: $N = \frac{1}{R}4f^4$, so daß die gesuchte Größe R als explizite Funktion der Größen f, g und h angegeben werden kann:

$$\boldsymbol{R = \frac{4f^4}{N} = \frac{4f^4}{3g^2+6h^2-2f^2}} .$$

<u>Dritter Schritt</u>. Berechnung von Q aus (I).

$$Q = \frac{1}{4}R - f^2 = \frac{f^4}{N} - f^2 = \frac{f^2}{N}(f^2-N) = \frac{f^2}{N}[f^2-3g^2-6h^2+2f^2] =$$

$$\boldsymbol{Q = \frac{3f^2}{N}\left[f^2-g^2-2h^2\right] = \frac{3f^2(f^2-g^2-2h^2)}{3g^2+6h^2-2f^2}} .$$

<u>Vierter Schritt</u>. Elimination von $\frac{Q^2}{R}$ aus (II) und (III) und Berechnung von P.

$$\begin{array}{rcrcrrrr} 5\times\text{(II)} & = & 5g^2 & = & \frac{5}{4}R & - \frac{5}{18}P & + \frac{20}{9}Q & + \frac{10}{9}\frac{Q^2}{R} \\ -2\times\text{(III)} & = & -2h^2 & = & & - \frac{1}{18}P & + \frac{16}{9}Q & - \frac{10}{9}\frac{Q^2}{R} \\ \hline & & 5g^2 - 2h^2 & = & \frac{5}{4}R & - \frac{1}{3}P & + 4Q & \end{array}$$

Durch Multiplikation mit 3 und Addition von 12×(I) wird Q eliminiert und erscheint P implizit als Funktion von R allein:

$$15g^2-6h^2+12f^2 = \frac{15}{4}R - P + 12Q + \frac{12}{4}R - 12Q = \frac{27}{4}R - P .$$

Explizit, alphabetisch geordnet und für $\frac{1}{4}R$ substituiert, ergibt dies:

$$\boldsymbol{P} = \frac{27}{4}R - 12f^2 - 15g^2 + 6h^2 = \boldsymbol{\frac{27f^4}{3g^2+6h^2-2f^2} - 12f^2 - 15g^2 + 6h^2} .$$

Damit sind die Größen *P*, *Q*, *R*, und durch sie mittelbar auch *p*, *q*, *r*, explizit als Funktionen der Längen *f*, *g*, *h* bestimmt, und die Größe $\frac{Q^2}{R}$ der Gleichungen (II) und (III) ist schließlich

$$\frac{Q^2}{R} = \frac{9f^4}{N^2}\left[f^2 - g^2 - 2h^2\right]^2 \times \frac{N}{4f^4} = \frac{9[f^2 - g^2 - 2h^2]^2}{4[3g^2 + 6h^2 - 2f^2]} \; .$$

Mit den Formeln für *N*, *P*, *Q* und *R* kann man, wenn die Abstände *f*, *g*, *h* vorgegeben werden, die Größen *P*, *Q*, *R* und aus diesen wiederum *p*, *q*, *r* und endlich die Seiten *a*, *b*, *c* des gesuchten Dreiecks berechnen, wie dies in Zif. 22 und an Hand eines numerischen Beispiels in Zif. 23 gezeigt und vorgerechnet wird. Die geforderte Konstruktion des Dreiecks kann danach mit Zirkel und Lineal nach Maßgabe des dritten Kongruenzsatzes erfolgen.

Die Funktionen *P*, *Q*, *R* von *f*, *g*, *h* haben für die Aufstellung der kritischen Gleichung fundamentale Bedeutung. Zugleich beruhen sie auf den relativen Lageverhältnissen der drei Punkte *F*, *G*, *H*, weswegen die Formeln der Zif. 21 unter dem Namen *Dreipunkteformeln* zusammengefaßt werden mögen.

22. Nachdem die Größen P, Q, R bestimmt worden sind, können die folgenden drei Ausdrücke:

$$p = \sqrt{P}\,, \qquad q = \frac{1}{4}P + 2Q + \frac{QQ}{R} \qquad \text{und} \qquad r = Q\sqrt{P}$$

berechnet und mit ihnen hierauf die kubische Gleichung

$$z^3 - pzz + qz - r = 0$$

aufgestellt werden, deren drei Wurzeln die Seiten des gesuchten Dreiecks ergeben. Die Konstruktion des letzteren ist dann nicht mehr schwierig.

<u>Betrachtung zu Ziffer 22</u>.

Nachdem algebraische Überlegungen in Zif. 21 das Gleichungssystem (I)-(II)-(III) aufgelöst und die Größen *P*, *Q*, *R* als explizite Funktionen der Strecken *f*, *g*, *h* offenbart haben, werden in Zif. 22 in einem zweiten Schritt die Größen *p*, *q*, *r* als Funktionen von *P*, *Q*, *R* bestimmt.

P, *Q*, *R* waren in Zif. 19 als

$$(\alpha) \qquad P = p^2 , \quad Q = \frac{r}{p} , \quad R = \frac{r^2}{ps}$$

definiert worden. Der die Studie beherrschende Ausdruck $16A^2$ war anläßlich der Einführung der Abkürzungen $p = \Sigma a$, $q = \Sigma ab$ und $r = abc$ schon in Zif. 11 als

$$(\beta) \qquad 16A^2 = -p^4 + 4p^2q - 8pr = p\,(-p^3 + 4pq - 8r)$$

dargestellt und in Zif. 19 sein Klammerfaktor durch das Kürzel $4s = -p^3 + 4pq - 8r$ wiedergegeben worden.

Aus der letzteren Formel folgt

$$(\gamma) \qquad q = \frac{p^3 + 8r + 4s}{4p} = \frac{1}{4}p^2 + 2\frac{r}{p} + \frac{s}{p} = \frac{1}{4}p^2 + 2\frac{r}{p} + \frac{r^2}{Rp^2} = \frac{1}{4}P + 2Q + \frac{Q^2}{R} ,$$

so daß *q* bereits als eine explizite Funktion von *P*, *Q* und *R* erscheint. Mit Hilfe der Funktionen (α) und (β) findet man leicht $p = \sqrt{P}$ und $r = Q\sqrt{P}$, womit alle drei Größen *p*, *q*, *r* nun explizite Funktionen von *P*, *Q* und *R* sind:

$$(\delta) \qquad \boldsymbol{p = \sqrt{P}} , \qquad \boldsymbol{q = \frac{1}{4}P + 2Q + \frac{Q^2}{R}} , \qquad \boldsymbol{r = Q\sqrt{P}} .$$

<u>Fazit</u>: Werden die Strecken *f* = *GH*, *g* = *FH* und *h* = *FG* vorgegeben, können gemäß Zif. 21 *P*, *Q*, *R* und aus ihnen gemäß (δ) auch *p*, *q*, *r* als Funktionen von *f*, *g* und *h* berechnet werden.

Daß mit Hilfe der Größen *p*, *q*, *r* eine kubische Gleichung mit den Lösungen *a*, *b*, *c* – den Längen der Seiten des gesuchten Dreiecks – aufgestellt werden kann, wird hier lediglich als Tatsache festgestellt. Die Aussage steht im Konjunktiv – *formetur haec aequatio*. Von den sechs Fällen, in denen die lateinische Syntax in Hauptsätzen den Konjunktiv setzt, dürften nur *coniunctivus adhortativus* und *coniunctivus potentialis* in Frage kommen:

„soll folgende Gleichung gebildet werden“,

formetur haec aequatio

„kann folgende Gleichung gebildet werden“.

Euler setzt also als bekannt voraus, daß kraft der Definitionen $-p = \Sigma a$, $+q = \Sigma ab$, $-r = abc$ die Größen *p*, *q*, *r* die symmetrischen Funktionen sind, welche in dieser Reihenfolge und mit alternierenden Vorzeichen die Koeffizienten der Potenzen x^2, x und x^0 (= 1) der Unbekannten (Variablen) *x* in derjenigen kubischen Gleichung mit *einer* Unbekannten *x* bilden, deren drei (reelle) Lösungen gerade *a*, *b*, *c* lauten.

Der beschriebene Zusammenhang ist eine Folge der Tatsache, daß jedes Gleichungspolynom in *x* des Typs $f(x) = p_0x^n + p_1x^{n-1} + ... + p_{n-1}x + p_n$ durch das Binom $(x-a)$ ohne Rest teilbar ist, wenn *a* eine Nullstelle des Polynoms ist. In den Lehrbüchern der klassischen Algebra zählte der sog. „Restsatz“ zu den Hauptlehrsätzen. Euler durfte bei Lesern, die seinen Argumenten bis zu diesem Punkt hatten folgen können, dessen Kenntnis voraussetzen.

Die Gleichung $z^3 - pz^2 + qz - r = 0$ bildet gleichsam den Schlußstein des Argumentationsgebäudes von Zif. 6 bis Zif. 22 und ist deshalb schon mehrfach *kritische Gleichung* genannt worden.

Die formale Lösung der Aufgabe, ein Dreieck zu konstruieren, wenn dessen Schwerpunkt *F* und die Mittelpunkte *G* des Inkreises und *H* des Umkreises durch ihre wechselseitigen Entfernungen *f*, *g*, *h* voneinander vorgegeben sind, lautet kurz:

1. Berechne nach den Dreipunkteformeln (Zif. 21) die Größen P, Q, R, Q^2/R aus vorgegebenen Größen f, g, h.
2. Berechne nach den Formeln (Zif. 22) die Größen p, q, r aus P, Q, R, Q^2/R.
3. Löse die *kritische Gleichung*

   $$z^3 - pz^2 + qz - r = 0$$

   mit den Koeffizienten $-p$, $+q$, $-r$. Deren drei Lösungen (a,b,c) sind die Längen der Seiten des gesuchten Dreiecks.
4. Konstruiere das Dreieck mit Zirkel und Lineal nach dem dritten Kongruenzsatz (*SSS*) der ebenen Dreiecke.

Allerdings stellt sich jetzt die Frage nach der Lösbarkeit von Gleichungen dritten Grades und gegebenenfalls nach dem oder den Lösungsverfahren. In Zif. 22 sagt Euler auch über diesen Punkt nichts. Offensichtlich setzt er bei seinen Lesern den Besitz der Fähigkeit, Gleichungen mindestens des dritten Grades lösen zu können, voraus.

Beispiel

23. Die Seiten eines Dreiecks seien als $a = 5$, $b = 6$ und $c = 7$ angenommen. Dann ist sein Flächeninhalt $A = 6\sqrt{6}$, und die Abstände der vier Punkte betragen:

$$EF^2 = \frac{155}{72}, \quad EG^2 = \frac{11}{8}, \quad EH^2 = \frac{155}{32}, \quad FG^2 = \frac{1}{9}, \quad FH^2 = \frac{155}{288}, \quad GH^2 = \frac{35}{32},$$

woraus sich die Lage dieser Punkte ergibt, wie in Fig. 6 dargestellt.

Da wir folglich haben:

$$ff = \frac{35}{32}, \quad gg = \frac{155}{288} \quad \text{und} \quad hh = \frac{1}{9},$$

wollen wir sehen, ob damit die gefundene Lösung auf das angenommene Dreieck zurückführt.

24. Weiterhin werden $3gg + 6hh - 2ff = \frac{3}{32}$, ferner

$$ff - gg - 2hh = \frac{1}{3}, \qquad 4ff + 5gg - 2hh = \frac{219}{32},$$

und es folgt

$$R = \frac{1225}{24}, \quad Q = \frac{35}{3}, \quad P = 324 \quad \text{und} \quad \frac{QQ}{R} = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}.$$

Damit erhalten wir:

$$p = \sqrt{P} = 18, \quad q = 107 \quad \text{und} \quad r = \frac{35}{3} \cdot 18 = 5 \cdot 6 \cdot 7 = 210,$$

woraus die Gleichung:

$$z^3 - 18zz + 107z - 210 = 0$$

entsteht, deren drei Wurzeln offensichtlich 5, 6, 7 sind, was genau den drei Seiten des Dreiecks entspricht.

<u>Betrachtung zu den Ziffern 23 und 24</u>.

Mit Hilfe eines numerischen Beispiels wird in den Ziff. 23 und 24 die Richtigkeit der langwierigen algebraischen Herleitung und der gefundenen Ergebnisse verifiziert.

Die Vorgabe konkreter Maßzahlen für die Dreiecksseiten *a*, *b*, *c* führt mit Hilfe der Dreipunkteformeln der Zif. 21 auf die *p*, *q*, *r* zugeordnete algebraische Gleichung

$$(\alpha) \qquad z^3 - pz^2 + qz - r = 0\,,$$

deren Nullstellen *a*, *b*, *c* sein müssen. Wenn die Lösungen *a*', *b*', *c*' dieser Gleichung mit den vorgegebenen Werten *a*, *b*, *c* zusammenfallen, ist die Verifikation gelungen.

Als vorgegebene Maßzahlen *a*, *b*, *c* für die Dreiecksseiten sollen die ganzen Zahlen 5, 6, 7 gelten. Daraus folgen sofort

$$\begin{aligned} p &= \Sigma a = a + b + c &&= 5 + 6 + 7 = 18 \\ q &= \Sigma ab = ab + ac + bc &&= 5\cdot 6 + 5\cdot 7 + 6\cdot 7 = 30 + 35 + 42 = 107 \\ r &= abc = &&= 5\cdot 6\cdot 7 \quad = 210\,. \end{aligned}$$

Der Flächeninhalt *A* wird durch die Formel (2d) berechnet, wo *s* den halben Umfang des Dreiecks anzeigt: $s = \frac{1}{2}\Sigma a = 9$:

$$(2d) \qquad \mathrm{A} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{9(9-5)(9-6)(9-7)} = 6\sqrt{6}\,.$$

Dadurch, daß die Distanzen konsequent als Quadrate ihrer Maßzahlen behandelt werden, bleiben alle Zwischenergebnisse rational. Selbst der Flächeninhalt *A* geht meist als Quadrat A^2 in die Rechnungen ein, so daß die Wurzel in der Formel (2d) verschwindet. Die oft so kompliziert scheinenden Rechnungen entpuppen sich im konkreten Fall als Übung im schulmäßigen Bruchrechnen.

Die kritische Gleichung lautet:

$$(\alpha') \qquad z^3 - 18z^2 + 107z - 210 = 0\,.$$

Verfasser wie Leser erwarten als Lösungen *z* die Maßzahlen der Dreiecksseiten (*a*,*b*,*c*) = (5,6,7). In der Tat sind diese durch „Inspektion“, vor allem auch als Faktoren des absoluten Terms 210, leicht erkennbar. Die knappe Aussage ohne Erklärung der Berechtigung dieser Behauptung

cuius tres radices manifesto sunt 5, 6, 7 (Zif. 24)

genügt zur Verifikation des Beispiels, da dieses Resultat ja zu erwarten war und nichts anderes belegt werden wollte, läßt aber die Frage nach dem Lösungsverfahren offen.

Denn, wenn die Distanzen *f*, *g*, *h* a priori, ohne Vorkenntnis der Seitenlängen *a*, *b*, *c* , vorgegeben werden, diese vielmehr allein aus *f*, *g*, *h* berechnet werden sollen, muß die kritische Gleichung (α') bzw. das Gleichungspolynom $f(z) = z^3 - 18z^2 + 107z - 210$ nach den Regeln der Gleichungstheorie genauer diskutiert werden.

Zunächst steht fest, daß (α') als Gleichung dritten Grades jedenfalls drei Wurzeln hat. Als Gleichung ungeraden Grades hat sie ferner aus Gründen der Stetigkeit sicher *eine* reelle Lösung. Die beiden andern sind entweder ebenfalls reell oder aber konjugiert komplex. Die Descartes'schen Regeln bezüglich der Vorzeichenwechsel in den Polynomen $f(z)$ und $f(-z)$ schließen zusätzlich negative Wurzeln aus. Die Gleichung (α') wird also auf jeden Fall eine positive Wurzel aufweisen.

Der Restsatz der klassischen Algebra sagt aus, daß, wenn eine Nullstelle *a* des Polynoms $f(z)$ – etwa durch „Probieren“ – gefunden worden ist, dieses durch das Binom ($z-a$) *ohne Rest* dividiert werden kann. Der Quotient wird ein quadratisches Polynom des Typs

$$a_0z^2 + a_1z + a_2 \quad \text{bzw.} \quad z^2 - pz + q$$

sein, dessen Nullstellen mit Hilfe der „Mitternachtsformel“ bzw. der *p*,*q*-Formel – die jeder Gymnasiast auswendig beherrschen sollte – gefunden werden können. Ein Passus in Zif. 34 der nachfolgenden Fallunterscheidungen:

quia aequatio cubica factores non admittit,

deutet darauf hin, daß Euler dieses Verfahren fallweise auch in Betracht gezogen hat.

Eine formale Lösung der Gleichungen dritten Grades mit einer Unbekannten haben im 16. Jhdt. erstmals dal Ferro (Bologna) und Tartaglia (Brescia-Venedig) angegeben. Sie ist von Euler auch in seine „Vollständige Anleitung zur Algebra“ (1771) aufgenommen worden [69].

Die Methode dal Ferros und Tartaglias erlaubt die formale Lösung von reduzierten Gleichungen dritten Grades, in denen der Koeffizient p des Gliedes mit z^2 gleich null ist, dieses also fehlt. Eulers Testgleichung

$$(\alpha') \qquad z^3 - 18z^2 + 107z - 210 = 0$$

muß folglich in die reduzierte Form transformiert werden.

Dies geschieht mittels Substitution der Unbekannten z durch eine neue Unbekannte y, für welche gilt $y = z - \frac{1}{3}p$. Im Falle der Gleichung (α'), wo $p = 18$, ist also $y = z - \frac{1}{3}18 = z - 6$ bzw. $z = y + 6$, und die transformierte Gleichung lautet:

$$\begin{array}{rcrrrrrrr} z^3 & = & y^3 & + & 18y^2 & + & 108y & + & 216 \\ -18z^2 & = & & - & 18y^2 & - & 216y & - & 648 \\ +107z & = & & & & & 107y & + & 642 \\ -\ 210 & = & & & & & & - & 210 \\ \hline (\alpha'') \qquad 0 & = & y^3 & & & - & y & & \end{array}$$

Die Eulersche Testgleichung (α') ist ein besonders einfacher Fall: ihre Lösungen $z_1 = 5$, $z_2 = 6$, $z_3 = 7$ bilden eine arithmetische Folge. Dies bewirkt, daß in der reduzierten Gleichung (α'') nicht nur das Glied mit y^2, sondern auch, wie man leicht verifiziert, das absolute Glied fehlt [70]. Die Cardansche Formel (Seite 46) braucht gar nicht bemüht zu werden. Aus (α'') $= y^3 - y = y(y^2 - 1) = 0$ liest man ohne besondere Rechnung ab $y_1 = -1$, $y_2 = 0$, $y_3 = +1$ und schließt auf $z_1 = a = y_1+6 = -1+6 = 5$, $z_2 = b = y_2+6 = 0+6 = 6$, $z_3 = c = y_3+6 = 1+6 = 7$.

Wenn die kritische Gleichung (α') mit Hilfe der Dreipunkteformeln einzig aus den vorgegebenen Strecken f, g, h aufgestellt worden ist, können ihr auf die oben beschriebene Weise die Seitenlängen a, b, c entnommen werden.

Es existieren noch andere algebraische Verfahren zur Lösung von Gleichungen dritten Grades mit einer Unbekannten. Ein Verfahren drängt sich hier besonders auf, weil es die eindimensionale symmetrische Primfunktion $p = a+b+c = \Sigma a$ und die dritten Wurzeln ω und ω^2 der Einheit, von denen bisher so oft die Rede gewesen ist, ausgiebig benutzt. Es hat den Vorteil, daß eine Transformation in die reduzierte Form nicht nötig ist. Auf den Seiten 47 bis 51 ist das Verfahren beschrieben und an Hand der Eulerschen Testgleichung (α') getestet worden. Auch bei dieser Methode vereinfacht sich die Rechnung, wenn die drei Lösungen a, b, c eine arithmetische Folge bilden.

---

[69] Vgl. Fußnote 28. Eine Skizze von Tartaglias Verfahren findet sich oben auf den Seiten 44 bis 46.

[70] Wenn die Lösungen a, b, c der kritischen Gleichung $f(z) = z^3 - pz^2 + qz - r = 0$ formal $a = t-d$, $b = t$, $c = t+d$ sind, bilden sie eine arithmetische Folge mit der gemeinsamen Differenz d. Die Koeffizienten der Unbekannten in der Gleichung $f(z)$ sind dann $p = \Sigma a = 3t$, $q = \Sigma ab = 3t^2-d^2$, $r = abc = t^3-td^2$. Die kritische Gleichung $z^3 - pz^2 + qz - r = = z^3 - 3tz^2 + (3t^2-d^2)z - (t^3-td^2) = 0$ muß durch die Substitution $z = y+t$ transformiert werden. Wird eine Gleichung $f(z) = 0$ durch die Substitution $z = y+t$ transformiert, ist das absolute Glied der transformierten Gleichung formal gleich $f(t)$, im Fall der kritischen Gleichung $f(z)$ also $f(t) = (t^3 - pt^2 + qt - r)$. Nach der Voraussetzung ist aber der Parameter $t = b$, somit eine Lösung von $f(z)$: $f(z) = f(b) = 0$. Das absolute Glied der transformierten Gleichung muß folglich immer verschwinden, denn $f(t) = f(b) = 0$, unabhängig von den numerischen Werten, welche die Lösung b und die gemeinsame Differenz d im konkreten Fall annehmen. Einziges Erfordernis ist, daß die Lösungen a, b, c der Gleichung $f(z) = 0$ eine arithmetische Folge bilden.

Sonderfall: *Alle vier Punkte liegen auf einer Geraden.*

25. Da in diesem Falle gilt (Fig. 7):

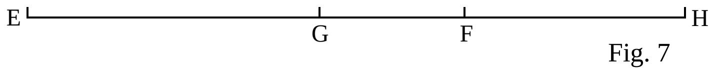


Fig. 7

$$FH = g, \quad FG = h, \quad GH = f, \quad EF = 2g, \quad EH = 3g \quad \text{und} \quad EG = 2g - h\,,$$

wird $\qquad g = f - h\,,$

und wir erhalten, nachdem diese Substitution ausgeführt ist:

$$R = \frac{4f^4}{(f-3h)^2}\,, \qquad Q = \frac{3ffh(2f-3h)}{(f-3h)^2}\,, \qquad P = \frac{3h(4f-3h)^3}{(f-3h)^2}\,,$$

und folglich
$$\frac{QQ}{R} = \frac{9hh(2f-3h)^2}{4(f-3h)^2}\,.$$

Hieraus gewinnen wir ferner:

$$p = \frac{(4f-3h)\sqrt{3h(4f-3h)}}{f-3h}$$

$$q = \frac{3fh(4f-3h)(5f-6h)}{(f-3h)^2}$$

$$r = \frac{3ffh(2f-3h)(4f-3h)\sqrt{3h(4f-3h)}}{(f-3h)^3}\,.$$

Betrachtung zu Ziffer 25.

In den Ziff. 1 bis 24 ist ein Algorithmus entwickelt worden, der gestattet, die Längen der Seiten a, b, c eines Dreiecks ABC zu berechnen, wenn drei Strecken f, g, h vorgegeben werden, deren Schnittpunkte der Schwerpunkt F, der Inkreismittelpunkt G und der Umkreismittelpunkt H des Dreiecks sind. Über drei Hilfsfunktionen P, Q, R der Streckenquadrate f^2, g^2 , h^2 werden die symmetrischen Funktionen $p = \Sigma a$, $q = \Sigma ab$ und $r = abc$ der Seitenlängen a, b, c des Dreiecks berechnet. Die Funktionen p, q, r sind die Koeffizienten der Unbekannten einer kubischen Gleichung $z^3 - pz^2 + qz - r = 0$, deren drei Lösungen $z_1 = a$, $z_2 = b$, $z_3 = c$ sind.

Mit der Zif. 25 beginnt der letzte Abschnitt der Eulerschen Studie, der sich mit Fallunterscheidungen befaßt. Der erste in den Ziffern 25 bis 29 untersuchte Sonderfall betrifft das gleichschenklige Dreieck. Dieses ist dadurch gekennzeichnet, daß die vier „merkwürdigen Punkte“, Höhenpunkt E, Schwerpunkt F, Umkreismittelpunkt H und Inkreismittelpunkt G auf ein und derselben Geraden liegen. Im gleichschenkligen Dreieck ist die Mittelsenkrechte vom Scheitelpunkt zur Basis zugleich Höhe, Mittellinie und Winkelhalbierende. Auf ihr liegen daher Umkreismittelpunkt, Höhenpunkt, Schwerpunkt und Inkreismittelpunkt: sie ist identisch mit der Euler-Geraden.

Daß Euler-Gerade und Mittelsenkrechte identisch sind, macht man sich durch nachfolgende Überlegungen klar. Das gleichschenklige Dreieck ist eine achsensysmmetrische Figur. Symmetrieachse ist die Mittelsenkrechte vom Scheitelpunkt C zur Basis AB. Sie teilt das Dreieck in zwei gleiche Teile – *in duas partes similes*. Eine ebene achsensymmetrische Konfiguration ist dadurch gekennzeichnet, daß jeder Punkt und jede Gerade der Ebene auf der jeweils anderen Seite der Symmetrieachse ein spiegelbildliches Gegenstück haben.

Die Symmetrieachse ist ihr eigenes Spiegelbild. Ebenso ist jeder auf der Symmetrieachse liegende Punkt sein eigenes Spiegelbild bzw. fällt mit seinem Spiegelbild zusammen. Man kann auch sagen, jeder Punkt der Symmetrieachse habe ***kein*** Spiegelbild bzw. Punkte ***ohne*** Spiegelbild liegen auf der Symmetrieachse.

Urbild und Bild haben bezüglich der symmetrischen Konfiguration dieselbe spiegelbildlich versetzte Funktion. So ist im gleichschenkligen Dreieck das Bild des ***Eckpunktes*** A, der Punkt B, wieder ***Eckpunkt*** des Dreiecks. Andererseits hat das gleichschenklige Dreieck nur ***einen*** Scheitelpunkt: dieser liegt notwendigerweise auf der Symmetrieachse.

In Zif. 1 der Studie wurde an die elementargeometrische Tatsache erinnert, daß die je drei Höhen, Mittellinien (Schwerlinien), Winkelhalbierenden und Mittelsenkrechten jeweils nur ***einen*** Schnittpunkt haben. Jedes Dreieck hat daher nur je ***einen*** Höhenpunkt, Schwerpunkt, Inkreismittelpunkt und Umkreismittelpunkt, folglich auch nur ***eine*** Euler-Gerade. Dies gilt auch für das gleichschenklige Dreieck: es hat nur ***einen*** Höhenpunkt, Schwerpunkt, Inkreismittelpunkt und Umkreismittelpunkt. Die Punkte E, F, G und H liegen daher auf der Symmetrieachse bzw. Mittelsenkrechten, und diese ist als Trägerin der Punkte E, F und H zugleich die Euler-Gerade.

Die Figur 7 entsteht aus der Figur 6, wenn der Punkt G gegen die Gerade EH wandert, bis er auf sie zu liegen kommt. Die Streckenbezeichnungen bleiben dabei erhalten, doch sind die Strecken $FG = GF = h$, $GH = f$ und $EG = 2g - h$ jetzt kollinear, d.h. sie liegen ebenfalls auf der Geraden EH, und unter ihnen herrschen rein arithmetische Beziehungen, die durch die Operationen *Plus* und *Minus* allein zu bewältigen sind.

Der Fig. 7 entnimmt man, daß die Strecke $FH = g$ gleich $GH - GF = f - h$ ist. Die Strecke g ist somit eine Funktion der Strecken f und h, nämlich $g = f - h$, und die Größe g kann in allen Formeln durch die Streckendifferenz $f - h$ ersetzt werden.

Die Lösungen P, Q, R des Gleichungssystems (I-II-III) der Zif. 21 haben alle den gleichen Nenner $N = 3g^2 + 6h^2 - 2f^2$. Substituiert man für g dessen Äquivalent $(f - h)$ bzw. für das Quadrat g^2 das Trinom $(f - h)^2 = f^2 - 2fh + h^2$, wird der Nenner N zu

$$\boldsymbol{N} = 3(f^2 - 2fh + h^2) + 6h^2 - 2f^2 = f^2 - 6fh + 9h^2 = \boldsymbol{(f - 3h)^2} .$$

Der Zähler von $\boldsymbol{R}$ bleibt unverändert $\boldsymbol{4f^4}$.

Der Zähler von $\boldsymbol{Q}$ hingegen wird durch die Substitution $g = f - h$:

$$3f^2[f^2 - g^2 - 2h^2] = 3f^2[f^2 - (f^2 - 2fh + h^2) - 2h^2] = 3f^2[2fh - 3h^2] = \boldsymbol{3f^2h[2f - 3h]}\ .$$

Der Zähler von $\boldsymbol{P}$ wird :

$$27f^4 - (12f^2 + 15g^2 - 6h^2)N = 27f^4 - [12f^2 + 15(f^2 - 2fh + h^2) - 6h^2](f^2 - 6fh + 9h^2) = \boldsymbol{3h(4f - 3h)^3}\ .$$

Die Hilfsgrößen P, Q, R erhalten in diesem Sonderfall somit die etwas einfacheren Formen:

$$\boldsymbol{P} = \frac{\boldsymbol{3h(4f-3h)^3}}{\boldsymbol{(f-3h)^2}} \qquad \boldsymbol{Q} = \frac{\boldsymbol{3f^2h(2f-3h)}}{\boldsymbol{(f-3h)^2}} \qquad \boldsymbol{R} = \frac{\boldsymbol{4f^4}}{\boldsymbol{(f-3h)^2}}\ .$$

Ziel der langwierigen, wenn auch elementaren Rechnungen sind indessen die Gleichungskoeffizienten p, q, r. Diese ergeben sich aus P, Q, R mit Hilfe der Formeln (δ) der Zif. 22:

$$\boldsymbol{p} = \sqrt{\boldsymbol{P}} = \frac{\boldsymbol{(4f-3h)\sqrt{3h(4f-3h)}}}{\boldsymbol{f-3h}}$$

$$\boldsymbol{q} = \frac{1}{4}\boldsymbol{P} + 2\boldsymbol{Q} + \frac{\boldsymbol{Q}^2}{\boldsymbol{R}} = \frac{\boldsymbol{3fh(4f-3h)(5f-6h)}}{\boldsymbol{(f-3h)^2}}$$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{Q}\sqrt{\boldsymbol{P}} = \frac{\boldsymbol{3f^2h(2f-3h)(4f-3h)\sqrt{3h(4f-3h)}}}{\boldsymbol{(f-3h)^3}}\ .$$

26. Da schließlich die Wurzeln der kubischen Gleichung:

$$z^3 - pz^2 + qz - r = 0$$

die Seiten a, b, c des gesuchten Dreiecks darstellen, wollen wir, um die Gleichung etwas einfacher zu gestalten, setzen

$$z = \frac{y\sqrt{3h(4f-3h)}}{f-3h}$$

und erhalten folgende Gleichung:

$$y^3 - (4f - 3h)yy + f(5f - 6h)y - ff(2f - 3h) = 0\,,$$

deren Lösungen augenscheinlich

$$f,\ f,\ (2f - 3h) \qquad \text{sind.}$$

Die Seiten des gesuchten Dreiecks, das gleichschenklig ist, werden daher

$$a = b = \frac{f\sqrt{3h(4f-3h)}}{f-3h} \qquad \text{und} \qquad c = \frac{(2f-3h)\sqrt{3h(4f-3h)}}{f-3h} \qquad \text{sein.}$$

<u>Betrachtung zu Ziffer 26</u>.

Die Berücksichtigung der Kollinearität der ***vier*** Punkte *E, F, G, H*, die für gleichschenklige Dreiecke gilt, führt in den Ziffern 25 und 26 auf eine kubische kritische Gleichung in *z*, von deren drei Lösungen – die die Längen *a, b, c* der Seiten des gesuchten Dreiecks *ABC* sein müssen – die Rechnung in Zif. 26 zwei als identisch ausweist. Daß das Dreieck *ABC* in diesem Falle also gleichschenklig ist, wird damit auch auf algebraischem Wege erhärtet.

Zur Lösung der kritischen Gleichung dieses Sonderfalles gelangt man durch folgende Überlegungen.

Mit Hilfe der in Zif. 25 gefundenen Funktionen *p, q, r* wird die kubische kritische Bestimmungsgleichung $z^3 - pz^2 + qz - r = 0$ aufgestellt. Eine genauere Prüfung ergibt, daß in allen drei Formeln für *p, q* und *r* ein identischer Faktor *k* auftritt, und zwar *k* in *p*, k^2 in *q* und k^3 in *r*, nämlich:

$$\boldsymbol{k = \frac{\sqrt{3h(4f-3h)}}{f-3h}} \ .$$

Der Faktor *k* ist dimensionslos oder hat, wie man auch sagen kann, die Dimension 0, d.h. er ist rein numerisch. Nach bewährter Methode benutzt Euler die Funktion *k* als Abkürzung und erzielt damit eine bedeutende Vereinfachung des Schriftbilds, die auch das Rechnen erleichtert. Mit der Abkürzung *k* werden

$$\boldsymbol{p \ = \ p'k \ = \ (4f-3h)k}$$

$$\boldsymbol{q \ = \ q'k^2 = \ f(5f-6h)k^2}$$

$$\boldsymbol{r \ = \ r'k^3 \ = \ f^2(2f-3h)k^3} \ .$$

Mit Hilfe des Faktors *k* wird die kritische Gleichung:

$$\boldsymbol{z^3 - pz^2 + qz - r \quad = \quad z^3 - p'k\,z^2 + q'k^2z - r'k^3 \quad = \quad 0} \ .$$

Da *k* als numerischer Faktor bloß eine Belastung der Formel ist, ist eine Division der Gleichung durch k^3 angezeigt. (Die Fig. 7 zugrundeliegende Konfiguration garantiert, daß $k \neq 0$.) Die Gleichung wird dann zu:

$$\boldsymbol{\left(\frac{z}{k}\right)^3 \ - \ p'\left(\frac{z}{k}\right)^2 + \ q'\left(\frac{z}{k}\right) \ - \ r' \ = \ 0} \ ,$$

wo sich eine weitere Vereinfachung durch Einführung einer neuen Variablen $y = \left(\frac{z}{k}\right)$ aufdrängt:

(α) $$\boldsymbol{y^3 - p'y^2 + q'y - r' \ = \ y^3 - (4f-3h)y^2 + f(5f-6h)y - f^2(2f-3h) \ = \ 0} \ .$$

In dieser transformierten algebraischen Gleichung dritten Grades tritt das absolute Glied als Produkt dreier expliziter Faktoren auf. Auf Grund der Identität $z^3 - pz^2 + qz - r \equiv (z-a)(z-b)(z-c)$ ist das absolute Glied *r* das Tripelprodukt der drei Lösungen, nämlich $r = abc$ [71]. Es besteht also eine gewisse Wahrscheinlichkeit, daß dessen drei Faktoren *f*, *f* und $(2f - 3h)$ Lösungen der transformierten Gleichung sind. Durch Einsetzen von *f*, *f* und $(2f - 3h)$ an Stelle von *y* in (α) findet man, daß $y_1 = y_2 = f$ und $y_3 = (2f - 3h)$ tatsächlich Lösungen der Gleichung (α) sind [72].

---

[71] Vgl. Seiten 37 und 40.

[72] Vgl. Seite 44: Ganzzahlige Lösungen und Gleichungskoeffizienten.

Da das absolute Glied r' regelkonform das Produkt der drei Lösungen f, f und $(2f - 3h)$ der Gleichung (α) ist, müßten auch die Summe Σy_i und die Summe der Doppelprodukte $\Sigma y_i y_k$ $(i,k \in \{1,2,3\}$ und $i \neq k)$ mit den Koeffizienten p' und q' von y^2 und y übereinstimmen.

Tatsächlich bestätigen die Summen

$$y_1 + y_2 + y_3 = f + f + (2f - 3h) = 4f - 3h = p' \qquad \text{und}$$
$$y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = f^2 + (2f^2 - 3hf) + (2f^2 - 3hf) = 5f^2 - 6hf = f(5f - 6h) = q'$$

die Beziehungen zwischen Gleichungskoefffizienten und Lösungen.

Die Lösungen der ursprünglichen kritischen Gleichung $z^3 - pz^2 + qz - r = 0$ ergeben sich auf-Grund der Transformationsvorschrift $y = \left(\frac{z}{k}\right)$, nämlich $z = yk$. Die Seiten $a = z_1$, $b = z_2$, $c = z_3$ des gesuchten Dreiecks sind:

$$\boldsymbol{a = z_1 = y_1 k = f\,\frac{\sqrt{3h(4f - 3h)}}{f - 3h}},$$
$$\boldsymbol{b = z_2 = y_2 k = f\,\frac{\sqrt{3h(4f - 3h)}}{f - 3h}},$$
$$\boldsymbol{c = z_3 = y_3 k = (2f - 3h)\,\frac{\sqrt{3h(4f - 3h)}}{f - 3h}}.$$

Die Identität der Lösungen $y_1 = y_2$ und $z_1 = z_2$ bestätigt die Tatsache, daß es sich in diesem Sonderfall, wenn auch der Inkreismittelpunkt G auf der Euler-Geraden liegt, um ein gleichschenkliges Dreieck handelt.

.

27. Dieser Fall ist aber, für sich allein betrachtet, besonders leicht zu behandeln, weil jene Gerade, auf welcher die gegebenen Punkte liegen, das Dreieck notwendigerweise in zwei gleiche Teile zerschneidet, dieses daher gleichschenklig ist. Wenn die Analyse schon mit $b = a$ beginnt, wird

$$A = \frac{1}{4}c\sqrt{(4aa - cc)}$$

und $$AP = AQ = AR = AS = \frac{1}{2}c$$ [1],

ferner sind

$$PE = \frac{c^3}{8A}, \quad QF = \frac{2A}{3c}, \quad RG = \frac{2A}{2a+c}, \quad SH = \frac{c(2aa-cc)}{8A},$$

woraus, weil die Punkte P, Q, R, S mit dem Mittelpunkt O der Basis zusammenfallen, die Abstände der gegebenen Punkte voneinander hervorgehen:

$$OF-OE = \frac{2(aa-cc)}{3\sqrt{(4aa-cc)}}, \quad OG-OE = \frac{c(a-c)}{\sqrt{(4aa-cc)}}, \quad OH-OE = \frac{aa-cc}{\sqrt{(4aa-cc)}},$$

$$OF-OG = \frac{(a-c)(2a-c)}{3\sqrt{(4aa-cc)}}, \quad OH-OF = \frac{aa-cc}{3\sqrt{(4aa-cc)}}, \quad OH-OG = \frac{a(a-c)}{\sqrt{(4aa-cc)}}.$$

[1] Vgl. Figuren 1, 2, 3, 4. A.S.

Betrachtung zu Ziffer 27.

Zur Berechnung der Dreiecksseiten a, b, c wurde in den Ziff. 25 und 26 von der Tatsache Gebrauch gemacht, daß im gleichschenkligen Dreieck alle vier „merkwürdigen Punkte“ E, F, G, H auf einer Geraden liegen. Diese Gerade ist die Mittelsenkrechte vom Scheitelpunkt zur Basis und auf Grund der Erkenntnisse der Zif. 18 zugleich die Euler-Gerade, da sie die Punkte E, F und H enthält.

In den Ziff. 27 bis 29 wird dagegen für die Rechnungen die namengebende Eigenschaft des gleichschenkligen Dreiecks, nämlich die Gleichheit der Schenkel a und b, symbolisch $b = a$, benutzt, allerdings nicht primär, um a, b und c zu berechnen, sondern um die verschiedenen Fälle – spitzwinklige bis stumpfwinklige gleichschenklige Dreiecke – zu unterscheiden.

In den Ziff. 12 bis 17 wurden die Entfernungen EF, EG usw. der „merkwürdigen Punkte“ voneinander berechnet. Dazu mußte der Satz von Pythagoras benutzt werden, um die Quadrate der Entfernungen, EF^2 usw., als Summe der Quadrate der Koordinatendifferenzen Δx und Δy angeben zu können: $EF^2 = (x_F - x_E)^2 + (y_F - y_E)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$ usw. Im Falle des gleichschenkligen Dreiecks sind die umständlichen Rechnungen nicht mehr nötig. Da alle vier Punkte E, F, G, H auf der Euler-Geraden bzw. der Mittelsenkrechten liegen, haben alle dieselbe Abszisse $x = AO = \frac{1}{2}c$. Die Abszissen-Differenzen Δx sind folglich alle null: $\Delta x = 0$. Die Entfernungen der Punkte E, F, G, H voneinander sind daher identisch mit ihren Ordinaten-Differenzen Δy: aus der Summe $EF^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$ wird $EF^2 = 0 + (\Delta y)^2 = (\Delta y)^2$, d.h. $EF = \pm \Delta y$. Die *taediosissimi calculi* der Zurückführung auf einen gemeinsamen Nenner und des Quadrierens, Hauptinhalte der Ziff. 12 bis 17, fallen dahin. Im folgenden wird nur noch mit den ***linearen*** Ordinaten-Differenzen Δy gerechnet, dementsprechend nur mit dem zweidimensionalen Flächeninhalt A anstatt des Quadrates A^2. Allerdings sind die linearen Distanzformeln des gleichschenkligen Dreiecks im allgemeinen keine symmetrischen Funktionen mehr.

Erstes Objekt der Transformation mit Hilfe der Substitution von b durch a ist der Dreiecksinhalt. Der ***Flächeninhalt A*** des gleichschenkligen Dreiecks ergibt sich sofort etwa aus der Formel (2a) [73], wenn $b = a$ gesetzt wird:

$$16A^2 = (a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) = (2a+c)(2a-c)cc = c^2(4a^2 - c^2) \text{ oder}$$

$$A^2 = \frac{c^2}{16}(4^2 - c^2) \quad \text{bzw. zweidimensional} \quad \boldsymbol{A = \frac{c}{4}\sqrt{4a^2 - c^2}}\ .$$

Die identische Formel (2b) muß dasselbe Resultat liefern:

$$16A^2 = 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - a^4 - b^4 - c^4 = 2(a^4 + a^2c^2 + a^2c^2) - a^4 - a^4 - c^4$$
$$= 4a^2c^2 - c^4 = c^2(4a^2 - c^2) \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{A = \frac{c}{4}\sqrt{4a^2 - c^2}} \text{ [74].}$$

Die Punkte P, Q, R, S (Fig. 1 bis 4) sind die Fußpunkte der Lote von den Punkten E, F, G, H nach der Basis AB. Der Eckpunkt A des Dreiecks ABC ist gleichzeitig Nullpunkt des (virtuellen) Koordinatensystems [75]. Die Strecken AP, AQ, AR, AS sind folglich die Abszissen der Punkte E, F, G, H bezüglich des für die Untersuchung gewählten Koordinatensystems. Im gleichschenkligen Dreieck liegen alle vier Punkte E, F, G, H auf der Mittelsenkrechten der Basis AB. Ihre Projektionen P, Q, R, S auf die Basis fallen daher alle mit dem Mittelpunkt O der Basis zusammen. Die Punkte O, P, Q, R, S, der Eckpunkt C des Dreiecks und die „merkwürdigen“ Punkte E, F, G, H haben somit alle dieselbe ***Abszisse*** $AO = \frac{1}{2}c$. Statt P, Q, R, S darf im gleichschenkligen Dreieck O geschrieben werden: $P = Q = R = S = O$. Die Punkte E, F, G, H haben lediglich unterschiedliche Ordinaten.

Diese geometrischen Überlegungen werden durch die Funktionsformeln der Abszissen von E, F, G, H in den Ziffern 6 bis 9 algebraisch bestätigt, wenn das Argument b durch a ersetzt wird:

[73] Vgl. Seite 30.

[74] Setzt man hier auch $c = a$, erhält man $A = a^2(\sqrt{3})/4$, die bekannte Formel für den Inhalt des gleichseitigen Dreiecks ($a=b=c$).

[75] Vgl. Zif. 5 des Originaltexts sowie die Figuren 1 bis 4 und 8a bis 9c.

$$AP = \frac{c^2+b^2-a^2}{2c} = \tfrac{1}{2}c \quad \text{(Zif. 6)} \qquad AQ = \frac{3c^2+b^2-a^2}{6c} = \tfrac{1}{2}c \quad \text{(Zif. 7)}$$

$$AR = \frac{c+b-a}{2} = \tfrac{1}{2}c \quad \text{(Zif. 8)} \qquad AS = \tfrac{1}{2}c = \tfrac{1}{2}c \quad \text{(Zif. 9)}$$

Auch die ***Ordinaten*** aller Punkte des gleichschenkligen Dreiecks gehen aus den Formeln der Ziffern 6 bis 9 hervor, wenn dort *b* durch *a* ersetzt wird. Die Funktionsformeln der Ordinaten von *E*, *F*, *G*, *H* lauten:

Höhenpunkt E (Zif. 6): $PE = OE = \dfrac{(c^2+b^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)}{8cA} = \dfrac{c^4}{8cA} = \dfrac{c^3}{8A}$

Schwerpunkt F (Zif. 7): $QF = OF = \tfrac{1}{3}PC = \dfrac{2A}{3c}$

Inkreismittelpunkt G (Zif. 8): $RG = OG = \dfrac{2A}{a+b+c} = \dfrac{2A}{2a+c}$

Umkreismittelpunkt H (Zif. 9): $SH = OH = \dfrac{c(a^2+b^2-c^2)}{8A} = \dfrac{c(2a^2-c^2)}{8A}$.

Die Ordinaten *PE* bis *SH* waren ursprünglich Funktionen von *a*, *b*, *c*. Wegen $b = a$ im gleichschenkligen Dreieck (*OE* bis *OH*) sind sie nur noch Funktionen von *a* und *c*. Die Argumente *a*, *b*, *c* sind als Dreiecksseiten bloße Längen, d.h. positive skalare Größen der Dimension 1. Der Dreiecksinhalt *A* besitzt als Fläche die Dimension 2 und ist ebenfalls positiv. Überdies unterliegen die Dreiecksseiten *a*, *b*, *c* den Dreiecksungleichungen $a + b > c$ usw., im gleichschenkligen Dreieck, wegen $b = a$, $2a > c$.

Unter diesen Voraussetzungen weisen die Funktionsformeln die Ordinaten der Punkte *E*, *F*, *G* als positive Größen aus. Überdies bestätigen die Formeln die Eindimensionalität der Ordinaten. Diese sind Strecken, nämlich die positiven gerichteten Strecken *OE*, *OF*, *OG*. Definiert man die Richtung der Strecke *OC* als positiv, liegen die Punkte *E*, *F*, *G* daher oberhalb des Seitenmittelpunktes *O* der Basis *AB*.

Anders verhält es sich mit dem Umkreismittelpunkt *H*. Dessen Ordinate

$$OH = \frac{c(2a^2-c^2)}{8A} = \frac{c(a\sqrt{2}+c)(a\sqrt{2}-c)}{8A}$$

kann wegen des Faktors $(a\sqrt{2}-c)$ sehr wohl negativ sein, selbst wenn die Argumente *a*, *c* und *A* alle positiv sind. Der Umkreismittelpunkt *H* kann also ober- oder unterhalb des Basismittelpunktes *O* liegen (Fig. 9a bis 9c). Im Falle des rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks ist *H*, wegen $c^2 = 2a^2$, sogar identisch mit dem Seitenmittelpunkt *O*: $H = O$, und seine Ordinate *OH* gleich null: *H* liegt auf der Basis *AB* ($H \in AB$). Entscheidend sind die Größenverhältnisse der Seiten *a* und *c*. Fallunterscheidungen dieser Art werden Gegenstand der Ziff. 28ff. sein, wo Euler mit den relativen Längen der Schenkel *a* und der Basis *c* argumentiert.

Aus den Funktionsformeln der Ordinaten von *E*, *F*, *G*, *H* gewinnt man leicht Formeln für die sechs wechselseitigen linearen Abstände dieser Punkte voneinander. Diese können im gleichschenkligen Dreieck als Differenzen von Koordinatenpaaren $(x|y)$ mit grundsätzlich gleichen Abszissen *x* nur Strecken in der *y*-Richtung sein, allerdings nach oben oder nach unten weisend. Faßt man die Entfernungen *EF*, *EG* usw. als gerichtete Größen – positiv oder negativ – auf, so daß $EF = -FE$, $EG = -GE$ usw., werden die Ordinatendifferenzen der Zif. 27 formal zu:

$$\boldsymbol{EF} = -FE = -(FO+OE) = -(-OF+OE) = \boldsymbol{OF - OE}$$

$$\boldsymbol{EG} = -GE = -(GO+OE) = -(-OG+OE) = \boldsymbol{OG - OE}$$

usw.

Mit Rücksicht auf die Gleichheit $b = a$, die Flächenformel $A = \frac{1}{4}c\sqrt{4a^2 - c^2}$ und die Formeln (2a) und (2b) für $16A^2$ lauten die Funktionsformeln für die sechs linearen *intervalla inter .... puncta E*, *F*, *G*, *et H* explizit:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{EF} = -FE = OF-OE &= \frac{2A}{3c} - \frac{c^3}{8A} = \frac{1}{24cA}(16A^2 - 3c^4) = \frac{4c^2(a^2-c^2)}{24cA} = \frac{c(a^2-c^2)}{6A} \\
&= \frac{4c(a^2-c^2)}{6c\sqrt{4a^2-c^2}} = \boldsymbol{\frac{2(a+c)(a-c)}{3\sqrt{4a^2-c^2}}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{EG} = -GE = OG-OE &= \frac{2A}{2a+c} - \frac{c^3}{8A} = \frac{1}{8A(2a+c)}(16A^2 - 2ac^3 - c^4) = \frac{1}{8A(2a+c)}(4a^2c^2-2ac^3-2c^4) \\
&= \frac{2c^2}{8A(2a+c)}(2a^2-ac-c^2) = \frac{c^2}{c(2a+c)\sqrt{4a^2-c^2}}(a^2-c^2+a^2-ac) \\
&= \frac{c(a-c)}{(2a+c)\sqrt{4a^2-c^2}}(2a+c) = \boldsymbol{\frac{c(a-c)}{\sqrt{4a^2-c^2}}}
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{EH} = -HE = OH-OE = \frac{c(2a^2-c^2)}{8A} - \frac{c^3}{8A} = \frac{2c}{8A}(a^2-c^2) = \boldsymbol{\frac{(a+c)(a-c)}{\sqrt{4a^2-c^2}}}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{GF} = -FG = OF-OG &= \frac{2A}{3c} - \frac{2A}{2a+c} = \frac{4A(a-c)}{3c(2a+c)} = \frac{(a-c)c\sqrt{4a^2-c^2}}{3c(2a+c)} = \frac{(a-c)\sqrt{(2a+c)(2a-c)}}{3(\sqrt{2a+c})^2} \\
&= \frac{(a-c)\sqrt{2a-c}}{3\sqrt{2a+c}} = \boldsymbol{\frac{(2a-c)(a-c)}{3\sqrt{4a^2-c^2}}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{FH} = -HF = OH-OF &= \frac{c(2a^2-c^2)}{8A} - \frac{2A}{3c} = \frac{1}{24cA}[3c^2(2a^2-c^2)-16A^2] = \frac{1}{24cA}(2a^2c^2-2c^4) \\
&= \frac{2c^2}{24cA}(a^2-c^2) = \frac{c(a^2-c^2)}{3c\sqrt{4a^2-c^2}} = \frac{(a^2-c^2)}{3\sqrt{4a^2-c^2}} = \boldsymbol{\frac{(a+c)(a-c)}{3\sqrt{4a^2-c^2}}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{GH} = -HG = OH-OG &= \frac{c(2a^2-c^2)}{8A} - \frac{2A}{2a+c} = \frac{1}{8A(2a+c)}[(2a^2c-c^3)(2a+c) - 16A^2] \\
&= \frac{1}{8A(2a+c)}(4a^3c-2ac^3-2a^2c^2) = \frac{2ac}{8A(2a+c)}(2a^2-c^2-ac) \\
&= \frac{ac}{4A(2a+c)}(a^2-c^2+a^2-ac) = \frac{ac}{c\sqrt{4a^2-c^2}\,(2a+c)}[(a+c)(a-c)+a(a-c)] \\
&= \frac{a}{\sqrt{4a^2-c^2}\,(2a+c)}(a-c)(2a+c) = \boldsymbol{\frac{a(a-c)}{\sqrt{4a^2-c^2}}}\ .
\end{aligned}$$

Die Funktionsformeln der Koordinaten der Punkte *E*, *F*, *G*, *H* und der linearen Punktedistanzen *EF* usw. sind augenscheinlich keine symmetrischen Funktionen. Eine Vertauschung der Argumente *a* und *c* bewirkt andere Funktionswerte. Dies ist geometrisch leicht einzusehen. Die Strecken *a* sind die Schenkel, *c* die Basis eines gleichschenkligen Dreiecks. Durch Vertauschung von *a* und *c* würde wohl wieder ein gleichschenkliges Dreieck entstehen, dieses hätte indessen eine andere Konfiguration.

Andererseits sind die Funktionsformeln für *EF*, *EG* usw. vergleichsweise einfach strukturiert. Sie enthalten alle den Faktor $k = \frac{a-c}{\sqrt{4a^2-c^2}}$. Überdies sind in Zif. 21 für *GH*, *FH* und *GF* die vereinfachten Kurzbezeichnungen *f*, *g*, *h* eingeführt worden.

Die Abstandsformeln lassen sich damit übersichtlicher und transparenter darstellen:

$$EF = \tfrac{2}{3}(a+c)k \quad = 2g \qquad EG = ck = \sqrt{6g^2 + 3h^2 - 2f^2} \qquad EH = (a+c)k = 3g$$

$$GF = \tfrac{1}{3}(2a-c)k = h \qquad FH = \tfrac{1}{3}(a+c)k = g \qquad GH = ak = f\,.$$

Die Größenverhältnisse $FH : EF : EH = 1 : 2 : 3$ bleiben nach Ausweis der algebraischen Analyse auch im gleichschenkligen Dreieck erhalten und bestätigen damit ihrerseits die Kollinearität von Höhenpunkt E, Schwerpunkt F und Umkreismittelpunkt H.

Die Summe $EF + FH$ ist auch algebraisch gleich EH:

$$EF + FH = \tfrac{2}{3}(a+c)k + \tfrac{1}{3}(a+c)k = \tfrac{3}{3}(\alpha+c)k = (a+c)k = EH\,.$$

Wegen der Dreiecksungleichung $EF + FH > EH$ kann die Gleichheit $EF + FH = EH$ nur statthaben, wenn die Punkte E, F und H kein Dreieck bilden, sondern auf einer Geraden liegen.

Die oben hergeleiteten Formeln für die wechselseitigen Distanzen der „merkwürdigen Punkte" E, F, G, H im gleichschenkligen Dreieck bilden die Grundlage für die nachfolgenden Überlegungen der Ziff. 28 und 29.

28. Hier müssen zwei Fälle in Betracht gezogen werden, je nachdem ob $a > c$ oder $a < c$, denn, wenn $a = c$ bzw. das Dreieck gleichseitig ist, fallen die drei Punkte in einem einzigen zusammen.

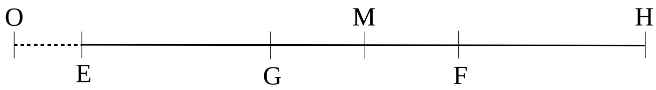


Fig. 8

I. Wenn $\boldsymbol{a > c}$, sind die Punkte so angeordnet, wie die Figur 8 zeigt. Hier ist $HF = \frac{1}{3}EH$ bzw. $EF = \frac{2}{3}EH$ und $EG < \frac{1}{2}EH$. In diesem Fall liegt der Mittelpunkt O der Basis auf der Verlängerung der Geraden HE, und zwar, von H aus gesehen, jenseits des Punktes E, so daß

$$OE = \frac{cc}{2\sqrt{4aa - cc}} \; .$$

II. Wenn $\boldsymbol{a < c}$, sind die Punkte angeordnet, wie in Figur 9 gezeigt. Hier ist wiederum $HF = \frac{1}{3}EH$ bzw. $EF = \frac{2}{3}EH$. Hingegen ist $EG > \frac{1}{2}EH$. In diesem Fall liegt der Mittelpunkt O der Basis aber auf der Verlängerung der Geraden EH von E aus gesehen jenseits des Punktes H, so daß

$$HO = \frac{2aa - cc}{2\sqrt{4aa - cc}} \; ,$$

woraus folgt, daß, wenn noch $2aa < cc$, der Punkt O sogar zwischen H und E liegt.

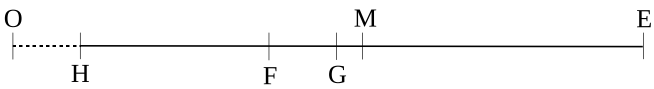


Fig. 9

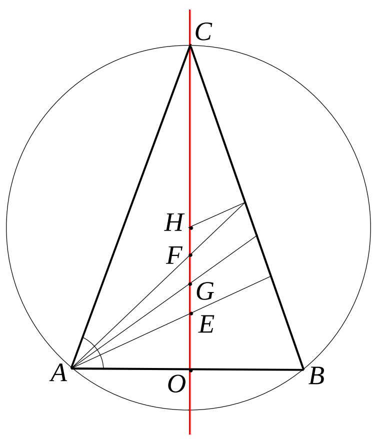


Fig. 8a: $\angle C < 60°$, $a > c$

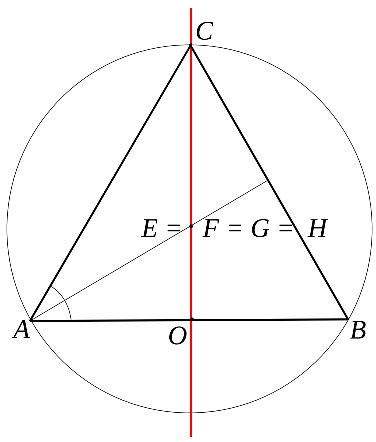


Fig. 8b: $\angle C = 60°$, $a = c$

<u>Betrachtung zu Ziffer 28</u>.

Die Zif. 28 untersucht die relativen Positionen der „merkwürdigen Punkte“ E, F, G, H auf der Euler-Geraden in ***gleichschenkligen Dreiecken***. Wird der Scheitelwinkel $\gamma = \angle C$ sukzessive von 0° bis 180° geöffnet, durchläuft das gleichschenklige Dreieck alle Phasen vom spitzwinkligen bis zum stumpfwinkligen Dreieck. Parallel dazu ändert sich auch das Längenverhältnis $a : c$ der Schenkel a zur Basis c. Die Beziehung

$$\boldsymbol{c = 2a \cdot \sin(\gamma/2)}$$

zeigt an, daß $a > c$, wenn $\gamma < 60°$, andernfalls ist $a \leq c$. Statt der Winkel können zur Diskussion eines Dreiecks auch die relativen Längen der Seiten beigezogen werden. Ab Zif. 28 argumentiert Euler denn auch mit den Längen a und c und unterscheidet die Fälle $\boldsymbol{a > c}$ und $\boldsymbol{a < c}$:

Der Fall $\boldsymbol{a = c}$ braucht nicht besonders untersucht zu werden. Wenn Schenkel und Basis gleich lang sind, ist $\sin(\gamma/2) = \frac{1}{2}$ bzw. $\gamma = 60°$, und das Dreieck ist ***gleichseitig***. Die sechs Distanzformeln der Zif. 27 (Seite 144) enthalten alle den Faktor $(a-c)$; bei Gleichheit $a = c$ sind daher alle Distanzen EF, EG usw. gleich null und bestätigen damit auch algebraisch die Koinzidenz der Punkte E, F, G, H: *omnia quatuor puncta in unum coalescunt* (Zif. 28), formal $E = F = G = H$.

Der Abstand des polyfunktionalen Punktes $E = F = G = H$ von der Basis, seine Ordinate, wird nach Aussage der Abstandsformeln der Zif. 27 $OF = OE = OG = OH$, beipielsweise mit $OF = QF$ nach Zif. 7, wenn $a = b = c$:

$$OF = QF = \frac{2A}{3c} = \frac{2c\sqrt{4a^2 - c^2}}{4 \cdot 3c} = \frac{\sqrt{4a^2 - c^2}}{6} = \frac{a\sqrt{3}}{6}\,, \text{ wenn } c = a\,.$$

Sein Abstand vom Scheitelpunkt C des gleichseitigen Dreiecks (Fig. 8b) ergibt sich aus der einfachen Überlegung, daß, da $E = F = G = H$ auch Schwerpunkt ist, nach einem elementargeometrischen Satz die Mittellinie OC durch $E = F = G = H$ gedrittelt wird. Die Strecke $EC = FC = GC = HC$ beträgt folglich das Doppelte von OF:

$$HC = 2OF = \frac{\sqrt{4a^2 - c^2}}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}\,.$$

Die Konfiguration des Dreiecks widerspiegelt sich in der Anordnung der „merkwürdigen Punkte“ auf der Euler-Geraden. Mit wachsendem Scheitelwinkel γ bzw. abnehmendem Längenverhältnis $a : c$ rücken die „merkwürdigen Punkte“ E, F, G, H immer enger zusammen, bis sie bei $\gamma = 60°$ bzw. bei $a = c$ in einem Punkt zusammenfallen und mit $\gamma > 60°$ bzw. $a < c$ in umgekehrter Reihenfolge wieder weiter auseinanderrücken. Wenn $\gamma > 90°$, liegen Höhenpunkt E und Umkreismittelpunkt H sogar außerhalb des Dreiecks ABC (Fig. 9c).

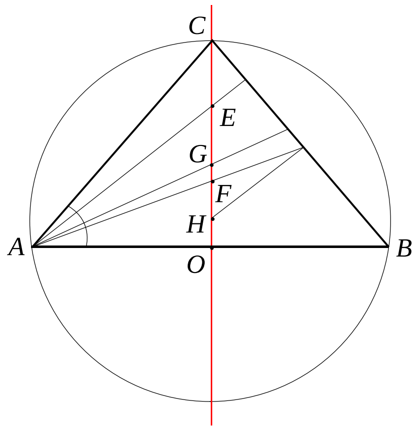


Fig. 9a: $60° < \angle C < 90°$, $a < c$

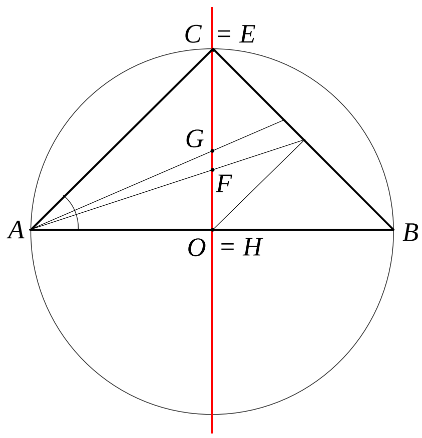


Fig. 9b: $\angle C = 90°$, $c^2 = 2a^2$

Die Figuren 7, 8 und 9 in den Ziffern 25, 28 und 29 stellen die Euler-Gerade als Trägerin der vier „merkwürdigen Punkte“ *E*, *F*, *G*, *H* im gleichschenkligen Dreieck graphisch dar. Allerdings zeigen Eulers Zeichnungen bloß eine horizontale Strecke mit den Bezeichnungen der Punkte *E*, *F*, *G*, *H* ohne andere Erklärung, als daß *puncta erunt disposita, uti Figura refert* und daß der Punkt *F* die Strecke *EH* im Verhältnis 2 : 1 teilt, was man allenfalls durch Abmessen bestätigt.

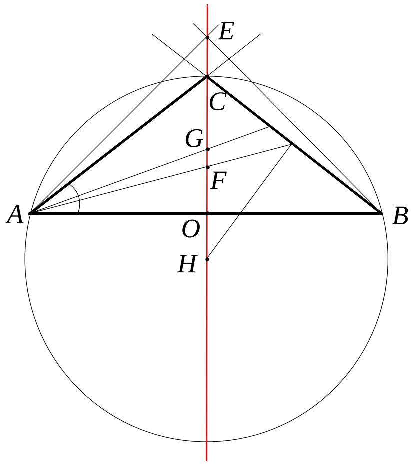


Fig. 9c: $\angle C > 90°$, $a < c$

Indessen ist die Strecke *OH* bzw. *OE* (Fig. 8 und Fig. 9) als Euler-Gerade im gleichschenkligen Dreieck zugleich Mittelsenkrechte auf der Basis *AB* des Dreiecks *ABC* und auch dessen Symmetrieachse. Die Figuren 8 und 9 werden anschaulicher, wenn sie um 90° gedreht und in ihr Umfeld – ganzes Dreieck samt Umkreis – gestellt werden (Fig. 8a bis 9c), so daß, wie in Eulers Figuren 1 bis 4, die Basis *AB* des Dreiecks mit dem Mittelpunkt *O* ***unten***, der Scheitelpunkt *C* ***oben*** auf die Zeichenebene zu liegen kommen und die Strecke *OH* bzw. die Euler-Gerade (in den Zeichnungen rot) vertikal steht.

Rein optisch entnimmt man den Zeichnungen folgende für die Anordnung der „merkwürdigen Punkte“ *E*, *F*, *G*, *H* auf der Euler-Geraden bedeutsame Fakten:

1. Randpunkte sind in allen Konfigurationen Höhenpunkt *E* und Umkreismittelpunkt *H*. Schwerpunkt *F* und Inkreismittelpunkt *G* liegen zwischen ihnen.

2. Der Inkreismittelpunkt *G* liegt nie zwischen *F* und *H*.

3. Im gleichseitigen Dreieck fallen die Punkte *E*, *F*, *G*, *H* in einem Punkt zusammen.

4. Die Reihenfolge der Punkte von unten nach oben ist bei Scheitelwinkeln $\angle C < 60°$ *E-G-F-H*, bei Scheitelwinkeln $\angle C > 60°$ aber umgekehrt: *H-F-G-E*.

5. In rechtwinkligen Dreiecken ist der Umkreis Thaleskreis über der Basis und der Höhenpunkt *E* zugleich Scheitelpunkt *C*. Der Umkreismittelpunkt *H* liegt auf der Basis *AB* und ist zugleich ihr Mittelpunkt *O*.

6. In stumpfwinkligen Dreiecken liegen Höhenpunkt *E* und Umkreismittelpunkt *H* außerhalb des Dreiecks, der Höhenpunkt *E* oberhalb des Scheitelpunktes *C*, der Umkreismittelpunkt *H* unterhalb des Mittelpunktes *O* der Basis *AB*.

7. Fußpunkt aller Lote der Punkte *E*, *F*, *G*, *H* und *C* auf die Basis *AB* ist deren Mittelpunkt *O*. Die Punkte *O*, *E*, *F*, *G*, *H*, *C* haben daher alle dieselbe Abszisse $AO = \frac{1}{2}c$ und unterscheiden sich nur durch die Längen ihrer Ordinaten.

Der Eigenschaft (2) entnimmt man, daß die der Studie zugrundeliegende Konstruktionsaufgabe unlösbar sein müßte, sollte die Vorgabe die Reihenfolge *F-G-H* oder *H-G-F* postulieren.

Schwerpunkt, Inkreismittelpunkt und Umkreismittelpunkt fallen im gleichseitigen Dreieck mit dem Höhenpunkt zusammen (Fig. 8b). Schwerpunkt und Inkreismittelpunkt liegen aber auch in nicht-gleichseitigen Dreiecken meist sehr nahe beieinander, so daß sie vom Zeichner wie vom Betrachter schwer auseinander zu halten sind. Dennoch liegt G nie zwischen H und F. Das Verhältnis V der Ordinaten g_y und f_y läßt sich durch die Formel:

$$V = \frac{g_y}{f_y} = \frac{3}{2}\left(1 - tg^2(45° - \gamma/4)\right)$$

beschreiben, wo γ der Scheitelwinkel $\angle C$ und $0° < \gamma < 180°$ ist. Für spitzwinklige und stumpfwinklige Dreiecke sowie für die Sonderfälle $\angle C = 60°$ und $\angle C = 90°$ erhält man:

(1) wenn $\angle C < 60°$, $V < 1$, (2) wenn $\angle C = 60°$, $V = 1$,
(3) wenn $60° < \angle C < 90°$, $V > 1$, (4) wenn $\angle C = 90°$, $V > 1$,
(5) wenn $\angle C > 90°$, $V > 1$,

d.h. g_y ist kleiner als f_y in spitzwinkligen Dreiecken, deren Scheitelwinkel kleiner als 60° ist (Fig. 8a), aber bereits größer als f_y, wenn der Scheitelwinkel größer als 60° ist (Fig. 9a bis 9c); in allen Fällen, wegen der Umkehr der Reihenfolge bei $\gamma = 60°$, in Übereinstimmung mit der Aussage, daß G nie zwischen F und H zu liegen kommt. Das Verhältnis V variiert zwischen 0 und 1,5

Die Umkehr der Reihenfolge der „merkwürdigen Punkte“ beim kritischen Wert von 60° läßt es daher als sinnvoll erscheinen, der Euler-Geraden eine Richtung zuzuordnen, z.B. ***positiv*** von unten nach oben, ***negativ*** von oben nach unten.

Diese Verhältnisse und ihre Folgerungen untersucht Euler in Zif. 28 und benutzt dafür die bisherige Analyse ab Zif. 1 – *a principio*. Der Sonderfall des gleichschenkligen Dreiecks ist gekennzeichnet durch die Gleichheit der Schenkel a und b: $b = a$. In den Formeln ab Zif. 5 wird die Variable b durch a substituiert. Vom allgemeinen Fall wird auf den besonderen geschlossen, und die Formeln werden dementsprechend einfacher: die einstigen Funktionen der drei Variablen a, b, c sind jetzt nur noch Funktionen der zwei Variablen a und c.

Die Koordinaten der „merkwürdigen Punkte“ E, F, G, H im gleichschenkligen Dreieck sind bereits in der Zif. 27 angegeben worden. In Zif. 28 werden lediglich die Ordinaten e_y und h_y des jeweils untersten Punktes E bzw. H für die Fälle $a > c$ und $a < c$ explizit wiederholt, wobei die Formel für den Flächeninhalt A des Dreiecks, wie in Zif. 27 gezeigt, entwickelt wird:

$$\text{wenn } a > c:\ e_y = OE = \frac{c^3}{8A} = \frac{4c^3}{8c\sqrt{4a^2 - c^2}} = \frac{c^2}{2\sqrt{4a^2 - c^2}}\ ,$$

$$\text{wenn } a < c:\ h_y = OH = \frac{c(2a^2 - c^2)}{8A} = \frac{4c(2a^2 - c^2)}{8c\sqrt{4a^2 - c^2}} = \frac{2a^2 - c^2}{2\sqrt{4a^2 - c^2}}\ .$$

Die Längen a, b, c der Seiten des (gesuchten) Dreiecks ABC und sein Flächeninhalt A dürfen als Beträge, d.h. positive Größen, betrachtet werden [76]. Nach den Descartesschen Vorzeichenregeln besitzt die kritische Gleichung der Zif. 22 – deren Lösungen a, b, c ja sind – in der Tat auch im allgemeinen Fall keine negativen Wurzeln.

Die Ordinatenformeln der Punkte E, F, G sind daher nach Ausweis der Zif. 27 positiv definit. Dies bedeutet, daß die Punkte E, F, G in beiden Fällen $a > c$ und $a < c$ oberhalb der Basislinie AB (x–Achse) liegen, wohingegen $h_y = OH$, wenn $a < c$, negativ sein und der Umkreismittelpunkt H unterhalb AB liegen kann (Fig. 9c).

Die in Zif. 27 zusammengestellten Ordinatenformeln erlauben es, die in den Figuren 8 und 9 geometrisch qualitativ beschriebenen Anordnungen der Punkte E, F, G, H algebraisch quantitativ wie folgt zu verifizieren. Wegen der Gleichheit $a = b$ in gleichschenkligen Dreiecken wird die Größe $16A^2$ nach Formel (2b), Seite 30, zu $16A^2 = 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4 = 4a^2c^2 - c^4 = c^2(4a^2 - c^2) = c^2(2a+c)(2a-c)$.

[76] *Latera trianguli quaesiti a, b, c positiva spectari possunt.* (Zif. 31)

I. Wenn $a > c > 0$:

1. Höhenpunkt E: $e_y = OE = \frac{c^3}{8A} = \frac{3c^4}{24cA} = \frac{(2a+c)c^3}{(2a+c)8A} > 0$

2. Inkreismittelpunkt G: $g_y = OG = \frac{2A}{2a+c} = \frac{16A^2}{(2a+c)8A} = \frac{c^2(2a+c)(2a-c)}{(2a+c)8A} > \frac{(2a+c)c^3}{(2a+c)8A} = e_y$

3. Schwerpunkt F: $f_y = OF = \frac{2A}{3c} = \frac{16A^2}{3c8A} = \frac{c^2(4a^2-c^2)}{24cA} > \frac{16A^2}{(2a+c)8A} = \frac{c^2(4a^2-c^2)}{(2a+c)8A} = g_y$

4. Umkreismittelpunkt H: $h_y = OH = \frac{c(2a^2-c^2)}{8A} = \frac{3c^2(2a^2-c^2)}{24cA} = \frac{c^2(4a^2-c^2+2a^2-2c^2)}{24cA}$

$$= \frac{c^2(4a^2-c^2)}{24cA} + \frac{2c^2(a^2-c^2)}{24cA} = f_y + \frac{c(a^2-c^2)}{12A} > f_y$$

5. Scheitelpunkt C: $c_y = OC = \frac{2A}{c} = \frac{16A^2}{c8A} = \frac{c^2(4a^2-c^2)}{c8a} > \frac{c(2a^2-c^2)}{8A} = h_y$,

woraus die für spitzwinklige Dreiecke charakteristische Reihenfolge ***O-E-G-F-H-C*** (Fig. 8 und 8a) hervorgeht.

II. Wenn $0 < a < c$ und $2a > c$ (Dreiecksungleichung):

1. Umkreismittelpunkt H: $h_y = OH = \frac{c(2a^2-c^2)}{8A} = \frac{3c^2(2a^2-c^2)}{24cA} = \frac{(2a+c)c(2a^2-c^2)}{(2a+c)8A} > 0$ oder < 0

2. Schwerpunkt F: $f_y = OF = \frac{2A}{3c} = \frac{2A\,8A}{3c\,8A} = \frac{16A^2}{24cA} = \frac{c^2(6a^2-3c^2-2a^2+2c^2)}{24cA}$

$$= h_y + \frac{c^2-a^2}{12cA} > h_y \text{ und } > 0$$

3. Inkreismittelpunkt G: $g_y = OG = \frac{2A}{2a+c} > \frac{2A}{3c} = f_y$

4. Höhenpunkt E: $e_y = OE = \frac{c^3}{8A} = \frac{(2a+c)c^3}{(2a+c)8A} = \frac{c^2c(2a+c)}{(2a+c)8A} > \frac{c^2(2a+c)(2a-c)}{(2a+c)8A} = g_y$

5. Scheitelpunkt C: $c_y = OC = \frac{2A}{c} = \frac{16A^2}{c8A} = \frac{c^2(4a^2-c^2)}{c8a} = \frac{c(2a+c)(2a-c)}{8A} < e_y$ oder $> e_y$.

Die Reihenfolge der Punkte bei Dreiecken mit Scheitelwinkeln $\angle C > 60°$ ist somit ***O-H-F-G-E-C*** (vgl. Fig 9a). Wenn die relativen Längen von Schenkeln a und Basis c allerdings im Längenbereich $\frac{1}{2}c < a < \frac{1}{2}c\sqrt{2}$ liegen, wird die Ordinate h_y negativ und die Ordinate $e_y > c_y$: Die Reihenfolge ist dann, wie Figur 9c zeigt, ***H-O-F-G-C-E***: *punctum O intra H et E cadit* (Zif. 28, II.) [77]

Zur Herleitung der Anordnungen ***E-G-F-H*** bzw. ***H-F-G-E*** benutzt Euler nicht die Ordinatenformeln der Punkte E, F, G, H, wie oben vorgeführt, sondern die sechs Distanzformeln EF, EG usw. der Ziffer 27 sowie die in ihnen enthaltene, durch den Schwerpunkt F bewirkte Teilung 1 : 2 : 3:

$$FH = \frac{1}{3}EH = 1g$$

$$EF = \frac{2}{3}EH = 2g$$

$$EH = \frac{3}{3}EH = 3g$$

[77] Wählt man etwa $a = (7/10)c$, wird die Fläche $A = 12ck$ mit $k = (c\sqrt{6})/120 > 0$. Die Ordinate des Umkreismittelpunkts H ist dann $h_y = -1/2\,k < 0$. Die Ordinate des Höhenpunktes E wird $e_y = 25k$, die Ordinate des Scheitelpunktes C $c_y = 24k < e_y$. Die Punkte E und H liegen somit außerhalb des Dreiecks ABC, H ***unterhalb*** der Basis AB, E ***oberhalb*** des Scheitelpunktes C.

Der allen sechs Distanzformeln gemeinsame Faktor

$$\boldsymbol{k} = \frac{\boldsymbol{a-c}}{\sqrt{\boldsymbol{4a^2-c^2}}}$$

hat diskriminatorische Funktion. Der Radikand $4a^2-c^2 = (2a+c)(2a-c)$ im Nenner ist eine Differenz, die negativ sein kann, obwohl Minuend wie Subtrahend als Quadrate positiv sind. Die Wurzel $\sqrt{4a^2-c^2} = \sqrt{(2a+c)(2a-c)}$ könnte daher imaginär werden. Die Größen a und c, als Schenkel und Basis eines gleichschenkligen Dreiecks rein skalare Längen, dürfen indes der Dreiecksungleichung $2a-c > 0$ nicht widersprechen. Der Radikand bleibt daher positiv und der Nenner reell.

Anders der Zähler $a-c$. Im gleichschenkligen Dreieck können die Schenkel a größer oder kleiner als die Basis c sein (Fig. 8a bis 9c), so daß die Differenz $a-c$ – und damit der Faktor k – bald positiv, bald negativ ist.

Die Distanzen EF, EG usw. werden durch den Faktor k mit einem Vorzeichen behaftet und geben Anlaß, der Euler-Geraden einen Durchlaufsinn – z.B. von unten nach oben – beizumessen und die Fälle $a > c$ und $a < c$ zu unterscheiden. In der Tat ist die Ordinate $h_y = \frac{c(2a^2-c^2)}{8A} > \frac{c^3}{8A} = e_y$, solange $a > c$, aber $h_y = \frac{c(2a^2-c^2)}{8A} < \frac{c^3}{8A} = e_y$, wenn $a < c$. Der Punkt H liegt also oben, der Punkt E unten, wenn $a > c$, bzw. H unten, E oben, wenn $a < c$, in Übereinstimmung mit Eulers Figuren 8 und 9 (Fig. 8a bis 9c) und den oben hergeleiteten Anordnungen *E-G-F-H* bzw. *H-F-G-E*.

Die beiden andern Punkte, Schwerpunkt F und Inkreismittelpunkt G, müssen ihrer Natur nach im Innern des Dreiecks ABC liegen. Keine Schwierigkeit bietet der Schwerpunkt F, nachdem seit Zif. 18 feststeht, daß er die Strecke EH drittelt: $FH = \frac{1}{3}EH$.

Zur Bestimmung der relativen Lage des Inkreismittelpunktes G auf der Euler-Geraden führt Euler einen virtuellen Punkt M ein, den Mittelpunkt der Strecke EH, der ein halbes Jahrhundert später als Mittelpunkt H' des sog. Feuerbachschen Kreises eine Rolle spielen sollte (Abb. 9, Seite 196). Die Ordinate m_y des Punktes M als Funktion von a und c auf Grund der Ordinatenformeln und der Distanzformeln (Zif. 27) ist:

$$OM = m_y = OE + \tfrac{1}{2}EH = \frac{a^2c}{8A} = \frac{a^2}{2\sqrt{4a^2-c^2}}\ .$$

Den Distanzformeln der Zif. 27 entnimmt man ferner, daß die (virtuellen) Strecken $EM = MH = \frac{1}{2}EH$ die Funktionsformel

$$EM(a,c) = MH(a,c) = \tfrac{1}{2}EH = \frac{c(a^2-c^2)}{8A} = \frac{1}{2}\frac{(a+c)(a-c)}{\sqrt{4a^2-c^2}} = \frac{(a+c)}{2}k$$

aufweisen müssen.

Die relative Lage des Punktes G ergibt sich schließlich durch Vergleichung der Strecken EG und $EM = MH = \frac{1}{2}EH$. Für die beiden Fälle $a > c$ und $a < c$ schätzt man ab, daß,

wenn $a > c$: $\quad EM(a,c) = \tfrac{1}{2}EH = \frac{1}{2}\frac{(a+c)(a-c)}{\sqrt{4a^2-c^2}} > \frac{1}{2}\frac{(2c)(a-c)}{\sqrt{4a^2-c^2}} = \frac{(c)(a-c)}{\sqrt{4a^2-c^2}} = ck = EG$,

wenn $a < c$: $\quad EM(a,c) = \tfrac{1}{2}EH = \frac{1}{2}\frac{(a+c)(a-c)}{\sqrt{4a^2-c^2}} < \frac{1}{2}\frac{(2c)(a-c)}{\sqrt{4a^2-c^2}} = \frac{(c)(a-c)}{\sqrt{4a^2-c^2}} = ck = EG$.

Konkret heißt dies: Die Strecke EG ist kleiner als die halbe Strecke EH, wenn die Schenkel a größer als die Basis c sind, hingegen größer als die halbe Strecke EH, wenn die Schenkel a kleiner als die Basis c sind: aus $a > c$ folgt $EG < \frac{1}{2}EH$ und aus $a < c$ folgt $EG > \frac{1}{2}EH$.

In ***beiden*** Fällen liegt der Inkreismittelpunkt *G* ***unterhalb*** der Mitte *M* der Strecke *EH*, wegen der Umkehr der Reihenfolge der „merkwürdigen Punkte" jedoch einmal weniger als $\frac{1}{2}EH$, im andern Fall mehr als $\frac{1}{2}EH$ vom Höhenpunkt *E* entfernt. Immer aber liegt *G* zwischen den Punkten *F* und *M*, das heißt auch nie zwischen den Punkten *F* und *H* [78].

Das Ergebmis $EG < \frac{1}{2}EH$, wenn $a > c$, bzw. $EG > \frac{1}{2}EH$, wenn $a < c$, wird bestätigt durch direkte Abschätzung der Strecken *EG* und *EH*. Mit Hilfe der Abkürzung $k = \frac{(a-c)}{\sqrt{4a^2-c^2}}$ erlauben die Distanzformeln (Zif. 27), die Proportion

$$P = \frac{EG}{EH} = \frac{ck}{(a+c)k} = \frac{c}{(a+c)}$$

aufzustellen. Entsprechend den relativen (positiven) Längen der Dreiecksseiten *a* und *c* ergibt *P*:

1. wenn $a > c$, $P = \frac{EG}{EH} = \frac{c}{(a+c)} < \frac{c}{2c} = \frac{1}{2}$, d.h. $EG < \frac{1}{2}EH$ bzw.

2. wenn $a < c$, $P = \frac{EG}{EH} = \frac{c}{(a+c)} > \frac{c}{2c} = \frac{1}{2}$, d.h. $EG > \frac{1}{2}EH$.

Beide Aussagen implizieren geometrisch, daß der Inkreismittelpunkt *G* im gleichschenkligen Dreieck auf der Euler-Geraden zwischen Höhenpunkt *E* und Umkreismittelpunkt *H* liegt. Denn nach Ausweis der Distanzformeln (Zif. 27) sind die Strecken *EG* und *EH* beide positiv, nach oben gerichtet, wenn $a > c$, hingegen negativ, nach unten gerichtet, wenn $a < c$. Das Ergebnis bestätigt die oben angegebenen Anordnungen der „merkwürdigen Punkte" *E*, *F*, *G*, *H* und die bei $\gamma = \angle C = 60°$ stattfindende Umkehr ihrer Reihenfolge.

Das Beispiel $a = 4\sqrt{7}$, $c = 6\sqrt{7}$ erfüllt die Bedingungen

$$2a = 8\sqrt{7} > 6\sqrt{7} = c \text{ (Dreiecksungleichung)}$$

und $$\tfrac{1}{2}c < a = \tfrac{2}{3}c = \frac{c}{1{,}5} < \frac{c}{\sqrt{2}} < c$$

und zählt somit zum Typus der Figur 9c. Die ***Ordinatenformeln*** (Zif. 27) liefern:

$$h_y = OH = -1 \qquad f_y = OF = +\tfrac{7}{3} \qquad g_y = OG = +3$$
$$m_y = OM = +4 \qquad c_y = OC = +7 \qquad e_y = OE = +9$$

Die Ergebnisse bestätigen die vorangehenden Überlegungen. Die Reihenfolge der Punkte von unten nach oben ist *H-O-F-G-M-C-E*. Die Ordinate des Umkreismittelpunkts *H* ist negativ: *H* liegt unterhalb der Basislinie (*x*-Achse) und außerhalb des Dreiecks *ABC*. Die Ordinate des Höhenpunkts *E* übertrifft die Höhe *OC* um zwei Einheiten. Der Höhenpunkt liegt oberhalb des Scheitelpunktes *C* und außerhalb des Dreiecks. Der Schwerpunkt *F* drittelt die Höhe *OC*. Der Inkreismittelpunkt *G* liegt unterhalb des Mittelpunkts *M*, aber oberhalb des Schwerpunkts *F*.

Die Distanzformeln (Zif. 27) erübrigen eine Illustration durch ein numerisches Beispiel, da sie schon in algebraischer Form die Teilung $FH : EF : EH = 1 : 2 : 3$ enthalten. Die Gleichungen $FH = \frac{1}{3}EH$ und $EF = \frac{2}{3}EH$ sind eigentlich Identitäten, gültig für beliebige Argumente *a* und *c*. Der Vollständigkeit halber seien – mit Zählung „von unten nach oben" – angeführt:

$$HE = 10 \qquad HF = \tfrac{1}{3}10 \qquad FE = \tfrac{2}{3}10 \ .$$

Der Schwerpunkt *F* drittelt also ebenfalls die Strecke *EH*. Die absoluten Längen der Strecken *EH* und *EG* sind $EH = 10$ und $EG = 6$, daher $\frac{1}{2}EH = 5$ und $EG = 6 > 5 = \frac{1}{2}EH$ wie zu erwarten, wenn $a < c$.

---

[78] Vgl. das Verhältnis $V = g_y/f_y$ der Ordinaten g_y von *G* und f_y von *F* Seite 149.

29. Wenn also die drei Punkte E, G und H so auf einer Geraden liegen, daß sich der Punkt G zwischen den Endpunkten E und H befindet, müssen die beiden Fälle $EG < \frac{1}{2}EH$ und $EG > \frac{1}{2}EH$ unterschieden werden. Im ersten Fall $EG < \frac{1}{2}EH$ ergibt sich folgende Lösung. Es seien (Fig. 8) $EH = 2d$ und $EG = d - e$, woraus folgt

$$a = b = \frac{(d+e)}{2e}\sqrt{(d+3e)(3d+e)}\ ,\ c = \frac{(d-e)}{2e}\sqrt{(d+3e)(3d+e)}\ ,\ \text{und}\ OE = \frac{(d-e)^2}{4e}.$$

Im zweiten Fall (Fig. 9) mit $EG > \frac{1}{2}EH$ lautet die Lösung wie folgt: Wenn $EH = 2d$ und $EG = d + e$, werden

$$a = b = \frac{(d-e)}{2e}\sqrt{(d-3e)(3d-e)}\ ,\ c = \frac{(d+e)}{2e}\sqrt{(d-3e)(3d-e)}\ ,\ \text{und}\ OE = \frac{(d+e)^2}{2e}\ ^{1}.$$

Dieser zweite Fall kann offensichtlich nicht statthaben, wenn d zwischen den Grenzen $3e$ und $\frac{1}{3}e$ liegt. Wenn nämlich $2a > c$ sein soll, muß notwendigerweise $d > 3e$ sein.

[1] Im Zähler des Abstandes OE muß die Ziffer 2 durch 4 ersetzt werden. Korrigiert durch HTL.

Betrachtung zu Ziffer 29.

Zur konstruktiven Ergänzung eines Dreiecks, von dem nur Höhenpunkt *E*, Schwerpunkt *F* und Inkreismittelpunkt *G* bekannt sein sollten, brachte Euler als Alternative noch den Umkreismittelpunkt *H* ins Spiel. Diese vier Punkte sollen durch ihre sechs wechselseitigen Entfernungen *EF*, *EG*, *EH*, *FG*, *FH*, *GH* voneinander gegeben sein: *nihil aliud praeter eorum mutuas distantias pro cognito assumatur* (Zif. 10). Durch algebraische Transformationen gelingt es Euler, die Längen der Seiten *a*, *b*, *c* des gesuchten Dreiecks als Funktionen von *EF*, *EG*, *EH*, *FG*, *FH*, *GH* zu berechnen, so daß das Dreieck mit Zirkel und Lineal konstruiert werden kann.

Da für die Konstruktion eines Dreiecks im allgemeinen nur drei Stücke als Vorgaben benötigt werden, stellt sich die Frage, ob je drei der sechs möglichen Entfernungen *EF*, *EG*, *EH*, *FG*, *FH*, *GH* vollkommen willkürlich vorgegeben werden dürfen oder ob die Vorgaben gewissen Einschränkungen unterworfen sind. Tatsächlich hat Eulers Analyse ergeben, daß eine restlos beliebige Wahl der relativen Distanzen nicht zulässig ist. Bereits die Zif. 18 hat gezeigt, daß, als wichtigste Einschränkungen, erstens die Punkte *E*, *F* und *H* eine Gerade bilden müssen und zweitens der Schwerpunkt *F* die Strecke *EH* im Verhältnis 2 : 1 teilen soll: $EF = \frac{2}{3}EH$, $FH = \frac{1}{3}EH$, $EH = EF + FH$ oder $FH : EF : EH = 1 : 2 : 3$. Die Strecken *EH*, *EF* und *FH* können also nur eine einzige Richtung einnehmen und müssen auf ein und derselben Trägergeraden – der ***Euler-Geraden*** – liegen.

Demgegenüber ist der Inkreismittelpunkt *G* vorerst frei. Er wird im allgemeinen Fall außerhalb der Euler-Geraden liegen. Indessen kann er auch ***auf*** der Euler-Geraden liegen: das zu konstruierende Dreieck *ABC* wird dann gleichschenklig sein. Dieser Sonderfall ist in den Ziff. 25 bis 28 behandelt worden und wird in der Zif. 29 weiter verfolgt.

Die Vorgabe der Punkte *E*, *F*, *G* und *H* unterliegt aber noch anderen Bedingungen. Aus dem Studium der Abstandsformeln der Zif. 27 geht hervor, daß im Falle des gleichschenkligen Dreiecks der Höhenpunkt *E* und der Umkreismittelpunkt *H* auf der Euler-Geraden die beiden Extreme bilden, während die beiden anderen, der Schwerpunkt *F* und der Inkreismittelpunkt *G* auf der Euler-Geraden zwischen ihnen liegen müssen.

Die Punkte *E* und *H* können auch außerhalb des Dreiecks *ABC* liegen, dann nämlich, wenn dieses stumpfwinklig ($\angle C > 90°$, Fig. 9c) ist. Immer innerhalb des Dreiecks liegen hingegen *F* und *G*. Die Dreiecksseiten *a*, *b*, *c*, sind Tangenten des Inkreises; dieser, als Punktmenge betrachtet und von seinen Tangenten umschlossen, liegt daher im Innern des Dreiecks, insbesondere auch sein Mittelpunkt *G*. Der Schwerpunkt ist der Schnittpunkt der Mittellinien; diese sind Ecktransversalen zu den Mittelpunkten der Gegenseiten, liegen in den inneren Winkelfeldern der Dreieckswinkel und können deshalb, unabhängig von der Konfiguration des Dreiecks, mit allen ihren Punkten nur innerhalb desselben liegen; insbesondere gilt dies von ihrem gemeinsamen Schnittpunkt *F*.

Die Ziffer 29 untersucht das Streckenverhältnis *EG* : *EH* und seine Auswirkungen auf die Konfiguration des Dreiecks. Zwei Abschätzungen in Zif. 28 haben ergeben, daß im gleichschenkligen Dreieck die Strecke *EG* – die Distanz Höhenpunkt-Inkreismittelpunkt – entweder kleiner oder größer als die Hälfte der Strecke *EH* ist, je nachdem, ob die Schenkel *a* größer oder kleiner als die Basis *c* sind. Die Fallunterscheidungen $a > c$ bzw. $a < c$ und $EG < \frac{1}{2}EH$ bzw. $EG > \frac{1}{2}EH$ sind folglich aequivalent: statt, wie in Zif. 28, die Fälle $a > c$ bzw. $a < c$ zu unterscheiden, werden in Zif. 29 die Fälle $EG < \frac{1}{2}EH$ und $EG > \frac{1}{2}EH$ unterschieden.

Die Frage, ob *EG* auch ***gleich*** der Hälfte der Strecke *EH* sein kann, ist zu bejahen. Sie führt aber auf den trivialen Fall des ***gleichseitigen*** Dreiecks zurück, in welchem *E*, *F*, *G* und *H* zusammenfallen, ihre wechselseitigen Abstände einschließlich deren Hälften also null sind. Insbesondere gilt $0 = EG = EH = \frac{1}{2}EH$. Denn, wird unter den Abstandsformeln der Zif. 27 mit Hilfe der Abkürzung *k* (Seite 144) die Gleichheit

$$EG = \frac{c(a-c)}{\sqrt{4a^2-c^2}} = ck = \tfrac{1}{2}EH = \tfrac{1}{2}\frac{(a+c)(a-c)}{\sqrt{4a^2-c^2}} = \tfrac{1}{2}(a+c)k \qquad \text{bzw.}$$

$$EG = \qquad = \tfrac{1}{2}EH = [c - \tfrac{1}{2}(a+c)]k = 0$$

postuliert, ist formal entweder $k = 0$, d.h. $a-c = 0$ bzw. $a = c$, oder, falls $k \neq 0$ angenommen werden darf, $c = \frac{1}{2}(a+c)$ bzw. $2c = c+c = a+c$ oder $c = a$. In beiden Fällen erscheint das charakteristische Merkmal des ***gleichseitigen*** Dreiecks, da bereits $b = a$.

In der Zif. 29 werden deshalb nur die beiden Fälle $EG < \frac{1}{2}EH$ und $EG > \frac{1}{2}EH$ untersucht. Indessen besteht die Zif. 29 im Original aus ganzen fünf Sätzen ohne genauere Begründungen, und sechs Formeln müssen genügen, um den Fall abzuhandeln. Eine tiefergreifende Analyse des Inhalts ist deshalb angezeigt.

Die formelhafte Darstellung der Fallunterscheidung $EG < \frac{1}{2}EH$ und $EG > \frac{1}{2}EH$ ist in zweifacher Hinsicht unpraktisch. Zunächst verwendet sie für die Bezeichnung von Strecken die Angabe der Anfangs- und Endpunkte in Gestalt von Digrammen aus Majuskeln, die für algebraische Rechnungen weniger geeignet sind [79]. Sodann sind die Formeln mit den Operatoren > und < bloße Abschätzungen; Rechnen mit „größer als“ und „kleiner als“ ist mühsam. Euler überwindet diese Unzulänglichkeiten auf folgende Weise durch eine geschickte Wahl von neuen Variablen.

Schon in der Zif. 5 ersetzt Euler die Bezeichnungen der Dreiecksseiten AB, BC, CA durch die Kleinbuchstaben c, a, b : $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Die Zuordnung in alphabetischer Folge nach dem Prinzip der zyklischen Vertauschung ist mnemotechnisch nützlich und erleichert allfällige Transkriptionen. Ab Zif. 11 wird für die Summen Σa und Σab sowie für das Produkt abc die alphabetische Kleinbuchstabenfolge p, q, r verwendet. In Zif. 21 kommt derselbe Grundsatz wie bei den Dreiecksseiten zur Anwendung: die Strecken GH, FH, FG, EF, EH und EG werden so durch Minuskeln wiedergegeben, daß den Digrammen GH, HF, FG die in alphabetischer Folge zugehörigen Kleinbuchstaben f, g, h zugeordnet werden und die Streckendefinitionen ebenfalls Buchstabentripel in zyklischer Vertauschung ergeben: $f = GH$, $g = FH = HF$, $h = FG$ [80].

Wegen der seit Zif. 18 feststehenden Streckenverhältnisse $FH : EF : EH = 1 : 2 : 3$ können die Strecken EF und EH ebenfalls durch g wiedergegeben werden: $EF = 2g$ und $EH = 3g$. Für die Strecke EG gilt dann die Abschätzung $EG > \frac{1}{2}EH = \frac{3}{2}g$ bzw. $EG < \frac{1}{2}EH = \frac{3}{2}g$. Der Zif: 18 entnimmt man, daß EG jedoch sogar ***genau*** durch die Längen f, g, h definiert werden kann, nämlich

$$EG = \sqrt{6g^2+3h^2-2f^2}$$ [81].

Trotz diesen Vereinfachungen bleiben in den Formeln $EG > \frac{1}{2}EH = \frac{3}{2}g$ und $EG < \frac{1}{2}EH = \frac{3}{2}g$ unliebsame Brüche und mit den Operatoren > und < (ungenaue) Abschätzungen bestehen. Euler überwindet diese Mängel auf elegante Weise, indem er die neuen Streckenvariablen d und e einführt.

Zunächst bewirkt die Umbennung der Strecke EH zu $EH = 2d$, daß die Hälfte der Strecke EH automatisch d ist: $\frac{1}{2}EH = \frac{1}{2}(2d) = d$. Dank einer (positiven) Korrekturstrecke e ist sodann die Distanz Höhenpunkt-Inkreismittelpunkt EG:

$$\begin{aligned} &\text{im Fall } a > c\text{:} \quad EG = d - e = \tfrac{1}{2}EH - e < \tfrac{1}{2}EH \\ &\text{im Fall } a < c\text{:} \quad EG = d + e = \tfrac{1}{2}EH + e > \tfrac{1}{2}EH\,. \end{aligned}$$

Die Operatoren > und < verschwinden und werden durch das Gleichheitszeichen = ersetzt.

Da die Strecke EG in den Distanzformeln der Zif. 27 enthalten ist, kann die Korrekturstrecke e sogar explizit berechnet werden. Das Ergebnis lautet formal:

$$\pm e = EG - d = ck - \tfrac{1}{2}(a+c)\,k = [c - \tfrac{1}{2}(a+c)]k = \tfrac{1}{2}(c-a)k = \tfrac{1}{2}\frac{(a-c)^2}{\sqrt{4a^2-c^2}}\ ,$$

so daß die Korrekturgröße e ebenfalls als Funktion der Dreiecksseiten a und c erscheint.

---

[79] Man überlege sich, wie die umfangreichen Formeln der Ziffern 5 bis 28 aussehen müßten, wenn dort statt der Minuskeln Digramme von Majuskeln verwendet worden wären.

[80] Aus der Definition $g = FH$ geht hervor, daß Euler sich mit den absoluten Längen der Strecken begnügt und vom Durchlaufsinn abstrahiert. Es gilt die Gleichheit $FH = HF$.

[81] Vgl. Seite 116.

Für die Rechnungen benutzt Euler die absoluten Längen der involvierten Strecken. Die Abbildung 3 beschreibt die Verhältnisse für den Fall $EG = d - e = \frac{1}{2}EH - e < \frac{1}{2}EH$ anschaulich. Der Punkt *M* bezeichnet die Mitte der Strecke *EH*.

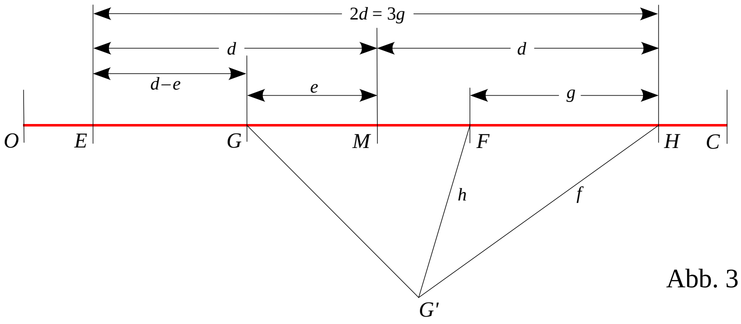


Abb. 3

Die Punkte *E*, *F*, *H* liegen auf der Euler-Geraden oder, anders gesagt, definieren diese. Der Inkreismittelpunkt *G'* liegt im allgemeinen außerhalb der Geraden *EH*. Als Vektoren betrachtet erlauben $h = G'F$ und $g = FH$ die Aufstellung der Vektorsumme $f = G'H = h + g$. Wird *G'* nach $G \in EH$ verschoben, tritt der Fall des gleichschenkligen Dreiecks ein. Die Strecken *f*, *g*, *h* und neu auch *d* und *e* liegen im gleichschenkligen Dreieck auf der Euler-Geraden: sie sind kollinear. Die vektorgeometrischen Streckenbeziehungen bleiben bestehen, werden aber rein numerisch und können durch die Operatoren *plus* und *minus* allein behandelt werden. Weiterhin gilt $f = h + g$ mit *G* an Stelle von *G'*. Der Punkt *O* wird Mittelpunkt der Basis und *C* Scheitelpunkt des Dreiecks *ABC*.

Zweck der Neubenennungen mit *d* und *e* ist es, die Strecken *f*, *g*, *h* durch *d* und *e* auszudrücken, so daß nur noch die letzteren beiden als Vorgaben für die Dreieckskonstruktion benötigt werden. Aus Abb. 3 liest man ab:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{f} &= \boldsymbol{GH} &&= \boldsymbol{h}+\boldsymbol{g} &&= \boldsymbol{d}+\boldsymbol{e}\\
\boldsymbol{g} &= \tfrac{1}{3}\boldsymbol{EH} &&= \tfrac{1}{3}2\boldsymbol{d} &&= \tfrac{2}{3}\boldsymbol{d}\\
\boldsymbol{h} &= \boldsymbol{GF} &&= \boldsymbol{e}+\boldsymbol{d}-\boldsymbol{g} &&= \boldsymbol{e}+\boldsymbol{d}-\tfrac{2}{3}\boldsymbol{d} = \boldsymbol{e}+\tfrac{1}{3}\boldsymbol{d} = \tfrac{1}{3}(3\boldsymbol{e}+\boldsymbol{d}) \quad \text{oder}\\
3\boldsymbol{h} &= && &&= \boldsymbol{d}+3\boldsymbol{e}\,.
\end{aligned}$$

Wie *f*, *g*, *h* sind auch *d* und *e* mit den Seitenlängen *a*, *b*, *c* des Dreiecks *ABC* funktionell verbunden. Die Abhängigkeiten werden durch die Abstandsformeln der Zif. 27 beschrieben, wo wegen $b = a$ nur noch die Argumente *a* und *c* auftreten. Die Variablen *d* und *e* beschreiben die Position des Punktes *G*, die bereits in den Abstandsformeln enthalten ist. Die Größen *d* und *e* lassen sich daher leicht als Funktionen der Argumente *a* und *c* angeben:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{d} &= \tfrac{1}{2}\boldsymbol{EH} &&= \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})\boldsymbol{k}\\
\boldsymbol{e} &= \tfrac{1}{2}\,\frac{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})^2}{\sqrt{4\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{c}^2}} &&= \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\boldsymbol{k}\,\cdot
\end{aligned}$$

Ziel des ganzen Prozederes ist es bekanntlich, aus den Vorgaben – jetzt also *d* und *e* – die Dreiecksseiten *a*, *b*, *c* zu berechnen. Im Falle des gleichschenkligen Dreiecks sind die Schenkel *a* und *b* gleich lang: $a = b$. Es genügt folglich, nur einen Schenkel *a* und die Basis *c* zu eruieren. Eulers Strategie war es, aus den Vorgaben eine kritische Gleichung dritten Grades, deren Lösungen die Dreiecksseiten *a*, *b*, *c* sein müssen, zu erarbeiten und danach die Gleichung aufzulösen.

Die kritische Gleichung dritten Grades für das gleichschenklige Dreieck ist in der Zif. 25 erarbeitet und in Zif. 26 aufgelöst worden. Die Lösungen lauteten:

$$a = b = \frac{f\sqrt{3h(4f-3h)}}{f-3h} \quad \text{und} \quad c = \frac{(2f-3h)\sqrt{3h(4f-3h)}}{f-3h}\ ^{82},$$

[82] Vgl. Seiten 20 und 138.

wo nun die beiden verbliebenen Variablen f und h durch die oben gefundenen Funktionen von d und e ersetzt werden müssen, um die Auswirkungen der Position des Punktes G bezüglich der Mitte M zwischen E und H sichtbar werden zu lassen.

Für den gemeinsamen Nenner $f - 3h$ sowie für den Faktor $2f-3h$ von c findet man

$$\begin{aligned} f-3h &= d + e-(d+3e) = -2e\,, \\ 2f-3h &= 2d+2e-d-3e = d-e\,. \end{aligned}$$

Der gemeinsame Radikand $(3h)(4f-3h)$ von a und c wird zu

$$(3h)(4f-3h) = (d+3e)(4d+4e-d-3e) = (d+3e)(3d+e)\,.$$

Die Seitenlängen a und c des gesuchten Dreiecks als Funktionen der Variablen bzw. Vorgaben d und e sind somit formal:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} = \frac{f\sqrt{3h(4f-3h)}}{f-3h} = \frac{\boldsymbol{(d+e)\sqrt{(d+3e)(3d+e)}}}{\boldsymbol{-2e}} \quad \text{und}$$

$$\boldsymbol{c} = \frac{(2f-3h)\sqrt{3h(4f-3h)}}{f-3h} = \frac{\boldsymbol{(d-e)\sqrt{(d+3e)(3d+e)}}}{\boldsymbol{-2e}}\,.$$

Euler betrachtet Strecken prinzipiell als absolute d.h. positive Größen: *latera trianguli positiva spectari possunt* (Zif. 31). Im Nenner von a, b, c setzt er daher $+2e$ statt $-2e$.

Zu Kontrollzwecken werden in Zif. 29 zusätzlich die Ordinaten $OE = e_y$ und $OH = h_y$ des Höhenpunktes E und des Umkreismittelpunktes H in Funktionen der neuen Variablen d und e transformiert.

Die Ordinate e_y wurde in Zif. 6 als eine Funktion der Dreiecksseiten a, b, c hergeleitet. Im gleichschenkligen Dreieck sind die beiden Schenkel gleich: $a = b$. Die Formel reduziert sich daher zu

$$e_y = OE = \frac{c^3}{8A} = \frac{c^3 4}{8c\sqrt{4a^2-c^2}} = \frac{c^2}{2\sqrt{4a^2-c^2}}\,.$$

Mit der Hilfsfunktion $\quad Y = (d+3e)(3d+e) = 3d^2+10de+3e^2$

wird der Radikand $4a^2 - c^2$ im Nenner mit den oben gefundenen Werten von a und c:

$$\begin{aligned} 4a^2-c^2 &= \frac{1}{4e^2}\,[4(d+e)^2Y-(d-e)^2Y] = \frac{1}{4e^2}\,[(4d^2+8de+4e^2-d^2+2de-e^2)Y] \\ &= \frac{1}{4e^2}\,(3d^2+10de+3e^2)Y = \frac{1}{4e^2}\,Y\,Y = \frac{1}{4e^2}\,Y^2 \quad \text{oder} \end{aligned}$$

$$2\sqrt{4a^2-c^2} = \frac{Y}{e}\,.$$

Demnach ist $\quad \boldsymbol{e_y = OE} = \dfrac{c^2}{2\sqrt{4a^2-c^2}} = \dfrac{(d-e)^2Y}{4e^2Y}\,e = \dfrac{\boldsymbol{(d-e)^2}}{\boldsymbol{4e}}\,.$

Die Ordinate h_y des Umkreismittelpunkts muß auf Grund der Definition $EH = 2d$ gleich $h_y = OH = OE + 2d$ sein. Sie ist in Zif. 9 hergeleitet worden und lautet für das gleichschenklige Dreieck formal:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{h_y = OH} &= \frac{2a^2-c^2}{2\sqrt{4a^2-c^2}} = \frac{e[2(d+e)^2Y-(d-e)^2Y]}{4e^2Y} = \frac{d^2+6de+e^2}{4e} \\ &= \frac{d^2-2de+e^2+8de}{4e} = \frac{\boldsymbol{(d-e)^2+8de}}{\boldsymbol{4e}} = \boldsymbol{OE+2d}\,. \end{aligned}$$

In spitzwinkligen Dreiecken ($\angle C < 60°$) ist offensichtlich die Distanz $OE < OH$, und der Umkreismittelpunkt H liegt somit oberhalb des Höhenpunktes E.

Die Abbildung 4 zeigt die Konfiguration bei Dreiecken mit Scheitelwinkeln größer als 60°.

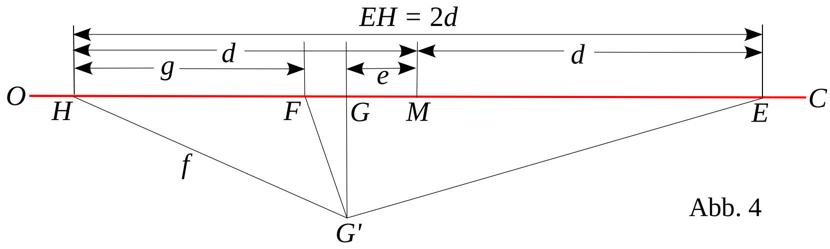


Abb. 4

Der Fall des gleichschenkligen Dreiecks tritt ein, wenn der Inkreismittelpunkt G' nach $G \in EH$ auf die Euler-Gerade HE verschoben wird. Für die Schenkel a und die Basis c gilt $a < c$, für die Distanz Höhenpunkt-Inkreismittelpunkt $EG > \frac{1}{2}EH$. Schenkel a und Basis c unterliegen der Dreiecksungleichung $2a > c$. Auch hier gilt $HF = \frac{1}{3}EH$, $FE = \frac{2}{3}EH$,

Die bisherigen Variablen f, g, h lassen sich als Funktionen der neuen Variablen d und e wiedergeben. Aus Abb. 4 liest man ab:

$$\begin{array}{rclcl} \boldsymbol{f} &=& HG &=& \boldsymbol{d-e} \\ \boldsymbol{g} &=& HF &=& \frac{1}{3}EH \quad = \boldsymbol{\tfrac{2}{3}d} \\ \boldsymbol{h} &=& FG &=& d-g-e = d-\frac{2}{3}d-e = \boldsymbol{\tfrac{1}{3}d-e} \qquad \text{oder} \\ \boldsymbol{3h} &=& & & \boldsymbol{d} - 3\boldsymbol{e} \end{array}$$

Zur Berechnung der Längen der Dreiecksseiten dienen wiederum die Lösungen der kritischen Gleichung gemäß Zif. 26:

$$a = b = \frac{f\sqrt{3h(4f-3h)}}{f-3h} \quad \text{und} \quad c = \frac{(2f-3h)\sqrt{3h(4f-3h)}}{f-3h} \; .$$

Die Transformation der Formeln der Dreiecksseiten a und c ergibt für den gemeinsamen Radikanden $3h(4f–3h)$, den gemeinsamen Nenner $f–3h$ und den Faktor $2f – 3h$:

$$\begin{array}{lcl} 3h(4f-3h) &=& (d-3e)(4d-4e-d+3e) = (d-3e)(3d-e), \\ f-3h &=& d-e-d+3e \qquad\qquad = 2e \\ 2f-3h &=& 2d-2e-d+3e \qquad\quad = d+e\,. \end{array}$$

In gleichschenkligen Dreiecken mit Scheitelwinkeln größer als 60° errechnen sich folglich die Schenkel a und die Basis c nach den Formeln der Zif. 26:

$$\boldsymbol{a = b = \frac{(d-e)\sqrt{(d-3e)(3d-e)}}{2e}}, \qquad \boldsymbol{c = \frac{(d+e)\sqrt{(d-3e)(3d-e)}}{2e}} \; .$$

Die Berechnungsformeln unterscheiden sich vom Fall $a > c$ bzw. $EG < \frac{1}{2}EH$ nur durch die Vorzeichen. Gleiches gilt für die Ordinaten $e_y = OE$ und $h_y = OH$ der beiden Extrempunkte E und H. Der gemeinsame Radikand R ist $R = (d - 3e)(3d - e) = 3d^2 - 10de + 3e^2$. Mit $2\sqrt{4a^2-c^2} = \frac{R}{e}$ ist e_y nach

Zif. 27: $\boldsymbol{e_y = OE} = \frac{c^3}{8A} = \frac{c^3}{2c\sqrt{4a^2-c^2}} = \frac{c^2}{2\sqrt{4a^2-c^2}} = \frac{(d+e)^2}{4e^2}\cdot\frac{Re}{R} = \boldsymbol{\frac{(d+e)^2}{4e}}$ [83] und

$$\boldsymbol{h_y = OH} = \frac{2a^2-c^2}{2\sqrt{4a^2-c^2}} = \frac{2(d-e)^2R-(d+e)^2R}{4e^2R} = \boldsymbol{\frac{(d+e)^2}{4e} - 2d} = OE - 2d < OE\,,$$

d.h. der Höhenpunkt E ist weiter von der Basis entfernt als der Umkreismittelpunkt H und liegt oberhalb letzterem.

[83] Der Nenner $2e$ im lateinischen Text der Speiserschen Edition ist offensichtlich ein Druckfehler. HTL

Wie Abb. 4 zeigt, ist die Reihenfolge der „merkwürdigen“ Punkte umgekehrt: *O-H-F-G-*(*M*)*-E-C* statt *O-E-G-(M)-F-H-C*.

Als Distanzen sind d und e positiv, ebenso wie a, b, c, f, g, h. Die Wurzel $\sqrt{(d+3e)(3d+e)}$ im Fall $a > c$ ist daher als reelle Zahl berechenbar. Im Fall $a < c$ treten in der Wurzel $\sqrt{(d-3e)(3d-e)}$ hingegen Differenzen auf, die negativ sein können. Es ist daher möglich, daß der Radikand negativ werden kann und die Wurzel somit imaginär ist.

Der Radikand $R = R(d) = (d-3e)(3d-e) =$ ist ein faktorisiertes Polynom 2. Grades in d, in ausgeschriebener Form: $R(d) = 3d^2 - 10ed + 3e^2$. Dessen Nullstellen sind offensichtlich $d = 3e$ und $d = \frac{1}{3}e$. Der Koeffizient des quadratischen Gliedes $3d^2$ ist $+3 > 0$, woraus folgt, daß nur für Werte $d > 3e$ und $d < \frac{1}{3}e$ der Radikand $R(d)$ positiv und die Wurzel $\sqrt{R(d)} = \sqrt{(d-3e)(3d-e)}$ reell ist.

Für Werte $\frac{1}{3}e < d < 3e$ ist $R(d)$ negativ. Sei etwa $d = 2e$, dann ist:

$$R(d) = (d-3e)(3d-e) = (2e-3e)(6e-e) = (-e)(5e) = -5e^2 < 0\ ,$$

und die Wurzel $\sqrt{R(d)}$ wird imaginär: $\sqrt{R(d)} = \sqrt{-5e^2} = e\,(\sqrt{5})\,i.$

Da endlich die gewünschten Größen a, ($b = a$) und c Dreiecksseiten sein sollen, müssen zusätzlich die Dreiecksungleichungen $a + b > c$ usw. gelten, im Falle des gleichschenkligen Dreiecks also $2a > c$ bzw. $2a - c > 0$, explizit

$$2a = \frac{2(d-e)}{2e}\sqrt{R} > \frac{(d+e)}{2e}\sqrt{R} = c.$$

Hieraus folgt:

$$2a - c = \frac{2(d-e)}{2e}\sqrt{R} - \frac{(d+e)}{2e}\sqrt{R} = \frac{1}{2e}\sqrt{R}\,[2(d-e) - (d+e)] = \frac{1}{2e}\sqrt{R}\,(d-3e),$$

was nur dann > 0 ist, wenn $d > 3e$: *Cum enim esse debet* $2a > c$, *necesse est sit* $d > 3e$ (Zif. 29).

Im Fall $a < c$ (Dreiecke mit Scheitelwinkeln $\angle C > 60°$) besteht für die vorgegebenen Größen d und e die Bedingung $d > 3e$. Sobald etwa die Strecke $2d$ – der Abstand zwischen Höhenpunkt E und Umkreismittelpunkt H – vorgegeben ist, darf die Strecke e – der Abstand zwischen Inkreismittelpunkt G und Mitte M der Strecke EH – nicht größer als der dritte Teil von $d = EM = MH$ sein.

30. Zurückgehend auf den allgemeinen Fall (Fig. 5) mag man sich fragen, ob eine kunstgerechtere Lösung erarbeitet werden kann, wenn der Punkt *F* weggelassen wird und nur die Punkte *E*, *G* und *H* in Betracht gezogen werden. Wir wollen also setzen [1]:

$$EG = e, \quad GH = f \quad \text{und} \quad EH = k$$

und es werden

$$FH = g = \frac{1}{3}k, \quad EF = \frac{2}{3}k \quad \text{und} \quad FG = h = \sqrt{\left(\frac{1}{3}ee + \frac{2}{3}ff - \frac{2}{9}kk\right)} \ .$$

Daraus erhalten wir

$$R = \frac{4f^4}{2ff + 2ee - kk}\ , \qquad Q = \frac{ff(kk - ff - 2ee)}{2ee + 2ff - kk}$$

und

$$P = \frac{27f^4}{2ee + 2ff - kk} + 2ee - 8ff - 3kk = \frac{4e^4 + 11f^4 + 3k^4 - 12eeff + 2ffkk - 8eekk}{2ee + 2ff - kk}\ ,$$

ferner

$$\frac{QQ}{R} = \frac{(kk - ff - 2ee)^2}{4(2ee + 2ff - kk)}\ ,$$

woraus folgt

$$p = \sqrt{P}\ , \quad q = \frac{2e^4 + f^4 + k^4 - 6eeff - 3eekk + 2ffkk}{2ee + 2ff - kk} \quad \text{und} \quad r = Q\sqrt{P}\ .$$

Die Wurzeln der Gleichung $z^3 - pzz + qz - r = 0$ liefern die Seiten des gesuchten Dreiecks. Mit $z = y\sqrt{P}$ geht diese Gleichung über in die folgende:

$$y^3 - yy + \frac{(2e^4 + f^4 + k^4 - 6eeff - 3eekk + 2ffkk)y - ff(kk - 2ee - ff)}{4e^4 + 11f^4 + 3k^4 - 12eeff - 8eekk + 2ffkk} = 0\ .$$

[1] Vgl. § 21. A.S.

Betrachtung zu Ziffer 30.

Der Hinweis auf Fig. 5 (Zif. 18, Seite 113) deutet an, daß ab Zif. 30 wieder von Dreiecken die Rede sein wird, deren Inkreismittelpunkt *G* nicht auf der Euler-Geraden liegt. Die Untersuchung verläßt den Sonderfall *gleichschenklige Dreiecke* und kehrt zum allgemeinen Fall zurück – Inkreismittelpunkt *G* außerhalb der Euler-Geraden.

Zur Konstruktion eines Dreiecks werden drei Stücke (Seiten, Winkel, Transversalen usw.) benötigt, im vorliegenden Problem drei der vier „merkwürdigen" Punkte. In den Ziff. 21 und 22 wurde die Aufgabe mit Hilfe der Punkte *F*, *G*, *H* gelöst, die duch ihre wechselseitigen Entfernungen $f = GH$, $g = FH$ und $h = FG$ definiert sein und das kritische Dreieck *FGH* bilden sollten. Aus den vorgegebenen Längen *f*, *g*, *h* wurden die zweidimensionalen Größen *P*, *Q*, *R* und aus diesen wiederum die Größen *p*, *q*, *r* berechnet. Diese, zugleich symmetrische Funktionen der gesuchten Dreiecksseiten *a*, *b*, *c*, bildeten die Koeffizienten einer Gleichung 3. Grades in *z* – der kritischen Gleichung – , deren Lösungen die Seitenlängen *a*, *b*, *c* des gesuchten Dreiecks ergeben.

Zu den vorgegebenen Stücken muß auf jeden Fall der Punkt *G* (Inkreismittelpunkt) gehören. Die beiden anderen, Schwerpunkt *F* und Umkreismittelpunkt *H*, bilden die Euler-Gerade. Dank den in Zif. 18 hergeleiteten Eigenschaften der Euler-Geraden befindet sich der vierte „merkwürdige" Punkt, der Höhenpunkt *E*, ebenfalls auf der Euler-Geraden, um den Abstand $2g$ von *F* entfernt, wenn *g* die Strecke $g = FH$ bedeutet, und zwar so, daß *F* zwischen *E* und *H* zu liegen kommt. In den Rechnungen bis Zif. 29 wurde daher der Höhenpunkt *E* immer stillschweigend mitgeführt. Würden als Vorgaben statt des Tripels (*F*,*G*,*H*) die Tripel (*E*,*G*,*F*) oder (*E*,*G*,*H*) gewählt, müßte dasselbe Dreieck *ABC* resultieren. Die Tripel (*F*,*G*,*H*) und (*E*,*G*,*F*) sind nicht grundsätzlich verschieden voneinander. Beide genügen dem Schema *Schwerpunkt-Inkreismittelpunkt-Endpunkt der Euler-Geraden* und können im Prinzip durch Vertauschung der Buchstaben *E* und *H* ineinander übergeführt werden. Das Tripel (*E*,*G*,*H*) hingegen benutzt beide Endpunkte, *E* und *H*.

Die Zif. 30 stellt daher die Frage: Was geschieht, wenn statt vom kritischen Dreieck *FGH* vom Dreieck *EGH* ausgegangen wird, in der Sprache der Algebra, wenn der Punkt *F* eliminiert wird? Kann so allenfalls sogar eine differenziertere Lösung – *solutio concinnior* – gefunden werden? Nach Ausweis des Wörterbuches bedeutet das Adjektiv *concinnus* „kunstgerecht, harmonisch", das zugehörige Verb *concinnare* „kunstgerecht zusammenfügen". Die Wendung *solutio concinnior* soll wohl andeuten, daß hinsichtlich allfälliger Bedingungen für die Vorgaben der Konstruktionsaufgabe mit Hilfe des kritischen Dreiecks *EGH* möglicherweise – *colligere licet* – feinere, vielleicht einfachere Aussagen gemacht werden können.

Um dieser Vermutung nachzugehen, führt Euler wiederum neue Variablen *e* und *k* ein (Abb. 5).

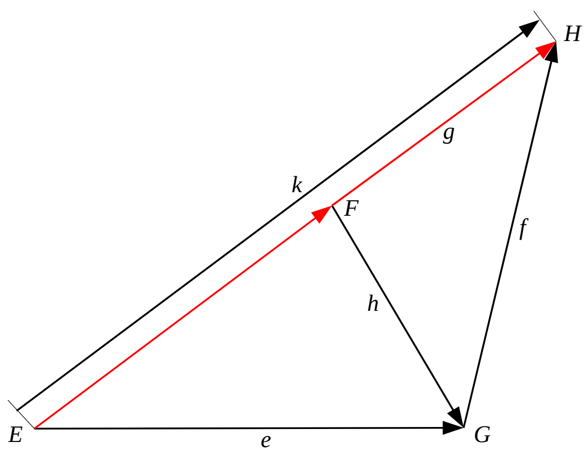


Abb. 5

Die Bezeichnungen f, g, h der Zif. 21 für die Distanzen GH, FH und FG bleiben erhalten. Neu kommen hinzu e für EG und k für EH (in Zif. 29 $EH = 2d$). Dank den Ergebnissen der Zif. 18 kann die Variable $g = FH$ durch k wiedergegeben werden: $g = FH = \frac{1}{3}k$, folgerichtig daher $EF = \frac{2}{3}k$. Um den Punkt F zu eliminieren, muß die Distanz $h = GF$ durch e, f und k ausgedrückt werden, wofür Euler die Formel $h = \sqrt{\frac{1}{3}e^2 + \frac{2}{3}f^2 - \frac{2}{9}k^2}$ findet, die Überprüfung ihrer Herleitung aber dem Leser überläßt.

Betrachtet man die Strecken e, f, h, EF und FH als Vektoren (Abb. 5):

$$e = EG, \quad f = GH, \quad g = FH, \quad h = FG, \quad k = EH\,,$$

entnimmt man der Skizze die vektorgeometrischen Beziehungen

$$h = g - f = \tfrac{1}{3}k - f \quad \text{und} \quad h = e - EF = e - \tfrac{2}{3}k, \quad \text{ferner } k = e + f$$

mit den Skalarprodukten (1): $h^2 = f^2 - \frac{2}{3}k\cdot f + \frac{1}{9}k^2$ und (2): $h^2 = e^2 - \frac{4}{3}k\cdot e + \frac{4}{9}k^2$. Bildet man die Summe 2×(1) + (2) zwecks Elimination der beiden Skalarprodukte $f\cdot k$ und $e\cdot k$, erhält man:

$$\begin{array}{rcl}
2h^2 & = & + 2f^2 - \tfrac{4}{3}k\cdot f + \tfrac{2}{9}k^2 \\
h^2 & = & e^2 - \tfrac{4}{3}e\cdot k + \tfrac{4}{9}k^2 \\
\hline
3h^2 & = & e^2 + 2f^2 - \tfrac{4}{3}(f+e)\cdot k + \tfrac{2}{3}k^2
\end{array}$$

oder
$$\boldsymbol{h^2} = \tfrac{1}{3}e^2 + \tfrac{2}{3}f^2 - \tfrac{4}{9}k^2 + \tfrac{2}{9}k^2 = \boldsymbol{\tfrac{1}{3}e^2 + \tfrac{2}{3}f^2 - \tfrac{2}{9}k^2}\,,$$

so daß als Argumente, d.h. Vorgaben, nur noch die Variablen e, f, k benötigt werden.

Zweck dieser vorbereitenden Operationen ist weiterhin die schließliche Berechnung der Längen a, b, c der Seiten des gesuchten Dreiecks. Diese erfolgt gemäß den Ziff. 21 und 22 in den folgenden drei Schritten:

1) Zuerst werden die Hilfsgrößen P, Q, R nach den Berechnungsformeln der Zif. 21 bestimmt.
2) Aus den Hilfsgrößen P, Q, R werden die Größen p, q, r hergeleitet.
3) Mit Hilfe der Größen p, q, r als Koeffizienten der Unbekannten z wird die kritische Gleichung 3. Grades $z^3 - pz^2 + qz - r = 0$ aufgestellt. Deren drei Lösungen sind die gesuchten Dreiecksseiten a, b, c.

In Zif. 21 erscheinen die drei Größen P, Q, R als Funktionen der vorgegebenen Distanzen $f = GH$, $g = FH$ und $h = FG$. Da jetzt statt f, g, h die neuen Variablen e, f, k vorgegeben werden, müßen P, Q, R mit Hilfe der oben festgelegten Definitionen von e, f, k aus Funktionen von f, g, h in Funktionen von e, f, k transformiert werden.

Die Funktionen P, Q, R von f, g, h sind Brüche mit dem gemeinsamen Nenner $N = 3g^2 + 6h^2 - 2f^2$ (Zif. 21). Mit Hilfe von $g^2 = \frac{1}{9}k^2$ und $h^2 = \frac{1}{3}e^2 + \frac{2}{3}f^2 - \frac{2}{9}k^2$ wird der Nenner N zu N':

$$\begin{array}{rcl}
3g^2 & = & 0e^2 + 0f^2 + \tfrac{1}{3}k^2 \\
6h^2 & = & 2e^2 + 4f^2 - \tfrac{4}{3}k^2 \\
-2f^2 & = & 0e^2 - 2f^2 + 0k^2 \\
\hline
\boldsymbol{N} & \boldsymbol{\to} & \boldsymbol{2e^2 + 2f^2 - k^2 \quad = \quad N'}
\end{array}$$

Ebenso werden die Hilfsgrößen P, Q, R zu:

$$\boldsymbol{R} \;=\; \frac{4f^4}{N} = \frac{4f^4}{N'} = \boldsymbol{\frac{4f^4}{2e^2+2f^2-k^2}}\,,$$

$$\boldsymbol{Q} \;=\; \frac{1}{N}\,3f^2(f^2-g^2-2h^2)$$

$$= \frac{1}{N'}\,3f^2\Big(f^2-\frac{1}{9}k^2-\frac{2}{3}e^2-\frac{4}{3}f^2+\frac{4}{9}k^2\Big) = \frac{1}{N'}\,3f^2\Big(\frac{1}{3}k^2-\frac{2}{3}e^2-\frac{1}{3}f^2\Big)$$

$$= \frac{1}{N'}\,f^2(k^2-f^2-2e^2) = \boldsymbol{\frac{f^2(k^2-f^2-2e^2)}{2e^2+2f^2-k^2}}\,,$$

$$\boldsymbol{P} \;=\; \frac{1}{N'}\Big[27f^4+N'\Big(-12f^2-15\frac{1}{9}k^2+2e^2+4f^2-\frac{12}{9}k^2\Big)\Big] = \frac{1}{N'}\big[27f^4+N'(2e^2-8f^2-3k^2)\big]$$

$$= \frac{1}{N'}\big[27f^4+(2e^2+2f^2-k^2)(2e^2-8f^2-3k^2)\big]$$

$$= \frac{1}{N'}\big[27f^4+4e^4-16e^2f^2-6e^2k^2+4e^2f^2-16f^4-6f^2k^2-2e^2k^2+8f^2k^2+3k^4\big]$$

$$= \frac{1}{N'}\big[4e^4+11f^4+3k^4-12e^2f^2+2f^2k^2-8e^2k^2\big] = \boldsymbol{\frac{4e^4+11f^4+3k^4-12e^2f^2+2f^2k^2-8e^2k^2}{2e^2+2f^2-k^2}}\,,$$

$$\boldsymbol{\frac{Q^2}{R}} = \frac{f^4(k^2-f^2-2e^2)^2}{N'\cdot N'}\,\frac{N'}{4f^4} \;=\; \frac{(k^2-f^2-2e^2)^2}{4N'} \;=\; \boldsymbol{\frac{(k^2-f^2-2e^2)^2}{4(2e^2+2f^2-k^2)}}\,.$$

Aus den Hilfsgrößen P, Q, R werden schließlich die Koeffizienten p, q, r der kritischen Gleichung bestimmt. Gemäß Zif. 22 sind $p = \sqrt{P}$, $q = \frac{1}{4}P + 2Q + \frac{Q^2}{R}$ und $r = Q\sqrt{P}$. Die kritische Gleichung lautet demnach, mit alternierenden Vorzeichen, $z^3 - pz^2 + qz - r = z^3 - \sqrt{P}\,z^2 + qz - Q\sqrt{P} = 0$. Um die Wurzel zu eliminieren, wählt Euler eine neue Unbekannte y: $z = y\sqrt{P}$. Die kritische Gleichung wird dann zu $P\sqrt{P}\,y^3 - \sqrt{P}\,Py^2 + q\sqrt{P}\,y - Q\sqrt{P} = 0$ bzw., wenn durch $(\sqrt{P})^3 = P\sqrt{P}$ dividiert wird, zu:

$$\boldsymbol{y^3 - y^2 + \frac{1}{P}\,[\,q\,y - Q\,] = 0}\,.$$

Die Parameter P und Q sind oben bereits als Funktionen von e, f, k dargestellt worden. Der Koeffizient q wird zu:

$$\boldsymbol{q} \;=\; \frac{1}{4}P + 2Q + \frac{Q^2}{R}$$

$$= \frac{1}{N'}\Big[e^4+\frac{11}{4}f^4+\frac{3}{4}k^4-3e^2f^2+\frac{2}{4}f^2k^2-2e^2k^2+2f^2(k^2-f^2-2e^2)+\frac{1}{4}(k^2-f^2-2e^2)^2\Big]$$

$$= \frac{1}{N'}\Big[e^4+\frac{11}{4}f^4+\frac{3}{4}k^4-3e^2f^2+\frac{2}{4}f^2k^2-2e^2k^2+2f^2k^2-2f^4-4e^2f^2+\frac{1}{4}k^4+\frac{1}{4}f^4+e^4$$
$$-\frac{2}{4}f^2k^2-e^2k^2+e^2f^2\Big]$$

$$= \frac{1}{N'}\big[2e^4+f^4+k^4-6e^2f^2-3e^2k^2+2f^2k^2\big] = \boldsymbol{\frac{2e^4+f^4+k^4-6e^2f^2-3e^2k^2+2f^2k^2}{2e^2+2f^2-k^2}}\,.$$

Die transformierte kritische Gleichung – ohne Koeffizienten mit $\sqrt{P}$ – lautet schließlich:

$$\boldsymbol{y^3 - y^2} + \boldsymbol{\frac{(2e^4+f^4+k^4-6e^2f^2-3e^2k^2+2f^2k^2)\,y-f^2(k^2-f^2-2e^2)}{4e^4+11f^4+3k^4-12e^2f^2-8e^2k^2+2f^2k^2}} = 0.$$

31. Hier aber bemerke ich, daß nicht nur die vorgegebenen Größen e, f, k so angenommen werden müssen, daß sie ein Dreieck bilden, sondern daß auch, weil die Seiten a, b, c des gesuchten Dreiecks als positiv betrachtet werden können, sowohl P wie Q und R positive Werte annehmen müssen. Es muß daher nicht nur das Quadrat $kk < 2ee + 2ff$, sondern auch $kk > 2ee + ff$ sein. Ferner ist, damit P positiv wird, notwendigerweise

$$3kk > 4ee + ff + 2\sqrt{e^4 + 11eeff - 8f^4}\ ^{1}\,.$$

Aus dieser Bedingung, verbunden mit den beiden andern, folgt, daß

$$ff > \frac{8}{19}ee \quad \text{und} \quad ff < \frac{11+\sqrt{153}}{16}ee \quad \text{oder} \quad ff < \frac{19}{13}ee\,,$$

sein müssen, andernfalls läßt die Aufgabe keine Lösung zu.

[1] Von hier an bis an das Ende dieses Paragraphen sind Eulers Behauptungen falsch. Aus den Bedingungen $Q > 0$ und $R > 0$ folgt

$$2e^2 + f^2 < k^2 < 2e^2 + 2f^2\,.$$

Wenn wir setzen

$$k^2 = 2e^2 + (1+\alpha)f^2, \quad 0 < \alpha < 1\,,$$

wird der Zähler der Größe P

$$f^2[16f^2 - 4e^2 + 4\alpha(e^2+2f^2) + 3\alpha^2 f^2]\,.$$

Es genügt, daß $4f^2 > e^2$, damit dieser Zähler positiv ist.

Der Zähler von P multipliziert mit 3 gibt

$$= (3k^2 - 4e^2 + f^2)^2 - 4e^4 - 28e^2f^2 + 32f^4\,.$$

Daraus folgt nach Ziehung der Quadratwurzel (denn $3k^2 > 4e^2 - f^2$ wegen $k^2 > 2e^2 + f^2$):

$$3k^2 > 4e^2 - f^2 + 2\sqrt{e^4 + 7e^2f^2 - 8f^4}\,,$$

welche Formel sich von der durch Euler oben angegebenen unterscheidet. Korrigiert durch A.S.

Betrachtung zu Ziffer 31.

Die transformierte kritische Gleichung dritten Grades in y der Zif. 30, deren Wurzeln bis auf den Faktor $\sqrt{P}$ die Seiten a, b, c des gesuchten Dreiecks darstellen sollen, wird vorerst nicht aufgelöst. Dagegen werden in Zif. 31 die zur Aufstellung der kritischen Gleichung benötigten Vorgaben e, f, k und die Zwischengrößen P, Q, R analysiert und Forderungen hinsichtlich der Größenbeziehungen unter ihnen hergeleitet.

Im allgemeinen Fall bilden Höhenpunkt E, Inkreismittelpunkt G und Umkreismittelpunkt H ein Dreieck. Die Punkte E und H definieren die Euler-Gerade EH. Der Punkt G liegt außerhalb derselben: $G \notin EH$. Die für die Konstruktion des Dreiecks ABC vorzugebenden Strecken $e = EG$, $f = GH$ und $k = EH$ müssen daher so aufeinander abgestimmt sein, daß die drei Dreiecksungleichungen $e + f > k$, $f + k > e$, $k + e > f$ gelten. Im Falle der Gleichheit $e + f = k$ liegt G auf der Euler-Geraden, $G \in EH$ (vgl. Abb. 5), und es tritt der Fall des gleichschenkligen Dreiecks ein, der in den Ziff. 25 bis 29 behandelt worden ist. Der Fall $e + f < k$ darf gar nicht statthaben, da sich sonst die zwei Strecken e und f nicht schneiden d.h. keinen Schnittpunkt, der als Mittelpunkt G des Umkreises in Frage kommen kann, definieren.

Die Seiten a, b, c des gesuchten Dreiecks ABC sind als bloße Längen ihrer Natur nach positive reelle Größen – *latera trianguli quaesiti a, b, c tanquam positiva spectari possunt* (Zif. 31). In den geometrischen Überlegungen treten sie nur in Gestalt ihrer (reellen) Beträge auf. Auch die Seiten e, f und k des kritischen Dreiecks EGH sind aus denselben Gründen positiv und reell.

Als Folge der Definitionen der Koeffizienten p, q, r der kritischen Gleichung als symmetrische Funktionen von a, b, c sind auch p, q, r positive und reelle Größen. Ebenso sind die Hilfsgrößen P, Q, R positiv und reell: sie sind in Zif. 19 als multiplikative Verknüpfungen der positiven reellen Größen p, q, r eingeführt worden und müssen daher positiv und reell sein. Insbesondere ist die Beziehung $P > 0$ zwingend, weil zur Aufstellung der kritischen Gleichung die reellen Größen $p = \sqrt{P}$ und $r = \mathrm{Q}\sqrt{P}$ benötigt werden.

In Zif. 21 erscheinen die Größen P, Q, R als Lösungen des Gleichungssystems (I)-(II)-(III) und sind in Gestalt der Dreipunkteformeln nunmehr Funktionen der Größen (Längen) f, g, h basierend auf dem kritischen Dreieck FGH. Die Zif. 30 geht vom kritischen Dreieck FGH zum aequivalenten kritischen Dreieck EGH (Abb. 5) über, so daß P, Q, R jetzt rationale Funktionen der Seiten e, f, k des Dreiecks EGH werden. Zwar sind e, f, k als Dreiecksseiten selber positiv, treten aber in den Zählern und Nennern der Funktionen P, Q, R auch in Differenzen d.h. mit Minuszeichen auf. Damit die Funktionen P, Q, R positiv sind, müssen daher die Argumente e, f, k bestimmte Forderungen hinsichtlich ihrer (relativen) Größen erfüllen. In der Zif. 31 werden die zwingend nötigen Größenbeziehungen unter den Strecken e, f, k bestimmt und damit den Vorgaben für die Konstruktionsaufgabe gewisse Einschränkungen auferlegt. Die wechselseitigen Abstände der „merkwürdigen Punkte“ E, G, H dürfen demnach nicht beliebig sein.

Die Brüche P, Q, R haben den gemeinsamen Nenner $2e^2 + 2f^2 - k^2 = N'$ (s. Zif. 30). Der Zähler des Bruches R, $4f^4$, ist als gerade Potenz einer positiven Zahl gleichsam „doppelt positiv“. Damit R selbst positiv ist, muß auch der Nenner N' positiv sein. Dies ist dann der Fall, wenn

$$(\alpha) \qquad k^2 < 2e^2 + 2f^2 \,.$$

Unter der Voraussetzung (α) sind auch die Nenner von P und Q positiv. Es müssen also auch deren Zähler Q' und P' positiv sein. Dem Zähler $Q' = f^2(k^2 - f^2 - 2e^2)$ entnimmt man die zweite Bedingung:

$$(\beta) \qquad k^2 > 2e^2 + f^2 \,.$$

Mit den Formeln (α) und (β) ist k eingegrenzt:

$$(\gamma) \qquad 2e^2 + f^2 < k^2 < 2e^2 + 2f^2 \,.$$

Damit auch der Bruch P positiv ist, muß sein Zähler P' positiv sein, denn der Nenner N' ist es wegen (α) bereits. Um festzustellen, wann P' positiv ist, hat Euler offenbar folgende Überlegungen angestellt, freilich ohne sie im einzelnen vorzuführen, so daß sein Ergebnis zunächst befremdlich anmutet.

Der Zähler $P' = 4e^4 + 11f^4 + 3k^4 - 12e^2f^2 + 2f^2k^2 - 8e^2k^2$ kann als Polynom P' 2. Grades in k^2 aufgefaßt werden, wenn die sechs Summanden von P' folgendermaßen gegliedert werden:

$$(\delta) \qquad \boldsymbol{P' = 3k^4 - (8e^2 - 2f^2)k^2 + (4e^4 + 11f^4 - 12e^2f^2)}$$

und gehorcht damit dem Schema

$$(\varepsilon) \qquad \boldsymbol{P' = Ax^2 + Bx + C}\,.$$

Das graphische Bild der Funktion (ε) ist eine Parabel mit senkrechter Achse, welche nach oben offen ist, wenn der Koeffizient $A > 0$, bzw. nach unten offen ist, wenn $A < 0$. Ein Polynom 2. Grades des Typs (ε) hat zwei Nullstellen x_1 und x_2: $P'(x_1) = 0$ und $P'(x_2) = 0$. Die Nullstellen x_1 und x_2 sind entweder beide reell oder aber konjugiert komplex. Sind x_1 und x_2 reell, schneidet die Abszissenachse die Parabel in zwei Punkten $(x_1|0)$ und $(x_2|0)$, und die Ordinaten aller Punkte, deren Abszisse $x > x_2$ bzw. $x < x_1$, sind positiv, wenn $A > 0$, bzw. negativ, wenn $A < 0$. Der Funktionswert P' in (ε) wird daher für alle Argumente rechts von x_2 bzw. links von x_1 positiv sein, wenn $A > 0$: die Bedingung $x > x_2$ garantiert, daß $P' > 0$.

Die Nullstellen von (ε) werden durch die „Mitternachtsformel" bestimmt:

$$(\zeta) \qquad Ax^2 + Bx + C = 0, \quad \text{wenn} \quad x_{1,2} = \frac{1}{2A}(-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC})\,.$$

Aus (δ) liest man ab:

$$x = k^2 \qquad A = 3\ (> 0) \qquad 4A = 12 \qquad B = -(8e^2 - 2f^2) \qquad C = 4e^4 + 11f^4 - 12e^2f^2$$

$$B^2 = 64e^4 - 32e^2f^2 + 4f^4 \qquad 4AC = 12C = 48e^4 + 132f^4 - 144e^2f^2$$

$$B^2 - 4AC = 16e^4 + 112e^2f^2 - 128f^4 = 16(e^4 - 8f^4 + 7e^2f^2)\,.$$

Damit wird insgesamt $P' > 0$, wenn $k^2 > \frac{1}{3}(4e^2 - f^2 + 2\sqrt{e^4 + 7e^2f^2 - 8f^4})$ oder

$$(\eta) \qquad \boldsymbol{P' > 0}, \quad \text{wenn} \quad \boldsymbol{3k^2 > (4e^2 - f^2)} + 2\sqrt{e^4 + 7e^2f^2 - 8f^4}\,.$$

Ein Vergleich mit dem Originaltext ergibt indes eine geringfügige Abweichung: Euler hat $+f^2$ statt $-f^2$ und im Radikanden den Term $11e^2f^2$ statt $7e^2f^2$.

Der Herausgeber A. Speiser bemerkt in einer Fußnote zu dieser Stelle „*Abhic ..... Euleri assertiones erroneae sunt*" und findet mit Hilfe eines anderen Ansatzes ebenfalls $-f^2$ und $7e^2f^2$ statt $11e^2f^2$ in

$$(\eta) \qquad 3k^2 > (4e^2 - f^2) + 2\sqrt{e^4 + 7e^2f^2 - 8f^4},$$

quae formula differt a formula Euleriana supra data. Anders als bei den bisher zwei reinen Setzfehlern ohne fernere Konsequenzen, scheint hier ein wirklicher Rechenfehler vorgefallen zu sein.

Der Irrtum bezüglich der Abschätzung von k beruht auf einem Vorzeichenfehler. Eulers Bedingung

$$(\vartheta) \qquad 3k^2 > 4e^2 + f^2 + 2\sqrt{e^4 + 11e^2f^2 - 8f^4}\,,$$

ohne irgendeinen Kommentar oder Hinweis, ist auf den ersten Blick befremdlich. Woher plötzlich eine Wurzel? Die Formel (ϑ) erinnert ihrer Struktur ($S + \sqrt{R}$) nach an die Mitternachtsformel (ζ) und berechtigt zur Vermutung, daß sie aus einem Prozedere zur Bestimmung der Nullstellen eines Polynoms 2. Grades des Typs (ε) hervorgegangen ist. Schreibt man (ϑ) zwecks Angleichung an (ζ) in etwas anderer Form und um einen Faktor 2 erweitert:

$$(\vartheta') \qquad k^2 > \frac{1}{2\cdot 3}\left[(8e^2 + 2f^2) + \sqrt{16e^4 + 176e^2f^2 - 128f^4}\right],$$

zeigt ein Vergleich mit (ζ), daß

$$A = 3, \qquad 4A = 12, \qquad -B = (8e^2 + 2f^2), \qquad \text{und} \qquad B^2 = 64e^4 + 32e^2f^2 + 4f^4 .$$

Demnach müßte der Radikand von (ϑ'):

$$16e^4 + 176e^2f^2 - 128f^4 = B^2 - 4AC = B^2 - 12C$$

sein, woraus man schließt, daß

$$C = \frac{1}{12}(64e^4 + 32e^2f^2 + 4f^4 - 16e^4 - 176e^2f^2 + 128f^4) = 4e^4 - 12e^2f^2 + 11f^4.$$

Bildet man mit den gefundenen Werten von A, B, C als Koeffizienten das zugehörige Polynom zweiten Grades in k^2, erhält man:

(ι) $$Ak^4 + Bk^2 + C = 3k^4 - (8e^2 + 2f^2)k^2 + (4e^4 - 12e^2f^2 + 11f^4) \text{ bzw. alphabetisch geordnet}$$
$$= \mathbf{4e^4 + 11f^4 + 3k^4 - 12e^2f^2 - 8e^2k^2 - 2f^2k^2},$$

bis auf das Vorzeichen des Terms $2f^2k^2$ identisch mit dem Zähler P' des Bruches P. Man darf also annehmen, daß Euler und seine Arbeitsgruppe ebenfalls vom Zähler P' ausgehen wollten, ihnen dabei aber ein Vorzeichenfehler unterlaufen ist. Im Polynom $P' = (\delta)$ ist der Koeffizient B der Variablen k^2 das „Residuum“ $(2f^2-8e^2) = -(8e^2-2f^2)$, wogegen im Eulerschen hypothetischen Polynom (ι) der Koeffizient B von k^2 gleich dem Binom $-(8e^2+2f^2)$ ist. In der Formel zur Berechnung der Nullstellen von P' wird gemäß Mitternachtsformel (ζ) indessen $-B = +(8e^2 - 2f^2)$ benötigt, während Eulers Formel (ϑ') unverändert $(8e^2 + 2f^2)$, zwar mit dem Operator $+ = (-)(-)$, aber mit $+2f^2$ statt $-2f^2$, enthält. An dieser Stelle muß die Verwechslung des Vorzeichens stattgefunden haben, was sich naturgemäß im Radikanden auf $B^2 = (8e^2 \pm 2f^2)^2$ und damit auf den Koeffizienten von e^2f^2 auswirken mußte.

Nimmt man an, Eulers Formel (ϑ), $3k^2 > 4e^2 + f^2 + 2\sqrt{e^4 + 11e^2f^2 - 8f^4}$, sei korrekt, kann man, mit Hilfe von (α) bzw. 3(α), folgendermaßen weiterschließen, um untere und obere Schranken von f in Abhängigkeit von e zu finden:

$$3(2e^2 + 2f^2) = 6e^2 + 6f^2 > 3k^2 > 4e^2 + f^2 + 2\sqrt{e^4 + 11e^2f^2 - 8f^4}$$

folgt $$(2e^2 + 5f^2)^2 = 4e^4 + 20e^2f^2 + 25f^4 > 4e^4 + 44e^2f^2 - 32f^4 \text{ bzw.}$$

$$57f^4 > 24e^2f^2 \quad \text{oder} \quad \boldsymbol{f^2 > \frac{8}{19}e^2} .$$

Die obere Schranke für f ergibt sich aus der Überlegung, daß der Radikand $R = -8f^4 + 11e^2f^2 + e^4$ in Eulers Bedingung (ϑ), als Polynom 2. Grades in f^2 aufgefaßt, nicht negativ sein darf. Da der Term $-8f^4$ einen negativen Koeffizienten aufweist, stellt R eine nach unten offene Parabel dar, deren Funktionswerte $R(f^2)$, sofern die Nullstellen reell sind, für alle Argumente f^2, die zwischen den Nullstellen f_1^2 und f_2^2 von R liegen, positiv sind. Das Argument f_2^2 bildet demnach eine obere Schranke, denn für alle Argumente $f^2 > f_2^2$ wird $R < 0$ sein. Gemäß Mitternachtsformel sind die Nullstellen von R

$$f_{1,2}^2 = \frac{1}{-2\cdot 8}\left(-11 \pm \sqrt{121+32}\right)e^2 = \frac{11 \mp \sqrt{153}}{16}e^2 ,$$

und alle Ordinaten $R(f^2)$, die den f^2–Werten $\frac{11-\sqrt{153}}{16} < f^2 < \frac{11+\sqrt{153}}{16}$ zugeordnet sind, sind positiv. Eulers Bedingung lautet also $\boldsymbol{f^2 < \frac{11+\sqrt{153}}{16}e^2}$.

Der Alternativwert $\frac{19}{13}e^2$ ist vermutlich als Näherungsbruch zu verstehen zwecks Rationalisierung des irrationalen Ausdrucks mit der Wurzel $\sqrt{153}$. Als Dezimalbrüche geschrieben sind nämlich

$$\frac{11+\sqrt{153}}{16} = 1{,}460582305 \quad \text{und} \quad \frac{19}{13} = 1{,}461538462 .$$

Ihre Differenz beträgt nur 0,000956157 < $\frac{1}{1000}$, d.h. der Näherungsbruch ist um weniger als ein Promille größer als der eigentliche geschätzte Wert (kleiner darf er ja nicht sein!).

Die „korrekten“ Abschätzungen müssen von der Formel

$$(\eta) \qquad 3k^2 > 4e^2 - f^2 + 2\sqrt{e^4 + 7e^2 f^2 - 8f^4}$$

ausgehen. Die von Euler für die durch den Vorzeichenfehler verfälschte Formel (ϑ) gemachten Überlegungen führen hier aber nicht zum Ziel. Denn es ist, wieder mit Hilfe von 3(α),

$$3(2e^2 + 2f^2) \;=\; 6e^2 + 6f^2 > 3k^2 > 4e^2 - f^2 + 2\sqrt{e^4 + 7e^2 f^2 - 8f^4}\ ,$$

woraus folgt $\qquad 2e^2 + 7f^2 \;>\; 2\sqrt{e^4 + 7e^2 f^2 - 8f^4} = \sqrt{4e^4 + 28e^2 f^2 - 32f^4}$ oder

$$(2e^2 + 7f^2)^2 = 4e^4 + 28e^2f^2 + 49f^4 \quad > \quad 4e^4 + 28e^2f^2 - 32f^4\ ,$$

was auf das triviale Ergebnis $81f^4 = (9f^2)^2 > 0$, zugleich $9f^2 > 0$, führt, das für jeden beliebigen (reellen) Wert von f richtig ist.

Einen brauchbareren Weg zur Bestimmung von Bedingungen für die Größenbeziehungen der Vorgaben e, f und k hat der Herausgeber A. Speiser in seiner Fußnote vorgeschlagen. Er benutzt als Hilfsfaktor α eine Zahl, die zwischen 0 und 1 variiert:

$$\mathbf{0 < \boldsymbol{\alpha} < 1}\ ,$$

mit der er die Einschachtelung von k^2: $\qquad 2e^2 + f^2 < k^2 < 2e^2 + 2f^2$
als Gleichheit schreiben kann: $\qquad 2e^2 + (1+\alpha)f^2 \;=\; k^2$.
Der untere Wert $\alpha = 0$ entspricht der unteren Schranke $2e^2 + f^2$, der obere Wert $\alpha = 1$ der oberen Schranke $2e^2 + 2f^2$. Das Quadrat $(k^2)^2 = k^4$ ist:

$$k^4 = 4e^4 + 4(1+\alpha)e^2f^2 + (1+\alpha)^2 f^4\ .$$

Mit den Ausdrücken für k^2 und k^4 kann k im Zähler P' der Hilfsgröße P (Formel (δ))

$$(\delta) \qquad P' = 3k^4 + (2f^2 - 8e^2)\,k^2 + (4e^4 - 12e^2f^2 + 11f^4)$$

eliminiert werden, so daß P' nur noch die Variablen e und f bzw. e^2 und f^2 enthält. Dadurch, daß P' positiv sein muß, kann $P'(e,f) > 0$ eine Größenbedingung zwischen e und f liefern, konkret in Gestalt einer Abhängigkeit $f = f(e)$.

Nach einer etwas umständlichen Rechnung wird P' zu:

$$\begin{array}{rcllll}
+\,3k^4 & = & +\;12e^4 & +\;\;12(1+\alpha)e^2f^2 & + & 3(1+\alpha)^2 f^4 \\
+\,(2f^2 - 8e^2)k^2 & = & -\;16e^4 & +\;\;4e^2f^2 & + & 2(1+\alpha)\,f^4 \\
 & & & -\;\;8(1+\alpha)e^2f^2 & & \\
+\;4e^4 & = & +\;\;4e^4 & & & \\
-\,12e^2f^2 & = & & -\;\;12e^2f^2 & & \\
+\,11f^4 & = & & & + & 11f^4 \\
\hline
\text{Summe}\quad P' & = & \multicolumn{4}{l}{0e^4 + 4[(1+\alpha) - 2]e^2f^2 + [(1+\alpha)(5+3\alpha) + 11]f^4 \quad \text{oder}} \\
\boldsymbol{P'} & = & \multicolumn{4}{l}{\boldsymbol{f^2[4(4f^2 - e^2) + 4\alpha(e^2 + 2f^2) + 3\alpha^2 f^2]}\ .}
\end{array}$$

Hier sind alle Terme positiv bis auf das Residuum $(4f^2 - e^2)$, das negativ sein und damit die Vorschrift $P' > 0$ gefährden könnte. Damit P' sicher positiv bleibt, muß man fordern, daß $(4f^2 - e^2) > 0$, woraus die einfache Bedingung $\quad 4f^2 > e^2 \quad$ oder $\quad \boldsymbol{f^2 > \frac{1}{4}e^2}$ bzw. $\boldsymbol{f > \frac{1}{2}e}$ resultiert.

Speiser benutzt die Formel (δ) noch zu einer weiteren Überlegung. Das Quadrat $(3k^2)^2$ ist $9k^4$, folglich $3k^2 = \sqrt{9k^4}$ Wird (δ) mit 3 multipliziert, enthält $3P'$ den Term $9k^4$:

$$3P' = 12e^4 + 33f^4 + 9k^4 - 36e^2f^2 + 6f^2k^2 - 24e^2k^2\ ,\ f^4 = (f^2)^2,\ k^4 = (k^2)^2\ ,$$

wo die Größen $e^4 = (e^2)^2$, $f^4 = (f^2)^2$, $k^4 = (k^2)^2$ und die ebenfalls vierdimensionalen Produkte der Quadrate, e^2f^2, e^2k^2 und f^2k^2, auftreten, die sich einer quadratischen Ergänzung unterziehen lassen. Setzt man versuchsweise

$$(3k^2 + \alpha e^2 + \beta f^2)^2 = 9k^4 + \alpha^2 e^4 + \beta^2 f^4 + 6\alpha e^2k^2 + 6\beta f^2k^2 + 2\alpha\beta e^2 f^2$$

und vergleicht man mit P', bieten sich wegen $6\alpha e^2k^2 \approx -24e^2k^2$ und $6\beta f^2k^2 \approx 6f^2k^2$ die Werte $\alpha = -4$ und $\beta = 1$ an. Setzen wir $A = (3k^2 - 4e^2 + f^2)$ und $A^2 - 3P' = B^2$, erhalten wir:

$$\begin{array}{rcl}
A^2 &=& (3k^2 - 4e^2 + f^2)^2 = +9k^4 + 16e^4 + f^4 - 24e^2k^2 + 6f^2k^2 - 8e^2f^2 \\
-3P' &=& \quad = -9k^4 - 12e^4 - 33f^4 + 24e^2k^2 - 6f^2k^2 + 36e^2f^2 \\
\hline
B^2 &=& \quad = 4e^4 - 32f^4 + 28e^2f^2
\end{array}$$

bzw. $$3P' = A^2 - B^2 = (3k^2 - 4e^2 + f^2)^2 - 4(e^4 + 7e^2f^2 - 8f^4)$$

$$= (3k^2 - 4e^2 + f^2)^2 - (2\sqrt{e^4 + 7e^2f^2 - 8f^4}\,)^2$$

Wegen $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$ folgt

$$(A + B)(A - B) =$$
$$[(3k^2 - 4e^2 + f^2) + 2\sqrt{e^4 + 7e^2f^2 - 8f^4}\,][(3k^2 - 4e^2 + f^2) - 2\sqrt{e^4 + 7e^2f^2 - 8f^4}\,] .$$

Der dreifache Zähler $3P'$, und das heißt auch der Zähler P' der Hilfsgröße P selbst, wird nur dann > 0 sein, wenn $(A - B) > 0$, d.h.

$$[(3k^2 - 4e^2 + f^2) - 2\sqrt{e^4 + 7e^2f^2 - 8f^4}\,] > 0$$

oder $$\boldsymbol{P' > 0, \quad \text{wenn} \quad 3k^2 > 4e^2 - f^2 + 2\sqrt{e^4 + 7e^2f^2 - 8f^4}}\ ,$$

was die oben auf andere Weise hergeleitete Formel (η) bestätigt, aber der Eulerschen Bedingung

$$(\vartheta) \qquad 3k^2 > 4e^2 + f^2 + 2\sqrt{e^4 + 11e^2f^2 - 8f^4}$$

widerspricht.

Aus den Ergebnissen der Zif. 31 geht hervor, daß die Vorgaben für die Konstruktionsaufgabe gewissen Einschränkungen unterworfen bleiben. Zunächst sind von den vier „merkwürdigen“ Punkten, Höhenpunkt *E*, Schwerpunkt *F*, Inkreismittelpunkt *G* und Umkreismittelpunkt *H*, neben *G* nur zwei andere nötig, die aber beliebig gewählt werden dürfen, da der jeweils fehlende dritte durch die beiden anderen automatisch bestimmt ist. Die Punkte *E*, *F*, *H* liegen auf der Euler-Geraden, und der Schwerpunkt *F* teilt die Distanz *EH* im Verhältnis 2 : 1, nämlich $EF : FH = 2 : 1$.

Beginnt man etwa mit der Distanz $e = GE$, so darf nach Eulers Folgerung – die A. Speiser als unrichtig entlarvt hat – $f = GH$ nur so groß sein, daß f^2 der Einschachtelung $\frac{8}{19}e^2 < f^2 < \frac{19}{13}e^2$ genügt. Nach Speiser muß f^2 lediglich größer als $\frac{1}{4}e^2$ sein. Die Distanz $k = EH$ ist dann auf jeden Fall der Einschachtelung $2e^2 + f^2 < k^2 < 2e^2 + 2f^2$ unterworfen. An diese Schranken halten sich die Beispiele der nachfolgenden Ziff. 32 und 34.

Beispiel

32. Sei $ee = ff$, dann werden

$$R = \frac{4f^4}{4ff-kk}\ ,\ Q = \frac{ff(kk-3ff)}{4ff-kk} \quad \text{und} \quad P = \frac{27f^4}{4ff-kk} - 6ff - 3kk \ = \frac{3(kk-ff)^2}{4ff-kk}$$

sowie $\dfrac{QQ}{R} = \dfrac{(kk-3ff)^2}{4(4ff-kk)}$ und folglich

$$p = \frac{(kk-ff)\sqrt{3}}{\sqrt{4ff-kk}}\ ,\ q = \frac{k^4-ffkk-3f^4}{4ff-kk}\ , \quad \text{und} \quad r = \frac{ff(kk-3ff)(kk-ff)\sqrt{3}}{(4ff-kk)\sqrt{4ff-kk}}\ .$$

Seien konkret $ee = ff = 2$ und $kk = 7$, dann werden

$$p = 5\sqrt{3}\ , \quad q = 23 \quad \text{und} \quad r = 10\sqrt{3}\ ,$$

und die Seiten des gesuchten Dreiecks werden die Wurzeln der folgenden kubischen Gleichung sein:

$$\boldsymbol{z^3 - 5zz\sqrt{3} + 23z - 10\sqrt{3} = 0}\ ,$$

die, wenn man $z = \dfrac{y}{\sqrt{3}}$ setzt, in die Gleichung

$$\boldsymbol{y^3 - 15yy + 69y - 90 = 0}$$

übergeht, deren eine Wurzel $y = 6$ ist, woraus sich die beiden anderen Wurzeln als

$$y = \frac{9+\sqrt{21}}{2} \quad \text{und} \quad y = \frac{9-\sqrt{21}}{2}\ ,$$

ergeben, so daß die Seiten des gesuchten Dreiecks sind:

$$\boldsymbol{a = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}\ ,\ b = \frac{3\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2}\ ,\ c = 2\sqrt{3}}\ .$$

<u>Betrachtung zu Ziffer 32</u>.

Das in Zif. 32 vorgerechnete Beispiel ist ein Spezialfall. Die Strecken e und f sollen gleich sein. Das *kritische Dreieck EGH* ist somit gleichschenklig – nicht das Zieldreieck *ABC*! Ferner werden die Distanzen numerisch so vorgeschrieben, daß der gemeinsame Nenner $4f^2 - k^2$ gerade gleich 1 wird. Die Arithmetik wird dadurch bedeutend vereinfacht; in den Formeln für P, Q, R treten keine Brüche auf.

Die Vorgaben $e^2 = f^2 = 2$ und $k^2 = 7$ erfüllen die Bedingungen der Zif. 31:

$2e^2 + f^2 = 4 + 2 = 6$ und $2e^2 + 2f^2 = 4 + 4 = 8$, womit $6 < k^2 = 7 < 8$ übereinstimmt. Ebenso ist

$$\frac{8}{19}e^2 = \frac{16}{19} < \frac{16}{18} = \frac{8}{9} < f^2 = 2 < 2\frac{12}{13} = \frac{38}{13} = \frac{19}{13}\cdot 2 = \frac{19}{13}e^2 .$$

Endlich müßte nach Eulers Folgerungen

$$3k^2 > 4e^2 + f^2 + 2\sqrt{e^4 + 11e^2 f^2 - 8f^4} = 8 + 2 + 2\sqrt{4 + 44 - 32} = 18 ,$$

was zutrifft, wenn $k^2 = 7$, denn $3k^2 = 21 > 18$.

Die Substitution von $z = \frac{y}{\sqrt{3}}$ in der kritischen Gleichung:

(α) $$\mathbf{0 = z^3 - 5\sqrt{3}\, z^2 + 23z - 10\sqrt{3}}$$
$$= \left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^3 - 5\sqrt{3}\left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2 + 23\frac{y}{\sqrt{3}} - 10\frac{3}{\sqrt{3}}$$
$$= \frac{1}{3\sqrt{3}}(y^3 - 15y^2 + 69y - 90)$$

reduziert die Rechnung auf die Lösung der einfacheren Hilfsgleichung ohne Wurzeln:

(β) $$\mathbf{y^3 - 15y^2 + 69y - 90 = 0} .$$

Alle bisher als Beispiele benutzten Gleichungen 3. Grades waren so einfach strukturiert, daß mindestens eine Lösung erraten werden konnte. Ist eine Lösung a einer Gleichung n-ten Grades in z bekannt, läßt sich das Gleichungspolynom durch den linearen Faktor $(z–a)$ ohne Rest dividieren. Der Quotient wird ein Polynom $(n-1)$ten Grades in z sein. Im Falle der kubischen Gleichungen ist der Quotient ein quadratisches Polynom, dessen Nullstellen mit Hilfe der Mitternachtsformel bestimmt werden können. Die Nullstellen des quadratischen Polynoms sind zugleich Lösungen der kubischen Gleichung.

Eine Folge dieser Divisibilität des Gleichungspolynoms ist die Tatsache, daß die Lösungen a, b, c einer kubischen Gleichung in den Koeffizienten der Unbekannten enthalten sind: die kubische Gleichung $z^3 - pz^2 + qz - r = 0$ habe die Lösungen a, b, c , dann sind deren Koeffizienten $p = a+b+c$, $q = ab+ac+bc$ sowie $r = abc$, die symmetrischen Primfunktionen erster bis dritter Dimension von a, b und c. Haben Gleichungen nur ganzzahlige Koeffizienten oder Koeffizienten in Gestalt algebraischer Ausdrücke, besteht eine gewisse Wahrscheinlichkeit, daß mindestens eine Lösung als algebraischer oder numerischer Faktor aus dem absoluten Glied $r = abc$ abgelesen werden kann. Eulers bisherige Beispielgleichungen haben nach diesem Schema gelöst werden können.

Die Gleichung (β) als

(β') $$y(y^2 - 15y + 69) = 90 = 2\cdot3\cdot3\cdot5 ,$$

geschrieben, läßt es als ziemlich plausibel erscheinen, daß wenigstens eine der Zahlen 2, 3, 5, 6 (= 2·3), 9 (= 3·3), 10 (= 2·5), 15 (= 3·5), 18 (2·3·3), 30 (= 2·3·5), 45 (= 3·3·5) und 90 als Lösungen in Frage kommen. Tatsächlich findet man durch sukzessives Einsetzen dieser Werte, daß $y = 6$ die Gleichung erfüllt:

(β'') $$y(y^2 - 15y + 69) = 6(36 - 90 + 69) = 6\cdot15 = 90 .$$

Die beiden anderen Lösungen müssen sich durch Abtrennung des Faktors (y–6) ergeben:

$$(\gamma) \qquad y^3 - 15y^2 + 69y - 90 = (y - 6)(y^2 - 9y + 15) = 0$$

Die Funktion (γ) ist offensichtlich gleich 0, wenn y = 6, aber auch, wenn der Faktor ($y^2 - 9y + 15$) = 0. Mit Hilfe der Mitternachtsformel findet man die konjugierten irrationalen Größen:

$$y = \frac{1}{2}(9 + \sqrt{81 - 4 \cdot 15}\,) = \frac{1}{2}(9 + \sqrt{21}\,) \quad \text{und} \quad y = \frac{1}{2}(9 - \sqrt{81 - 4 \cdot 15}\,) = \frac{1}{2}(9 - \sqrt{21}\,)\,,$$

für welche ($y^2 - 9y + 15$) verschwindet und auch (γ) = 0 ist.

Die Lösungen der kritischen Gleichung (α), und zugleich die Längen a, b, c der Seiten des gesuchten Dreiecks, sind, wegen $z = \frac{y}{\sqrt{3}}$:

$$\boldsymbol{z_1 = a = \frac{1}{2\sqrt{3}}(9 + \sqrt{21}\,) = \frac{1}{2}(3\sqrt{3} + \sqrt{7}\,)}$$

$$\boldsymbol{z_2 = b = \frac{1}{2\sqrt{3}}(9 - \sqrt{21}\,) = \frac{1}{2}(3\sqrt{3} - \sqrt{7}\,)}$$

$$\boldsymbol{z_3 = c = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}\,.}$$

Die auf diese Weise mit Hilfe algebraischer Verfahren gefundenen numerischen Werte für die Seitenlängen a, b, c gestatten es schließlich, das gesuchte Dreieck ABC mit Zirkel und Lineal zu konstruieren. Sie bestätigen zugleich die Regel, daß irrationale Lösungen in Paaren konjugierter irrationaler Zahlen auftreten.

33. Wird k etwas allgemeiner angenommen, die Bedingung $ee = ff$ aber noch beibehalten, ist, nach der Substitution $z = \frac{y}{\sqrt{3(4ff-kk)}}$, die folgende Gleichung zu lösen:

$$y^3 - 3(kk - ff)yy + 3(k^4 - ffkk - 3f^4)y - 9ff(kk - 3ff)(kk - ff) = 0\ ,$$

die zunächst durch $y = 3ff$ befriedigt wird. Die beiden übrigen Wurzeln gehen aus der Gleichung

$$yy - 3(kk - 2ff)y + 3(kk - 3ff)(kk - ff) = 0$$

hervor und sind:

$$y = \frac{3(kk-2ff) \pm k\sqrt{3(4ff-kk)}}{2}\ ,$$

so daß die Seiten des gesuchten Dreiecks

$$a = \frac{(kk-2ff)\sqrt{3}}{2\sqrt{4ff-kk}} + \frac{1}{2}k$$

$$b = \frac{(kk-2ff)\sqrt{3}}{2\sqrt{4ff-kk}} - \frac{1}{2}k$$

$$c = \frac{ff\sqrt{3}}{\sqrt{4ff-kk}}$$

sind.

<u>Betrachtung zu Ziffer 33</u>.

Der in Zif. 33 durchgerechnete Fall ist eine Verallgemeinerung des in Zif. 32 behandelten Falles. Im numerischen Beispiel der Zif. 32 war für k^2 der Wert $4f^2 - 1$ gewählt worden, so daß der gemeinsame Nenner $4f^2 - k^2$ der Hilfsgrößen P, Q und R wie auch die Nenner der Gleichungskoeffizienten p, q, r gleich 1 wurden und die Rechnungen ohne Brüche auskamen.

In Zif. 33 sind allgemeinere Annahmen – *generalius* – zulässig. Zwar wird die Bedingung $e^2 = f^2$ vorläufig noch beibehalten, aber k darf freier – *quomodocunque accipiatur* – gewählt werden. (Selbstverständlich bleiben die früher gefundenen Schranken zwingend, namentlich die Dreiecksungleichung $k < e + f$ bzw. $k < 2f$, wenn $e = f$.)

Die kritische Gleichung $z^3 - pz^2 + qz - r = 0$ wird gar nicht erst explizit angegeben. Die Koeffizienten p, q, r sind jetzt Brüche mit komplizierten Nennern, welche mit Hilfe der Substitution

$$(\alpha) \qquad z = \frac{y}{\sqrt{3(4f^2-k^2)}}$$

beseitigt werden, so daß eine nennerfreie Hilfsgleichung in y resultiert. Es werden, mit der Abkürzung $A = 4f^2 - k^2$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{z^3} &= && = \frac{\boldsymbol{y^3}}{\boldsymbol{3\sqrt{3}A\sqrt{A}}}\\
\boldsymbol{pz^2} &= \frac{(k^2-f^2)\sqrt{3}}{\sqrt{A}}\cdot\frac{y^2}{3A} && = \frac{\boldsymbol{3(k^2-f^2)}}{\boldsymbol{3\sqrt{3}A\sqrt{A}}}\boldsymbol{y^2}\\
\boldsymbol{qz} &= \frac{k^4-f^2k^2-3f^4}{A}\cdot\frac{y^2}{\sqrt{3}\sqrt{A}} && = \frac{\boldsymbol{3(k^4-f^2k^2-3f^4)}}{\boldsymbol{3\sqrt{3}A\sqrt{A}}}\boldsymbol{y}\\
\boldsymbol{r} &= \frac{f^2(k^2-3f^2)(k^2-f^2)\sqrt{3}}{A\sqrt{A}} && = \frac{\boldsymbol{9f^2(k^2-3f^2)(k^2-f^2)}}{\boldsymbol{3\sqrt{3}A\sqrt{A}}}\ ,
\end{aligned}$$

womit sich – mit alternierenden Vorzeichen – die Hilfsgleichung

$$(\beta) \qquad \boldsymbol{\frac{1}{3\sqrt{3}A\sqrt{A}}\,[y^3 - 3(k^2 - f^2)y^2 + 3(k^4 - f^2k^2 - 3f^4)y - 9f^2(k^2 - 3f^2)(k^2 - f^2)] = 0}$$

ergibt. Hier genügt es, das Polynom in den eckigen Klammern weiter zu verfolgen, denn der Faktor $\frac{1}{3\sqrt{3}A\sqrt{A}}$ ist endlich und kann wegdividiert werden. Wäre $A = 4f^2 - k^2 = 0$, würde dies heißen $4f^2 = k^2$ bzw. $k = 2f$, was der Dreiecksungleichung $k < 2f$, die ja eine Voraussetzung bildet, widerspräche. Damit (β) gleich null wird, muß daher der Ausdruck in den eckigen Klammern gleich null werden, m.a.W. es gilt, die Nullstellen des Polynoms 3. Grades in y zu bestimmen oder, wie man auch sagen kann, die Gleichung [.....] = 0 zu lösen.

Der absolute Term r (in Gleichung β' unterstrichen)

$$(\beta') \qquad y^3 - 3(k^2 - f^2)y^2 + 3(k^4 - f^2k^2 - 3f^4)y - \underline{9f^2(k^2 - 3f^2)(k^2 - f^2)} = 0$$

ist bereits in (teilweise algebraische) Faktoren zerlegt, die – allein oder in Kombinationen – als Lösungen von (β') in Frage kommen. In der Tat führt eine Prüfung mit $y = 3f^2$ bereits zum Ziel.

Das Gleichungspolynom (β) ist also durch $(y - 3f^2)$ ohne Rest divisibel. Man findet:

$$(\gamma) \qquad (y - 3f^2)[y^2 - 3(k^2 - 2f^2)y + 3(k^2 - 3f^2)(k^2 - f^2)] = 0\ .$$

Der Ausdruck (γ) ist sicher gleich null, wenn $y = 3f^2$, aber auch, wenn das Polynom in den eckigen Klammern den Wert 0 annimmt. Nach dem bewährten Schema der bisherigen Beispiele muß daher die quadratische Gleichung:

$$(\delta) \qquad y^2 - 3(k^2 - 2f^2)y + 3(k^2 - 3f^2)(k^2 - f^2) = 0$$

mit Hilfe der Mitternachtsformel gelöst werden.

Wendet man die Symbolik der Mitternachtsformel [84] auf die Gleichung (δ) an, hat man:

$$
\begin{array}{rcl}
A & = & 1 \qquad B \;=\; -3(k^2-2f^2) \qquad C \;=\; 3(k^2-3f^2)(k^2-f^2) \\
B^2 & = & 9(k^4-4f^2k^2+4f^4) \quad = \; 9k^4-36f^2k^2+36f^4 \\
4\,AC & = & 12(k^4-4f^2k^2+3f^4) \quad = \; 12k^4-48f^2k^2+36f^4) \\
B^2-4\,AC & = & 12f^2k^2-3k^4 \quad = \; 3k^2(4f^2-k^2)
\end{array}
$$

und gewinnt schließlich die neben $y = 3f^2$ zwei übrigen Nullstellen von (δ):

$$y = \frac{1}{2}\,[3(k^2-2f^2) \pm k\sqrt{3(4f^2-k^2)}\;] \,.$$

Zur Vereinfachung der Rechnung war anfangs die Substitution (α) eingeführt worden. Demnach müssen die gefundenen y-Werte noch durch $\sqrt{3(4f^2-k^2)}$ dividiert werden, um die drei Lösungen z der kritischen Gleichung und damit die Längen der Seiten des gesuchten Dreiecks zu finden:

$$\boldsymbol{z_1 = a = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}(k^2-2f^2)}{\sqrt{4f^2-k^2}} + \frac{1}{2}k}$$

$$\boldsymbol{z_2 = b = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}(k^2-2f^2)}{\sqrt{4f^2-k^2}} - \frac{1}{2}k}\,,$$

$$\boldsymbol{z_3 = c = \frac{\sqrt{3}\,f^2}{\sqrt{4f^2-k^2}}}\,.$$

[84] Vgl. Seiten 40 bis 42.

34. In den übrigen Fällen ist die Aufgabe nicht so leicht zu lösen, weil die kubische Gleichung keine Faktoren zuläßt. Dies möge mit einem Beispiel belegt werden. Sei *ee* = 3, *ff* = 2 und *kk* = 9. Die Seiten des Dreiecks sind dann die Wurzeln der folgenden kubischen Gleichung

$$\boldsymbol{z^3 - zz\sqrt{71} + 22z - 2\sqrt{71} = 0\,;}$$

um sie zu lösen, benötigt man einen Winkel α, dessen cosinus = $+\sqrt{\frac{71}{125}}$ [1] ist und der spitz sein wird. Ist α gefunden, werden die Seiten des Dreiecks:

$$a = \frac{1}{3}\sqrt{71} + \frac{2}{3}\sqrt{5}\cos\left(60° - \frac{1}{3}\alpha\right),$$

$$b = \frac{1}{3}\sqrt{71} + \frac{2}{3}\sqrt{5}\cos\left(60° + \frac{1}{3}\alpha\right),$$

und

$$c = \frac{1}{3}\sqrt{71} - \frac{2}{3}\sqrt{5}\cos\frac{1}{3}\alpha,$$

wo der Winkel α näherungsweise 41°5'30" [2] ist; und so kann das Problem immer durch Dreiteilung eines Winkels relativ einfach gelöst werden.

[1] Erstausgabe $\sqrt{\frac{71}{75}}$. Korrigiert durch A.S.

[2] Erstausgabe 11°32’13’’. Korrigiert durch A.S.

<u>Betrachtung zu Ziffer 34</u>.

Die Zif. 34, zugleich die letzte Nummer der Studie, eröffnet einen Ausblick auf allgemeine Fälle. Feste Bindungen zwischen den Vorgaben e, f und k, wie $e^2 = f^2$ oder $4f^2 - k^2 = 1$ in den zuletzt behandelten Beispielen, werden fallen gelassen. Wie das numerische Beispiel $e^2 = 3$, ($e = \sqrt{3}$), $f^2 = 2$, ($f = \sqrt{2}$), und $k^2 = 9$, ($k = 3$), zeigt, werden aber die in Zif. 31 gefundenen Begrenzungen eingehalten. So die Dreiecksungleichungen:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}+\boldsymbol{f} &= \sqrt{3} + \sqrt{2} > 1{,}7 + 1{,}4 = 3{,}1 > 3 &&= \boldsymbol{k}\\
\boldsymbol{f}+\boldsymbol{k} &= \sqrt{2} + 3 > 1{,}4 + 3 = 4{,}4 > 1{,}8 > \sqrt{\mathbf{3}} &&= \boldsymbol{e}\\
\boldsymbol{k}+\boldsymbol{e} &= 3 + \sqrt{3} > 3 + 1{,}7 = 4{,}7 > 1{,}5 > \sqrt{\mathbf{2}} &&= \boldsymbol{f}\,.
\end{aligned}$$

Ebenso gelten die Einschachtelung von k^2:

$$\mathbf{2}\boldsymbol{e}^{\mathbf{2}} + \boldsymbol{f}^{\mathbf{2}} = 6 + 2 = 8 < 9 = \boldsymbol{k}^{\mathbf{2}} < 10 = 6 + 4 = \mathbf{2}\boldsymbol{e}^{\mathbf{2}} + \mathbf{2}\boldsymbol{f}^{\mathbf{2}}$$

und, Eulers Folgerungen entsprechend, die Größenbeschränkungen:

$$\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{19}}\boldsymbol{e}^{\mathbf{2}} = \frac{24}{19} = 1\frac{5}{19} < 2 = \boldsymbol{f}^{\mathbf{2}} \quad \text{und} \quad \frac{\mathbf{19}}{\mathbf{13}}\boldsymbol{e}^{\mathbf{2}} = \frac{57}{13} = 4\frac{5}{13} > 2 = \boldsymbol{f}^{\mathbf{2}}\,.$$

Werden die Werte $e^2 = 3$, $f^2 = 2$ und $k^2 = 9$ in die Formeln der Größen P, Q, R und p, q, r in Zif. 30 eingesetzt, erhalten wir für die Gleichungskoeffizienten p, q, r die expliziten Werte

$$p = \sqrt{71}\,, \qquad q = 22, \qquad r = 2\sqrt{71}\,.$$

Die kritische Gleichung $z^3 - pz^2 + qz - r = 0$ des Problems wird folglich lauten :

$$(\alpha) \qquad \boldsymbol{z}^{\mathbf{3}} - \sqrt{\mathbf{71}}\,\boldsymbol{z}^{\mathbf{2}} + \mathbf{22}\boldsymbol{z} - \mathbf{2}\sqrt{\mathbf{71}} = \mathbf{0}\,.$$

Zwar sind die Nenner der Größen P, Q, R und p, q, r mit den Vorgaben 3, 2, 9 auch hier gleich 1; dennoch ist Gleichung (α) hinreichend allgemein, um zu belegen, daß das bisher bewährte Lösungsschema – Erraten einer Lösung z_1 aus den Faktoren des absoluten Gliedes r, Abtrennen eines Faktors $(z - z_1)$ vom Gleichungspolynom und Bestimmung der Nullstellen des verbleibenden quadratischen Quotienten mit Hilfe der Mitternachtsformel – im allgemeinen Fall nicht mehr zum Ziele führt. In der Tat besteht das absolute Glied $r = 2\sqrt{71}$ der Formel (α) aus den Primfaktoren 1, 2 und $\sqrt{71}$, aber weder 1 noch 2 noch $\sqrt{71}$ oder $2\sqrt{71}$ sind Lösungen von (α); wie man sich durch Einsetzen leicht überzeugt.

Die Lösung der kritischen Gleichung (α), die ja zwingend nötig ist, weil ihre Wurzeln z_1, z_2, z_3 die Längen der Seiten a, b, c des gesuchten Dreiecks sein müssen, muß daher auf andere Weise stattfinden. In seiner „Vollständigen Anleitung zur Algebra" behandelt Euler das oben in der Betrachtung zu den Ziff. 23 und 24 skizzierte Verfahren von dal Ferro und Tartaglia, benutzt es aber in Zif. 34 nicht. Seine Anspielung auf einen zur Lösung plötzlich nötigen Winkel α – *ad aequationem resolvendam quaeratur angulus* α – überrascht zunächst. Doch der Hinweis auf die Winkelfunktion *cosinus* und auf das Verfahren der Dreiteilung eines Winkels – *per anguli trisectionem* – macht deutlich, daß er die Gleichung mit Hilfe einer von Vieta vorgeschlagenen Methode zu lösen beabsichtigt. [85]

Sowohl dal Ferro-Tartaglia wie Vieta behandelten die reduzierte Gleichung 3. Grades, ihre sog. Standardform. Ihr fehlt gegenüber der vollständigen Gleichung das Glied mit z^2. Durch die Wahl einer geeigneten anderen Variablen y statt z ist es indessen immer möglich, von der vollständigen zur reduzierten Gleichung überzugehen, so daß keine Einbuße an Allgemeingültigkeit befürchtet werden muß.

---

[85] Vietas Vorschlag ist auf den Seiten 51 bis 53 skizziert worden.

Substituiert man in (α) z durch die neue Variable $y = z - \frac{\sqrt{71}}{3}$ bzw.setzt man $z = y + \frac{\sqrt{71}}{3}$, folgt:

$$\begin{aligned}
z^3 &= y^3 + 3y^2\frac{\sqrt{71}}{3} + 3y\frac{71}{9} + \frac{71\sqrt{71}}{27}\\
-\sqrt{71}\,z^2 &= -\sqrt{71}\,(y^2 + 2y\frac{\sqrt{71}}{3} + \frac{71}{9})\\
+22\,z &= 22y + 22\frac{\sqrt{71}}{3}\\
-2\sqrt{71} &= -2\sqrt{71}
\end{aligned}$$

insgesamt

$$\begin{aligned}
0 &= y^3 + (\sqrt{71} - \sqrt{71})y^2 + \tfrac{1}{3}(71 - 2\cdot 71 + 66)y\\
&\quad + \frac{\sqrt{71}}{27}(71 - 3\cdot 71 + 9\cdot 22 - 27\cdot 2),
\end{aligned}$$

und die vergleichsweise einfache reduzierte Gleichung lautet

(β) $$\boldsymbol{y^3 - \frac{5}{3}y + \frac{2}{27}\sqrt{71} = 0},$$

wo das Glied mit y^2 fehlt.

Aus den Additionstheoremen der Winkelfunktionen *sinus* und *cosinus* gewinnt man leicht die trigonometrische Identität

(γ) $$\mathbf{4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha - \cos 3\alpha = 0}.$$

Mit der später zu bestimmenden Hilfsgröße a und Multiplikation von (γ) mit $2a^3$ wird aus (γ) der Ausdruck

$$2a^3(4\cos^3\alpha) - 2a^3(3\cos\alpha) - 2a^3(\cos 3\alpha) = 0$$

oder die Identität

(δ) $$8a^3\cos^3\alpha - 3a^2(2a\cos\alpha) - 2a^3(\cos 3\alpha) = (2a\cos\alpha)^3 - 3a^2(2a\cos\alpha) - 2a^3(\cos 3\alpha) = 0\,.$$

Die Identität (δ) mit dem linearen Term $2a\cos\alpha$ und demselben Term in der 3. Potenz $(2a\cos\alpha)^3$ ist formal eine reduzierte Gleichung 3. Grades in $2a\cos\alpha$ gleicher Struktur wie die Bedingungsgleichung (β):

(δ) $$\mathbf{(2a\cos\alpha)^3 - 3a^2(2a\cos\alpha) - 2a^3(\cos 3\alpha) = 0}$$

(β) $$\boldsymbol{y^3 \quad - \frac{5}{3} \quad y \quad + \frac{2}{27}\sqrt{71} \quad = 0},$$

woraus sich die Gleichheiten $y = 2a\cos\alpha$, $3a^2 = \frac{5}{3}$ und $2a^3(\cos 3\alpha) = -\frac{2}{27}\sqrt{71}$ ablesen lassen. Die zweite Gleichung liefert $a^2 = \frac{5}{9}$ oder $a = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$ und $a^3 = \pm\frac{5\sqrt{5}}{27}$ und, zusammen mit der dritten Gleichung $2a^3(\cos 3\alpha) = -\frac{2}{27}\sqrt{71}$ oder $\cos 3\alpha = -\frac{2}{27}\sqrt{71}\cdot\frac{1}{2a^3}$, schließlich:

$$\cos 3\alpha = -\frac{2}{27}\sqrt{71}\cdot\frac{1}{2a^3} = \mp\frac{2}{27}\sqrt{71}\cdot\frac{27}{2\cdot 5\sqrt{5}} = \mp\frac{\sqrt{71}}{5\sqrt{5}} = \mp\sqrt{\frac{71}{125}} = \mp 0{,}753657747$$

und $\angle 3\alpha =$ 1) 138°9082245 = 180° – 41°0917755 (Dezimalgrad)
2) 221°0917755 = 180° + 41°0917755
3) 41°0917755.

(Euler schreibt statt 3α bloß α und konsequenterweise für den dritten Teil des Winkels $\frac{1}{3}\alpha$.) Für den einfachen Winkel $\alpha = \frac{1}{3}(3\alpha)$ erhält man somit die drei Werte:

$\alpha_1 = 60° - 13°6972585 = 46°3027415$, $\alpha_2 = 60° + 13°6972585 = 73°6972585$, $\alpha_3 = 13°6972585$.

Zwei Fußnoten des Herausgebers entnimmt man, daß in der Erstausgabe zwei Rechenfehler vorgefallen sind. Demnach hätte der *cosinus* des Hilfswinkels 3α den Wert $\sqrt{\frac{71}{75}}$ statt, wie oben vorgerechnet, $\sqrt{\frac{71}{125}}$ annehmen sollen. Augenscheinlich wurde im Schritt $\mp\frac{\sqrt{71}}{5\sqrt{5}} = \mp\sqrt{\frac{71}{125}}$ die Zahl 15 statt 25 unter die Wurzel gesetzt, was durch einen Übertragungsfehler im Manuskript erklärbar ist (Ziffer 1 statt 2 gelesen). Wäre $\cos 3\alpha = \sqrt{\frac{71}{75}}$, müßte $3\alpha = 13°21'09''$ sein. Der (bereits falsche) Winkel 11°32'13'' ist daher auch noch falsch abgelesen worden, denn $\cos 13°21'09'' = 0{,}972967968$ und $\cos 11°32'13'' = 0.979795948$, wo unter 10 Ziffern nur gerade 3 verschieden sind.

Die Lösungen y der reduzierten Gleichung (β) sind gemäß der Substitution $y = 2a\cos\alpha$ und mit Berücksichtigung der Vorzeichen von $a = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$:

$$y_1 = 2(+\tfrac{\sqrt{5}}{3})\cos 46°3027415 = +1{,}029855122$$
$$y_2 = 2(+\tfrac{\sqrt{5}}{3})\cos 73°6972585 = +0{,}418461687$$
$$y_3 = 2(-\tfrac{\sqrt{5}}{3})\cos 13°6972585 = -1{,}448316809\ .$$

Auf Grund der zur Erzeugung der reduzierten Gleichung benötigten Substitution $z = y + \frac{1}{3}\sqrt{71}$ werden schließlich die Lösungen z der kritischen Gleichung (α), $z^3 - \sqrt{71}\,z^2 + 22z - 2\sqrt{71} = 0$, und damit die Seiten a, b, c des gesuchten Dreiecks, zu:

$$z_1 = \boldsymbol{a} = \tfrac{1}{3}\sqrt{71} + \tfrac{2}{3}\sqrt{5}\cos 46°3027415 = 2{,}808716591 + 1{,}029855122 = \mathbf{3{,}838571713}$$
$$z_2 = \boldsymbol{b} = \tfrac{1}{3}\sqrt{71} + \tfrac{2}{3}\sqrt{5}\cos 73°6972585 = 2{,}808716591 + 0{,}418461687 = \mathbf{3{,}227178278}$$
$$z_3 = \boldsymbol{c} = \tfrac{1}{3}\sqrt{71} - \tfrac{2}{3}\sqrt{5}\cos 13°6972585 = 2{,}808716591 - 1{,}448316809 = \mathbf{1{,}360399782}$$

Die Verfahren mit trigonometrischen Identitäten wie das prosthaphäretische Rechnen und die Lösungsmethoden Vietas und Girards erfordern den Gebrauch von Funktionstafeln, in gedruckter Form oder elektronisch gespeichert, im vorliegenden Beispiel eine *cosinus*-Tafel. Die Ergebnisse sind daher nur Näherungen – *proxime* – innerhalb der Genauigkeitsgrenzen der Tafeln. Indessen dürfte es ein seltener Zufall sein, daß allgemeine Vorgaben auf ganzzahlige oder auch nur rationale Lösungen führen, so daß die trigonometrisch gefundenen Ergebnisse nicht ungenauer zu sein brauchen als die nach der Methode dal Ferro-Tartaglia mit ihren ineinandergeschachtelten Wurzeln. [86]

Im Beispiel der Zif. 34 skizziert Euler nur den Lösungsweg und begnügt sich mit der Angabe von Lösungsformeln. Die erreichbare Genauigkeit ist indessen trotz der Zwischenschaltung einer *cosinus*-Tafel erstaunlich. Die gefundenen numerischen Werte a, b, c sollen Lösungen der kritischen Gleichung (α) sein:

$$\begin{array}{rcr@{\qquad}rcr@{\qquad}rcr}
a^3 & = & +56{,}55994465 & +b^3 & = & +33{,}61002790 & +c^3 & = & +2{,}51767496 \\
-\sqrt{71}a^2 & = & -124{,}15622279 & -\sqrt{71}\,b^2 & = & -87{,}75565047 & -\sqrt{71}c^2 & = & -15{,}59417062 \\
+22\,a & = & +84{,}44857769 & +22\,b & = & +70{,}99792212 & +22\,c & = & +29{,}92879520 \\
-2\sqrt{71} & = & -16{,}85229955 & -2\sqrt{71} & = & -16{,}85229955 & -2\sqrt{71} & = & -16{,}85229955 \\
\hline
0 & = & 0{,}00000000 & 0 & = & 0{,}00000000 & 0 & = & -\ 0{,}00000001
\end{array}$$

[86] Vgl. Betrachtungen zu den Ziff. 23 und 24.

Links der Gleichheitszeichen steht der Sollwert 0 der Formel, rechts der berechnete Wert, wenn für *z* die nach der Vietaschen Methode auf dem Umweg über eine *cosinus*-Tafel berechneten Werte von *a*, *b* oder *c* eingesetzt werden. Wegen der Notwendigkeit der Rundung auf eine bestimmte Anzahl Stellen der *cosinus*-Werte können die berechneten Werte nicht vollständig genau sein. Das Ergebnis läßt sich aber sehen und stellt namentlich Vietas trigonometrischer Formel ein ausgezeichnetes Zeugnis aus: bis zu sieben teilweise sogar acht Dezimalstellen bleiben die Abweichungen unsichtbar.

In Zif. 11 sind die Koeffizienten p, q, r der kritischen Gleichung als symmetrische Funktionen der Dreiecksseiten a, b, c, die ja zugleich Lösungen der kritischen Gleichung sind, eingeführt worden. Mit den oben berechneten Werten sollten $p = \Sigma a$ im gewählten Beispiel $\sqrt{71}$, $q = \Sigma ab = 22$ und $r = abc = 2\sqrt{71}$ ergeben:

a	$= 3{,}838571713$	ab	$= 12{,}38775525$	abc	$= 16{,}85229954$
b	$= 3{,}227178278$	ac	$= 5{,}221992122$		
c	$= 1{,}360399782$	bc	$= 4{,}390248545$		
Σa	$= 8{,}426149773$	Σab	$= 21{,}999995917$	r	$= 16{,}85229954$
$\sqrt{71}$	$= 8{,}426149773$	22	$= 22$	$2\sqrt{71}$	$= 16{,}85229955$

Die trigonometrisch berechneten Werte von a, b, c erzielen also auch hier sehr gute Übereinstimmungen.

Der erste Teil der Studie ging von den Dreiecksseiten a, b, c aus und stellte in Zif. 18 Formeln auf, welche die Distanzen $e = GE$, $f = GH$ und $k = EH$ als Funktionen der Abkürzungen und zugleich symmetrischen Funktionen $p = \Sigma a$, $q = \Sigma ab$ und $r = abc$, mittelbar also als Funktionen von a, b, c, beschreiben. Die Zif. 30 folgerte daraus umgekehrt, wie die symmetrischen Funktionen p, q, r als Funktionen von e, f, k beschrieben werden müssen. Die Dreiecksseiten a, b, c ergaben sich dann zwingend als Lösungen einer kubischen Gleichung mit den Koeffizienten p, q, r: $z^3 - pz^2 + qz - r = 0$.

Nachdem im Beispiel der Zif. 34 die Seiten a, b, c auf Grund der Vorgaben $e^2 = 3$, $f^2 = 2$ und $k^2 = 9$ berechnet worden sind, können die Größen a, b, c und ihre Zusammenfassungen $p = \Sigma a$, $q = \Sigma ab$ und $r = abc$ als Ausgangsgrößen benutzt werden, um mit den Formeln der Zif. 18 die Distanzen e, f, k zu berechnen. Als Resultate müssen dann die Werte $e^2 = 3$, $f^2 = 2$ und $k^2 = 9$ resultieren.

Da die Rechnungen gezeigt haben, daß bis auf veschwindend kleine Rundungsdifferenzen die symmetrischen Funktionen $p = \Sigma a$, $q = \Sigma ab$ und $r = abc$ die numerischen Werte $p = \sqrt{71}$, $q = 22$ und $r = 2\sqrt{71}$, annehmen, dürfen letztere verwendet werden. Für den Dreiecksinhalt A möge die Formel (2e) der Zif. 11 verwendet werden:

$$16A^2 = -p^4 + 4p^2q - 8pr = -71^2 + 4\cdot 71\cdot 22 - 8\sqrt{71}\,2\sqrt{71} = 71(-71 + 88 - 16) = 71\,.$$

Aus Zif. 18 folgt:

$$\boldsymbol{e^2} = GE^2 = \frac{r^2}{4A^2} - p^2 + 3q - \frac{4r}{p} = \frac{4\cdot 71\cdot 4}{71} - 71 + 3\cdot 22 - \frac{4\cdot 2\sqrt{71}}{\sqrt{71}} = 16 - 71 + 66 - 8 = \mathbf{3}\,,$$

$$\boldsymbol{f^2} = GH^2 = \frac{r^2}{16A^2} - \frac{r}{p} = \frac{4\cdot 71}{71} - \frac{2\sqrt{71}}{\sqrt{71}} = 4 - 2 = \mathbf{2}\,,$$

$$\boldsymbol{k^2} = EH^2 = \frac{9r^2}{16A^2} - p^2 + 2q = \frac{9\cdot 4\cdot 71}{71} - 71 + 2\cdot 22 = 36 - 71 + 44 = \mathbf{9}\,.$$

Die Rechnungen bestätigen nicht nur Eulers Analyse, sondern auch die Zuverlässigkeit von Vietas *cosinus*-Formel und ebenso die Berechtigung von Speisers Korrektur $\cos 3\alpha = \sqrt{\frac{71}{125}}$ statt $\sqrt{\frac{71}{75}}$.

Das Verfahren nach Vieta (und Girard) beansprucht, auf beliebige Dreiecke, nicht nur gleichschenklige, anwendbar zu sein. Es müßte demnach auch Eulers erstes Beispiel in den Ziff. 23 und 24 bewältigen können. Die kubische Testgleichung in Zif. 24 war so konzipiert worden, daß ihr Lösungstripel $(a,b,c) = (5,6,7)$ sein mußte und diente der Verifikation der Gültigkeit der rechnerischen Zusammenhänge zwischen den vorgegebenen Strecken *FG*, *FH*, *GH* und den Lösungen *a*, *b*, *c*.

Die Testgleichung in Zif. 24 lautet

$$z^3 - 18z^2 + 107z - 210 = 0\,. \qquad (\alpha')$$

Sie wird in Zif. 24 nicht formal gelöst; es wird nur kurz angetönt, die Lösungen seien augenscheinlich 5, 6 und 7: *radices manisfesto sunt* 5, 6, 7. Aus dem Zusammenhang darf man annnehmen, daß die Lösungen als Faktoren des absoluten Terms erkannt worden sind, denn in der Tat ist $210 = 5\cdot6\cdot7$.

Zur Auflösung mit Hilfe des trigonometrischen Verfahrens nach Vieta muß die Gleichung (α') in die reduzierte Standardform [87] übergeführt werden, wofür mit Hilfe der Substitution $z = y + 6$

$$y^3 - y = 0 \qquad (\alpha'')$$

gefunden worden ist, eine kubische Gleichung ohne quadratischen Term. Ein Vergleich mit Vietas Ansatz

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{(2a\cos\alpha)^3} & \mathbf{-\ 3a^2(2a\cos\alpha)} & \mathbf{-} & \mathbf{2a^3(\cos 3\alpha)} & = & \mathbf{0} \\ \mathbf{y^3} & - \quad \mathbf{y} & + & \mathbf{0} & = & \mathbf{0} \end{array}$$

liefert die Beziehungen

$$3a^2 = 1 \quad \text{bzw.} \quad a = \frac{\pm1}{\sqrt{3}} \quad \text{und} \quad 2a^3 = \frac{\pm2}{3\sqrt{3}}$$

$$y = 2a\cos\alpha = \frac{\pm2}{\sqrt{3}}\cos\alpha$$

$$2a^3(\cos 3\alpha) = \frac{\pm2}{3\sqrt{3}}(\cos 3\alpha) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \cos 3\alpha = 0.$$

Benutzt man die positiven Werte, folgt aus $\cos 3\alpha = 0$ für den Winkel $3\alpha = 90°$ und, wegen der Periodizität 360° der Funktion cosinus, $3\alpha = 90° + 1\cdot360° = 450°$ und $3\alpha = 90° + 2\cdot360° = 810°$. Zur Berechnung der Lösungen *y* von (α'') wird der einfache Winkel α bzw. dessen cosinus benötigt: $y = 2/\sqrt{3}\,\cos\alpha$. Die dritten Teile der drei Werte von 3α sind 30°, 150°, 270° und deren cosinus Werte nach ihrer Größe geordnet: $\cos150° = -\cos30° = -\sqrt{3}/2$, $\cos270° = 0$ und $\cos30° = \sqrt{3}/2$. (Höhere Multipel von 360° bewirken nur noch Winkel α aequivalent 30°, 150°, 270°.)

Demnach sind die drei Lösungen der reduzierten Gleichung (α''):

$$y_1 = -\frac{2}{\sqrt{3}}\cos30° = -\frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{\sqrt{3}}{2} = -1\,,$$

$$y_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos270° = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot 0 = 0\,,$$

$$y_3 = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos30° = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{\sqrt{3}}{2} = 1\,,$$

und die Lösungen der kritischen Gleichung (α') wegen der Substitution $z = y + 6$:

$$\mathbf{z_1} = y_1 + 6 = -1 + 6 = \mathbf{5},\quad \mathbf{z_2} = y_2 + 6 = 0 + 6 = \mathbf{6},\quad \mathbf{z_3} = y_3 + 6 = 1 + 6 = \mathbf{7}$$

in Übereinstimmung mit den Ergebnissen der Ziffer 24. Mit den negativen Werten für *a* resultieren dieselben Werte für die Lösungen *y* und *z*.

Trigonometrie und Algebra sind verschiedene Teilgebiete der Mathematik. Die Trigonometrie wurde ursprünglich für Zwecke der Dreiecksberechnung entwickelt und ist ein unentbehrliches Werkzeug u.a. für das Vermessungswesen und die Astronomie. Es ist bemerkenswert, daß trigonometrische Beziehungen auch auf algebraische Probleme angewandt werden können und cosinus-Tafeln, wie die Beispiele zeigen, numerische Lösungen erbringen, im letzten Falle nicht nur angenäherte, sondern sogar genaue.

---

[87] Vgl. Seite 134.

Die Euler-Gerade synthetisch-geometrisch betrachtet.

Das Phänomen ***Euler-Gerade*** ist in der vorliegenden Studie im Zusammenhang einer Dreieckskonstruktionsaufgabe untersucht worden. Es soll das zugehörige Dreieck *ABC* konstruiert werden, wenn dessen Höhenschnittpunkt *E*, Schwerpunkt *F* und Inkreismittelpunkt *G* durch ihre wechselseitigen Entfernungen voneinander vorgegeben sind.

Euler behandelt die Aufgabe analytisch-geometrisch. Er führt ein Koordinatensystem ein und berechnet die Koordinaten der „merkwürdigen Punkte" *E, F, G* sowie des Umkreismittelpunktes *H*. Es zeigt sich, daß die Koordinaten aller vier Punkte als Funktionen der Dreiecksseiten *a*, *b*, *c* allein dargestellt werden können und daß überdies die Koordinaten der Punkte *E, F* und *H* proportional sind. Die Strecken *EF, FH* und *EH* sind daher nicht nur parallel, sondern liegen sogar auf derselben Trägergeraden, und zwar so, daß der Schwerpunkt *F* als innerer Teilpunkt die Strecke *EH* im Verhältnis 2 : 1 teilt: *EF* : *FH* = 2 : 1.

Eulers analytisch-geometrischer Ansatz erforderte die Herleitung und Umformung einer Vielzahl zwar elementarer, aber dennoch komplizierter algebraischer Formeln, deren Niederschrift sich manchmal über mehrere Zeilen erstrecken konnte. Seine anspruchsvollen Rechnungen gipfelten in der Aufstellung und Lösung einer „kritischen Gleichung" dritten Grades mit einer Unbekannten *z*, deren drei Lösungen z_1, z_2, z_3 gleich den Längen der Seiten *a*, *b*, *c* des gesuchten Dreiecks *ABC* sind. Die dabei gleichsam selbsttätig sich ergebende Kollinearität der Punkte *E, F, H* erweckt so den Eindruck, eine bloß zufällig entdeckte Eigenschaft des Dreiecks zu sein.

Verzichtet man indessen auf die Konstruktionsaufgabe und betrachtet man die Punkte *E, F, H* für sich allein im Lichte der synthetischen Geometrie Euklids, ist die Herleitung der Kollinearität der Punkte *E, F, H* verblüffend einfach. Sie setzt nicht mehr als die Kenntnis einer Handvoll elementarer Sätze aus den Anfangsgründen der Geometrie der ebenen Dreiecke voraus. Im Prinzip genügen die Thesen zur Ähnlichkeit von Figuren und die Tatsache, daß der Schwerpunkt eines Dreiecks die Schwerlinien drittelt. *Calculi taediosissimi et inextricabiles* brauchen nicht befürchtet zu werden. Man ist beinahe versucht von einer Selbstverständlichkeit zu sprechen.

Synthetische Herleitung der Kollinearität EFH.

Für die nachfolgenden Überlegungen und die Abbildungen 6, 7a und 7b gelten folgende Bezeichnungen und Abkürzungen:

1. Die Dreieckswinkel (Eckwinkel des Dreiecks *ABC*) sind:

$$\angle A = \alpha \qquad \angle B = \beta \qquad \angle C = \gamma$$

2. Für jeden Winkel α soll gelten:

$$\alpha' = 90° - \alpha \qquad \alpha'' = 180° - \alpha$$

Um eine bessere Übersicht zu gewährleisten, wird der Sachverhalt auf die zwei Abbildungen 6 und 7 (7a und 7b) aufgeteilt. Grunddreieck und Diskussionsobjekt sei ein stumpfwinkliges Dreieck *ABC* (Winkel $\beta > 90°$), da dann Umkreismittelpunkt *H* und Höhenpunkt *E* außerhalb des Dreiecks liegen und dadurch die Distanz *EH* vergleichsweise groß ist. In spitzwinkligen Dreiecken liegen die kritischen Punkte *E*, *F*, *G*, *H* im Innern des Dreiecks meist nahe beieinander, und der Betrachter hat oft Mühe, sie auseinander zu halten. Man verifiziert jedoch leicht, daß die selben Überlegungen *mutatis mutandis* auch auf spitzwinklige Dreiecke zutreffen.

In der Abb. 6 ist der Punkt *H* Umkreismittelpunkt, der Punkt *E* Höhenpunkt des Dreiecks *ABC*. (In jedem Dreieck lassen sich die Punkte *H* und *E* leicht konstruieren.) Die Punkte *S* und *T* sind die Mitten der Dreiecksseiten *AB* und *BC*. Die Winkel bei *S* und *T*, $\angle HSB$ und $\angle HTC$, sind folglich rechte. Ebenso bilden die Höhe *AE* und die Seite *CB* einen rechten Winkel bei *M*, die Höhe *CE* mit der Seite *AB* einen rechten Winkel bei *P*. Weil *S* und *T* Seitenmittelpunkte sind, sind die Geraden *AC* und *ST* parallel, und die Strecke *AC* ist $AC = 2ST$ (oder $ST = \frac{1}{2}AC$).

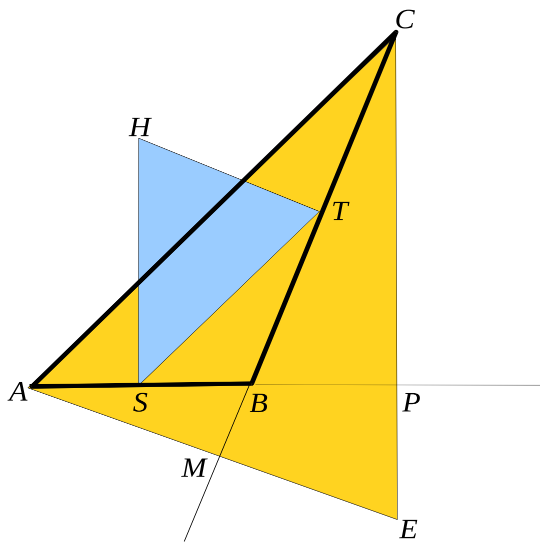


Abb. 6

In den Dreiecken *STH* (blau) und *AEC* (gelb) sind die Winkel:

$$\begin{array}{ccccc} \angle HST & = & \alpha' & = & \angle ECA \\ \angle STH & = & \gamma' & = & \angle CAE \\ \angle THS & = & \beta'' & = & \angle AEC \end{array}$$

Die Dreiecke *AEC* und *THS* sind daher ähnlich, und wegen $AC = 2ST$ sind alle Seiten von *AEC* doppelt so lang wie die homologen Seiten von *THS*. Insbesondere ist $EC = 2SH$.

In der Abb. 7a werden zunächst Umkreismittelpunkt *H* und Höhenpunkt *E* durch eine Gerade miteinander verbunden, hierauf wird eine Schwerlinie von *C* nach *S* gezogen. Die Schwerlinie *CS* (blau) schneidet die Gerade *EH* (rot) im Punkte *F.* Die Mittelsenkrechte *SH* steht senkrecht auf der Dreiecksseite *AB*, ebenso die Höhe *EC*.

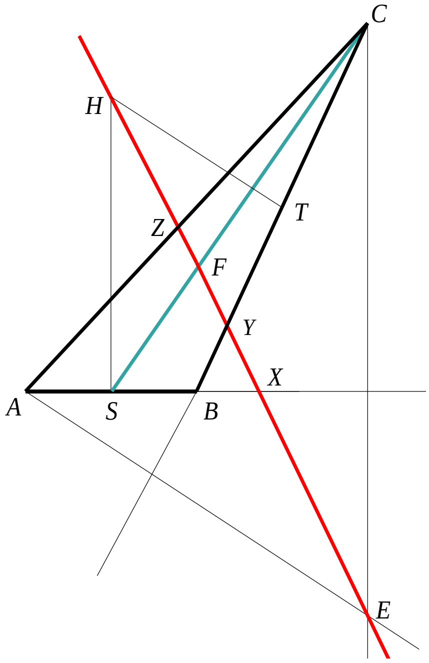


Abb. 7a

Die Geraden *SH* und *EC* sind parallel. Als Wechselwinkel an Parallelen sind die Winkel $\angle FHS$ und $\angle FEC$ gleich groß. Als Scheitelwinkel sind auch die Winkel $\angle SFH$ und $\angle CFE$ gleich. Die Dreiecke *SFH* und *CFE* sind folglich ähnlich (vgl. Abb. 7b). Bereits bekannt ist, daß $EC = 2SH$ (Abb. 6). Infolgedessen sind auch alle andern homologen Strecken im Dreieck *CFE* doppelt so lang wie im Dreieck *SFH*, insbesondere ist die Strecke $FC = 2SF$.

Der Punkt *F* teilt demnach die Schwerlinie *CS* im Verhältnis 2 : 1. Dies ist aber eine charakteristische Eigenschaft des Schwerpunkts jedes Dreiecks. Zwei *verschiedene* Punkte einer Strecke können diese *nicht* im *selben* Verhältnis teilen. Demnach ist der Schnittpunkt *F* identisch mit dem Schwerpunkt des Dreiecks *ABC*.

Da der Schwerpunkt *F* als Schnittpunkt der Schwerlinie *CS* und der Verbindungsgeraden *EH* zugleich auf beiden Geraden liegt, liegt er insbesondere auf *EH*, und man erkennt, daß die „merkwürdigen Punkte" Umkreismittelpunkt *H*, Schwerpunkt *F* und Höhenpunkt *E* auf einer Geraden liegen bzw. eine Gerade bilden – die ***Euler-Gerade***.

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke *SFH* und *CFE* geht ferner hervor, daß die Strecke $EF = 2FH$: der Schwerpunkt teilt daher auch die Strecke *EH* im Verhältnis 2 : 1, in Übereinstimmung mit den Rechenergebnissen Eulers in den Ziffern 16 und 18 (Abb. 7b).

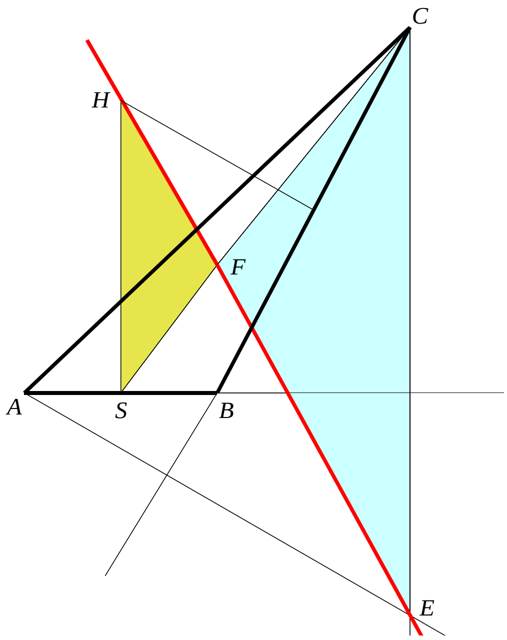


Abb. 7b

Die hier vorgestellte Herleitung der Kollinearität der „merkwürdigen Punkte“ *E*, *F*, *H* läßt sich, wie man sieht, praktisch ohne Rechnung durch bloße Betrachtung aus den geometrischen Skizzen ablesen. Man hat Mühe, zu glauben, daß sie einem Euklid und ausgerechnet einem Euler beim Betrachten von Überlegungsskizzen habe entgehen können. Auch haben die antiken Geometer bereits erheblich anspruchsvollere Probleme behandelt.

Die Kollinearität *EFH* zählt überdies zu einer Gruppe verwandter Probleme, in denen jeweils drei oder gar mehr Punkte eine Gerade bilden und die zu Eulers Lebzeiten bereits bekannt waren. In der Literatur wird das Jahr 98 n.Chr. genannt, in welchem der alexandrinische Gelehrte ***Menelaos*** (ca. 70 bis 130 n.Chr.) den sog. *Satz des Menelaos* formuliert habe. Angesichts der Belesenheit Eulers und seines phänomenalen Gedächtnisses darf man nicht zweifeln, daß ihm Menelaos’ Problem bekannt war.

Die Euler-Gerade als Menelaos-Transversale.

Eine Transversale schneidet die Seiten eines Dreiecks oder deren Verlängerungen in drei Punkten *X*, *Y* und *Z* (Abb. 7a). Die Schnittpunkte teilen die Dreiecksseiten in je zwei Abschnitte: *AX*, *XB*; *BY*, *YC*; *CZ*, *ZA*. Nach Menealos läßt sich beweisen, daß dann die Tripelprodukte alternierender Seitenabschnitte gleich sind:

$$(\alpha) \qquad \boldsymbol{AX \cdot BY \cdot CZ = XB \cdot YC \cdot ZA}$$

Umgekehrt folgt aus der Gleichheit (α) die Kollinearität der Punkte *X*, *Y* und *Z*. Fraglos ist die Euler-Gerade eine Transversale und daher als solche zugleich eine

Menelaos-Transversale. Ihr kommen folglich die Eigenschaften beider zu, und die Menelaos-Eigenschaften (α) können benutzt werden, um die Kollinearität der Euler-Punkte *E, F, H* festzustellen.

Die Euler-Gerade schneidet die Dreiecksseiten in den Punkten *X*, *Y* und *Z* (Abb.7a). Sobald deren Positionen bekannt sind, können die Seitenabschnitte *AX*, *BY* usw. berechnet und die allfällige Gleichheit der Tripelprodukte (α) untersucht werden. Falls die Gleichheit (α) erfüllt ist, bilden die Schnittpunkte *X*, *Y* und *Z* eine Gerade.

In einem gegebenen Dreieck sind Höhenpunkt *E*, Schwerpunkt *F* und Umkreismittelpunkt *H* leicht konstruierbar. Verbindet man nacheinander durch Geraden den Umkreismittelpunkt *H* mit dem Schwerpunkt *F* und den letzteren mit dem Höhenpunkt *E*, generieren die Verbindungsgeraden *HF* und *FE* die Schnittpunkte *Z*, *Y* und *X*, deren Positionen berechnet werden können. Die Strecken *HF* und *FE* treffen sich im Schwerpunkt *F.* Indessen steht auf Grund der beschriebenen Konstruktion zunächst keineswegs fest, daß der Winkel $\angle HFE$ ein gestreckter ist. Die Schnittpunkte *X, Y, Z* können nun aber als Menelaos-Punkte betrachtet und zur Prüfung der Beziehung (α) benutzt werden.

Zur Untersuchung der Punkte *X, Y, Z* diene das Koordinatensystem Eulers: *x*-Achse ist die Gerade und Dreiecksseite *AB*, *y*-Achse die zu ihr Senkrechte im Eckpunkt *A*. In Zif. 5 hat Euler die heute noch üblichen Bezeichnungen der Eckpunkte und der Seiten eines Dreiecks eingeführt:

$$AB = c, \;\; AC = b, \;\; BC = a\,.$$

Betrachtet man diese als Vektoren*:*

$$\mathsf{AB} = \mathfrak{c}, \;\; \mathsf{AC} = \mathfrak{b}, \;\; \mathsf{BC} = \mathfrak{a} = \mathfrak{b} - \mathfrak{c},$$

kann man die Koordinaten bzw. Ortsvektoren der Eckpunkte *A*, *B*, *C* aus den Abbildungen 6 und 7 wie folgt ablesen:

$$A\!: \;\; \mathsf{AA} = \mathfrak{0} = (0|0), \;\; B\!: \;\; \mathsf{AB} = \mathfrak{c} = (c|0), \;\; C\!: \;\; \mathsf{AC} = \mathfrak{b} = (b_x|b_y)\,,$$

wo $b_x^2+b_y^2 = b^2$. Als Argumente werden nur die Größen *c* und b_x, b_y benötigt.

Die Koordinaten bzw. Ortsvektoren der „merkwürdigen Punkte“ *E, F, H,* die Vektoren $\mathsf{AE} = \mathfrak{e}$, $\mathsf{AF} = \mathfrak{f}$ und $\mathsf{AH} = \mathfrak{h}$ ergeben sich aus folgenden Vektorbeziehungen:

Höhenpunkt *E* bzw. Höhenpunktvektor $\mathfrak{e}$. Der Höhenpunktvektor $\mathfrak{e} = (e_x|e_y)$ steht senkrecht auf der Dreiecksseite $\mathsf{BC} = \mathfrak{a} = \mathfrak{b} - \mathfrak{c} = (b_x{-}c|b_y)$ (Abbildungen 6 und 7). Er muß daher ein Vielfaches des Vektors $(-b_y|b_x{-}c)$ sein: $\mathfrak{e} = \alpha(-b_y|b_x{-}c)$. Den Abbildungen 6 und 7 entnimmt man ferner, daß die Abszisse e_x von $\mathfrak{e}$ gleich der Abszisse b_x von $\mathfrak{b}$ ist: $e_x = \alpha(-b_y) = b_x$, woraus sich unschwer der Proportionalitätsfaktor $\alpha = \dfrac{-b_x}{b_y}$ ergibt. Somit hat der Höhenpunkt E die Koordinaten:

$$\mathbf{e} = \left(b_x \,\middle|\, -\frac{b_x}{b_y}(b_x - c)\right) = \left(b_x \,\middle|\, \frac{b_x}{b_y}(c - b_x)\right).$$

Schwerpunkt F. Für den Schwerpunkt F bzw. seinen Ortsvektor $\mathbf{f}$ gilt die Vektorbeziehung $\mathbf{AF} = \mathbf{AS} + \mathbf{SF}$ bzw.

$$\mathbf{f} = \tfrac{1}{2}\mathbf{c} + \tfrac{1}{3}(\mathbf{b} - \tfrac{1}{2}\mathbf{c}) = \tfrac{1}{3}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \tfrac{1}{3}(b_x + c|b_y).$$

Umkreismittelpunkt H. Die Vektorstrecke $\mathbf{ST}$ ist $\mathbf{ST} = \tfrac{1}{2}\mathbf{b} = \tfrac{1}{2}(b_x|b_y)$ (Abb. 6 und Abb. 7). Den Abbildungen entnimmt man $\mathbf{SH} = \mathbf{ST} + \mathbf{TH}$. Da $\mathbf{SH} \perp \mathbf{AB} = (c|0)$, ist $\mathbf{SH} = \alpha(0|c)$, und, wegen $\mathbf{TH} \perp \mathbf{BC} = \mathbf{b} - \mathbf{c} = (b_x - c|b_y)$, ist $\mathbf{TH} = \beta(-b_y|b_x - c)$, wo die Proportionalitätsfaktoren α, β noch zu bestimmen sind. Die Faktoren α, β präzisieren sowohl die Abszisse wie die Ordinate. Aus der Vektorgleichung

$$\mathbf{SH} = \mathbf{ST} + \mathbf{TH} = \alpha(0|c) = \tfrac{1}{2}(b_x|b_y) + \beta(-b_y|b_x - c)$$

folgt daher $\quad \alpha 0 = 0 = \tfrac{1}{2}b_x + \beta(-b_y) \quad$ oder $\quad \beta = \dfrac{b_x}{2b_y}$

bzw. $\quad \alpha c = \tfrac{1}{2}b_y + \beta(b_x - c) = \dfrac{1}{2b_y}\left(b_x(b_x - c) + b_y^2\right) \quad$ oder

$$\alpha = \frac{1}{2b_y c}\left(b_x(b_x - c) + b_y^2\right) = \frac{1}{2b_y c}Q \;.$$

Mit der Abkürzung $Q = \left(b_x(b_x - c) + b_y^2\right) = b_x^2 + b_y^2 - b_x c$ ist der Vektor $\mathbf{SH}$ daher:

$$\mathbf{SH} = \alpha(0|c) = (0|\alpha c) = \left(0 \,\middle|\, \frac{1}{2b_y}Q\right) ,$$

und für den Umkreismittelpunkt H bzw. seinen Ortsvektor $\mathbf{h}$ folgt:

$$\mathbf{h} = \mathbf{AS} + \mathbf{SH} = \tfrac{1}{2}(c|0) + (0|\alpha c) = \left(\frac{1}{2}c \,\middle|\, \frac{1}{2b_y}\left(b_x(b_x - c) + b_y^2\right)\right) = \left(\frac{1}{2}c \,\middle|\, \frac{1}{2b_y}Q\right).$$

Zusammen: $\quad A = (0|0), \quad B = (c|0), \quad C = (b_x|b_y)$

$$E = \mathbf{e} = \left(b_x \,\middle|\, \frac{b_x}{b_y}(c - b_x)\right)$$

$$F = \mathbf{f} = \frac{1}{3}\left((b_x + c) \,\middle|\, b_y\right)$$

$$H = \mathbf{h} = \left(\frac{1}{2}c \,\middle|\, \frac{1}{2b_y}\left(b_x(b_x - c) + b_y^2\right)\right) = \left(\frac{1}{2}c \,\middle|\, \frac{1}{2b_y}Q\right).$$

Mit Hilfe der Ortsvektoren e, f, h berechnet man leicht die wechselseitigen Abstände der Punkte *E*, *F* und *H*. Mit den Abkürzungen

$$R = (c - 2b_x) \quad \text{und} \quad N = (3b_x(b_x - c) + b_y^2) = 3b_x^2 - 3b_x c + b_y^2$$

zur Erleichterung der Übersicht sind die Vektoren:

$$\mathsf{FH} = \mathsf{h} - \mathsf{f} = \left(\frac{1}{6}(c - 2b_x) \middle| \frac{1}{6b_y}\left(3b_x(b_x - c) + b_y^2\right) \right) = \left(\frac{1}{6}R \middle| \frac{1}{6b_y}N \right)$$

$$\mathsf{EF} = \mathsf{f} - \mathsf{e} = \left(\frac{1}{3}(c - 2b_x) \middle| \frac{1}{3b_y}\left(3b_x(b_x - c) + b_y^2\right) \right) = \left(\frac{1}{3}R \middle| \frac{1}{3b_y}N \right)$$

$$\mathsf{EH} = \mathsf{h} - \mathsf{e} = \left(\frac{1}{2}(c - 2b_x) \middle| \frac{1}{2b_y}\left(3b_x(b_x - c) + b_y^2\right) \right) = \left(\frac{1}{2}R \middle| \frac{1}{2b_y}N \right)$$

Wie nicht anders zu erwarten, zeigt sich auch hier bereits die durch den Schwerpunkt *F* bewirkte Proportionalität *EF* = 2*FH* und *EH* = 3*FH*, mit der Euler schon in Ziffer 9 die Kollinearität *EFH* hätte belegen können, aber erst in Ziffer 18 explizit zu erwähnen beliebte. Die Kollinearität *EFH* wäre damit erwiesen gewesen, und weitere Beweise hätten sich erübrigt.

Die Menelaos-Punkte *X*, *Y* und *Z* sind die Schnittpunkte der Strecken *AB* und *EF* (Schnittpunkt *X*), *BC* und *EF* (*Y*), *AC* und *FH* (*Z*).

Schnittpunkt *X*. Wegen $X \in AB$, ist die Strecke $AX = \alpha AB = \alpha c$, vektoriell $\mathsf{AX} = \alpha\mathsf{AB} = \alpha(c|0)$. Zugleich ist $\mathsf{AX} = \mathsf{e} + \beta\mathsf{EF}$, wo α und β wiederum noch zu bestimmende numerische Faktoren sind. Die Proportionalitätsfaktoren α und β gelten ebenso für die *x*-wie für die *y*-Komponente. Wegen $\mathsf{AB} = \mathsf{c} = (c|0)$ sind

$$\alpha c = b_x + \beta \tfrac{1}{3} R \quad \text{und} \quad 0 = \frac{b_x}{b_y}(c - b_x) + \beta \frac{N}{3b_y},$$

woraus folgt: $\beta = \dfrac{1}{N}\left(3b_x(b_x - c)\right)$, und die Abszisse αc von *X* ist

$$\alpha c = \frac{b_x}{N}\left(b_x^2 + b_y^2 - c^2\right) = \frac{b_x}{N}P,$$

mit den Abkürzungen *N* und *P*. Da $X \in AB$ und *AB* die *x*-Achse definiert, ist die Ordinate von *X* gleich 0.

Schnittpunkt *Y*. $Y \in BC$ und $Y \in EF$ (Abb. 7a), folglich gelten die Vektorbeziehungen:

$$\mathsf{AY} = \mathsf{AB} + \alpha\mathsf{BC} = \mathsf{c} + \alpha(\mathsf{b} - \mathsf{c}) = (c|0) + \alpha(b_x - c|b_y)$$

$$\mathsf{AY} = \mathsf{AE} + \beta\mathsf{EF} = \mathsf{e} + \beta(\mathsf{f} - \mathsf{e}) = \left(b_x \middle| \frac{b_x}{b_y}(c - b_x) \right) + \beta\left(\frac{1}{3}R \middle| \frac{1}{3b_y}N \right).$$

Die rechtwinklig aufeinander stehenden Komponenten gestatten die Aufstellung der zwei linearen Gleichungen für die beiden unbekannten Faktoren α und β:

$$
\begin{aligned}
c+\alpha\left(b_x-c\right) &= b_x+\frac{1}{3}\beta R\\
0+\alpha b_y &= \frac{b_x}{b_y}\left(c-b_x\right)+\frac{1}{3b_y}\beta N \quad ,
\end{aligned}
$$

woraus man gewinnt: $\alpha = \dfrac{\left(b_x-c\right)\left(b_x R+N\right)}{\left(b_x-c\right)N-b_y^2 R}$, eine rein numerische Größe.

Die Koordinaten von Y sind somit $(c + \alpha(b_x - c) \mid \alpha b_y)$ mit α wie hergeleitet.

<u>Schnittpunkt Z</u>. $Z \in AC = b$ und $Z \in FH$ (Abb. 7a), daher $\mathsf{AZ} = \alpha\mathsf{b} = \alpha(b_x \mid b_y)$.
Der Streckenvektor AZ ist zugleich:

$$\mathsf{AZ} = \mathsf{f} \; + \beta\mathsf{FH} \;=\; \frac{1}{3}\left(b_x+c \mid b_y\right) \;+\; \beta\left(\frac{1}{6}R \;\middle|\; \frac{1}{6b_y}N\right) \quad ,$$

woraus $\alpha b_x = \tfrac{1}{3}(b_x + c) + \tfrac{1}{6}\beta R$ und $\alpha b_y = \tfrac{1}{3}b_y + \beta\,\dfrac{1}{6b_y}N$.

Damit wird der numerische Faktor α :

$$\alpha \;=\; \frac{\left(b_x+c\right)N-b_y^2 R}{3\left(b_x N-b_y^2 R\right)} \;=\; \frac{b_x P}{3b_x Q-b_y^2 c} \quad , \; P \;=\; \left(b_x^2+b_y^2-c^2\right)$$

und der Schnittpunkt Z hat die Koordinaten:

$$z_x \;=\; \frac{b_x P}{3b_x Q-b_y^2 c}b_x \quad \text{und} \quad z_y \;=\; \frac{b_x P}{3b_x Q-b_y^2 c}b_y \;.$$

Zur Herleitung der Koordinaten der Schnittpunkte X, Y, Z sind nur die Koordinaten der „merkwürdigen Punkte“ E, F, H, nicht aber die aus Eulers Studie hervorgegangene Eigenschaft deren Kollinearität benutzt worden. Die Teilstrecken EF und FH stoßen wohl im Schwerpunkt F zusammen, doch bleibt die Größe des Winkels $\angle EFH$ vorerst offen.

Die Faktoren der Testformel (α) von Menelaos sind die durch X, Y, Z auf den Dreiecksseiten AB, BC, CA generierten Abschnitte AX, XB, BY, YC, CZ, ZA. Sie sind Teile, im Falle des äußeren Teilpunktes X Vielfache der Dreiecksseiten: $AX = \alpha_1 AB$, $BY = \alpha_2 BC$, $CZ = \alpha_3 CA$, $XB = (1-\alpha_1)AB$, $YC = (1-\alpha_2)BC$, $ZA = (1-\alpha_3)CA$. Die Proportionalitätsfaktoren α_1, α_2, α_3 ergeben sich nach einigen elementaren, aber etwas umständlichen Rechnungen mit Hilfe der Abkürzungen N, P, Q, R als Funktionen der Größen c, b_x, b_y. Man erhält für die Seitenabschnitte:

$$\boldsymbol{AX} \;=\; \alpha_1 AB \;=\; \frac{b_x\left(b_x^2+b_y^2-c^2\right)}{cN}AB \;=\; \frac{b_x P}{cN}AB$$

$$\boldsymbol{BY} \;=\; \alpha_2 BC \;=\; \frac{\left(b_x-c\right)\left(b_x R+N\right)}{\left(b_x-c\right)N-b_y^2 R}BC \;=\; \frac{-cN+b_x P}{\left(b_x-c\right)N-b_y^2 R}BC$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{CZ} &= (\alpha_3)CA &&= \frac{-QR}{b_x N - b_y^2 R}\,CA \\
\boldsymbol{XB} &= (1-\alpha_1)AB &&= \frac{cN - b_x P}{cN}\,AB \\
\boldsymbol{YC} &= (1-\alpha_2)BC &&= \frac{-QR}{\left(b_x - c\right)N - b_y^2 R}\,BC \\
\boldsymbol{ZA} &= (1-\alpha_3)CA &&= \frac{b_x P}{b_x N - b_y^2 R}\,CA
\end{aligned}$$

Mit den gefundenen Berechnungsformeln für die jeweils zwei Abschnitte der Dreiecksseiten *AB*, *BC* und *CA* ergibt sich in der Tat die Gleichheit der Tripelprodukte alternativer Seitenabschnitte des Dreiecks *ABC*, nämlich

$$\Pi_1 = AX\cdot BY\cdot CZ = \frac{b_x P}{cN}AB \;\frac{-cN + b_x P}{\left(b_x - c\right)N - b_y^2 R}BC \;\frac{-QR}{b_x N - b_y^2 R}CA$$

$$\Pi_2 = XB\cdot YC\cdot ZA = \frac{cN - b_x P}{cN}AB \;\frac{-QR}{\left(b_x - c\right)N - b_y^2 R}BC \;\frac{b_x P}{b_x N - b_y^2 R}CA,$$

wo Zähler und Nenner dieselben Faktoren aufweisen. Die beiden Produkte scheinen sich durch das Vorzeichen zu unterscheiden. Betrachtet man die Durchlaufrichtung der Grundvektoren $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ als wesentlich, läuft im Produkt Π_1 der Abschnitt *CZ* dem Vektor $\mathfrak{b}$ entgegen. Im Produkt Π_2 haben sogar die Abschnitte *XB* und *ZA* entgegengesetzte Richtung und müßten daher das Vorzeichen Minus erhalten. Da in die ursprüngliche Formel des Menelaos indes nur die Beträge der Strecken eingehen, darf man von den Vorzeichen absehen. Die Reihenfolge der Faktoren im Zähler, die sowieso willkürlich ist, hat wegen des kommutativen Gesetzes der Multiplikation keinen Einfluß auf den Wert. Die Produkte Π_1 und Π_2 sind daher absolut gleich.

Nach dem Satz des Menelaos darf man daher schließen, daß die Schnittpunkte *X*, *Y*, *Z* eine Gerade bilden. Die Punkte *X*, *Y* sind entstanden als Schnittpunkte der *geraden* Verbindungslinie *EF* mit den Dreiecksseiten *AB* und *BC*. *EF* enthält daher auf jeden Fall die Punkte *F*, *X* und *Y*, wegen der Gleichheit (α) aber auch *Z*: Gerade *EF* = Punktmenge {*E*, *X*, *Y*, *F*, Z}. Der Punkt *Z* als Schnittpunkt der *Geraden FH* und *AC* liegt jedenfalls auf der geraden Verbindung *FH* = Punktmenge {*F*, *Z*, *H*}. Da nach Euklid zwei Punkte eindeutig eine Gerade bestimmen, definieren die Punkte *F*, *Z* der Schnittmenge {*F*, *Z*} sowohl die Gerade *EF* wie die Gerade *FH*. Die Punkte *Z* und *H* liegen also auf der Verlängerung der Geraden *EF* über den Punkt *F* hinaus. Die sechs Punkte der Vereingungsmenge {*E*, *X*, *Y*, *F*, *Z*, *H*} wie auch jede Dreierauswahl derselben bilden somit eine Gerade. Insbesondere sind der Höhenpunkt *E*, der Schwerpunkt *F* und der Umkreismittelpunkt *H* kollinear. Die Teilstrecken *FH* und *EF* treffen sich also im Treffpunkt *F* ohne „Knick“: der Winkel $\angle HFE$ beträgt 180°, womit ein weiterer Nachweis der Kollinearität *EFH* erbracht ist.

Die Euler-Gerade als Fixgerade einer zentrischen Streckung.

Aus den Abbildungen 7a und 7b wird deutlich, daß der Schwerpunkt *F* nicht nur die Schwerlinie *SC*, sondern auch den Abschnitt *EH* der Euler-Geraden im Verhältnis 2:1 teilt. In Zif. 16 (Seite 15) weist Euler darauf hin, daß die algebraischen Differenzen *AP–AQ* und *PE–QF* doppelt so groß sind wie *AQ–AS* und *QF–SH* in Zif. 12 (Seite 12), nämlich, wenn als Formeln geschrieben,

$$(\beta) \qquad AP\text{–}AQ = \frac{bb-aa}{3c} \quad \text{und} \quad AQ\text{–}AS = \frac{bb-aa}{6c}\,.$$

Ohne in Zif. 16 schon auf die Kollinearität *EFH* zu schließen, bemerkt Euler doch bereits, daß deshalb $FH = \frac{1}{2}EF$. Dank dieser Erkenntnis kann er sich in Zif. 16, wo es um die Quadratdistanz FH^2 geht, einen erheblichen arithmetischen Aufwand sparen, denn er darf das Rechenergebnis der Zif. 16 einfach der Zif. 12 entnehmen und braucht lediglich die Schlußformel der Zif. 12 durch den Faktor 4 (= 2^2) zu dividieren.

Die Formeln (β) enthalten im Prinzip bereits die Eigenschaft der Kollinearität der Punkte *E*, *F*, *H*. Was in den Ziffern 12 und 16 algebraisch hergeleitet und festgehalten worden ist, ist vorher schon in Eulers Figur 2 (Zif. 7, Seiten 9 und 74) bildlich dargestellt worden, allerdings durch die gewählten Bezeichnungen leicht verschleiert. Es ist in den Betrachtungen zu den Ziffern 4, 7 und 9 [88] bereits erwähnt worden, daß die Mittelpunkte der Dreiecksseiten *AB* = *c*, *BC* = *a* und *CA* = *b* in Fig. 2 durch die kursiven Minuskel *c*, *a*, *b*, in Fig. 4 dagegen durch die aufrechten Großbuchstaben S, T, V bezeichnet sind.

In der Fig. 2a ist die Gerade *SH* Mittelsenkrechte der Dreiecksseite *AB*, die Gerade *PC* eine Höhe des Dreiecks *ABC*. Die Gerade *CS* ist eine Schwerlinie. *SH* und *PC*

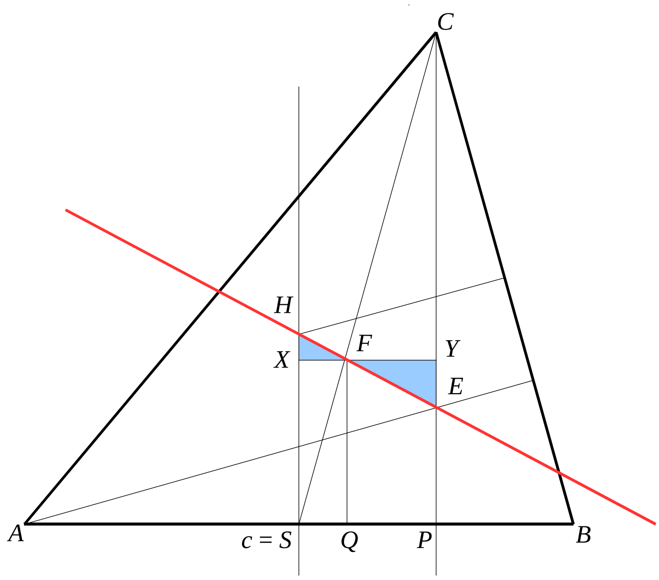


Fig. 2a

[88] Seiten 66, 75 und 79.

stehen beide senkrecht auf AB. Sie sind daher parallel. Als Wechselwinkel an Parallelen sind die Winkel $\angle HSF$ und $\angle ECF$ gleich. Der Punkt F ist der Schwerpunkt des Dreiecks ABC. *Ex elementis* ist bekannt, daß die Strecke $EC = 2SH$ (Abb. 6) und die Strecke $FC = 2SF$. Die Dreiecke HSF und ECF sind daher ähnlich, und die Seiten des Dreiecks ECF sind doppelt so lang wie die homologen Seiten des Dreiecks HSF.

Eine Parallele zu AB durch den Schwerpunkt F schneidet SH in X und EC in Y. Die Strecken XF und YF sind Höhen der Dreiecke HXF und EYF (blau), und diese sind folglich ebenfalls ähnlich. Ihre Seitenverhältnisse sind 2 : 1, und homologe Winkel sind gleich, insbesondere $\angle XFH = \angle YFE$. Aus Fig. 2a liest man ab, daß die Winkelsumme $\angle XFH + \angle HFY = 180°$, weil XFY eine Gerade ist. Dann ist auch die Summe $\angle YFE + \angle HFY = 180°$, und man erkennt, daß die Teilstrecken HF und FE eine Gerade bilden – die ***Euler-Gerade*** *EFH*. Die Kollinearität EFH hätte also, wäre es nur um sie allein zu tun gewesen, bereits aus der Figur 2 abgelesen werden können, sogar ohne Arithmetik und Algebra.

Aus Fig. 2a liest man ebenfalls ab, daß die Katheten der beiden blauen Dreiecke $FY = AP - AQ = 2XF = 2(AQ - AS)$ bzw. $EY = QF - PE = 2XH = 2(QF - SH)$ sind, in Übereinstimmung mit Eulers Formeln (β), wobei Euler offensichtlich nur mit den absoluten Längen rechnet: die Figur wie auch die Formel in Eulers Zif 16 belegen, daß die Differenz $QF{-}SH$ in spitzwinkligen Dreiecken negativ sein kann.

Die Strecke $Cc = CS$ ist nur eine von drei Schwerlinien. Die beiden andern sind, gemäß Eulers Bezeichnungen in den Figuren 2 und 4 (Seiten 9 und 10), Aa und Bb bzw. AT und BV. Allen ist gemeinsam, daß sie vom gemeinsamen Schnittpunkt F im Verhältnis 2 : 1 geteilt werden. Dies gilt, nach Eulers Analyse und spätestens in Zif. 18 festgehalten, auch für die Hypotenusen der blauen Teildreiecke in Fig. 2a bzw. für die Strecke EH in beliebigen Dreiecken.

Das mehrfache Auftreten von Streckenteilungen mit dem konstanten Teilungsverhältnis 2 : 1, wobei stets nur der Schwerpunkt F als Teilungspunkt in Erscheinung tritt, ist kennzeichnend für das Verfahren der sog. *zentrischen Streckung*. Ähnlich wie in der Algebra durch die Strukturanalysen [89] ist in neuerer Zeit auch in der Geometrie eine dynamische Sichtweise vorherrschend geworden. Das statische Vergleichen geometrischer Gebilde ist durch die Betrachtung von Prozessen ergänzt worden, welche geometrische Gebilde durch Scherungen, Verschiebungen, Spiegelungen, Drehungen u.ä. in verwandte Gebilde überführen.

Ein solcher Prozeß – man spricht auch von *Abbildungen* – ist die zentrische Streckung, symbolisch

$$\boldsymbol{P} \xrightarrow{Z;\, \pm k} \boldsymbol{P'}\,.$$

Sie besteht darin, daß jeder Punkt P einer Ebene über einen Zentralpunkt Z dadurch in einen Bildpunkt P' übergeführt wird, daß der Bildpunkt P' auf der Verbin-

[89] Vgl. B.L. van der Waerden. Moderne Algebra. Berlin: Springer 1930 und 1931.

dungsgeraden PZ – dem Streckungsstrahl – vor oder hinter Z abgetragen wird. Die Distanz $P'Z$ wird ein Vielfaches von PZ, $P'Z = kPZ$, sein. Der Streckungsfaktor k kann größer oder kleiner als 1 sein; wobei im zweiten Fall statt einer Streckung eine Stauchung vorliegt. Zur Unterscheidung der beiden möglichen Positionen – vor oder hinter dem Zentrum Z – erhält der Streckungsfaktor das Vorzeichen *Plus*, wenn P' bezüglich P *diesseits* des Zentrums Z zu liegen kommt, andernfalls das Vorzeichen *Minus*.

Aus der Abbildung 8 liest man die charakteristischen Eigenschaften der zentrischen Streckung ab. Die Verwandtschaft von Bild und Urbild beruht auf den Strahlensätzen der Elementargeometrie. Punkte werden Punkte, Gerade werden Gerade, Winkel bleiben erhalten, ebenso Strecken*verhältnisse*. Bildgerade und Urbildgerade sind parallel. Die Bilder von Figuren sind daher ihren Urbildern ähnliche Figuren. Das Streckungszentrum Z wird deshalb auch *Ähnlichkeitspunkt* genannt.

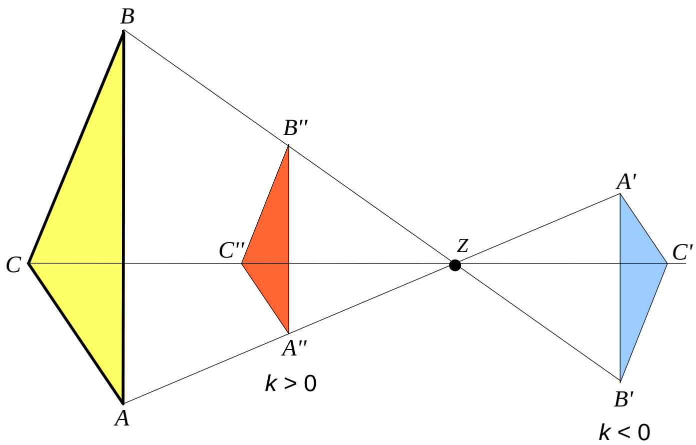


Abb. 8

Abb. 8 bildet das Dreieck ABC über das Zentrum Z in die Dreiecke $A'B'C'$ (blau, $k < 0$) bzw. $A''B''C''$ (rot, $k > 0$) ab. Als Streckungsfaktor wurde $k = \pm\frac{1}{2}$ gewählt. Wenn $k > 0$, ist die Bildfigur dem Urbild parallel. Wenn $k < 0$, ist die Bildfigur gegenüber dem Urbild um 180° gedreht (antiparallel). Im letzteren Fall beobachtet man das anscheinende Paradoxon, daß die Bildgeraden gegenüber ihren Urbildern einen entgegengesetzten *Durchlauf*sinn aufweisen: $A'B' \approx -\frac{1}{2}AB$, die Figuren selbst aber den ursprünglichen *Umlauf*sinn beibehalten. Die Buchstaben A, B, C in alphabetischer Reihenfolge lassen die Eckpunkte sowohl des Urdreiecks ABC wie der Bilddreiecke $A'B'C'$ und $A''B''C''$ in positivem Drehsinn („linksherum“) aufeinander folgen.

Konstanz der Streckenverhältnisse und Invarianz von Winkeln bewirken, daß alle Elemente ihre Rollen bewahren: Eckpunkte, Mittelpunkte, Höhenpunkte, Schwerpunkte, Streckungszentren, Umkreise, Inkreise, Parallelen, Diagonalen, Peripherien, usw. des Urbildes werden wieder Eckpunkte, Mittelpunkte, Höhenpunkte, Schwerpunkte, Streckungszentren, Umkreise, Inkreise, Parallelen; Diagonalen, Peripherien usw. in der Bildfigur sein.

Deutet man nun die Abbildungen 7a und 7b als Darstellungen einer zentrischen Streckung mit dem Schwerpunkt *F* als Zentrum *Z*, gewinnt man so die einfachste Herleitung der Kollinearität *EFH* überhaupt. Als Streckungsfaktor *k* ist $k = -0{,}5$ zu wählen. Denn, wenn *F innerer* Teilpunkt der Strecke *EH* sein und der wechselnde Durchlaufsinn der Teilstrecken durch das Vorzeichen angedeutet werden soll, ist

$$\frac{FE}{FH} = -\frac{2}{1} \quad \text{oder} \quad FH = -\frac{1}{2}FE = -0{,}5\,FE = kFE\,.$$

Die symbolische Bezeichnung der Abbildung sieht folgendermaßen aus:

$$P \xrightarrow{F;\,-0,5} P'$$

Ausgangsfigur sei das Dreieck *ABC* der Abbildungen 6 und 7. Werden zunächst der Schwerpunkt *F* und der Höhenpunkt *E* konstruiert, ergeben sich durch die Abbildung die Bildpunkte *E'* des Höhenpunktes *E* und *C'* des Eckpunkts *C*. Weil das Streckungszentrum *Z* = *F* gleich dem Schwerpunkt *F* ist, ist die Streckungsgerade *CF* eine Schwerlinie. Ihre Verlängerung schneidet die Dreiecksseite *AB* im Punkte *S*. Bereits Euklid war bekannt, daß der Schwerpunkt *F* die Schwerlinie *CS* im Verhältnis 2 : 1 bzw., je nach Blickrichtung, im Verhältnis 1 : 2 = 0,5 = |k| teilt. Der Bildpunkt *C'* des Eckpunktes *C* ist daher mit dem Seitenmittelpunkt *S* der Dreiecksseite *AB* identisch.

Die Bildgerade *C'E'* = *SE'* ist dank den Eigenschaften der zentrischen Streckung der Urbildgeraden *CE* parallel. Die Gerade *CE* ist Teil der Höhe *CP* des Dreiecks *ABC*, das heißt steht senkrecht zur Dreiecksseite *AB*. Die Bildstrecke *C'E'* = *SE'* liegt daher auf der Mittelsenkrechten der Dreiecksseite *AB*, und die Länge der Strecke *C'E'* = *SE'* ist wegen |k| = 0,5 gleich der Hälfte der Urbildstrecke *CE* oder symbolisch: $SE' = \frac{1}{2}EC$ (Abb. 6). Nach dem Lemma *Abbildung 6* ist aber $\frac{1}{2}EC = SH$, und der Bildpunkt *E'* des Höhenpunktes *E* ist mit dem Umkreismittelpunkt *H* identisch. Die Punkte *E*, *F* und *H* liegen somit alle drei auf der Streckungsgeraden *EF.* Das heißt nichts anderes, als daß die Punkte *E* (Höhenpunkt), *F* (Schwerpunkt) und *H* (Umkreismittelpunkt) kollinear sind.

Drei auf einer Geraden liegende Punkte können als Definition einer zentrischen Streckung gedeutet werden. Wählt man einen der drei Punkte als inneren oder äußeren Teilpunkt und betrachtet ihn als Streckungszentrum *Z*, sind die beiden übrigen Bild und Urbild des jeweils anderen. Die Gerade selbst ist Streckungsgerade.

In der Abbildung 7a definieren im Dreieck *ABC* die Punkte *A*, *B*, *X* und *B*, *Y*, *C* die zentrischen Streckungen:

$$S_1 = A \xrightarrow{X;\,k} B \quad \text{und} \quad S_2 = B \xrightarrow{Y;\,l} C\,.$$

Streckungszentren sind die Punkte X und Y. Die Streckungszahlen k und l sind:

$$k = \frac{BX}{AX} > 0 \quad \text{und} \quad l = \frac{CY}{BY} < 0\,,$$

die Streckungsgeraden sind die Dreiecksseiten AB und BC. Durch die Streckung S_1 erhält der Punkt A also den Bildpunkt $S_1(A) = A' = B$, durch S_2 der Punkt B den Bildpunkt $B' = C$. Durch die Zusammenfassung der Streckungen S_1 und S_2 zur Produktabbildung $S = S_2S_1$ wird der Punkt A in $S(A) = S_2S_1(A) = S_2(A') = S_2(B) = B' = C = A''$ übergeführt. Die Streckung S ist somit die Abbildung $A \xrightarrow{Z;\,h} A'' = C$. Streckungsgerade des Urbild-Bild-Paares AA'' ist die Dreiecksseite AC. Die Streckungszahl h der Streckung S ist das Produkt von l und k:

$$h = \frac{CZ}{AZ} = l\,k = \frac{CY}{BY}\cdot\frac{BX}{AX} < 0\,,$$

woraus, etwas anders geordnet, folgt:

$$AX{\cdot}BY{\cdot}CZ = XB{\cdot}YC{\cdot}ZA\,,$$

die ***Menelaos-Bedingung*** (α) (Seite 185) für die Kollinearität der Teilpunkte X, Y, Z der Seiten AB, BC und AC im Dreieck ABC.

Das Zentrum X ist als solches bezüglich der Streckung S_1 Fixpunkt: $S_1(X) = X' = X$. Es erfährt daher durch die Produktabbildung S dieselbe Veränderung wie durch die Streckung S_2 allein. Der Bildpunkt $S_2(X) = S_2(X') = X''$ liegt somit auf der Streckungsgeraden XY. Andererseits muß wegen $S(A) = A'' = C$ das Zentrum Z der Produktabbildung S auf der Streckungsgeraden $AA'' = AC$ liegen, woraus folgt, daß das Zentrum Z der Produktabbildung S gleich dem Schnittpunkt der Dreiecksseite AC und der Streckungsgeraden XY ist und die Punkte X, Y, Z eine Gerade bilden. Letztere liegen ihrer Herkunft entsprechend auf den Teilstrecken EF (X; Y) und FH (Z) der Euler-Geraden und bewirken Kollinearität der „merkwürdigen Punkte“ E, F und H (Seiten 186-190).

Das in Dreiecken offenbar dominante Streckenverhältnis 1 : 2 bzw. 2 : 1 hat noch weitere Konsequenzen, in denen auch die Euler-Gerade immer wieder eine Rolle spielt. Wird die zentrische Streckung

$$P \xrightarrow{F;\,-0{,}5} P'$$

auf die Gesamtfiguren der Abbildungen 6 und 7 appliziert, werden die Eckpunkte A, B, C des Dreiecks ABC über die Schwerlinien in die Mittelpunkte A', B' und C' der Seiten AB, BC und CA übergeführt, und das Dreieck ABC geht in das Seitenmittendreieck $A'B'C'$ über (Abb. 9, blaues Dreieck). Dieses besitzt wie das Urbilddreieck einen Umkreis. Dessen Mittelpunkt ist das Bild H' des Urbildmittelpunkts H und befindet sich auf der Streckungsgeraden HFE, der Euler-Geraden. Der Streckungsfaktor $|k| = 0{,}5$ bewirkt, daß die Entfernung FH' des Bildmittelpunkts H' vom Streckungszentrum F die Länge $FH' = \frac{1}{2}HF = \frac{1}{2}g$ besitzt, wenn $HF = g$. Nach den Ergebnissen der Eulerschen Studie und den synthetisch-geometrischen Überlegungen ist die Distanz Schwerpunkt-Höhenpunkt $FE = 2g$. Die Entfernung der beiden Kreismittelpunkte *H* und *H'* voneinander ist somit $HH' = HF{+}FH' = g + \frac{1}{2}g = \frac{3}{2}g$, die Entfernung des Bildkreismittelpunkts *H'* zum Höhenpunkt *E* ist andererseits gleich $H'E = FE - FH' = 2g - \frac{1}{2}g = \frac{3}{2}g$, gleich lang wie die Entfernung *HH'*: der Bildkreismittelpunkt *H'* halbiert somit die Entfernung *HE* des Umkreismittelpunkts *H* des Ausgangsdreiecks *ABC* von dessen Höhenpunkt *E* (Abb. 9).

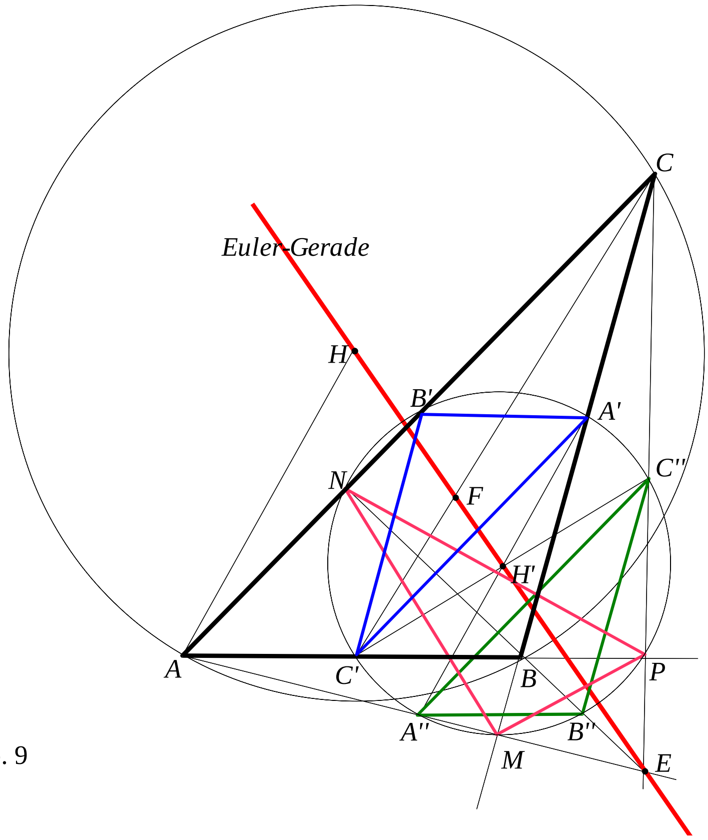


Abb. 9

In Zif. 28 (Seite 151) hat Euler den Kreismittelpunkt *H'* angedeutet, allerdings nicht als solchen, sondern nur als Mittelpunkt der Strecke *EH* auf der Euler-Geraden, in Gestalt der Vergleichsstrecke $\frac{1}{2}EH$ und ohne den Gedanken weiterzuspinnen.

Die Bildpunkte zentrischer Streckungen liegen auf den Verbindungsgeraden Urbildpunkt-Streckungszentrum d.h. auf den jeweiligen Streckungsgeraden. Im vorliegenden Fall ist die Streckungsgerade die Euler-Gerade. Diese enthält jetzt vier „merkwürdige Punkte“, nämlich, neben den bisher untersuchten *H* (Umkreismittelpunkt), *F* (Schwerpunkt) und *E* (Höhenpunkt), noch den Mittelpunkt *H'* des Umkreises des Bilddreiecks *A'B'C'*.

Vier auf einer Geraden liegende Punkte können als eine durch zwei Endpunkte begrenzte Strecke aufgefaßt werden, die durch einen inneren und einen äußeren Teilpunkt in Teilstrecken zerlegt werden. Für die folgenden Überlegungen möge die Laufrichtung *HE* als positiv, die umgekehrte Richtung *EH* dagegen als negativ gelten. Betrachtet man von den vier in der Reihenfolge *H*, *F*, *H'*, *E* auf der Euler-

Geraden angeordneten Punkten zunächst die durch die Punkte H und H' begrenzte Strecke als durch F innen und durch E außen geteilt, ergeben sich folgende Teilverhältnisse:

$$k_i = \frac{H'F}{HF} = \frac{-(1/2)g}{g} = -\frac{1}{2} \quad \text{und} \quad k_a = \frac{H'E}{HE} = \frac{(3/2)g}{3g} = +\frac{1}{2} \;.$$

Wird dagegen die Strecke FE durch H außen und durch H' innen geteilt, sind die Teilverhältnisse:

$$k_i = \frac{FH'}{EH'} = \frac{+(1/2)g}{-(3/2)g} = -\frac{1}{3} \quad \text{und} \quad k_a = \frac{FH}{EH} = \frac{-g}{-3g} = +\frac{1}{3} \;.$$

Die Teilverhältnisse sind in beiden Fällen entgegengesetzt gleich: das charakteristische Merkmal der sog. harmonischen Teilung. Die vier „merkwürdigen Punkte“ H (Umkreismittelpunkt), F (Schwerpunkt), H' (Bildpunkt von H) und E (Höhenpunkt) bilden demnach auf der Euler-Geraden eines Dreiecks ABC ein harmonisches Quadrupel.

Drei Punkte auf einer Geraden definieren eine zentrische Streckung (vgl. Seite 194). Das blaue Dreieck in Abb. 9 – das Seitenmittendreieck $A'B'C'$ – samt seinem Umkreis ist das Ergebnis der durch die Punkte H, F, E auf der Euler-Geraden definierten Streckung

$$S_1 = E \xrightarrow{F;\, -0,5} E' = H$$

wo F als Streckungszentrum dient. Weil $FH = \frac{1}{2}EF$ und damit E in H jenseits F übergeht, muß der Streckungsfaktor $k = -0{,}5$ betragen. Umkreis des Bilddreiecks ist der Bildkreis des Umkreises des Urbilddreiecks ABC, und der Mittelpunkt des Bildkreises ist der Bildpunkt H' des Umkreismittelpunktes H. Dank dem Streckungsfaktor $|k| = 0{,}5$ ist der Radius des Bildkreises gleich der Hälfte, $r/2$, des Radius r des Umkreises von ABC. Der Bildkreis $(H';\, r/2)$ zeichnet sich durch eine Reihe von Eigenschaften aus, die Karl Wilhelm Feuerbach 1822 in dem in Fußnote 25, Seite 37, zitierten Werk beschrieben hat; in vielen Geometrielehrbüchern heißt er deswegen ***Feuerbachscher Kreis***.

Wählt man aus dem Tripel (H, F, E) statt des Schwerpunktes F den Höhenpunkt E als Streckungszentrum und operiert man mit dem Streckungsfaktor $+0{,}5$, wird, wegen $HH' = \frac{1}{2}EH = H'E$ durch die Streckung

$$S_2 = H \xrightarrow{E;\, +0,5} H'$$

der Umkreismittelpunkt H des Dreiecks wie durch S_1 in H' übergeführt, während der Radius r des Umkreises wegen $k = +0{,}5$ bzw. $|k| = 0{,}5$ ebenfalls zu $r/2$ schrumpft. Streckungsgerade für H bleibt die Euler-Gerade. Der Bildkreis $(H';\, r/2)$ des Umkreises von ABC gemäß Abbildung S_2 ist demnach mit dem Feuerbachschen Kreise identisch, und die Bildpunkte aller auf dem Umkreis von ABC liegenden Punkte kommen auf den Feuerbachschen Kreis zu liegen, so insbesondere die Bildpunkte A'', B'', C''

der Eckpunkte A, B, C des Dreiecks ABC. Die Punkte A'', B'', C'' bilden das durch die Streckung S_2 erzeugte Bilddreieck $A''B''C''$ (grünes Dreieck in Abb. 9) des Ausgangsdreiecks ABC.

Da sowohl $H \in EH$ wie $H' \in EH$, ist die Euler-Gerade nicht nur Durchmesser des Umkreises von ABC, sondern auch Durchmesser des Feuerbachschen Kreises. Der Schwerpunkt F von ABC ist Fixpunkt der Streckung S_1, $F' = F$; F ist daher Schwerpunkt sowohl des Dreiecks ABC wie des Dreiecks $A'B'C'$. Andererseits ist E Fixpunkt der Streckung S_2, $E'' = E$, der Höhenpunkt E also zugleich Höhenpunkt von ABC wie von $A''B''C''$.

Die Eigenschaften der zentrischen Streckung bewirken Kongruenz der Bilddreiecke $A'B'C'$ und $A''B''C''$ im Feuerbachschen Kreis sowie Ähnlichkeit beider mit dem Ausgangsdreieck ABC. Die Dreiecke ABC und $A''B''C''$ liegen dabei parallel, $A'B'C'$ antiparallel. Dank dem Streckungsfaktor $k = +0{,}5$ sind die Eckpunkte A'', B'', C'' des grünen Bilddreiecks die Mittelpunkte der Höhenabschnitte EA, EB und EC im Ausgangsdreieck. (In spitzwinkligen Dreiecken sind dies die „oberen Höhenabschnitte".)

Der Abbildung 9 entnimmt man, daß die beiden Bilddreiecke $A'B'C'$ (blau) und $A''B''C''$ (grün) durch Punktspiegelung am Mittelpunkt H' des Feuerbachschen Kreises ineinander übergehen. Sie liegen also bezüglich H' punktsymmetrisch zueinander: homologe Dreiecksseiten sind parallel und gleich weit vom Mittelpunkt H' entfernt, ihre Endpunkte bilden daher zusammen Rechtecke, deren Diagonalen Durchmesser des Feuerbachschen Kreises sind. Für rechte Winkel, die über Durchmessern stehen, ist der Feuerbachsche Kreis Thaleskreis: die Scheitelpunkte rechter Winkel über Durchmessern müssen daher auf der Peripherie des Feuerbachschen Kreises liegen. Die genannten Bedingungen treffen auf die Fußpunkte der Höhen im Ausgangsdreieck ABC zu, und diese liegen daher auf dem Feuerbachschen Kreise.

Der Feuerbachsche Kreis eines Dreiecks ABC enthält somit die Mittelpunkte der Seiten des Dreiecks, die Fußpunkte seiner Höhen und die Mittelpunkte der Abschnitte der Höhen zwischen Höhenpunkt E und den Dreiecksecken A, B, C, insgesamt ***neun*** ausgezeichnete Punkte, und wird daher auch ***Neunpunktekreis*** genannt.

Die Höhenfußpunkte im Ausgangsdreieck ABC definieren im Feuerbachschen Kreis ein Dreieck, das *Höhenfußpunktdreieck* (violettes Dreieck in Abb. 9). Dessen Eckwinkel werden durch die Höhe BN und die Dreiecksseiten AB und BC halbiert. (In spitzwinkligen Dreiecken sind die Winkelhalbierenden die drei Höhen.) [90] Ihr gemeinsamer Schnittpunkt B, die stumpfwinklige Ecke des Urbilddreiecks ABC, ist folglich der Mittelpunkt des Inkreises des Höhenfußpunktdreiecks. In spitzwinkligen Dreiecken ist hingegen der Höhenpunkt E des Urbilddreiecks ABC Mittelpunkt des Inkreises des Höhenfußpunktdreiecks. Da E auf der Euler-Geraden liegt, ist diese

[90] Die Halbierung der Eckwinkel verifiziert man leicht, wenn über den Dreiecksseiten AB, BC, CA die Thaleskreise geschlagen und die zugehörigen Peripheriewinkel verglichen werden. Die Eckwinkel M, N, P des Höhenfußpunktdreiecks sind $\angle M = 2\alpha$, $\angle N = 2(\beta - 90°)$, $\angle P = 2\gamma$ (α, β, γ Eckwinkel des Urbilddreiecks ABC). In spitzwinkligen Dreiecken sind die Eckwinkel des Höhenfußpunktdreiecks $\angle M = 2\alpha'$, $\angle N = 2\beta'$, $\angle P = 2\gamma'$ ($\alpha' = 90° - \alpha$ etc.).

nicht nur Durchmesser des Umkreises des Ausgangsdreicks *ABC* und des Feuerbachschen Kreises, sondern zugleich des Inkreises des Höhenfußpunktdreiecks.

Das Höhenfußpunktdreieck *PNM* ist weder dem Dreick *ABC* noch den Dreiecken *A'B'C'* und *A''B''C''* ähnlich und parallel. Obwohl auch seine Ecken auf dem Feuerbachschen Kreise liegen, hat es andere Winkel. Es kann daher nicht durch eine zentrische Streckung aus dem Dreieck *ABC* hervorgegangen sein, denn durch eine solche wären die Winkel α, β, γ erhalten geblieben.

Übergangskonfiguration ist das rechtwinklige Dreieck. Im rechtwinkligen Dreieck *ABC* sind die Katheten *AB* und *BC* zugleich Höhen. Sie schneiden sich im rechten Winkel im Eckpunkt *B* des Dreiecks. Dieser fällt damit mit dem Höhenpunkt *E* zusammen, ist aber gleichzeitig Fußpunkt *P* der Höhe h_c und Fußpunkt *M* der Höhe h_a: $B = E = M = P$. Das Höhenfußpunktdreieck *MNP* schrumpft zur Geraden $BN = EN$ und sein Inkreisradius ist $\rho = 0$.

Benjamin Bramers Beitrag.

Benjamin Bramer (1588-1652) war der Sohn des Pastors David Bramer in Felsberg bei Kassel. Als dreijähriger Junge verlor er seinen Vater, wurde von seiner kinderlos gebliebenen, erheblich älteren Schwester an Kindes Statt angenommen und wuchs fortan in deren Familie heran. Ihr Ehemann war der verdiente und bereits von seinen Zeitgenossen hochgeschätzte Zirkelschmied, Uhrmacher und Astronom Jost Bürgi (1552-1632), als Mathematiker bekannt geworden durch die Zusammenstellung eines ersten eigenen Logarithmensystems [91].

In Bramers Lebenslauf ist nirgends die Rede vom Besuch einer Schule oder gar Hochschule. Die fehlende Hochschulbildung ist wohl auch mit ein Grund dafür gewesen, daß Bramer seine Schriften nicht in der lateinischen Universalsprache der akademischen Gemeinschaft, sondern deutsch abgefaßt und damit als Pionier gezeigt hat, daß dies auch im siebzehnten Jahrhundert sehr wohl möglich war.

Bürgi nahm die Ausbildung seines Pflegesohnes selber in die Hand und unter der Oberaufsicht dieses Mannes konnte es kaum anders kommen, als daß Bramer die Interessen seines Schwagers und Pflegevaters übernahm und weiter pflegte: Mathematik (Tabellenberechnung, Geometrie) und Instrumentenbau.

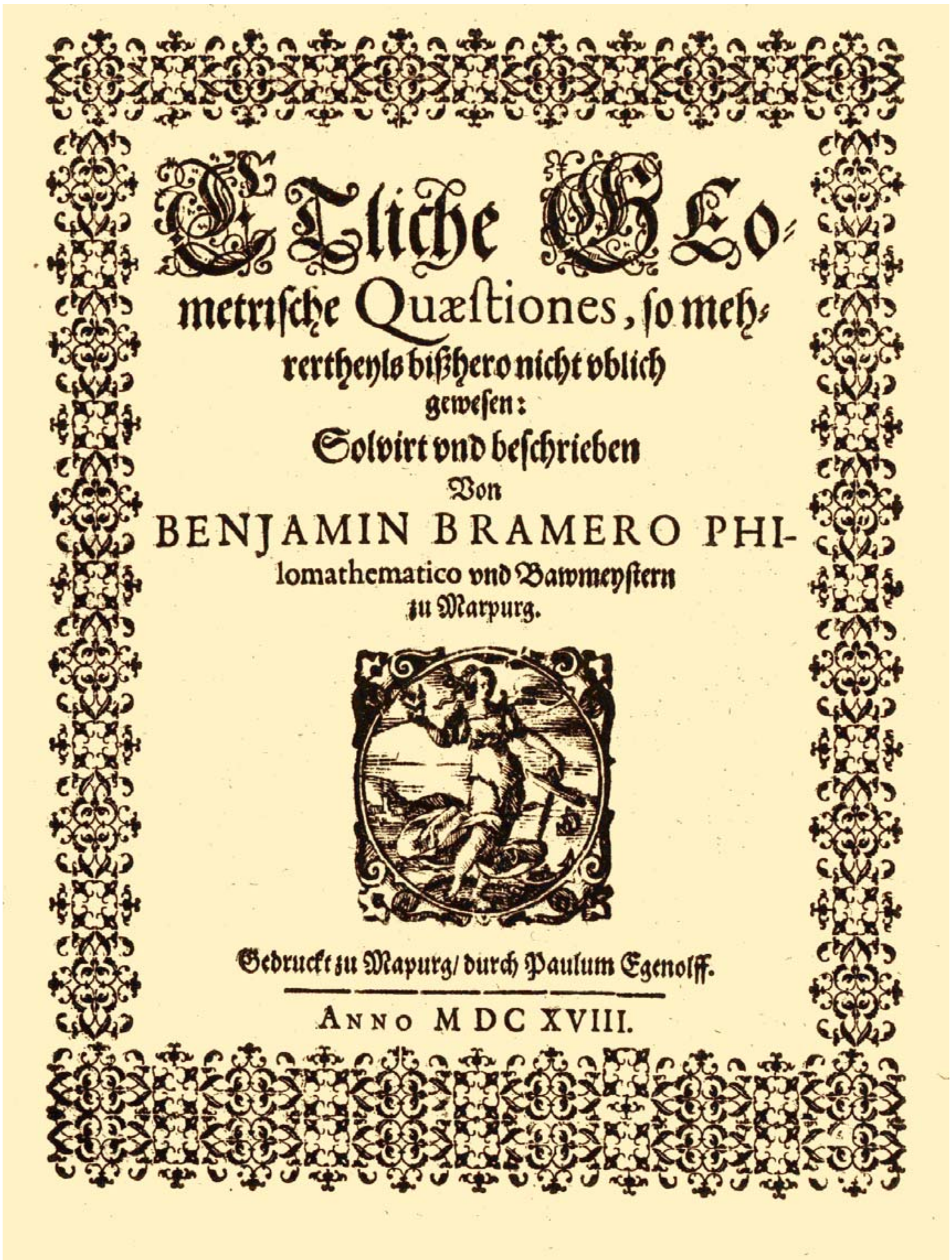
Als Bürgi 1604 in die Dienste Kaiser Rudolfs II. trat, nahm er den damals Sechzehnjährigen mit nach Prag, und man darf wohl annehmen, daß Bramer an den umfangreichen Berechnungen Bürgis für die Bearbeitung seiner Tafeln und astronomischen Beobachtungsdaten tätigen Anteil nahm.

In einer Zeit, da Lehrbücher der Geometrie gewöhnlich die Theorie der Polygone in einem Schlußkapitel *Fortificatio* im Hinblick auf optimale Festungsgrundrisse und Mauerprofile abzuwandeln pflegten, war es für Männer mit einschlägigen Kenntnissen fast zwingend, die Laufbahn eines Festungsingenieurs, allenfalls Artillerieoffiziers einzuschlagen. So auch Bramer.

Im erstaunlich jugendlichen Alter von vierundzwanzig Jahren wurde er 1612 Baumeister in Marburg im Dienste der Landgrafen von Hessen-Kassel. Der Titel Baumeister war damals gleichbedeutend mit Festungsingenieur. Bramers Mitwirkung an den Ausbauten der Festungen und Stadtbefestigungen von Rheinfels (1625), Marburg (1629) und Kassel (1630-1634) ist bezeugt. 1635 kam er in gleicher Eigenschaft, offiziell als Rentmeister und Baumeister, nach dem damals noch selbständigen Ziegenhain, wo er 1652 gestorben ist. Mehrfach erwähnt wird ein Entwurf Bramers für eine Zentralkirche in Widungen im Auftrag des Grafen Christian von Waldeck. Sie wäre, wenn nicht der erste, so doch einer der ersten sakralen Zentralbauten in protestantischen Landen gewesen. Das Projekt wurde indessen nie ausgeführt, weil nach dem Ausbruch des Dreißigjährigen Krieges 1618 für Bauingenieure und Festungsspezialisten andere Prioritäten galten.

---

[91] Vgl. Heinz Theo Lutstorf. *Die Logarithmentafeln Jost Bürgis. Bemerkungen zur Stellenwert- und Basisfrage.* Zürich, ETH-Bibliothek, 2005.


Etliche Geo-
metrische Quæstiones, so meh-
rertheyls bißhero nicht vblich
gewesen:
Solvirt vnd beschrieben
Von
BENJAMIN BRAMERO PHI-
lomathematico vnd Bawmeystern
zu Marpurg.

Gedruckt zu Mapurg/ durch Paulum Egenolff.

ANNO MDC XVIII.

Abb. 10. B. Bramer. *Geometrische Quaestiones*. Marburg, 1618. Titelblatt.

Bramer blieb auch nach seinem Weggang von Prag mit Bürgi verbunden und korrespondierte zeitlebens mit seinem Schwager und Mentor über wissenschaftliche Themen. Im Gegensatz zu Bürgi, dem mehr an der Sache selbst als an schriftstellerischem Nachruhm gelegen war, hat Bramer viel publiziert. In seinen Schriften nimmt er vielfach Bezug auf den Dialog mit Bürgi. Gelegentliche Hinweise in Bramers Schriften haben da und dort etwas Licht in Bürgis Lebenslauf gebracht, der sonst mangels Selbstzeugnissen und andern Quellen weitgehend unbekannt geblieben ist.

Bürgi bekundet dabei ein erhebliches Interesse an geometrischen Fragen, das geeignet ist, das Bild Bürgis als eines einseitigen Arithmetikers (Prosthaphaeretikers, Logarithmikers und Sinuszahlenkalkulators) zu korrigieren. Gegenstand seiner Fragen sind offensichtlich meist metrische Relationen am Dreieck, die sich durch algebraische Formeln ausdrücken lassen und so, schon vor der Erfindung der analytischen Geometrie, eine Brücke zwischen Geometrie und Algebra schlagen. Außerdem sind sie praxisorientiert und müssen Vertreter der angewandten Mathematik wie Landvermesser, Astronomen, und Bauingenieure besonders ansprechen.

Bürgis Konstruktion eines *Triangulargerätes* für Entfernungsmessungen im Gelände wurde erst 1648, sechzehn Jahre nach Bürgis Tod, von Bramer, im dritten Teil seines „Appollonius Cattus“, publiziert. Derselben Schrift verdankt man auch das einzige bekannte Portrait Jost Bürgis.

Zum Thema *merkwürdige Punkte der Dreiecke* ist Bramers Schrift:

> Etliche Geometri#che Quaestiones, #o mehrertheyls bißhero nicht vblich gewe#en: Solvirt vnd be#chrieben von Benjamin Bramero Philomathematico und Bawmey#tern zu Marpurg. Gedruckt zu Marpurg/ durch Paulum Egenolff. Anno MDCXVIII.

von Bedeutung (Abb. 10). Auf dem Titelblatt gibt er sich als Stadtbaumeister von Marburg zu erkennen und nennt sich *Philomathematicus*, Liebhaber der Mathematik. Diesen Titel – nach dem Muster von *Philosoph*, *Philologe*, *Philanthrop*, *Philogyn*, *Philhellene* u.ä. – legten sich im siebzehnten Jahrhundert viele Gleichgesinnte bei. Es gab sogar „philomathematische“ Bruderschaften, welche fast den Eindruck von Geheimbünden erweckten und deren Angehörige unter Phantasienamen miteinander verkehrten. Außerdem scheint Bramer zu glauben, für einen Großteil der von ihm behandelten Fragen das Prioritätsrecht in Anspruch nehmen zu dürfen, gibt sie im einzelnen allerdings nicht explizit preis.

Ferner geht aus Bramers Vorwort, zugleich Widmung an Bürgi (Abb. 11), hervor, daß Bürgi, der 1604 als neubestallter Kaiserlicher Kammeruhrmacher nach Prag übersiedelt war, offenbar *kurtz verwichener Zeit*, also sicher 1617, *zu Cassel* gewesen sein mußte: ein nützlicher Beitrag zu Bürgis Biographie, da über dessen Aufenthalt in Prag bzw. Rückkehr nach Kassel in der Literatur unterschiedliche Versionen im Umlauf sind. Man darf annehmen, daß Bürgi trotz der Berufung nach Prag sein Dienstverhältnis als Landgräflicher Hofuhrmacher und Astronom gar nie aufgelöst hatte, sondern vielmehr zwischen Prag und Kassel hin und her pendelte, denn 1620 wurden Bürgis Logarithmentafeln wieder in Prag gedruckt. Ohnehin war sein Prager Dienstherr, Kaiser Rudolf II., 1612 gestorben. Mitten in den Wirren des Dreißigjährigen Krieges waren anscheinend innerdeutsche Reisen durchführbar. Bramers spätere Aktivitäten fielen sogar ganz in die Zeit des Krieges. Offenbar sind, ungeachtet aktenkundiger, kriegsbedingter Zerstörungen im Deutschen Reich, gewisse kulturelle Betätigungen, einschließlich Drucklegung wissenschaftlicher Arbeiten, dennoch möglich gewesen.

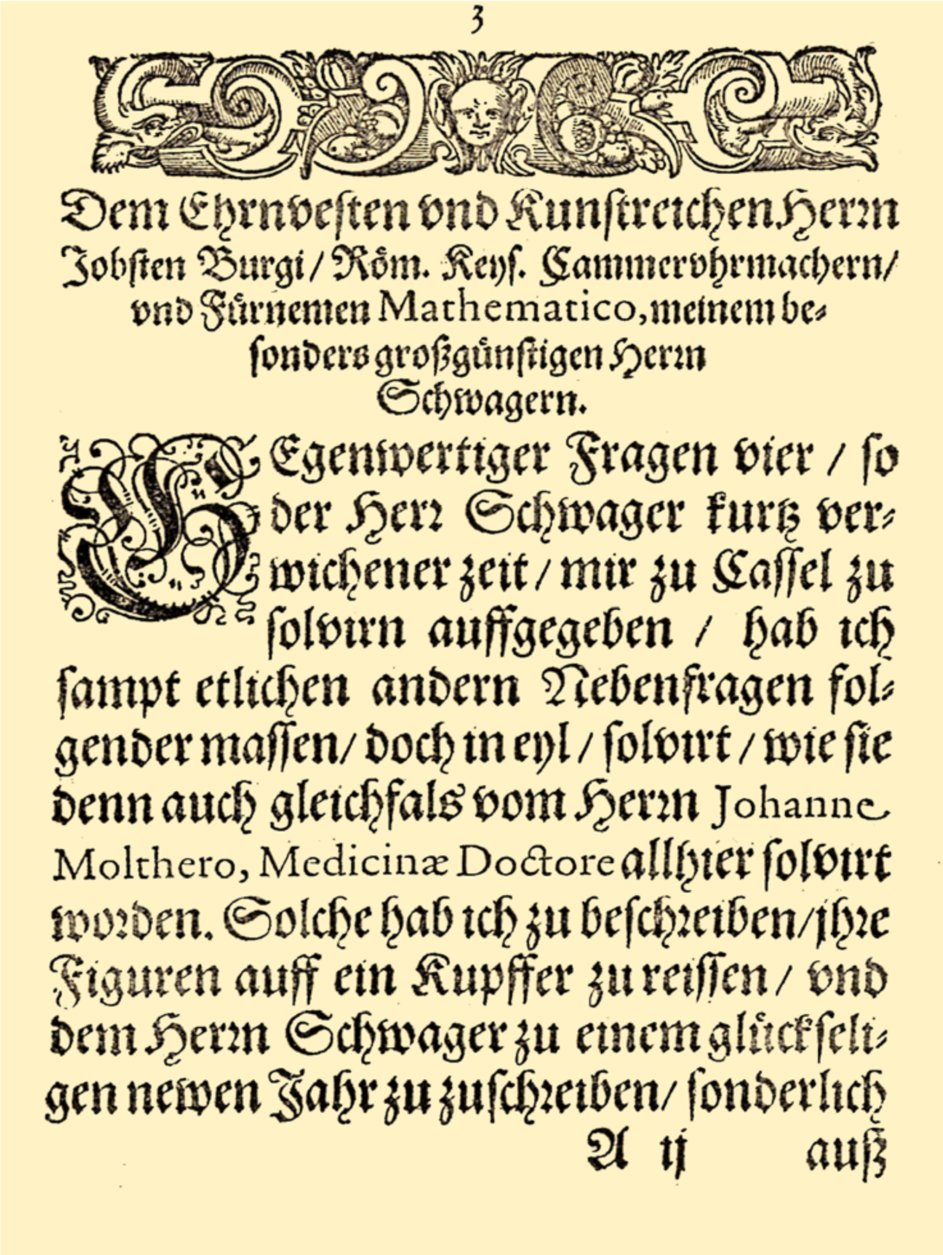
Bramers Werklein erinnert in mancher Beziehung an Eulers Studie. Da ist vorerst der fast gleich klingende Wortlaut des Titelblattes (Abb. 10). Denn Eulers unspezifische *problemata geometrica* sind ja nichts anderes als eine Übersetzung ins Lateinische von Bramers ebenso unbestimmten *Geometrischen Quaestiones*. Und, während Bramer eine Partizipialkonstruktion mit *solvirt* bevorzugt, macht Euler lediglich die *problemata* vom Verbalsubstantiv *solutio* abhängig. Indes gehen beide Wendungen auf das lateinische Verb *solvere* zurück.

Auch im Aufbau finden sich Anklänge. Bramers Abschnitte sind wie Eulers *Ziffern* durchnumeriert, allerdings als *Fragen* und mit römischen Zahlen: *Die Erste Frage*, *die II. Frage*, *die III. Frage* usw., mit nachfolgender Überschrift. Einige *Fragen* sind bloß numeriert und tragen keine Überschrift. Euler folgte anscheinend einer bewährten Tradition.

Die *Geometrischen Quaestiones* sind 1618, offenbar auf den 1. Januar und als Neujahrsgeschenk gemeint, erschienen. Bramer war damals dreißig Jahre alt. Die zukunftsweisenden Schriften Descartes (1596-1650), geschweige denn Eulers, erschienen erst viel später. Vieta (1540-1603) war zwar einiges älter, doch hatte er, der im Hauptberuf Advokat, Richter und königlicher Geheimrat war, als Liebhaber-Mathematiker seine „Erfindungen" zu Lebzeiten nur Freunden mitgeteilt. Erst durch Frans van Schootens des Jüngeren Edition (1646) wurden Vietas Werke einer breiteren Öffentlichkeit bekannt.

Bramer kennt demzufolge die modernen Notationsverfahren noch nicht und bleibt ganz der mittelalterlichen Verbalmathematik verhaftet. In Überschriften und Aufzählungen werden Zahlen mit römischen Zahlzeichen geschrieben, in Rechnungen hingegen mit arabischen Ziffern. Grundsätzlich erhalten Zahlzeichen in Texten einen Schlußpunkt, wie dies – in deutschen Texten – heute noch mit Ordinalzahlen geschieht. Ordinal- und Kardinalzahlen werden in Bramers Schrift im Text nicht differenziert. In Zeichnungen werden konkrete Längen hingegen auch durch bloße Ziffern ohne Punkt – ganze Zahlen, Brüche oder gemischte Zahlen – bezeichnet. Dezimalbrüche sind noch nicht üblich.

Bramer benutzt Buchstabensymbole nur in geometrischen Figuren und in Beziehung auf solche. Majuskeln bezeichnen Eckpunkte von Dreiecken, Minuskeln auch andere. Ein Umlaufsinn bei Figuren ist nicht normiert. Die Buchstaben folgen sich, sogar bei sonst gleichen (kongruenten) Figuren, bald „links-" bald „rechtsherum".


3

Dem Ehrnvesten vnd Kunstreichen Herrn
Jobsten Burgi / Röm. Keyß. Cammervhrmachern /
vnd Fürnemen Mathematico, meinem be-
sonders großgünstigen Herrn
Schwagern.

Gegenwertiger Fragen vier / so
der Herr Schwager kurtz ver-
wichener zeit / mir zu Cassel zu
solvirn auffgegeben / hab ich
sampt etlichen andern Nebenfragen fol-
gender massen / doch in eyl / solvirt / wie sie
denn auch gleichfals vom Herrn Johanne
Molthero, Medicinæ Doctore allhier solvirt
worden. Solche hab ich zu beschreiben / jhre
Figuren auff ein Kupffer zu reissen / vnd
dem Herrn Schwager zu einem glückseli-
gen newen Jahr zu zuschreiben / sonderlich
A ij auß

Abb. 11. Erste Seite des Vorworts mit Widmung an Bürgi.

Benennungen von Streckenlängen werden durch Digramme bestehend aus den Buchstaben für die Anfangs- und Endpunkte der Strecken gebildet: *AB*, *BC*, *AC*, *hg*, *gf*, *de*, *hf* usw. Längenangaben durch Kleinbuchstaben, wie heute üblich, fehlen. Dabei handelt es sich immer nur um absolute Streckenlängen. Die Vorstellung eines Durchlaufsinns – positive und negative Strecken – fehlt noch.

Auch Symbole zur Bezeichnung von Operatoren, +, –, / usw., sind Bramer unbekannt. Mathematische Sachverhalte kann er daher nicht durch Formeln ausdrücken. Er ist gezwungen, auf Wörter und Sätze der Alltagssprache zurückzugreifen, um Größenbeziehungen oder Prozesse in Gestalt von Prosatexten zu formulieren. Die Prädikate stehen oft im Imperativ: *Addir*, *subtrahir*, *dividir* usw. an Stelle von +, –, /.

Die Verben für die vier Grundoperationen regieren im allgemeinen dieselben Casus bzw. Präpositionen wie heute. Das Verb *addiren* ist transitiv; neben *subtrahiren von* findet man auch *nehmen von*; neben *dividiren durch* auch *dividiren mit* oder *dividiren in*. Beim Verb *multipliciren* wird neben der Präposition *mit* alternativ noch das alte *in* verwendet:

Multiplicire nun AF 7. in AC 27. kompt 189. (II. Frage) usw.

Die Variationsbreite der Ausdrucksformen zur Angabe von Gleichheiten an Stelle des bequemen Gleichheitszeichens erreicht beinahe literarische Qualität: iſt, bleibet, kompt usw.

Mathematische Sachverhalte in Prosatexten darstellen ist mühsam. Nicht minder Mühe bereitet aber auch das Studium solcher Texte, mindestens für heutige Leser. Man muß den Bleistift zur Hand nehmen, um Bramers Operanden zu isolieren und in lesbarer Form zu notieren. Nichts kann den gewaltigen Fortschritt, den die Einführung der mathematischen Formelsprache gebracht hat, überzeugender belegen als Bramers vertrackte, schwer verständliche Texte, die Rechen- und Überlegungsfehlern geradezu Vorschub leisteten.

Bramers Prosatexte erinnern an Kochrezepte: Addir ... und ..., dividir das Kommende durch ... bleibet ... usw. In seiner geometrischen Welt nehmen Euklids *Elemente* immer noch eine beherrschende Stellung ein. Anstatt selber zu argumentieren, darf er es sich erlauben, einfach auf den einschlägigen Artikel in *Euklid* hinzuweisen:

> vnd iſt ſolches bey Euclide in der 12. vnd 13. propos. II vnd andern genugſam demonſtrirt. (II. Frage) u.ä.m.

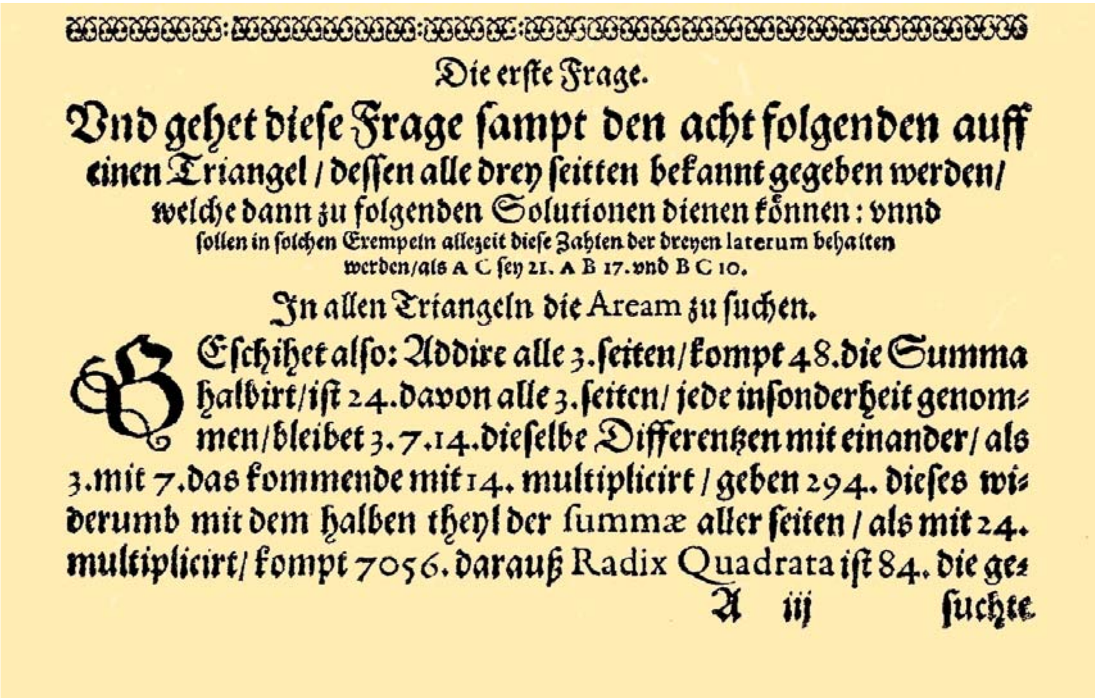
Offenbar ist Euklid für Bramers Leser gleichsam tägliche Routine.

Mathematische Gesetzmäßigkeiten sollen nach heutigem Empfinden *allgemeingültig* formuliert sein und nicht nur auf einzelne konkrete Fälle zutreffen. Operanden werden deshalb in Formeln als *Variable* mit Hilfe von Buchstaben notiert.

Nicht so Bramer. Er argumentiert mit einem Dreieck, dessen Seiten nicht nur bekannt sein, sondern konkret $AB = 17$, $BC = 10$ und $CA = 21$ messen sollen (Abb. 13), wobei die Bezeichnungen sogar permutierbar sind, ist sein Musterdreieck doch bald links-, bald rechtsherum orientiert. Immerhin argumentiert er so, daß auch andere Zahlen zulässig bleiben und aus seinen Rezepten dennoch allgemeingültige Formeln herausgefiltert werden können. Die Seitenlängen 10, 17, 21 der Demonstrationsfigur sind sorgfältig gewählt, nämlich so, daß nach Möglichkeit keine Wurzeln auftreten und weitgehend mit rationalen Zahlen (Brüchen) und sogar ganzen Zahlen gerechnet werden kann.

Bramers *Geometrische Quaestiones* Dreiecke betreffend behandeln die Grundaufgaben, die auch **Euler** in den Ziffern 5 bis 9 benutzt, um die Dreiecksfläche *A* und die Koordinaten der vier „merkwürdigen Punkte“ *E* (Höhenpunkt), *F* (Schwerpunkt), *G* (Inkreismittelpunkt) und *H* (Umkreismittelpunkt) zu berechnen. Sie sind seit alters aus den *Elementen* Euklids bekannt, auf die daher oft verwiesen wird. Auch Euler erinnert mehrfach an Euklid: *ex elementis constat fore*; *ex elementis constat esse*; oder *ex natura circuli liquet fore* u.ä.m.

Bramers ***Erste Frage*** rechnet vor, wie aus den Seitenlängen eines Dreiecks dessen Flächeninhalt *A* berechnet wird (Abb. 12). Seine Rechenvorschrift ist eine verbale Beschreibung der Formel (2d), Seite 32, mit *s* gleich dem halben Dreiecksumfang, hier indessen ohne Herleitung oder Verweis auf Euklid oder Heron.


Die erſte Frage.

Vnd gehet dieſe Frage ſampt den acht folgenden auff einen Triangel / deſſen alle drey ſeitten bekannt gegeben werden / welche dann zu folgenden Solutionen dienen können: vnnd ſollen in ſolchen Exempeln allezeit dieſe Zahlen der dreyen laterum behalten werden / als A C ſey 21. A B 17. vnd B C 10.

In allen Triangeln die Aream zu ſuchen.

GEſchihet alſo: Addire alle 3. ſeiten / kompt 48. die Summa halbirt / iſt 24. davon alle 3. ſeiten / jede inſonderheit genommen / bleibet 3. 7. 14. dieſelbe Differentzen mit einander / als 3. mit 7. das kommende mit 14. multiplicirt / geben 294. dieſes widerumb mit dem halben theyl der ſummæ aller ſeiten / als mit 24. multiplicirt / kompt 7056. darauß Radix Quadrata iſt 84. die ge-

A iij ſuchte

Abb. 12. Bramers *erste Frage*: Berechnung des Dreiecksinhalts aus den Seitenlängen.

Nach Formel (2d) ist die Fläche *A* eine Funktion der Dreiecksseiten *a*, *b*, *c* allein. Mit Bramers Längen für die Dreiecksseiten *a*, *b*, *c* ergibt das Produkt (2d) ein vollständiges Quadrat. Die Fläche *A* als Quadratwurzel ist daher rational, sogar ganz, nämlich *A* = 84.

Als Alternative liefert das Produkt der Seite *AC* mit der Höhe *BD*, ſo mans hatt, die doppelte Fläche 2*A*. Der Fußpunkt *D* der Höhe h_b = *BD* des Dreiecks ist bald mit großem *D*, bald mit kleinem *d* geschrieben. Die *erste Frage* wird durch Fig. 1 illustriert (Abb. 13) und schließt mit der Korrektur: N.B. In der 1. Figur liſe für 71. zwiſchen FA 17. Allerdings sollte statt „zwiſchen FA“ „zwiſchen FB“ stehen.

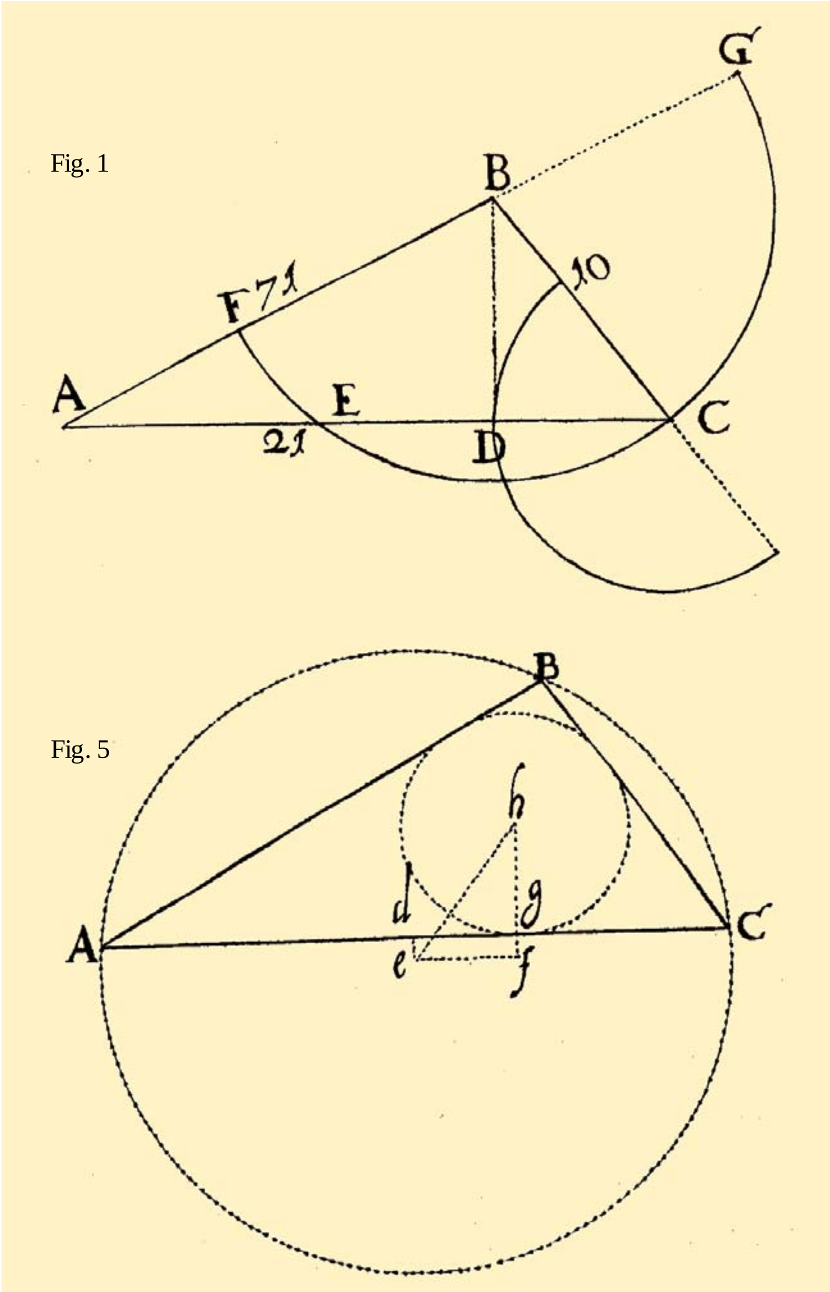


Abb. 13. Bramers Figuren 1 und 5 mit dem Demonstrationsdreieck ABC. Die Bezeichnungen der Eckpunkte sind rechtsherum orientiert. In Fig. 1 korrigiere 71 zu 17.

Auf den Stempeln von Holzschnitten oder Kupferstichen müssen Beschriftungen in Spiegelschrift eingeritzt werden. Dem Kupferstecher ist der Fehler unterlaufen, dies in Figur 1 bei der Seite *AB* übersehen und so deren Länge als 71 statt 17 angegeben zu haben.

Die ***zweite Frage*** befaßt sich mit der Berechnung der Projektion der Seite *AB* auf die Seite *AC* (Abb. 13). Euler benötigt dieselbe Distanz vom Eckpunkt *A* des Dreiecks zum Fußpunkt *P* der Höhe *CP* als Abszisse des Höhenpunktes *E* (Eulers Fig. 1, Seiten 9 und 71). Die Strecke $p = AP$ ist oben mit Hilfe der Abb. 1, Seite 30, als Hilfsgröße für die Herleitung der Heronschen Flächenformel berechnet worden. Bramers verbale Rechenvorschrift beruht auf derselben Formel. An Stelle eines Beweises verweist er auf die 12. und 13. Proposition im zweiten Buche Euklids. Bramers sinnreich gewählte Seitenlängen ergeben für die Länge der Projektion von *AB* auf *AC* (in Bramers Figur 1 $AD \subset AC$) die ganze Zahl 15.

Eine alternative Vorschrift zur Berechnung der Projektion *AD* darf füglich als kleiner Geniestreich gewertet werden. Denkbar ist, daß hinter Bramers Überlegungen ein Denkanstoß seitens Bürgis steht; denn dieser hat für seine Sinuszahlenberechnungen den bekannten Satz des Ptolemäus für einen ähnlichen Kunstgriff benutzt [92].

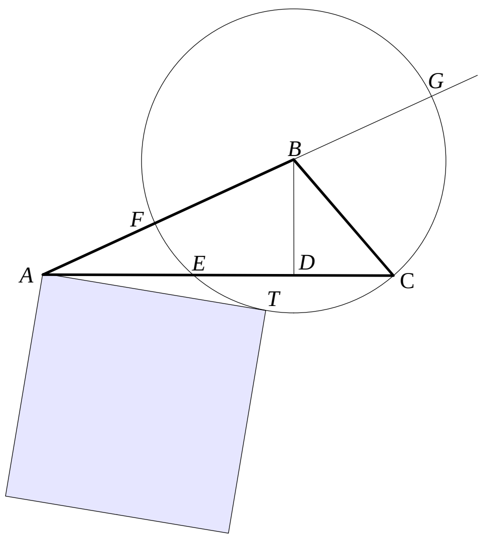


Abb. 14. Zur Berechnung der Projektion AD.

Ausgehend vom Dreieck *ABC* (Abb. 13 und 14), rechtsherum bezeichnet, wählt Bramer den Eckpunkt *B* als Mittelpunkt eines Kreises mit dem Radius $r = BC = 10$. Ferner verlängert er die Seite *AB* bis zum Schnittpunkt *G*. Die Seiten *AB* und *AC* des Dreiecks schneiden diesen Kreis in den Punkten *F* und *E*, da beide länger als $BC = 10$, $AC = 21$ sogar länger als der Durchmesser $2r = 20$, sind.

[92] Sind die Schenkel *b*, *d* gleich der Parallelen *c* der Grundlinie *a* eines Kreistrapezes (Antiparallelogramms), sind dessen Diagonalen *e*, *f* und die Zentriwinkel β, γ, δ über den Sehnen *b*, *c*, *d* gleich: $e = f$ und $\beta = \gamma = \delta$. Der Satz des Ptolemaeus $ef = ac + bd$ wird zu $e^2 = f^2 = ab + b^2$. Es gilt die Identität $a \sin\alpha = b \sin 3\alpha$ (α = Winkel zwischen Diagonale und Schenkel), die den Sinus des dritten Teils eines Winkels in Beziehung zum Sinus des ganzen Winkels setzt. Noch in Unkenntnis der unendlichen konvergenten Reihen benutzte Bürgi die Identität für die Berechnung seiner hypergenauen Sinustafeln. Diese hätten ein Hilfsmittel für das prosthaphäretische Rechnen werden sollen. Bürgis wesentlich einfacher zu berechnende Logarithmen waren indessen vielseitiger verwendbar und daher mehr als ein Ersatz für die verloren gegangenen Sinustafeln.

Dadurch entsteht die Figur des Sekantensatzes, und zwar des Sonderfalls, in welchem eine Sekante zugleich Kreisdurchmesser ist. Laut Sekantensatz sind die Produkte $AF \cdot AG$ und $AE \cdot AC$ gleich:

$$(\alpha) \qquad AF \cdot AG = AE \cdot AC\,.$$

Der Wert (α) ist nur abhängig vom Kreisradius r und vom Abstand AB des Sekantenschnittpunktes A vom Kreismittelpunkt B. Verändert man r und AB nicht, bleibt der Wert unverändert, wenn bei fester Sekante AG die Sekante AC um A gedreht wird. Dabei wandern die Punkte E und C auf der Kreisperipherie. Fallen sie im Punkte T zusammen, wird $AE = AC = AT$ zur Tangente und das Produkt der Sekantenabschnitte wird zum Quadrat AT^2 über der Tangente AT (blaues Quadrat in Abb. 14). Die Produkte (α) als Rechtecke aufgefaßt sind dem Tangentenquadrat flächengleich, selbst wenn die Sekante AG nicht durch den Mittelpunkt B läuft. Diese Gleichheit ist für jede von A ausgehende Sekante konstant und heißt nach Jakob Steiner von Utzenstorf *Potenz des Punktes A bezüglich des Kreises* (B; $r = BC$).

Die Faktoren der Produkte (α) sind dank Bramers Vorgaben bis auf AE bekannt. Mit Hilfe der Eulerschen Kurzbezeichnungen $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ (Zif. 5, Seiten 8 und 68) sind $AF = c-a$, $AG = c+a$ und $AC = b$, woraus Bramer

$$(\beta) \qquad AE = \frac{(c-a)(c+a)}{b} = \frac{c^2 - a^2}{b}$$

errechnet. Die Differenz $AC-AE = EC$ ist eine Sehne des Kreises (B; $r = BC$). Die Höhe BD des Dreiecks ABC ist zugleich eine Senkrechte vom Mittelpunkt B auf die Sehne EC, ihr Fußpunkt D ist daher Mittelpunkt der Strecke EC. Schließlich ist die gesuchte Strecke AD:

$$(\gamma) \qquad AD = AE + \tfrac{1}{2}EC = AE + ED\,.$$

An Stelle eines Beweises wird auf die 36. Proposition im dritten Buche Euklids verwiesen.

Eine dritte Rechenvorschrift ist nichts wirklich Neues: Man quadriere a und c, subtrahiere a^2 von c^2, dividiere das Ergebnis durch b, um AE zu erhalten, und fahre fort gemäß Formeln (β) und (γ). Mit Bramers Zahlen erhält man für die Projektion $p = AD$ auch mit dieser Vorschrift wie oben das ganzzahlige Ergebnis 15:

$$(289 - 100)/21 = 189/21 = 9,\ (21 - 9)/2 = 6 \text{ und } 9+6 = 15\,.$$

Die ***dritte Frage*** behandelt die Berechnung der Höhe BD (Abb. 13). Euler benötigte die Längen der Höhen $AM = h_a$ und $CP = h_c$ als Hilfsgrößen für die Berechnung der Koordinaten der Punkte E, F und H (Zif. 6 bis 9, Seiten 9, 10, 71-82). Bramer benutzt dieselbe Formel wie Euler, nämlich Division der *doppelten Aream A durch die Basin* AC, konkret $BD = (2 \cdot 84)/21 = 8$, wieder eine ganze Zahl.

Eine Alternative ist die Anwendung des pythagoräischen Lehrsatzes auf die Dreiecksseiten AB, BC und deren Projektionen AD und DC, die in der zweiten Frage vorgerechnet worden sind. Nach der 47. Proposition in Euklids 1. Buch sind, sobald *AD* oder *DC* bekannt sind:

$$BC^2 - DC^2 = BD^2 \quad \text{oder} \quad \text{deren } \textit{radix quadrata} \quad BD\,.$$

Die dritte Variante, die Faktorisierung der Differenz $BC^2 - DC^2$ zu

$$BC^2 - DC^2 = (BC + DC)(BC - DC) = BD^2\,,$$

führt auf den Tangentensatz zurück. Der zugehörige Kreis k ist $k\,(C;\, r = DC)$, die Sekante $BC + DC = BC + r$ und die Tangente *BD*.

Den Schluß der *dritten Frage* bildet eine Analyse des Sonderfalls der stumpfwinkligen Dreiecke, in welchen zwei Höhen außerhalb des Dreiecks liegen.

In der ***vierten Frage*** wird die Länge des Durchmessers des Umkreises des Dreiecks *ABC* vorgerechnet. Bramer verweist auf die 31. und 41. Proposition des dritten Buches von Euklid. Seine Überlegungen fußen auf der Fig. 4a, Seite 78. Die Winkel bei *A* und *B*, mit Eulers Bezeichnungen, sind Peripheriewinkel über dem Durchmesser und daher rechte. Die rechtwinkligen Dreiecke *PBC* und *DCA* sind ähnlich und enthalten die vorgegebenen Seiten *AC* und *AB* des Demonstrationsdreiecks neben dem Durchmesser *CD* des Umkreises. Die Höhe *CP* des Dreiecks *ABC* kann gemäß der dritten Frage berechnet werden. Bramer leitet daraus, mit seinen Bezeichnungen, die Länge *Bg* des Durchmessers ab:

$$Bg = \frac{AB \cdot BC}{Bd}\,.$$

Bramers Zahlenbeispiel liefert dazu $\frac{170}{8} = 21\frac{1}{4}$ für die Länge des Durchmessers. Der Umkreisradius r muß daher $r = 10\frac{5}{8} = \frac{85}{8}$ betragen.

Die ***fünfte Frage*** untersucht, wann der Umkreismittelpunkt außerhalb, wann innerhalb des Dreiecks *ABC* liegt. Als Kriterium dient der Satz des Pythagoras: Wenn die Summe der Quadrate der beiden kleineren Seiten gleich dem Quadrat der größten Seite ist, ist das Dreieck rechtwinklig, die größte Seite ein Durchmesser, und der Umkreismittelpunkt ist die Mitte der größten Seite. Ist die Summe kleiner als das Quadrat der größten Seite, liegt der Umkreismittelpunkt außerhalb, andernfalls innerhalb. Zum Fall der Gleichheit wird auf die 31. Proposition des dritten Buches Euklids und auf die 47. Proposition des ersten Buches verwiesen. Auf eigene Beweise wird verzichtet.

Gegenstand der ***sechsten Frage*** sind die Abstände des Umkreismittelpunkts von den drei Seiten des Dreiecks. Bramer verweist auf die 1. Proposition des dritten Buches Euklids, wonach die Lote vom Mittelpunkt auf die Seiten dieselben halbieren. Der gesuchte Abstand läßt sich daher mit Hilfe des Satzes von Pythagoras aus dem Kreisradius und der halben Dreiecksseite berechnen. Die Dreiecksseite ist vorgegeben, der Kreisradius gemäß der vierten Frage aus den Seitenlängen berechenbar.

Euler benötigt den Abstand des Kreismittelpunkts von der Dreiecksseite *AB*, die ja Abszissenachse seines Koordinatensystems ist, als Ordinate des Mittelpunkts (vgl.

Fig. 4 und 4a, Seite 78). Der gesuchte Abstand *HS* ist Kathete in einem von zwei ähnlichen Dreiecken, so daß er durch eine Proportion bestimmbar ist. Wie Bramers Verfahren auf Eulers Formel führt, ist oben auf den Seiten 79 und 80 vorgerechnet worden.

In Bramers Demonstrationsdreieck ist die Ordinate des Mittelpunkts *de* (bei Euler *SH*) $de = -\left(\frac{13}{8}\right) = -1\frac{5}{8}$, negativ, da unterhalb der Basis *AB* gelegen.

Mit Bramers Beispiellängen und als Kathete eines pythagoräischen Dreiecks berechnet ist

$$de^2 = r^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{85}{8}\right)^2 - \left(\frac{21}{2}\right)^2 = \frac{169}{64} = \left(\frac{13}{8}\right)^2$$

ein vollständiges Quadrat, *de* selbst also rational.

In der ***siebenten Frage*** berechnet Bramer den Radius des Inkreises $\rho = hg$ (Fig. 5 in Abb. 13) als Funktion der Seitenlängen. Die zugrundeliegende Funktionsformel ist dieselbe, die Euler in Zif. 8, Seiten 10 und 76, benutzt: der Inkreisradius ist der Quotient, wenn die *Area trianguli durch die halbe summa laterum dividirt* wird. Sowohl *Area trianguli* wie *summa laterum* sind Funktionen der Seitenlängen. Mit Bramers Zahlen ergibt sich für den Inkreisradius $hg = \frac{84}{24} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$.

Laut der 4. Proposition des vierten Buches von Euklid sind die Verbindungsgeraden vom Inkreismittelpunkt zu den Dreiecksecken Winkelhalbierende der Dreieckswinkel. Sie trennen rechtwinklige kongruente Dreiecke, deren eine Kathete zugleich Höhe und Kreisradius ist. Alle bisher erarbeiteten Formeln Bramers und Eulers sind Funktionen der Dreiecksseiten *a*, *b*, *c* allein, aber einzig die Formel zur Berechnung des Radius des Inkreises ist eine symmetrische Funktion. Dies deshalb, weil die Ordinate des Inkreismittelpunkts immer ein Radius des Kreises ist und deshalb stets gleich lang sein muß, gleichgültig welche Dreiecksseite als Abszissenachse gewählt wird.

Die ***achte Frage*** erforscht die Berührungspunkte des Inkreises. Laut Bramers Figur 4 sind diese $f \in AB = c$, $g \in BC = a$, $h \in AC = b$. Die Strecke $x = Af \subset AB$ ist zugleich die Abszisse *AR* des Inkreismittelpunktes in Eulers Koordinatensystem. Die Berechnungsformeln sind identisch bei beiden Autoren. Die Dreiecksseiten sind Tangenten des Inkreises. Mit $x = Af = hA$, $y = fB = Bg$, $z = gC = Ch$ ergeben sich

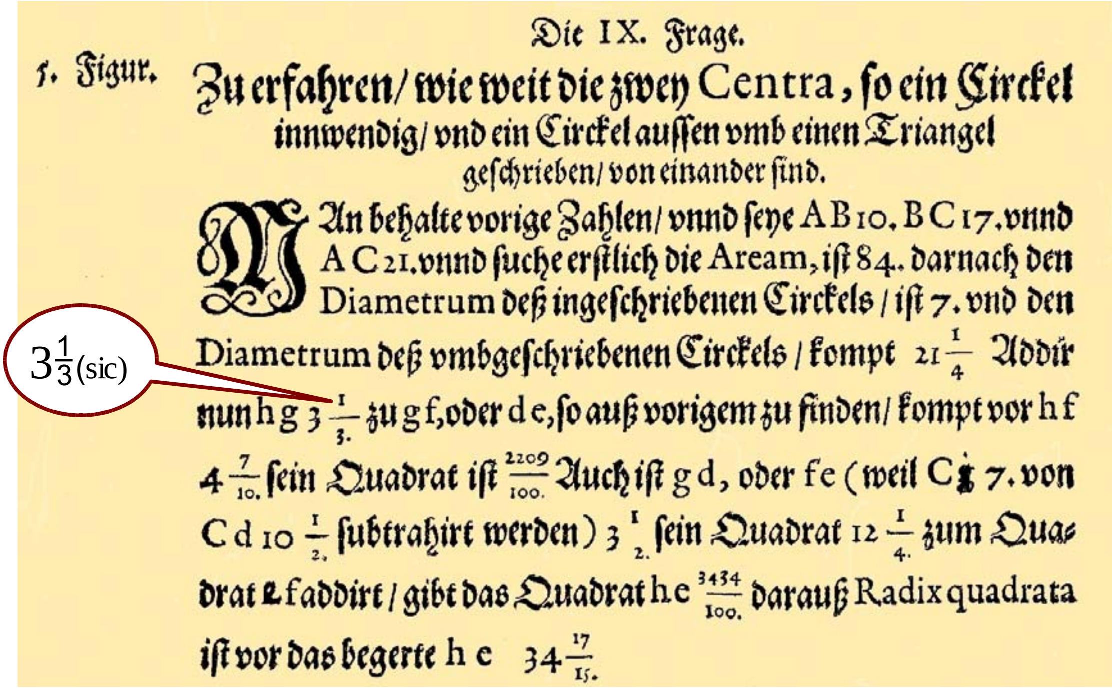
$$x + y = c, \quad y + z = a, \quad z + x = b,$$

woraus

$$\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{c+b-a}}{2} . \qquad \text{(Zif. 8 bei Euler)}$$

Die Eulersche Dreieckskonstruktionsaufgabe benötigte als Vorgaben die relativen Entfernungen der *merkwürdigen Punkte E, F, G, H* voneinander. Bramer hat in seiner ***neunten Frage*** die Berechnung der Entfernung *he* (bei Euler *GH*) der Mittelpunkte *h*

(Euler *G*) des Inkreises und *e* (Euler *H*) des Umkreises eines Dreiecks voneinander vorweg genommen.



Die IX. Frage.

5. Figur. Zu erfahren/ wie weit die zwey Centra, so ein Circkel innwendig/ vnd ein Circkel aussen vmb einen Triangel geschrieben/ von einander sind.

Man behalte vorige Zahlen/ vnnd seye AB 10. BC 17. vnnd AC 21. vnnd suche erstlich die Aream, ist 84. darnach den Diametrum deß ingeschriebenen Circkels / ist 7. vnd den Diametrum deß vmbgeschriebenen Circkels / kompt $21\frac{1}{4}$ Addir nun hg $3\frac{1}{3.}$ zu gf, oder de, so auß vorigem zu finden/ kompt vor hf $4\frac{7}{10.}$ sein Quadrat ist $\frac{2209}{100.}$ Auch ist gd, oder fe (weil Cg 7. von Cd $10\frac{1}{2.}$ subtrahirt werden) $3\frac{1}{2.}$ sein Quadrat $12\frac{1}{4.}$ zum Quadrat ef addirt / gibt das Quadrat he $\frac{3434}{100.}$ darauß Radix quadrata ist vor das begerte he $34\frac{17}{15.}$

Abb. 15. Bramers IX. Frage. Zur Übereinstimmung mit Fig. 5 (Abb. 13) müssen die Maßzahlen der Strecken *AB* und *BC* vertauscht werden. Man beachte: $hg = 3\frac{1}{3}$ statt $3\frac{1}{2}$, $hf = hg + gf = 3\frac{1}{3} + 1\frac{5}{8} = 4\frac{7}{10}$ statt $4\frac{23}{24}$ und $he = \sqrt{\frac{3434}{100}} = 34\frac{17}{15}$!

Die Entfernung der Punkte *G* und *H* voneinander ist Gegenstand der Zif. 17 in Eulers Studie (Seiten 16 und 107-112). Eulers Rechenvorschrift ist, wie immer, eine symmetrische Funktion der Dreiecksseiten *a*, *b*, *c*. Die Entfernung ist nur abhängig von der Konfiguration des Dreiecks und gegenüber Drehungen des Dreiecks, d.h. auch gegenüber Vertauschungen der Variablen *a*, *b*, *c*, invariant.

Bramers Text lautet:

Die IX. Frage.

Zu erfahren / wie weit die zwey Centra, #o ein Circkel innwendig / vnd ein Circkel au##en vmb einen Triangel ge#chrieben / von einander #ind.

Man behalte vorige Zahlen vnnd #eye AB 10. BC 17. vnnd AC 21. vnnd #uche er#tlich die Aream, i#t 84. darnach den Diametrum deß inge#chriebenen Circkels / i#t 7. vnnd den Diametrum deß vmbge#chriebenen Circkels / kompt $21\frac{1}{4}$. Addir nun hg $3\frac{1}{3}$.[sic!] zu gf, oder de, #o auß vorigem zu finden / kompt vor hf $4\frac{7}{10.}$ [sic!] #ein Quadrat i#t $\frac{2209}{100.}$ Auch i#t gd, oder fe (weil Cg 7. von Cd $10\frac{1}{2}$. #ubtrahirt werden) $3\frac{1}{2}$. #ein Quadrat $12\frac{1}{4}$. zum Quadrat ef addirt / gibt das Quadrat he $\frac{3434}{100.}$ darauß Radix quadrata i#t vor das begerte he $34\frac{17}{15.}$ [sic!].

Bramers Fig. 5 (Abb. 13, Seite 207) zeigt das (stumpfwinklige) Demonstrationsdreieck *ABC*. Die Eckpunkte sind rechtsherum orientiert. Der Buchstabe *B* bezeichnet den stumpfen Winkel. Die Seiten – mit Eulers Kurzbezeichnungen *a*, *b*, *c* – haben die konkreten Längen $a = BC = 10$, $b = AC = 21$ und $c = AB = 17$.

Mit kleinen Buchstaben sind die „merkwürdigen Punkte" *d*, *e*, *f*, *g*, *h* im Innern des Umkreises bezeichnet:

d	Mitte der Seite *AC*,
e	Mittelpunkt des Umkreises von *ABC*,
f	Ecke des Parallelogramms *defg*,
g	Berührungspunkt der Tangente *AC* und des Inkreises,
h	Inkreismittelpunkt.

In der Zeichnung fehlt der Umkreisradius $r = Ae$. Die Figur *hef* ist ein bei *f* rechtwinkliges Dreieck. Die gesuchte Entfernung *he* ist dessen Hypotenuse und daher mit Hilfe des Satzes von Pythagoras berechenbar, sofern die Katheten bekannt sind:

$$he^2 = ef^2 + hf^2 .$$

Die Kathete *ef* ist offensichtlich gleich der Strecke *dg*, da die Figur *defg* ein Rechteck ist. Die Strecke *dg* ist gleich der Differenz $Ag - Ad$. Ihre Länge kann aus den Dreiecksseiten berechnet werden, wie Bramer in Frage VIII gezeigt hat. *Ag* ist der Tangentenabschnitt $x = \frac{1}{2}(b+c-a)$ und $Ad = \frac{1}{2}b$ gleich der halben Seite *AC*. Die Differenz *dg* ist folglich $dg = \frac{1}{2}(c-a)$ und mit Bramers Zahlen $dg = \frac{1}{2}(17-10) = \frac{7}{2}$.

Die Kathete *hf* setzt sich zusammen aus Inkreisradius $\rho = hg$ und Abstand $gf = de$. Letzterer kann mit Hilfe des Satzes von Pythagoras aus dem Umkreisradius *r* und der halben Dreiecksseite $Ad = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}b$ berechnet werden. Bramers Zahlenbeispiel ergab für den Inkreisradius $\rho = \frac{7}{2}$, für den Umkreisradius $r = \frac{85}{8}$:

$$hf = hg + gf = hg + de = \rho + \sqrt{r^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{7}{2} + \sqrt{\left(\frac{85}{8}\right)^2 - \left(\frac{21}{2}\right)^2} = \frac{41}{8} .$$

Der Radikand ist ein vollständiges Quadrat, die Wurzel rational.

Damit wird der gesuchte Abstand *he* zwischen den beiden Kreismittelpunkten:

$$he^2 = ef^2 = hf^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{41}{8}\right)^2 = \frac{2465}{64} = 38{,}515625 ,$$

und der lineare Abstand beträgt: $he = \sqrt{38{,}515625} =$

6,206095794 .

In der Zif. 17 hat Euler denselben Abstand – mit seinen Bezeichnungen *GH* – untersucht und dabei die Rechenvorschrift

$$GH^2 = \frac{r^2}{16A^2} - \frac{r}{p}$$

gefunden, wo r das Tripelprodukt $r = abc$, p die Summe $\Sigma a = a+b+c$ der drei Dreiecksseiten und A den Flächeninhalt des Dreiecks ABC bedeuten. Mit Bramers Beispielzahlen erhält man dafür:

$$\begin{array}{lcll} r & = & abc & = 10\cdot 17\cdot 21 = 3570 \\ p & = & a+b+c & = 10+17+21 = \quad 48 \\ A & = & & \qquad\qquad\quad = \quad 84 \end{array}$$

und $$GH^2 = \frac{r^2}{16A^2} - \frac{r}{p} = \frac{3570^2}{16\cdot 84^2} - \frac{3570}{48} = 38{,}515625$$

bzw. $$\boldsymbol{GH = 6{,}206095794}\ .$$

Die verschiedenen Ansätze Eulers und Bramers führen mit Bramers Beispielzahlen zu einem identischen Ergebnis, das überdies durch eine maßstabgetreue Zeichnung bestätigt wird. Die Überlegungen beider Autoren sind nachvollziehbar und werden offenbar durch das numerische Ergebnis als korrekt ausgewiesen. Umso erstaunlicher ist es, daß die Rechnungen, die Bramer selbst in seiner *neunten Frage* vorführt, zu ganz widersinnigen Resultaten kommen.

Dies beginnt schon mit den Ausgangsgrößen. Bramer führt zuerst sein bewährtes Beispieldreieck ein, in welchem allerdings die Maßzahlen der Seiten AB und BC zwecks Übereinstimmung mit Fig. 5 in Abb. 13 vertauscht werden müssen. Der Flächeninhalt A ergibt sich aus der in der *ersten Frage* beschriebenen Formel als $A = 84$. Danach folgen die Durchmesser 2ρ und $2r$ des In- und des Umkreises, die in *Frage* VII und *Frage* III als $2\rho = 7$ und $2r = 21\frac{1}{4}$ soweit korrekt berechnet worden sind. Doch jetzt soll der Inkreisradius $\rho = hg$ (Fig. 5 in Abb. 13) als $hg = 3\frac{1}{3}$ statt $3\frac{1}{2}$ zu $gf = de$ addiert werden. Laut *Frage* VI ist die Strecke $gf = de = \frac{13}{8}$, folglich

$$hf = hg + gf = 3\tfrac{1}{3} + 1\tfrac{5}{8} = \frac{119}{24} < 5,$$

nach Bramer (*Frage* IX) soll dagegen $hf = \frac{47}{10} = \frac{112{,}8}{24} < 5$ sein. Mit dem korrekten Wert $hg = 3\frac{1}{2}$ wäre $hf = \frac{41}{8} = \frac{123}{24} > 5$, etwas größer als Bramers Wert.

Andererseits ist die Strecke $ef = dg = \frac{7}{2}$. Mit Bramers Zahlen sind die Quadrate

$$hf^2 = \left(\frac{47}{10}\right)^2 = \frac{2209}{100} \quad \text{und} \quad ef^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{49}{4} = \frac{1225}{100}$$

und zusammen $he^2 = hf^2 + ef^2 = \frac{2209}{100} + \frac{1225}{100} = \frac{3434}{100}$, so daß $he = \sqrt{\frac{3434}{100}}$, laut Bramer, darauß Radix quadrata ist he 34 $\frac{17}{15}$ (*Frage* IX).

Dieses verblüffende Resultat kann nicht richtig sein. Schon der Bruchteil $\frac{17}{15}$ muß Verdacht erwecken: warum nicht 35 und $\frac{2}{15}$? Ein Blick auf Bramers maßstabgetreue Zeichnungen genügt, um einzusehen, daß die angebliche Länge $he > 34$ viel zu groß ist. Die Fläche eines Dreiecks als Punktmenge betrachtet ist eine Teilmenge des Umkreises. Eine Kreisperipherie ist definiert als Menge aller Punkte, die vom Kreismittelpunkt dieselbe Entfernung r haben. Alle Punkte des Kreisinneren sind weniger als r Maßeinheiten vom Mittelpunkt entfernt. Fraglos ist der Inkreis des Dreiecks eine Teilmenge des Dreiecks und damit auch des Umkreises. Dies gilt insbesondere auch vom Inkreismittelpunkt. Dessen Abstand vom Umkreismittelpunkt muß daher kleiner als der Umkreisradius r sein.

In Bramers Demonstrationsdreieck ist die längste der darin vorkommenden Strekken die Seite $AC = 21$. Der Durchmesser des Umkreises beträgt $21\frac{1}{4}$, sein Radius r folglich $10\frac{5}{8}$, also erheblich weniger als 34. Mindestens einer der beiden Kreismittelpunkte h und e müßte daher außerhalb des Umkreises liegen, wenn der Abstand $he = 34$. Wie konnte dem Autor diese Absurdität entgehen?

Die Wurzel von 3434 ist 58,60... und ihr zehnter Teil 5,860... . Wie der Wert 34 *plus* $\frac{17}{15}$ entstanden ist, läßt sich nur mutmaßen. Bramers Schreiber oder er selbst hat, statt den Radikanden zu radizieren, nur die Division durch 100 ausgeführt. Dies ergäbe 34 plus 34 *Hundertstel* bzw. 34 plus 17 *Fünfzigstel*. Denkbar ist, daß ein Schreiber oder Setzer in der (deutschsprachigen) Marburger Druckerei von Paul Egenolff beim Diktieren sich verhört und das Wort *Fünfzigstel* mit *Fünfzehntel* verwechselt hat.

Noch Euler hat im 18. Jahrhundert Quadratgrößen durch Doppelbuchstaben bezeichnet: $A^2 = AA$ usw. (vgl. Eulers lateinischen Text Seiten 7-24). In dieser Hinsicht erweckt Bramers Radikand 3434 den Eindruck als $34 \cdot 34 = 34^2$ gemeint gewesen zu sein. Dessen Wurzel wäre allerdings 34. Doch liefert diese Auslegung keine Erklärung für den Bruch $\frac{17}{15}$. Überdies ist Bramers Radikand tatsächlich „dreitausendvierhundertvierunddreißig". Außerdem verwendet Bramer im vorliegenden Text noch keine Doppelbuchstaben oder Doppelzahlen geschweige denn Exponenten, sondern benutzt das Substantiv „Quadrat":

#ein Quadrat $12\frac{1}{4}$ zum Quadrat ef addirt / gibt das Quadrat he $\frac{3434}{100}$, usw.

Man muß daher annehmen, daß die Fehler beim Abschreiben, Diktieren oder Setzen entstanden sind und der Text vor der Drucklegung von Bramer nicht noch einmal durchgesehen worden ist, sagt er doch selbst im Vorwort, er habe die dargestellten Probleme „in eyl #olvirt".

Die Panne mit der Quadratwurzel in Frage IX ist umso unerklärlicher, als Bramer 1618 bereits die Bürgischen Logarithmen hätte zur Verfügung haben können. Etliche Historiker setzen den Beginn von Bürgis Logarithmenberechnungen sogar in Bramers Geburtsjahr 1588. Allerdings wurden Bürgis Logarithmen erst 1620 gedruckt, die zugehörige Bedienungsanleitung sogar erst 1856. Aber Bramer war ja als Bürgis Pflegesohn und Schwager in dessen Familie aufgewachsen und teilte unzweifelhaft Bürgis Interessen. Die *Geometrischen Quaestiones* sind auf Anregung Bürgis entstanden (siehe Abb. 11), und 1630 sollte Bramer im Rückblick schreiben, Bürgi habe *vor zwantzig und mehr Jahren*, lange vor Napier seine Logarithmen zusammengestellt. Bramer verwendete sogar die Bezeichnung *Logarithmen*, die Bürgi selbst noch nicht benutzt hatte, und bewies damit, daß er sehr wohl wußte, worum es sich dabei handelte. Man geht auch kaum fehl in der Annahme, Bramer habe als Adlatus Bürgis bei den Berechnungen der Logarithmen mitgeholfen.

In der Benutzungsanleitung, die im Manuskript, vielleicht sogar von Bramers Hand wie schon vermutet worden, noch vorhanden ist, wird an Hand von sieben Beispielen erläutert, wie Wurzeln mit Hilfe der Logarithmen berechnet werden können. Darunter sind zwei Beispiele von Quadratwurzeln mit Radikanden verschiedener Größenordnungen, welche vorführen, wie durch Addition oder Subtraktion des log10 beliebige Radikanden in den Tafelbereich, der nur Zahlen zwischen 1 und 10 zuläßt, zurückgeführt werden können.

Mit Hilfe „seiner" Logarithmen hätte Bramer also $x = \sqrt{\frac{3434}{100}}$ berechnen können:

$$y = \log\sqrt{\frac{3434}{100}} = \frac{1}{2}\log\frac{3434}{100} = \frac{1}{2}\log\frac{3{,}434\cdot 10^3}{10^2} = \frac{1}{2}(\log 3{,}434\cdot 10)$$
$$= \frac{1}{2}(\log\ 3{,}434 + \log 10) = 176'824{,}383403266.....,$$

wo $\log 3{,}434$ mit einer „von Hand" auszuführenden einfachen Interpolation der Tafel entnommen und zum $\log 10$, Bürgis sog. „ganzen Roten Zahl" 230'270,022..., addiert wird [93]. Die Division der Summe durch 2 wird ebenfalls „von Hand" ausgeführt. Der Tafel entnimmt man sodann in umgekehrter Richtung wieder mit Hilfe einer Interpolation den Numerus:

$$x = \sqrt{\frac{3434}{100}} = 5{,}860034129593444611886135270375 6..... = \left(\sqrt[10]{1{,}0001}\right)^y ,$$

da heute bekannt ist, daß Bürgis Basis $b = \sqrt[10]{1{,}0001}$ ist. Das Ergebnis ist identisch mit dem durch einen modernen elektronischen Rechner erzielbaren und stellt dem Bürgischen Logarithmensystem ein ausgezeichnetes Zeugnis aus. Es weicht allerdings von dem oben (Seite 213 und mit Eulers Formel Seite 214) gefundenen Wert 6,206... ab, da Bramers Ausgangszahlen, wie gesehen, teilweise falsch gewesen sind.

Umkreis- und Inkreisradius r und ρ sind nach den von Bramer und Euler verwendeten Rechenvorschriften symmetrische Funktionen der Dreiecksseiten a, b, c. Sie erfahren durch Vertauschungen der Variablen keine Änderungen ihrer Funktionswerte. Die Buchstaben r und ρ sind daher in den nachfolgenden Überlegungen wie Konstanten zu behandeln und dürfen als Abkürzungen belassen werden.

Aus Bramers Fig. 5 (Abb. 13) kann man für den gesuchten Abstand *he* folgende integrierte Formel abstrahieren:

$$(\delta)\qquad he^2 = ef^2 + hf^2 = dg^2 + (gf + hg)^2 = dg^2 + (de+\rho)^2$$
$$= \left(\frac{\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{\boldsymbol{r}^2 - \left(\frac{\boldsymbol{b}}{2}\right)^2} + \rho\right)^2 .$$

Die waagerechte Seite $AC = b = 21$ in Bramers Fig. 5 kann als „Basis" betrachtet werden: die Hilfsfigur *defgh* bezieht sich auf AC. Eine Drehung von $180°+\alpha$ der gan-

[93] Vgl. *Jost Bürgi's „Progress Tabulen"* (Logarithmen). Nachgerechnet und kommentiert von Heinz Lutstorf und Max Walter. Zürich, 1992. Schriftenreihe der ETH-Bibliothek, Nr. 28.

zen Figur um dem Umkreismittelpunkt *e* bringt die Seite $AB = c = 17$ in Basisposition. Wird die Hilfsfigur *defgh* analog auf die neue Basis *AB* bezogen, lautet die integrierte Formel für die Distanz *he*:

$$(\varepsilon) \qquad he^2 = hf^2 + ef^2 = dg^2 + (de-df)^2 = dg^2 + (de-hg)^2 = dg^2 + (de-\rho)^2$$
$$= \left(\frac{\boldsymbol{a-b}}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{\boldsymbol{r}^2 - \left(\frac{\boldsymbol{c}}{2}\right)^2} - \rho\right)^2 .$$

Der Übergang von Formel (δ) zu (ε) erfolgt durch die Permutation $a \to b \to c \to a$ der Variablen *a*, *b*, *c* und durch Vorzeichenwechsel beim Summanden ρ. Da der Abstand der beiden Kreismittelpunkte *h* und *e* voneinander durch eine bloße Drehung des Dreiecks nicht verändert wird, müssen die Formeln (δ) und (ε) mit Bramers Beispielzahlen $a = 10$, $b = 21$, $c = 17$ dasselbe Resultat liefern $[(-1)^2 = (+1)^2 = 1]$:

$$(\delta) \qquad he^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{13}{8} + \frac{7}{2}\right)^2 = 38{,}515625 \quad \text{und} \quad he = 6{,}206095794$$

$$(\varepsilon) \qquad he^2 = \left(\frac{11}{2}\right)^2 + \left(\frac{51}{8} - \frac{7}{2}\right)^2 = 38{,}515625 \quad \text{und} \quad he = 6{,}206095794$$

Wird die Permutation $a \to b \to c \to a$ der Dreiecksseiten *a*, *b*, *c* weiterhin als Drehung des Dreiecks *ABC* um den Umkreismittelpunkt *e* aufgefaßt, gelangt die Dreiecksseite $BC = a$ in Basisposition. Analoge Überlegungen wie für (δ) und (ε) ergeben als Bramersche Formel für das Quadrat des Abstandes *he* der beiden Kreismittelpunkte voneinander

$$(\zeta) \qquad he^2 = \left(\frac{\boldsymbol{b-c}}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{\boldsymbol{r}^2 - \left(\frac{\boldsymbol{a}}{2}\right)^2} - \rho\right)^2 .$$

Mit Bramers Testzahlen liefert auch (ζ)

$$he^2 = \left(\frac{4}{2}\right)^2 + \left(\frac{75}{8} - \frac{7}{2}\right)^2 = 38{,}515625 \quad \text{und} \quad he = 6{,}206095794$$

dasselbe Resultat wie für (δ) und (ε). Die Formeln (δ), (ε) und (ζ) sind also bezüglich der Variablen *a*, *b*, *c* symmetrisch: Permutation der Variablen *a*, *b*, *c* bewirkt keine Änderung des Funktionswerts.

Für spitzwinklige Dreiecke erhält der Inkreisradius ρ in allen Formeln das Vorzeichen *minus*. Die Summe (δ)+(ε)+(ζ) aller drei Formeln, alphabetisch nach *a*, *b*, *c* geordnet, gibt dann für den dreifachen Quadratabstand he^2:

$$(\eta) \qquad 3he^2 = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-c}{2}\right)^2 + \left(\frac{c-a}{2}\right)^2$$
$$+ \left(\sqrt{r^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} - \rho\right)^2 + \left(\sqrt{r^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \rho\right)^2 + \left(\sqrt{r^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2} - \rho\right)^2 ,$$

eine symmetrische Funktion der Argumente *a*, *b*, *c*. Beliebige Permutationen der Argumente *a*, *b*, *c* bewirken einzig Permutationen der Summanden, die wegen der Kommutativität der Addition keine Änderung des Summenwertes zur Folge haben.

In allen drei Fällen, (δ), (ε) und (ζ), bilden die Radikanden der Wurzeln in den Formeln vollständige Quadrate. Die Wurzeln selbst sind also rational: 75/8, 13/8 und 51/8. Dafür Bramer und der klugen Wahl der Beispielzahlen a = 10, b = 21, c = 17 das Verdienst zubilligen zu wollen, ist allerdings voreilig, wie sich zeigen wird. Die einzige Wurzel, die schließlich näherungsweise berechnet werden muß, ist der Übergang von he^2 zu *he*.

Es müßte in der Tat wunderlich zugehen, sollten Eulers und Bramers Berechnungsvorschriften verschiedene Ergebnisse bewirken. Dies könnte nur geschehen, wenn, wie bei Bramer, Rechenfehler begangen oder falsche Ausgangsdaten benutzt würden. Schließlich handelt es sich um ein und dasselbe Objekt: die Distanz Umkreismittelpunkt-Inkreismittelpunkt. Wohl verschanzt sich Bramers hypothetische, einhundertfünfzig Jahre ältere Formel hinter mühsamer, antiquierter mittelalterlicher Verbalargumentation; sie geht dennoch nahtlos in Eulers modernere Form über.

Dies wird unmittelbar klar, wenn Eulers Koordinatensystem – Eckpunkt *A* zugleich Nullpunkt, Gerade *AB* Abszissenachse – auf Bramers Figur 5 (Abb. 13, Seite 207) appliziert und deren Umlaufsinn an denjenigen der Eulerschen Figuren angepaßt wird: „links-“ statt „rechtsherum“. Ohnehin sind die Bezeichnungen der Eckpunkte der Musterdreiecke *ABC* bereits identisch. Daß Eulers Formulierungen in seinen Ziffern 8 und 9 vorgestellt werden, während Bramers Argumente in seiner „achten“ und „neunten Frage“ enthalten sind, wird man kaum auf unterbewußte Zusammenhänge im Sinne Freuds zurückführen wollen. Dennoch ist der Gleichklang der Numerierungen reizvoll und mag als ein Symbol für die Jahrhunderte überdauernde Kontinuität mathematischen Denkens genommen werden.

Laut ***Eulers*** Ziffern 8 und 9 haben Umkreismittelpunkt *H* und Inkreismittelpunkt *G*, bzw. ihre Ortsvektoren $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{g}$ die Komponenten:

$$H = \mathfrak{h} = \left(\frac{1}{2}c \;\middle|\; \frac{c(a^2+b^2-c^2)}{8A}\right)$$

$$G = \mathfrak{g} = \left(\frac{1}{2}(c+b-a) \;\middle|\; \rho\right) = \left(\frac{1}{2}(c+b-a) \;\middle|\; \frac{2A}{a+b+c}\right)$$

wo a, b, c die bekannten Kurzbezeichnungen Eulers für die Längen der Dreiecksseiten, $\rho = \frac{2A}{a+b+c}$ den Inkreisradius und A den Flächeninhalt des Dreiecks *ABC* bedeuten.

Aus ***Bramers*** Figur 5 liest man ab, wenn, wie vorgeschlagen, die Bezeichnungen der Eckpunkte *B* und *C* vertauscht werden, daß die Koordinaten bzw. Komponenten der Ortsvektoren von Umkreismittelpunkt *e* und Inkreismittelpunkt *h*

$$\vec{e} = \left(\frac{1}{2}c \;\middle|\; de\right) \quad \text{und} \quad \vec{h} = (Ag \mid \rho)$$

sind, wo g den Berührungspunkt von Seite *AB* (in Bramers Fig. 5 *AC*) und Inkreis des Dreiecks *ABC* und ρ den Radius des letzteren bezeichnen.

Hier sind bereits die Bezeichnungen der Abszisse des Umkreismittelpunkts bei beiden Autoren identisch, vorausgesetzt, als Basis des Dreiecks *ABC* gelte *c*. Die Ordinate *de* berechnet Bramer in seiner „Sechsten Frage“ mit Hilfe des Satzes von Pythagoras aus dem Umkreisradius $r = \frac{abc}{4A}$ (Fig. 4*A*, Seite 78), wo der Buchstabe *A* den Flächeninhalt des Dreiecks *ABC* bezeichnet:

$$de = \sqrt{r^2 - \frac{c^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - c^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4(abc)^2}{16A^2} - c^2} = \frac{c}{8A}\sqrt{4a^2b^2 - 16A^2} \quad .$$

In der nach-Bramerschen Formelschreibweise erscheint im Radikanden die aus Eulers umfangreichen Rechnungen wohlbekannte Größe $16A^2$. Erstmals in Eulers Zif. 5 (Seiten 8 und 68) eingeführt, steht sie für die verschiedenen Schreibweisen der Heronschen Flächenformel· (Seite 30).

Wird $16A^2$ nach Formel (2b) entwickelt (Seite 30), entpuppt sich Bramers Radikand *für alle Werte a, b, c* als vollständiges Quadrat und die Ordinate *de* wird rational:

$$\begin{aligned} de &= \frac{c}{8A}\sqrt{4a^2b^2 - 16A^2} = \frac{c}{8A}\sqrt{4a^2b^2 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 + a^4 + b^4 + c^4} \\ &= \frac{c}{8A}\sqrt{(a^2+b^2)^2 - 2c^2(a^2+b^2) + c^4} = \frac{c}{8A}(a^2+b^2-c^2) \quad . \end{aligned}$$

Als Quadratwurzel kann die Ordinate *de* positiv oder negativ sein, offensichtlich abhängig davon, ob der Umkreismittelpunkt oberhalb oder unterhalb der Basis liegt.

Die Abszisse *Ag* des Inkreismittelpunkts ist gleich der Tangente aus dem Eckpunkt *A* des Dreiecks *ABC* an den Inkreis. Bramer behandelt sie in seiner „achten Frage“ und findet dasselbe Ergebnis wie Euler:

$$Ag = \frac{c+b-a}{2} \quad .$$

Bramers hypothetische Ordinate des Inkreismittelpunkts muß ebenfalls gleich dem Radius ρ sein und ist folglich laut Bramers „siebenter Frage“ wie bei Euler die *Area trianguli durch die halbe summa laterum dividirt*:

$$\rho = \frac{2A}{a+b+c} \quad .$$

Die Ortsvektoren der beiden Kreismittelpunkte *H* bzw. *e* und *G* bzw. *h* sind somit auch bei Bramer:

$$\begin{aligned} H = e &= \left(\frac{1}{2}c \;\middle|\; de\right) = \left(\frac{1}{2}c \;\middle|\; \frac{c}{8A}(a^2+b^2-c^2)\right) \\ G = h &= \left(Ag \;\middle|\; \rho\right) = \left(\frac{c+b-a}{2} \;\middle|\; \frac{2A}{a+b+c}\right) . \end{aligned}$$

Alle Formeln sind Funktionen der Dreiecksseiten *a*, *b*, *c* allein. Auch die Dreiecksfläche *A* ist laut Heronscher Flächenformel nur von den Seitenlängen *a*, *b*, *c* abhängig. Indessen ist einzig die Formel zur Berechnung des Inkreisradius ρ eine symmetrische Funktion von *a*, *b*, *c*.

Die Komponenten von H und G bzw. e und h bilden die Ausgangsdaten für die Berechnung der gesuchten Distanz GH bzw. he. Erwähnenswert ist, daß beide Autoren die gesuchte Strecke mit der selben Punktefolge, Inkreismittelpunkt-Umkreismittelpunkt GH bzw. he, angeben, obzwar wohl keiner an einen Durchlaufsinn dachte. Zur Darstellung der Koordinatendifferenzen Δx und Δy, die die Katheten des kritischen Dreiecks sind, benutzt Euler in Zif. 17 jedenfalls die Differenz $\mathfrak{g} - \mathfrak{h}$ statt $\mathfrak{h} - \mathfrak{g}$, doch spielt das Vorzeichen keine Rolle, da mit den Quadraten Δx^2 und Δy^2 weitergerechnet wird.

Verfährt man mit Bramers hypothetischen Daten gleich, ergeben sich auch bei ihm

$$he \;=\; (\Delta x \mid \Delta y) \;=\; \left(\frac{1}{2}(b-a) \,\middle|\, \frac{2A}{a+b+c} - \frac{c}{8A}\left(a^2+b^2-c^2\right) \right)$$

in vollkommener Übereinstimmung mit Eulers Zif. 17.

Die gewünschte Distanz he bzw. ihr Quadrat nach Pythagoras $he^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$ ist oben (Seite 217) mit Hilfe der Bramerschen Beispielzahlen vorgerechnet worden. Bramers Versuch in der *neunten Frage* ist wegen diverser Rechenfehler mißglückt.

Euler andererseits benötigt nicht primär die effektive Länge der Strecke $GH = he$. Ihn beschäftigt in erster Linie die Funktion he^2, die er benutzt, um durch „Rückwärtsrechnen“ aus der bekannten, weil vorgegebenen Länge he die Argumente a, b, c zu berechnen. Die Funktion he^2 erweist sich nämlich als *symmetrische* Funktion der Argumente a, b, c. Sie kann daher in eine Funktion der von Euler vorgeschlagenen Abkürzungen $p = \Sigma a$, $q = \Sigma ab$ und $r = abc$ transformiert werden. Diese sind aber die Koeffizienten derjenigen Gleichung dritten Grades, deren drei Lösungen a, b, c sind, so daß die drei gesuchten Längen a, b, c durch Auflösen dieser Gleichung gefunden werden können.

Lazare Nicolas Marguerite Carnots geometrische Herleitung.

Daß akademisch gebildete und professionell tätige Personen zur Feder greifen, ist selbstverständlich. Zu ihrer Tätigkeit gehören die Registration und Weiterverbreitung der Ergebnisse ihrer Überlegungen und Forschungen. Dies ist bis in die jüngste Vergangenheit ausschließlich durch das geschriebene Wort geschehen.

Wenn Persönlichkeiten des öffentlichen Lebens, vor allem Politiker, zur Feder greifen, ist es naheliegend, daß sie sich der Geschichtsschreibung zuwenden. Nicht nur Autobiographien und Memoiren mögen dabei der Absicht, wenn nicht der Notwendigkeit, entsprungen sein, im hohen Amt begangene Taten oder gar Untaten zu rechtfertigen.

Es ist in der Tat nicht schwer, von Julius Caesar über die Viten der mittelalterlichen Könige und Kaiser, Friedrich den Großen, Napoleon und Bismarck bis zu den Memoiren gewesener Premierminister und Staatspräsidenten (und Gattinnen solcher) Zeugnisse dieser Art von Schriftstellerei zu finden. Es gibt indessen auch Beispiele von hohe Ämter und Würden bekleidenden Verfassern, denen ernsthafte historische Werke zu verdanken sind. Genannt seien etwa ***Adolphe Thiers*** (1797-1877), Ministerpräsident unter Louis-Philippe 1836 und 1840, erster Präsident der Dritten Republik 1871-1873 und zugleich Verfasser von *Histoire de la Révolution française* (10 Bände, 1823-1827) und *Histoire du Consulat et de l'Empire* (29 Bände, 1845-1869), und ***Winston Churchill***, der britische Kriegspremier, mit seiner umfassenden Geschichte des zweiten Weltkriegs, aber auch Autor u.a. von Biographien seines Ahnherrn, des Herzogs von Marlborough, und seines Vaters Lord Randolph Churchills.

Eher seltsam mutet indessen an, daß führende Politiker und hohe Staatsbeamte sich nebenbei ausgerechnet mathematischen, abseits des Alltagsgeschehens liegenden Studien gewidmet und mathematische Texte verfaßt haben. Dennoch hat es sie gegeben, darunter sogar solche, die die Mathematik mit neuen Ideen bereichert haben und deswegen einen bedeutenden Platz in der Geschichte der mathematischen Wissenschaften einnehmen. Die berühmtesten Doppelbegabungen sind ohne Zweifel die „Freizeit-Mathematiker" ***Franciscus Vieta*** (1540-1603) und ***Pierre Fermat*** (1601-1665), beide Juristen und Parlamentsräte, Vieta in der Bretagne, Fermat in Toulouse, Vieta zeitweise auch königlicher Geheimrat unter Heinrich III. und Heinrich IV. In neueren Nachschlagewerken gelten sie nur noch als Mathematiker, Fermat bisweilen sogar als bedeutendster Mathematiker Frankreichs.

An Bedeutung als *Politiker* dürfte der Niederländer und Freizeit-Mathematiker ***Jan*** (*Johan*) ***de Witt*** (1625-1672) angesichts seines späteren grauenvollen Schicksals alle übertroffen haben. De Witt studierte in Leiden, wo damals die beiden Frans van Schooten, Vater und Sohn, als Professoren der Mathematik, wirkten. Obwohl primär Student der Jurisprudenz, brillierte Jan de Witt auch in Mathematik. Nach gewissen Quellen war er noch als Rechtsanwalt im Haag zugleich Teilhaber der Firma Frans van Schootens, wobei offen bleibt, ob es sich dabei um ein Anwaltsbureau oder allenfalls ein Ingenieurbureau gehandelt hat. 1653 wurde de Witt Ratspensionär von Holland und regierte in der „Statthalterlosen Zeit" (1650-1672) und während der endlosen Seekriege mit England beinahe als Diktator, vergleichbar seinem englischen Gegenspieler Cromwell.

Alexander Dumas Père hat das schreckliche Ende de Witts und seines Bruders Cornelis in seinem Roman *La Tulipe noire* (1850) dargestellt und das erste Kapitel nicht unbillig mit *Un Peuple reconnaissant* überschrieben. Mit diesem Beispiel eines Danks bzw. Undanks der Republik haben die Holländer, schreibt er, die Athener noch übertroffen, denn *les Athéniens, qui ont laissé une assez belle réputation d'ingratitude, le cédaient sur ce point aux Hollandais. Ils se contentèrent de bannir Aristide.*

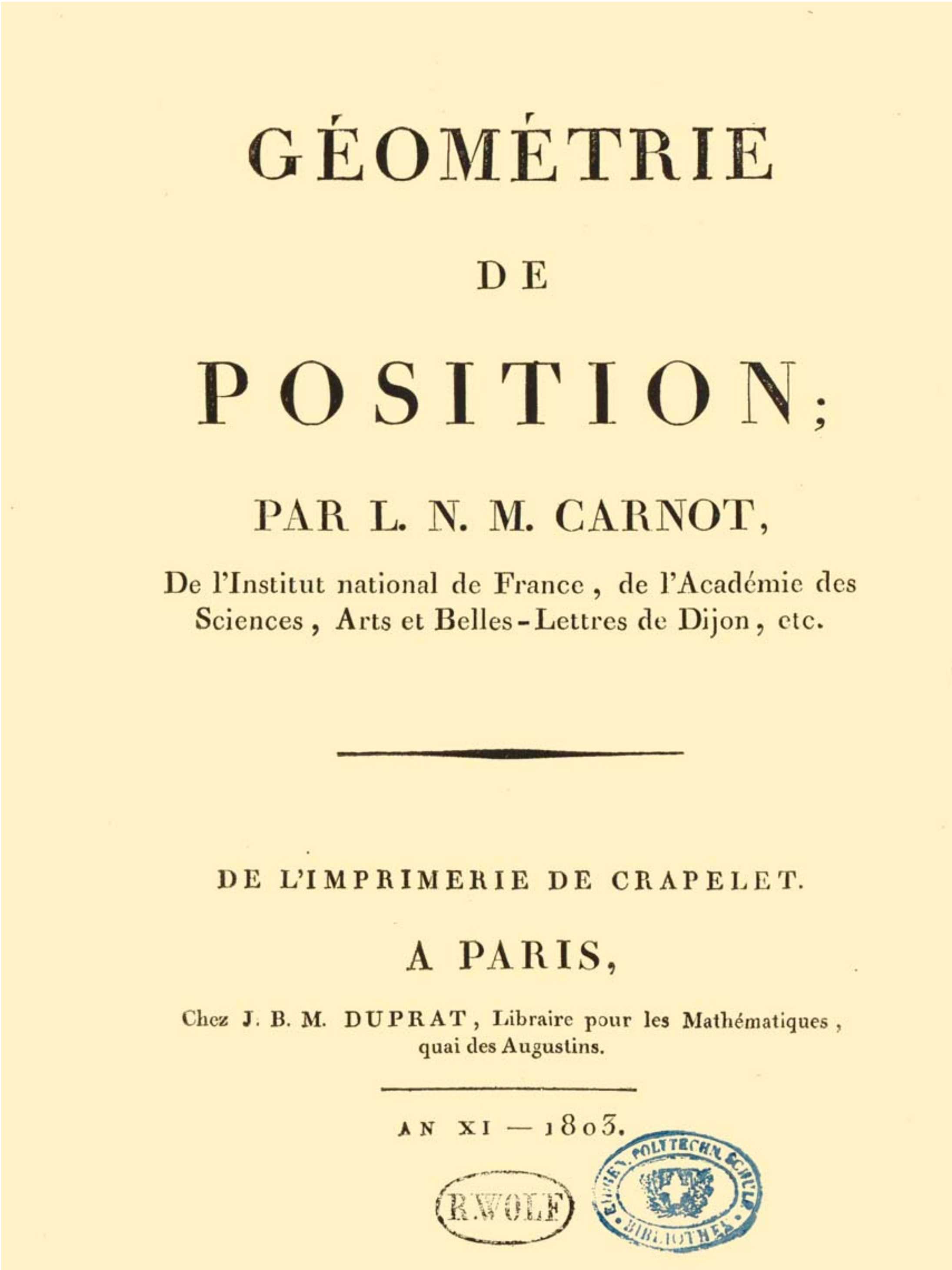
Am 20. August 1672 wurden die Brüder de Witt im Haag Opfer eines sorgfältig geplanten, als „Volksaufstand" getarnten Komplotts. Durch einen aufgehetzten Mob wurden sie brutal ermordet, ihre Leichen entkleidet, an den Füßen aufgehängt, ausgeweidet; grausam entstellt, und stückweise verkauft, teilweise sogar verspiesen. Ihre herausgerissenen Herzen wurden noch lange Zeit öffentlich ausgestellt. Daumen und Zunge sind heute noch im Haager Historischen Museum zu sehen. Wilhelm III. von Oranien, der spätere König von England, dessen Präzeptor Jan de Witt einst gewesen war, wurde Statthalter. Es wird heute angenommen, daß er mindestens Mitwisser des Komplotts gewesen ist. In Dumas' Roman wird Statthalter Wilhelm III. sogar deutlich als Drahtzieher dargestellt. Die Mörder wurden jedenfalls von ihm beschützt und belohnt. Die Geschichtsschreibung betrachtet den Doppelmord de Witt heute als „schwarze Seite der niederländischen Geschichte".

Es ist erstaunlich, daß dieser selbe Ratspensionär und Quasidiktator Jan de Witt zugleich in der Geschichte der Mathematik eine Rolle gespielt hat und holländischen Quellen zufolge *naast staatsman ook een begenadigd wiskundige was*.

Der jüngere van Schooten in Leiden war ein überzeugter Anhänger der Descartesschen analytischen Geometrie und unternahm viel, um deren Kenntnis zu verbreiten. 1649 erschien seine lateinische Übersetzung von Descartes *Géométrie*, die dadurch weiteren Kreisen, auch im Ausland, zugänglich gemacht wurde. Descartes selbst hatte noch gemeint, in Europa (Frankreich, Holland und in den spanischen Niederlanden) gebe es höchstens sieben bis acht Mathematiker, die imstande wären, seine Theorie zu verstehen. Ebenfalls 1649 hatte Jan de Witt eine Studie über die Erzeugung von Kegelschnitten mit Hilfe des Pantographen, *Elementa curvarum linearum*, verfaßt, welche auch die Anfangsgründe der sog. quadratischen Formen enthielt, die später in der Algebra ein eigenes Kapitel bilden sollten. 1659 nahm van Schooten Jan de Witts Arbeit als Anhang in seine *Geometria a Renato Des Cartes* (2 Bände, 1659-1661) auf.

Jan de Witt benutzte mathematische Erkenntnisse zur Planung und Erledigung der Staatsgeschäfte, vor allem für den Finanzhaushalt. 1671 erschien in diesem Zusammenhang seine Studie *Waardije van Lyf-renten naer Proportie van Los-renten*, ein Vergleich von Leibrenten und Staatsanleihen, die heute als Anfang der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Versicherungsmathematik bewertet wird.

Ein weiterer Republikaner, der eine brilliante Karriere als Staatsmann, wenn auch in bedeutend bescheideneren Verhältnissen und ohne Einfluß auf das große Weltge-



GÉOMÉTRIE
DE
POSITION;

PAR L. N. M. CARNOT,

De l'Institut national de France, de l'Académie des Sciences, Arts et Belles-Lettres de Dijon, etc.

DE L'IMPRIMERIE DE CRAPELET.

A PARIS,

Chez J. B. M. DUPRAT, Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins.

AN XI — 1803.

Abb. 16. L.N.M. Carnot. Géométrie de Position. Paris, 1803. Titelblatt.

TABLE DES MATIÈRES.

FIN DE LA TABLE.

Abb.17. L.N.M. Carnot. Géométrie de Position. Paris, 1803. Inhaltsverzeichnis.

schehen, hinter sich brachte, aber zugleich als Mathematiker hervortrat, war ***Johann Heinrich Rahn*** von Zürich (1622-1676). Schon sein Großvater, Vater und ein Oheim waren Bürgermeister von Zürich gewesen, was damals Staatschef und Premierminister in einer Person bedeutete. Ohne Zweifel wäre Rahn auch noch zu dieser Würde aufgestiegen, hätte ihn nicht der Tod in vergleichsweise jungen Jahren ereilt. Er war indessen 1648 Zeugherr (Verteidigungminister), 1657-1664 Landvogt (Verweser) der Grafschaft Kyburg, welche die Republik Zürich 1452 dem Hause Habsburg abgekauft hatte, 1664 Examinator der Kirchen- und Schuldiener, 1668-1676 Tagsatzungsbote (Abgeordneter ins Landesparlament), 1670-1676 Mitglied des Kleinen Rates (Exekutive), 1670-1673 Obervogt zu Küsnacht, 1672 Gesandter „über das Gebirge“ (nach Rom), 1674-1676 Säckelmeister (Finanzminister) und Reichsvogt für Zürich.

Trotz diesem reich befrachteten Pflichtenheft war Rahn ein begeisterter Liebhabermathematiker. Ihm wird zugeschrieben, die Symbole $*$ und $\div$ für die Multplikation und für die Division eingeführt zu haben. Vor allem interessierte ihn die Descartessche Mathematik. Descartes Bezeichnung *radices fausses bzw. radices falsae* für negative Zahlenwerte von Wurzeln wollte er durch die Bezeichnung *negat*, als Gegensatz zu *affirmat*, ersetzt wissen, da sie doch nicht im eigentlichen Sinne des Wortes „falsch“ seien!

Noch während seiner Amtszeit auf dem Schloße Kyburg erschien 1659 in Zürich seine *Teutsche Algebra oder algebraische Rechenkunst zusamt ihrem Gebrauch*. Im *Vorbericht* gibt Rahn Aufschluß über die Motive, die ihn zur Abfassung dieses Lehrbuchs veranlaßt hatten. Die alte Algebra sei schwer, konfus und unvollkommen gewesen, obwohl von Vieta, Cartesius und anderen „erbessert und in einen richtigern Schlag außgearbeitet“ worden. Sie sei aber bisher leider nur lateinisch und französich „der Welt mitgetheilt worden“, und es sei nicht zu erfahren gewesen, ob „auch etwas in unser Hoch-Teutsch kommen seye“. Dritte hätten ihn daher mündlich und auch schriftlich ermutigt, „etwas in dieser Materi zu unternemmen“, was er versprochen habe, und nun gedenke er mit dem „gegenwirtigen Tractat“ seinem „Vatterland Teutscher Nation etwelcher maaßen bedient zuseyn“. Dieser Absicht wird auch das Adjektiv *Teutsch* im Titel der Arbeit gerecht.

Gegenstand des Rahnschen Traktats ist, wie in der klassischen Algebra üblich, die Auflösung von Gleichungen, nunmehr großenteils mit Hilfe der von Descartes vorgeschlagenen Methoden. Rahn muß hier aber aus einem andern Grund besonders erwähnt werden. Er erweist sich nämlich in methodologischer und didaktischer Hinsicht als ein absoluter ***Gegenpol Eulers***.

Für die Lösung der Akademieaufgabe von 1723 benötigte Euler die Abstände diverser Punkte voneinander. Sobald die Koordinaten der fraglichen Punkte gefunden sind, müssen die Koordinatendifferenzen Δx und Δy je zweier Punkte berechnet, diese alsdann quadriert und die Quadrate addiert werden. Da die Koordinaten wie auch ihre Differenzen durchwegs Brüche sind, müssen diese jeweils zunächst auf einen gemeinsamen Nenner gebracht werden. Die Additionen, die Subtraktionen, das Gleichnamigmachen und das Quadrieren sind elementare, nicht besonders interessante, aber im vorliegenden Falle höchst mühselige Operationen, *taediosissimi calculi*.

Langwierige Zwischenrechnungen überspringt Euler grundsätzlich und gibt jeweils nur deren Ergebnisse bekannt. Ebenso verhält es sich mit der Auflösung von Gleichungen und Gleichungssystemen, wo für den Historiker allerdings Eulers Lösungswege um einiges aufschlußreicher und wissenswerter gewesen wären als die bloßen Resultate.

Euler setzt bei seinen Lesern gleichsam den Besitz eines „Röntgenblickes" voraus. Im Gegensatz dazu verwendet Rahn in seiner schriftlichen Darstellung die Methode, auch kleinste Rechenschritte genau aufzuzeigen und sorgfältig zu begründen, wobei er ins andere Extrem gerät. Er bedient sich nämlich, wie er im *Vorbericht* sagt, „einer ganz neuen manier", die er „von einer hohen und sehr gelehrten Person erstmals erlehrnet" habe, „deren er zur bezeugung unterthänigen respects gar gern gedenken (wollen), so sie es hätte zu(ge)lassen." Diese *besondere Manier* besteht darin, daß Rahn die Ränder der Druckseiten in mehrere Spalten unterteilt, die einzelnen Rechenschritte in der ersten Spalte säuberlich numeriert und in den andern Spalten erklärt, welche Gesetze der jeweilige Schritt befolgt. Zu diesem Zwecke führt er sogar eigene graphische Symbole ein, wie etwa eine Spirale mit dabeistehendem Index als Abkürzung für die *Involution* oder Potenzierung.

Bei der nicht genannten gelehrten Person handelt es sich um den Engländer ***John Pell*** (1611-1685), der ebenfalls in die Liste der Doppelbegabungen aufgenommen zu werden verdient, obwohl er weder Staatschef noch Regierungsmitglied, dafür wenigstens Diplomat war. Nach Studien (Griechisch und Latein) im Trinity College, Cambridge, war er zunächst Schullehrer, ab 1638 Mathematiklehrer in London, 1643 in Amsterdam, 1646 an der Universität Breda. Seine Sympathie für die Ideen des Pädagogen Comenius sollen ihn zur Übersiedlung nach Holland bewogen, wenn nicht gezwungen, haben. Nach dem Ausbruch des Englisch-Holländischen Krieges 1652 in Holland nicht mehr willkommen und wieder in London, wirkte er, dank Cromwell, auch dort erneut als Mathematiklehrer. Als Vertreter Cromwells hielt er sich aber 1654-1658, also verhältnismäßig lange, in diplomatischer, schließlich indes erfolgloser Mission in Zürich auf. Cromwell versuchte, Zürich und die andern protestantischen Stände für eine protestantische Liga unter seiner Führung zu gewinnen. Zurück in England wurde Pell Diakon, 1661 Priester und ab 1663 Pfarrer zweier Gemeinden in Essex. Am 20. Mai 1663 erfolgte seine Wahl in die Royal Society und 1675 wurde er deren Vizepräsident. In der RS wirkte er im Ausschuß für mechanische und optische Erfindungen. Als Mathematiker befaßte sich Pell hauptsächlich mit Algebra und Zahlentheorie.

Rahn nutzte Pells Anwesenheit in Zürich zur Weiterbildung und besuchte ihn jeden Freitagabend. Ohne Zweifel ist einiges von Pells Gedankengut in Rahns *Algebra* eingeflossen. Rahn behandelt die Funktionsgleichung $y^2 = ax^2 + 1$ (a ganz, aber nicht quadratisch), bekannt als *Pellsche Gleichung*, obwohl ihr Bezug zu Pell auch bestritten worden ist. Pell veranlaßte später eine englische Übersetzung von Rahns *Algebra*: Thomas Branker, *An introduction to Algebra*, London 1668.

Hatte ***Benjamin Bramer*** mit der Berechnung der Quadratdistanz he^2 zwischen Umkreismittelpunkt e und Inkreismittelpunkt h vorerst ein Teilproblem der Euler-trois angles du triangle BCD sur les côtés opposés, et de même des autres. Ainsi les quatre points A, B, C, D, forment trois à trois un triangle tel que les trois perpendiculaires menées des angles de ce triangle sur les côtés opposés, se croisent toutes au quatrième de ces points. La figure est donc un systême de quatre points réunis deux à deux par des droites qui se trouvent telles, que chacune de celles qui passent par deux de ces points coupe perpendiculairement celle qui passe par les deux autres.

Cette figure a de plus la propriété, qu'en faisant passer par trois quelconques des quatre points A, B, C, D, par exemple, par A, B, C, une circonférence, si l'on prolonge les perpendiculaires abaissées des angles du triangle ABC, jusqu'à la circonférence en A′, B′, C′, il en résultera trois quadrilatères inscrits à diagonales orthogonales, tels que celui que nous avons examiné dans le problême traité (122), savoir, ABA′C, BCB′A, CAC′B, dans lesquels on a les triangles parfaitement égaux et semblables deux à deux BDC et BA′C, ABD et AC′B, ADC et AB′C.

Ce que je viens de dire de la circonférence passant par les trois points A, B, C, auroit également lieu pour toute autre passant par trois quelconques des quatre points A, B, C, D, et il est à remarquer, que tous ces cercles ont le même diamètre, c'est-à-dire, par exemple, que la circonférence circonscrite au triangle BDC seroit égale à la circonférence ABA′C; ce qui est évident, puisque le triangle BDC est parfaitement égal et semblable au triangle BA′C, qui est lui-même inscrit dans cette circonférence ABA′C.

131. Si du centre L (fig. 43) du cercle on imagine une perpendiculaire sur $\overline{BC}$, il est facile de voir que le diamètre du cercle étant 1, cette perpendiculaire sera $\frac{1}{2}\cos. BAC$ ou $\frac{1}{2}\cos.(m+n)$; mais le tableau (122) donne $\overline{AH}=\cos.(m+n)$, qui est le double. Donc *dans tout triangle, la perpendiculaire abaissée du centre du cercle circonscrit sur l'un quelconque des côtés, est moitié de la distance de l'angle opposé ou point où se croisent*

Abb. 18. L.N.M. Carnot. Géométrie de position. Paris, 1803. § 131 recto.

les trois perpendiculaires menées des angles sur les côtés respectivement opposés.

Il suit de-là que si par le point milieu p de $\overline{BC}$ (fig. 45), on menoit une droite au point A, elle seroit coupée en o par la droite $\overline{LH}$, (H étant le point où se croisent les trois perpendiculaires) aux deux tiers de sa longueur à compter du point A; car les deux triangles AHo, pLo, sont semblables; d'où il suit que $\overline{Lp}$ étant moitié de $\overline{AH}$, $\overline{po}$ est moitié de $\overline{Ao}$. Cela étant, il est aisé de voir que ce point o est celui où se croiseront les trois droites menées de chacun des angles au point milieu du côté opposé, donc *dans tout triangle, le point où se croisent les trois droites menées de chacun des angles au point milieu du côté opposé, celui où se croisent les trois perpendiculaires menées des mêmes angles sur ces côtés opposés et le centre du cercle circonscrit, sont toujours placés sur une même ligne droite.*

132. Jusqu'ici, nous avons désigné par 1 le diamètre du cercle (fig. 43); mais si nous voulons avoir les valeurs effectives des lignes de la figure qui se règlent sur ce paramètre, il faudra commencer par rendre les équations homogènes, en remettant à la place de l'unité, là où elle représente le diamètre, la valeur effective de ce même diamètre. Supposons donc le rayon $=$ R; le diamètre sera 2R; et alors, pour rendre homogènes les équations trouvées (122), il faudra y mettre au lieu des quantités $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, &c., celles-ci, $\frac{\overline{AB}}{2R}$, $\frac{\overline{AC}}{2R}$, $\frac{\overline{BD}}{2R}$, &c., qui par-là deviendront des nombres abstraits, ainsi que chacun des seconds termes de ces équations. Les formules ainsi transformées, pourront fournir plusieurs conséquences nouvelles. Par exemple,

nous avons (124) .... $\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=1$,

cette équation devient donc .... $\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=4R^2$.

Par la même raison, on a .... $\overline{AB}^2+\overline{CD}^2=4R^2$.

Ajoutant les deux équations, on a $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+\overline{BD}^2+\overline{CD}^2=8R^2$;

Abb. 19. L.N.M. Carnot. Géométrie de position. Paris, 1803. § 131 verso. In kursiver Schrift der Hinweis auf die Kollinearität von Schwerpunkt, Höhenpunkt und Umkreismittelpunkt.

schen Konstruktionsaufgabe vorweggenommen, behandelte der brilliante französische Freizeit-Mathematiker ***Lazare Nicolas Marguerite Carnot*** sogar den gesamten Komplex der Kollinearität der drei „merkwürdigen Punkte“ Höhenpunkt, Schwerpunkt und Umkreismittelpunkt in beliebigen Dreiecken. Obwohl bereits einfachste euklidsche Hilfsmittel zum Nachweis genügen und Euklid das vergleichsweise anspruchslose Phänomen durchaus hätte kennen können, beharrt der Historiker Tropfke darauf, Carnot habe als erster einen geometrischen Beweis geliefert.

Lazare Nicolas Marguerite Carnot, geboren 1753 in Nolay, gestorben 1823 im Exil in Magdeburg, aber seit 1889 im Panthéon in Paris beigesetzt, war eine Persönlichkeit, die nur mittels Superlativen beschrieben werden kann. Diese beginnen schon mit seinem volltönenden Namen, der immer gesamthaft angegeben werden muß, um ihn von andern bedeutenden Persönlichkeiten desselben Namens abzugrenzen, und bei seiner Familie: seine Eltern hatten die auch im 18. Jhdt. ungewöhnliche Anzahl von achtzehn Kindern. Schon zu Lebzeiten erhielt er den Beinamen *Le Grand*.

Nachschlagewerke nennen ihn Staatsmann, Militär, Ingenieur, Gelehrten, anderswo auch Mathematiker, Physiker, General und Politiker. In dieser Liste fehlt indes die Würdigung *Literat*, denn zu alledem hat Carnot auch eine Reihe lyrischer und epischer Kompositionen hinterlassen, die teilweise noch in neuerer Zeit nachgedruckt worden sind [94]. Die Tatsache, daß er seinen älteren Sohn Sadi nach dem persischen Dichter Saadi von Schiraz taufen ließ, ist ein Hinweis auf seine literarischen Sympathien und Ambitionen.

Während westliche Quellen Carnots fernere Herkunft nicht erwähnen, bezeichnen russische biographische Skizzen Carnot als *kreschtschonnyj jewrej* (getauften Juden) und seinen Vater als jüdischen Rechtsanwalt. Überhaupt war die Familie Carnot, nach französischen Quellen, *distinguée dans le barreau*.

L.N.M. Carnot schlug dagegen, schon mit achtzehn Jahren, eine militärische Laufbahn ein, beendete 1773 die Militärschule von Mésières als Genieoffizier und diente vorerst als Ingenieur (Festungsingenieur) in Calais. Unter Kameraden galt er als Original. Mehrere vorteilhafte Angebote Friedrichs des Großen, in die preußische Armee überzutreten, schlug er aus.

Für Carnots weitere Laufbahn wurde die Französische Revolution schicksalbestimmend; denn er war streng republikanisch gesinnt und nahm sofort aktiven Anteil an den Geschehnissen. Mehrmals bekleidete er höchste Staatsämter, angesichts der sich immer schneller überstürzenden Ereignisse allerdings oft nur kurzfristig und durch Aufenthalte im ausländischen Exil unterbrochen.

1791 wurde er Abgeordneter des Pas de Calais in die Gesetzgebende Versammlung, 1792 Mitglied des Konvents, wo er zunächst unter den Abgeordneten der *Plaine* Einsitz nahm, um später zu den *Montagnards*, den eigentlichen radikalen Revolutionären, zu wechseln. Als Mitglied des Militärausschusses brachte er die Beschlüsse für die Ausstattung einer umfassenden Nationalgarde und die Verabschiedung der kö-

[94] Beispielsweise: *Choix de poésies* du général L.N.M. Carnot. Paris. 1933!

niglichen Garde durch. Treu seiner republikanischen Gesinnung, indes mit schlechtem Gewissen, stimmte er für die Enthauptung Ludwigs XVI., was ihm nach der Restauration die Anklage, am Königsmord beteiligt gewesen zu sein, einbringen sollte.

Im Juli 1793 wurde Carnot Mitglied des Wohlfahrtsausschusses und schuf als Beauftragter für die Verteidigung die vierzehn Armeen der Republik. Er befaßte sich schließlich vollamtlich mit den militärischen Operationen, an denen er zeitweise sogar persönlich teilnahm, an vorderster Front Sturmangriffe leitete und so entscheidend zu den Erfolgen der französischen Waffen beitrug. Weitgehend ihm und seinem persönlichen Einsatz ist der Sieg von Wattignies (1793) zu verdanken. Die Zeitgenossen verliehen ihm den Ehrentitel *Organisateur de la victoire* (*Baumeister des Sieges*). Seine Beliebtheit half ihm über die Anfeindungen und damit verbundenen Gefährdungen hinweg, welche ihm seine Reaktionen gegen den *Terreur* eintrug – an dem er persönlich keinen Anteil hatte, obwohl die „Schreckensmänner" doch seine Parteifreunde waren.

Unter der Direktorialverfassung, nach dem Sturze Robespierres, wurde Carnot 1795 erstaunlicherweise Mitglied des Direktoriums und arbeitete mit Bonaparte zusammen die Pläne für den Italienischen Feldzug aus. Im vierteljährlichen Turnus war Carnot 1796 und 1797 sogar Präsident des Direktoriums, obwohl er zusammen mit Barthélemy zu den gemäßigten Mitgliedern dieser Behörde zählte. Diesbezügliche Meinungsverschiedenheiten innerhalb des Direktoriums veranlaßten Carnot, sich in die Schweiz abzusetzen, um einer drohenden Anklage und Verhaftung wegen angeblicher Verschwörung zu Gunsten der Royalisten zuvorzukommen.

Inzwischen Erster Konsul geworden (Staatsstreich vom 18. Brumaire), rief Bonaparte Carnot zurück und ernannte ihn zum General-Inspektor der Armee und 1800 sogar zum Kriegsminister. 1802 wurde Carnot noch ins Tribunat gewählt, stimmte dort aber, sogar, wie es heißt, als einziger, innerlich Republikaner geblieben, gegen die Stiftung einer Ehrenlegion, gegen das Konsulat auf Lebenszeit und schließlich gegen die Errichtung des Kaisertums. Kurz darauf zog er sich aus dem öffentlichen Leben zurück und widmete sich seinen Studien und der Erziehung seiner Söhne. Erst, als nach dem verlorenen Rußlandfeldzug 1813 die Besetzung Frankreichs durch die Alliierten drohte, stellte er sich, mehr Patriot als Republikaner, wieder zur Verfügung und wurde Gouverneur und Kommandant der Festung Antwerpen, die er halten konnte und erst auf höheren Befehl übergab. Während des sog. Kaisertums der Hundert Tage war Carnot sogar noch Innenminister: „Um das Volk zu gewinnen, machte Napoleon den erprobten Republikaner Carnot zu seinem Hauptminister" (Wilhelm Oechsli).

Nach Napoleons Abdankung wurde Carnot Mitglied der provisorischen Regierung und suchte nach Möglichkeit eine Besetzung der Hauptstadt Paris durch die alliierten Truppen abzuwenden. Allein nach der Rückkehr des bourbonischen Königshauses sollte er des Königsmordes angeklagt werden. Ludwigs XVIII. Regierung erließ ein Dekret, welches die Strafe der Verbannung aussprach. Carnot ging nach Preußen und ließ sich für den Rest seiner Tage in Magdeburg nieder.

Einst selbst Schüler von Monge, zählt Carnot mit diesem zusammen zu den Gründern der später so berühmten *Ecole polytechnique* in Paris, die für viele andere ähnliche Institutionen in verschiedenen Ländern zum Vorbild wurde.

L.N.M. Carnot ist Stammvater einer Dynastie von bedeutenden Persönlichkeiten des öffentlichen Lebens und der Wissenschaft geworden. Seinen beiden (einzigen) Söhnen wurde nachgesagt, sie hätten die Arbeitsbereiche ihres Vaters unter sich aufgeteilt, denn der ältere, leider jung verstorbene, wurde der berühmte Physiker ***Nicolas Léonard Sadi Carnot*** (1796-1832) und durch sein einziges Buch, *Réflexions sur la puissance motrice du feu et sur les machines propres à développer cette puissance* (1824), der Begründer der Wissenschaft ***Thermodynamik***. In der Thermodynamik spricht man noch heute, nach dem Physiker Sadi Carnot, vom *Carnotschen Kreisprozeß* und von der (virtuellen) *Carnot-Maschine*. Lazares jüngerer Sohn, ***Lazare Hippolyte Carnot*** (1801-1888) wurde Politiker, war 1839-1848 Abgeordneter, 1848 Erziehungsminister unter dem Präsidenten Louis Napoléon Bonaparte, aber, getreu der Einstellung seines Vaters, Gegner des Zweiten Kaiserreiches, erst 1871 wieder Abgeordneter, 1875 Senator und 1887 Akademiker (Sciences morales). Hippolytes Sohn ***Marie François Sadi Carnot***, wieder Ingenieur, war ebenfalls Politiker, Arbeitsminister 1879-1880, Finanzminister 1885-1886 und schließlich Präsident der Französischen Republik 1887 bis zu seinem Tode 1894 infolge eines Attentats durch Anarchisten.

Es ist erstaunlich, daß der Vater und Großvater solcher Männer, deren Bildung er während Jahren selbst leitete, neben und nach seinen eigenen außergewöhnlichen Leistungen im aktiven Leben als Politiker und Militär, dazu oft sogar entgegen der allgemein vorherrschenden Stimmung, noch ein beachtliches schriftstellerisches Oeuvre hinterlassen konnte. Neben seinen poetischen Werken hat Carnot karrierebegleitende militärwissenschaftliche Schriften verfaßt, so eine Lobrede auf den berühmten Festungsingenieur Marschall Vauban (1784), die ihm einen ersten Preis der Akademie von Dijon eintrug. Weitere kriegswissenschaftliche Studien Carnots behandeln Gesichtspunkte der Festungskriegführung, darunter grundsätzliche Fragen wie *Sur l'utilité des places fortes à la frontière* (1788), *Est-il avantageux au Roi de France qu'il y ait des places fortes sur les frontières de ses Etats?* (1789) und *De la défense des places fortes* (1810, ein Auftragswerk Napoleons).

Zählen die genannten Arbeiten zu den Quellen der heute wohl abgeschlossenen Geschichte des Festungswesens, kann von Carnots Beiträgen zu Physik und Mathematik bloße historische Relevanz keineswegs behauptet werden. Als Vorläufer (Inspirator?) seines Sohnes Sadi erweist sich Carnot mit *Essai sur les machines en général* (1786), worin die Erhaltung der Arbeit (Energie) postuliert wird. Ebenfalls mit physikalischen Fragen befassen sich *Principes fondamentaux de l'équilibre et du mouvement* (1803), *De la stabilité des corps flottants* (1814).

Auf dem Gebiet der eigentlichen Mathematik befaßte sich Carnot hauptsächlich mit Analysis und Geometrie. Zur Erforschung der Grundlagen der komplexen Zahlen gehört die erstmalige Verwendung dieser Bezeichnung, die ihm zugeschrieben wird. Zur Grundlagenforschung der Analysis und ihrer Begründung – ein Hauptthema des frühen 19. Jhdts. – zählt *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal* (Original 1797), in zweiter Auflage 1813 erschienen. Eine vierte Auflage erschien 1860 und wurde noch 1970(!) nachgedruckt (*nouveau tirage)*. In zwei Bänden kam die *Métaphysique du calcul* 1921 in der Reihe *Les maîtres de la pensée scientifique* heraus: Pflichtlektüre des mathematischen Analytikers. Mit *De la corrélation des figures en géométrie* (1801) und *Géométrie de position* (1803) markiert Carnot, zusammen mit Monge, den Übergang zur modernen Geometrie. Im Hinblick auf die projektive Geometrie gilt Carnot mit *Géométrie de position* (Abb. 16) als Vorläufer Poncelets. Carnot argumentiert darin mit Hilfe der trigonometrischen Funktionen, hauptsächlich Sinus und Cosinus, die in einer Tabelle zusammengestellt werden: der sog. *Cosinussatz der Trigonometrie* hieß früher *Carnotscher Satz* [95].

Ebenso erstaunlich wie die zitierten Werke Carnots und ihr Inhalt, ist die Tatsache, daß sie nicht etwa während der erzwungenen Ruhepausen ihres Verfassers entstanden sind, sondern gerade dann, als er auf höchster staatlicher Ebene politische Leistungsbereitschaft beweisen mußte. Die Gegenwart eines Robespierre und seiner Genossen, gegen die er am *8./9. Thermidor* (1794) Stellung bezog, bedeutete dabei eine zusätzliche psychische Belastung. Es ist in der Tat bewunderungswürdig, daß Carnot unter solchen Umständen, die nötige Muße und Konzentration für anspruchsvollste geistige Arbeit aufbringen konnte.

Bezüglich der von Tropfke behaupteten erstmaligen geometrischen Herleitung der Kollinearität „merkwürdiger Punkte“ der Dreiecke stellt sich die Frage, wo diese Pionierleistung Carnots zu finden sein kann. Aus Anlaß der Behandlung der Feuerbachschen „merkwürdigen Punkte“ des Dreiecks erwähnt Tropfke lediglich das Jahr 1803. Die Vermutung liegt daher nahe, Carnots Untersuchung könnte in der Abhandlung *Géométrie de position* von 1803 enthalten sein. Dies ist tatsächlich der Fall.

Indes finden sich in dem mehr als vierhundert Seiten starken Band weder im Inhaltsverzeichnis noch in einem Register, Hinweise auf das Phänomen. Die Bezeichnung *Euler-Gerade* fehlt durchwegs. Carnots *Géométrie de position* zerfällt in sechs Sektionen (Abb. 17). Deren fünfte trägt den Titel *Application de la théorie précédente à diverses questions de la géométrie élémentaire.* Die ersten vier Sektionen sind offensichtlich theoretischer Natur, während die sechste sich laut Überschrift mit Punkten im Raum und Koordinatentransformationen befaßt.

Fraglos ist die Kollinearität von Umkreismittelpunkt, Schwerpunkt und Höhenpunkt eines Dreiecks ein Problem der elementaren Geometrie. Aber auch angesichts ihrer Bedeutung – immerhin ist sie, wenn auch erst später, durch den ehrenvollen Namen Eulers ausgezeichnet worden – , würde man erwarten, sie in der fünften Sek-

[95] Ein merkwürdiger Zufall will es, daß aus einer Permutation der Buchstaben des Namens CARNOT die Buchstabenfolge CANTOR hervorgeht, der Name eines Mathematikers, dessen Werk ebenfalls in neue Richtungen wies. Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (*1845 in St.Petersburg, † 1918 in Halle), 1869 Privatdozent, ab 1877 bis 1913 Ordinarius in Halle, wurde bekannt durch die zunächst paradox anmutende Entdeckung, daß das Adjektiv *unendlich* steigerungsfähig ist. Cantor ist der Begründer der Mengenlehre. Auch sonst erinnert Vieles bei Cantor an Carnot. Mit der Vierzahl der Vornamen übertrifft er Carnot sogar noch. Obwohl schon sein Vater protestantisch war, stammte auch Cantor von einst jüdischen Ahnen. Mit Carnot teilt Cantor literarische und literaturgeschichtliche Interessen, die ihn zu Jakob Böhme und John Dee führten. Zeitlebens beschäftigte er sich, sogar publizistisch, mit der Suche nach dem *wahren Autor* der Werke Shakespeares und glaubte in Francis Bacon diesen gefunden zu haben.

tion als *question de la géométrie élémentaire* behandelt zu finden. Dies ist indessen nicht der Fall.

Dem Leser bleibt daher eine Durchmusterung der übrigen Teile des Buches nicht erspart. Tatsächlich findet er im theoretischen Teil von Carnots *Géométrie de position,* mit Hinweisen auf die Figuren 43 (Abb. 20) und 45 (im wesentlichen identisch mit Abb. 21), auf den Seiten 163 und 164 den Paragraphen 131 (Abb. 18 und 19), der gerade 22 Zeilen umfaßt und dessen letzter Satz, *le point où se croisent les trois droites menées de chacun des angles au point milieu du côté opposé, celui où se croisent les trois perpendiculaires menées des mêmes angles sur ces côtés opposés et le centre du cercle circonscrit, sont toujours placés sur une même ligne droite,* genau die Kollinearität von Schwerpunkt, Höhenpunkt und Umkreismittelpunkt ausspricht.

Allerdings kennt Carnot keine spezifischen Bezeichnungen weder für Höhen(schnitt)punkt und Schwerpunkt noch für Mittellinien oder Schwerlinien und für Höhen. Einzig der Umkreismittelpunkt, *centre du cercle circonscrit*, braucht nicht umschrieben zu werden. Auch hier fehlt ein Hinweis auf *Euler* und auf die *Euler-Gerade*. Die Bezeichnung war um 1800 anscheinend noch gar nicht üblich. Überdies muß man angesichts der Darbietung annehmen, daß Carnot ungeachtet eines Altersunterschieds von annähernd fünfzig Jahren Eulers Studie nicht kannte. Dies verwundert freilich nicht, denn die Kollinearität der „merkwürdigen Punkte" bleibt in Eulers Originaltext (Seiten 8 bis 24) hinter seiner Analyse der Dreieckskonstruktion versteckt. Er gab der „merkwürdigen Geraden" auch keinen besonderen Namen, sondern analysierte eine Dreieckskonstruktionsaufgabe, und behandelte dabei die Kollinearität gleichsam als eine notwendige, aus der Analyse sich ergebende Einschränkung der Vorgaben, nicht anders als gewisse zwischen den vorgegebenen Punkten einzuhaltende Minimalabstände. Außerdem läßt der Titel der Eulerschen Studie jeglichen Bezug auf ihren Inhalt vermissen, so daß Carnot keinen Anlaß hatte, Eulers Studie in seine Überlegungen einzubeziehen.

Carnot argumentiert geometrisch. Sein Nachweis der Kollinearität der „merkwürdigen Punkte" ist im wesentlichen indentisch mit den oben auf den Seiten 182 bis 185 vorgestellten Folgerungen aus elementaren euklidschen Gesetzen, nur daß er wie im ganzen Buch trigonometrische Funktionen, hauptsächlich die Funktionen *cosinus* und *sinus*, benutzt. Diese sind im ebenen rechtwinkligen Dreieck indessen nichts anderes als Streckenverhältnisse.

Euler benutzte in Zif. 34 bereits griechische Kleinbuchstaben zur Bezeichnung von Winkeln. Im Paragraphen 131 verwendet Carnot dagegen die schwerfälligen Buchstabentripel, deren mittlerer Buchstabe den Scheitel des Winkels angibt. In Carnots Figur 43 (Abb. 20) teilt die Höhe *AE* den Winkel $\angle A$ in zwei Teilwinkel, die indes durch die lateinischen Kleinbuchstaben *m* und *n* bezeichnet werden: $\cos. BAC = \cos.(m+n)$.

Die Zentriwinkel über den Seiten des Dreiecks *ABC* tragen die Bezeichnungen $\angle AB = 2\pi - 2n$, $\angle BC = 2m+2n$, $\angle CA = 2\pi - 2m$, wo das Symbol π offenbar einem Winkel von 90° entspricht, nicht, wie heute üblich, 180°.

Carnot argumentiert mit einem Einheitskreis, allerdings einem solchen, dessen Durchmesser, nicht Radius, gleich 1 ist: *le diamètre du cercle étant* 1. In Fig. 43 fehlen einige Elemente, die erst in der Figur 45 angegeben werden, obwohl im Text

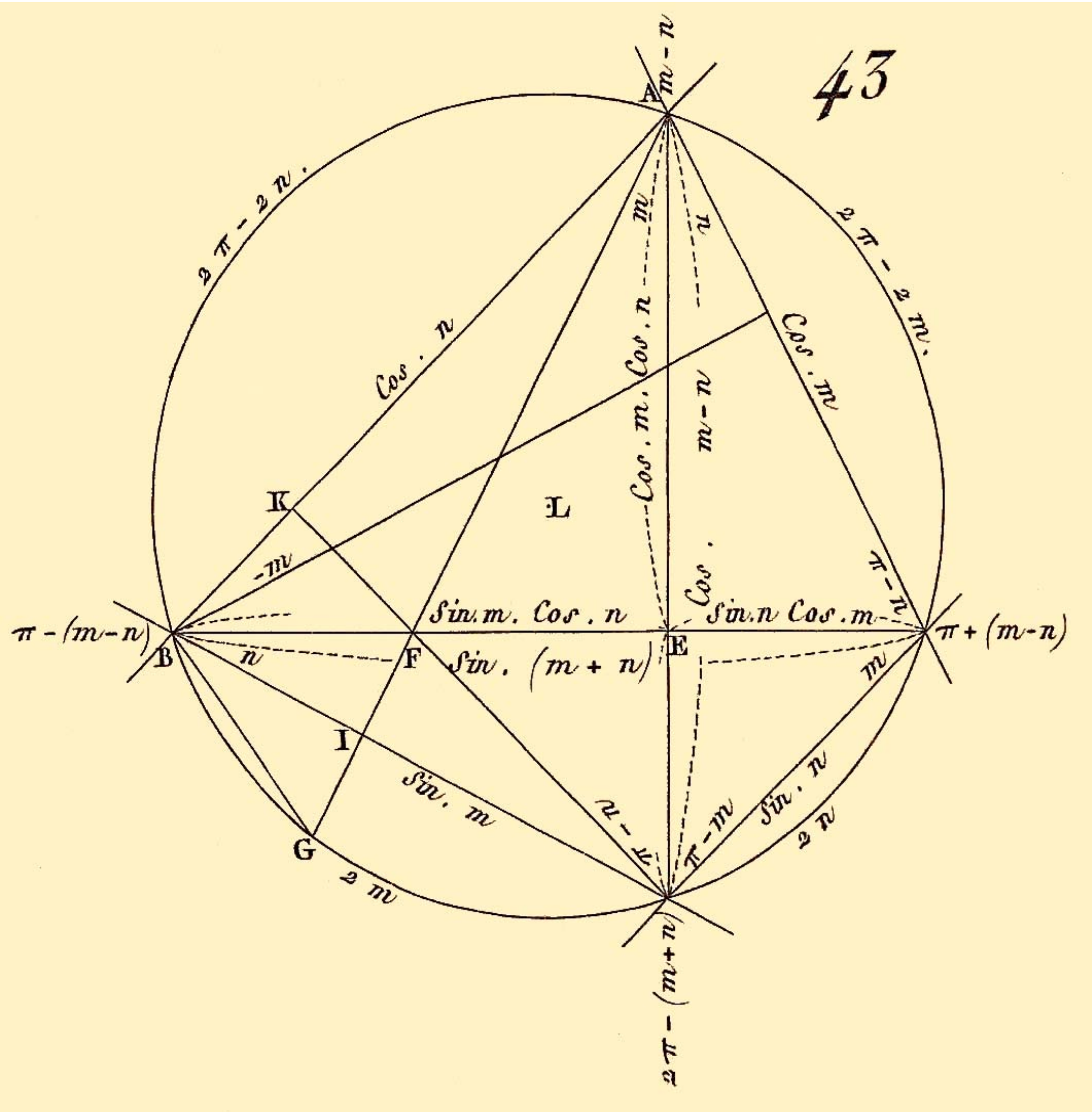


Abb. 20. L.N.M. Carnot. Géométrie de position. Paris, 1803. Fig. 43.

bereits auf sie Bezug genommen wird, so die Buchstaben *C* (rechte Ecke des Dreiecks *ABC*), *H* (Höhenpunkt) und *p*, *le point milieu de BC* (Mittelpunkt der Grundlinie des Dreiecks), ferner die Mittelsenkrechte *Lp* und der Kreisradius *LB*.

Benützt man Carnots Bezeichnungen, ist im Dreieck *ABC* (Abb. 20 und 21) der Punkt *L* Umkreismittelpunkt. Der Winkel $\angle CAB = \alpha$ ist folglich ein Peripheriewinkel über der Sehne *BC*, der Winkel $\angle CLB$ Zentriwinkel über *BC* und gleich 2α.

Dessen Hälfte, der Winkel $\angle pLB$, ist daher gleich $\angle pLB = \alpha$. Die Strecken *AE* und *BM* sind Höhen, ihr Schnittpunkt *H* ist daher der Höhenpunkt des Dreiecks *ABC*. Die Strecke *BL* ist ein Radius des Umkreises, ihre Länge sei $BL = r$.

Zwecks Vereinfachung und Aktualisierung der Notationen werden in Abb. 21 die Dreieckswinkel $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ durch α, β, γ bezeichnet, wobei wieder die Beziehungen $\alpha + \alpha' = 90°$, $\beta + \beta' = 90°$, $\gamma + \gamma' = 90°$ gelten mögen. Im Interesse der Vollständigkeit soll zudem im Gegensatz zu den Abb. 6 und 7 in der Abb. 21 mit einem spitzwinkligen Demonstrationsdreieck argumentiert werden. Man verifiziert leicht, daß dessen diverse Winkel sich wie in Abb. 21 angegeben verhalten.

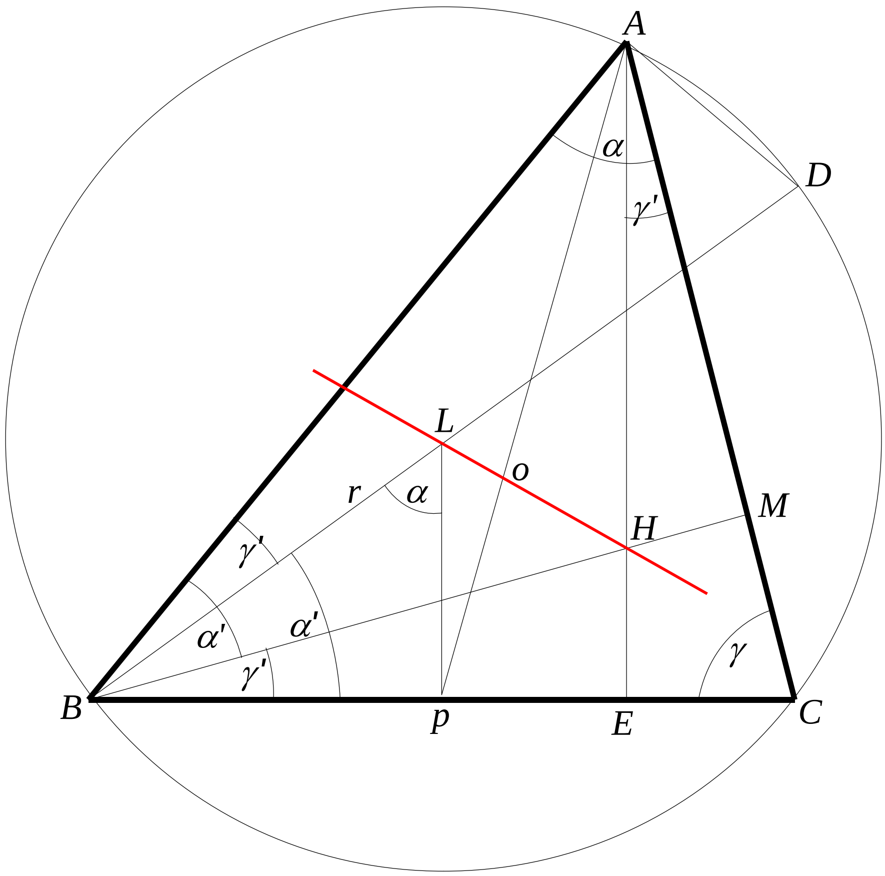


Abb. 21. Carnots Figur 45 ergänzt durch Hilfslinien. Die gestrichenen Winkel sind die Komplemente der gleichnamigen ungestrichenen. Der obere Höhenabschnitt *AH* ist gleich 2*Lp*. Die Dreiecke *oLp* und *oHA* sind ähnlich, $oA = 2op$: der Schnittpunkt *o* ist der Schwerpunkt des Dreiecks *ABC*, die Punkte *L*, *o*, *H* liegen auf einer Geraden.

Aus der Abb. 21 liest man ab, daß $Lp = r\cos\alpha$. Laut Carnot (§ 131, Abb. 18) ist die Strecke $AH = 2r\cos\alpha$ (Carnot setzt $2r = 1$ und $\alpha = m+n$). *AH* ist somit doppelt so lang wie *Lp*, $AH = 2Lp$. Daß dies wirklich so ist, entnimmt man auf einfache Weise der Abb. 21.

Die Sehne *BD* des Umkreises des Dreiecks *ABC* durchläuft den Mittelpunkt *L* des Umkreises. Sie ist daher ein Durchmesser des Umkreises. Ihre Länge ist 2*r*, wenn mit *r* der Radius des Umkreises bezeichnet wird. Alle Peripheriewinkel über der Sehne *BD* = 2*r* betragen 90°, denn der Umkreis ist für sie Thaleskreis.

Das Teildreieck *ABD* ist folglich rechtwinklig bei *A*, und die Dreiecksseite *AB* = *c* ist eine seiner Katheten. Aus der Figur liest man ab, daß

$$AB = c = 2r\cos\gamma' = 2r\cos(90°-\gamma) = 2r\sin\gamma.$$

Die Teildreiecke *ABM* und *AHM* sind rechtwinklig bei *M*, da der ihnen gemeinsame Punkt *M* Fußpunkt der Höhe *BM* von *ABC* ist. Die Seite *AM* ist folglich eine Kathete sowohl von *ABM* wie von *AHM*, und man liest ab, daß

$$AM = c\cos\alpha = 2r\sin\gamma\cos\alpha \qquad \text{in } ABM \text{ und}$$

$$AM = AH\cos\gamma' = AH\sin\gamma \qquad \text{in } AHM\,.$$

Weil $r\cos\alpha = Lp$, folgt aus der Gleichheit

$$AM = AH\sin\gamma = 2r\sin\gamma\cos\alpha = 2Lp\sin\gamma:$$

$$\boldsymbol{AH = 2\,Lp}\,.$$

Die Mittelsenkrechte *Lp* und die Höhe *AE* stehen senkrecht auf der Basis *BC* und sind daher parallel. Die Winkel ∠*LpA* und ∠*EAp*, welche sie mit der Schwerlinie *Ap* bilden, sind somit gleich. Die Punkte *L* und *H* definieren die Gerade *LH*, die von der Schwerlinie *Ap* im Punkte *o* geschnitten wird. Die Schwerlinie *Ap*, die Gerade *LH*, die Senkrechte *Lp* und die Höhe *AE* erzeugen die Teildreiecke *Lpo* und *HAo*, deren Winkel als Wechselwinkel an Parallelen und Scheitelwinkel sich schneidender Geraden gleich sind. Die Teildreiecke *Lpo* und *HAo* sind folglich ähnlich. Wegen *AH* = 2*Lp* sind alle homologen Strecken des Dreiecks *HAo* doppelt so lang wie diejenigen des Dreiecks *Lpo*. Insbesondere ist *oA* = 2*po*, d.h. der Punkt *o* ist der Schwerpunkt des Dreiecks *ABC*.

Als Schnittpunkt der Geraden *LH* und *Ap* liegt der Punkt *o* auf beiden, insbesondere aber auf *LH*: Umkreismittelpunkt *L*, Höhenpunkt *H* und Schwerpunkt *o* liegen daher auf ein und derselben Geraden:

sont toujours placés sur une même ligne droite,

die heute ***Euler-Gerade*** genannt wird.

Nachwort.

Die Kollinearität von Umkreismittelpunkt, Schwerpunkt und Höhenpunkt eines Dreiecks kann schwerlich einfacher nachgewiesen werden als nach Carnots Manier. Carnot verbindet den Umkreismittelpunkt und den Höhenpunkt durch eine Gerade. Danach zieht er eine Mittellinie. Diese schneidet die Gerade *Umkreismittelpunkt-Höhenpunkt*. Eine genauere Prüfung des Schnittpunkts ergibt, daß er der *Schwerpunkt* des Dreiecks ist: die drei Punkte liegen somit auf einer Geraden.

Diese Überlegungen fußen auf ein paar elementaren Definitionen und Sätzen aus den Anfangsgründen der euklidschen Geometrie. Die enthusiastische Begrüßung durch den Petersburger Kommentator und Autor des *Summarii* (Seite 5) und die spätere Unterordnung unter den ehrenvollen Namen Eulers implizieren, daß die Geometrie die Dreieinigkeit *drei Punkte – eine Gerade* erst zweitausendeinhundert Jahre nach Euklid wahrgenommen haben will. Man hat indes Mühe zu glauben, daß es des gewaltigen algebraischen Apparates Eulers bedurfte, um die Kollinearität der drei „merkwürdigen Punkte“ zu erkennen, wenn doch schon einfachste geometrische Überlegungen ohne jegliche Rechnung zum selben Ergebnis führen konnten.

Der Historiker Tropfke erinnert daran, daß weder Euklid noch Archimedes auf die naheliegende duale Dreieinigkeit *drei Geraden – ein Punkt* (drei Höhen – ein Höhenpunkt; drei Schwerlinien – ein Schwerpunkt; drei Winkelhalbierende – ein Inkreismittelpunkt; drei Mittelsenkrechte – ein Umkreismittelpunkt) hinweisen mochten. Ihnen genügte der Schnittpunkt zweier Geraden, und, daß die dritte Gerade danach durch den selben Schnittpunkt führte, galt ihnen als selbstverständlich.

Man ist versucht, im Falle der Eulerschen Kollinearität eine analoge „Selbstverständlichkeit“ zu postulieren. Sie drängt sich eigentlich auf, wenn die Verwandtschaft der „merkwürdigen Punkte“ als Ergebnis einer zentrischen Streckung betrachtet wird, wo die Euler-Gerade als Streckungsstrahl und Fixgerade erscheint. In dieses Bild fügt sich nahtlos der Mittelpunkt des Feuerbachschen Kreises als vierter auf der Euler-Geraden gelegener, kollinearer Punkt ein.

Die Preisaufgabe der *Miscellanea Berolinensia* 1723 forderte die Konstruktion eines Dreiecks, wenn dessen Schwerpunkt, Inkreismittelpunkt und Höhenpunkt, also nur zwei „merkwürdige Punkte“ der Euler-Geraden, vorgegeben sind. Euler löste die Aufgabe in Ziffer 21 mit Hilfe des Schwerpunkts, des Inkreismittelpunkts und des Umkreismittelpunkts, in Ziffer 30 mit Höhenpunkt, Inkreismittelpunkt und Umkreismittelpunkt. In beiden Fällen werden nur zwei ausgezeichnete Punkte der Euler-Geraden benötigt, da der (immer benötigte) Inkreismittelpunkt nur bei gleichschenkligen Dreiecken auch auf der Euler-Geraden liegt. Allerdings macht Euler für die Streckenberechnungen Gebrauch von den Eigenschaften des Phänomens *Euler-Gerade* (Zif. 16).

Durch die Einbeziehung des Umkreismittelpunkts in seine Überlegungen mußte Euler auf die Kollinearität der drei Punkte stoßen, wenn er sie nicht schon vorher gekannt hat. Die Kollinearität der drei Punkte *E, F, H* spielt für die Dreieckskonstruktion insofern eine Rolle, als wegen des festen Streckenverhältnisses unter ihnen trotz Vorgabe von beliebigen zweien dasselbe Dreieck herauskommen muß.

Carnots kurze Notiz bezeugt, daß Eulers algebraischer Apparat für die Herleitung des Phänomens *Euler-Gerade* nicht nötig ist. Er ist dennoch nicht überflüssig, dient indes einem andern Zweck, nämlich der Berechnung dreier konstruktionsfähiger Größen des gesuchten Dreiecks, wenn drei dessen „merkwürdiger Punkte“ vorgegeben werden.

Diese Aufgabe ist unkonventionell. Für geometrische Konstruktionen werden üblicherweise andere Stücke, meist Strecken und Winkel vorgegeben. Schon allein die Aufgabenstellung, mehr noch aber die Inangriffnahme der Aufgabe und die Durchführung der Lösung nötigen Bewunderung ab. Die Ermittlung der drei für die Dreieckskonstruktion nötigen Stücke als Lösungen einer einzigen Gleichung dritten Grades und die Einführung der dazu dienlichen, später universell gewordenen Abkürzungen $p = \Sigma a$, $q = \Sigma ab$ und $r = abc$ sind bestrickend. Sie sind es wert, immer wieder in Erinnerung gerufen zu werden; nur schon deswegen, weil in Lehrbüchern und andern Darstellungen einseitig die Entdeckung der Kollinearität und ihres Streckenverhältnisses in den Vordergrund gestellt wird.

Aus Eulers Darstellung geht nicht direkt hervor, daß er selber überzeugt war, das Phänomen nur zufällig entdeckt zu haben. Die Kollinearität der drei Punkte war wohl zu simpel, um die Abfassung einer eigenständigen Publikation zu rechtfertigen. Euler hat sie daher in ein größeres Umfeld stellen wollen und mit der Akademieaufgabe gerade dasjenige gefunden, in das sie organisch hineinpaßt.

Auffallend sind die Gemeinsamkeiten der Eulerschen Studie und Bramers kleiner Schrift. Schon die Titel klingen fast gleich: *Solutio problematum geometricorum* und *Geometrische Quaestiones solvirt*. Transformiert man Bramers altertümliche Verbalformulierungen in eine zeitgemäße Symbolsprache, sind sie mit Eulers Formeln sogar buchstäblich identisch.

Bramer berechnete die *eine* Entfernung der Mittelpunkte von Umkreis und Inkreis in einem gegebenen Dreieck voneinander. Euler tat detailgetreu dasselbe, *erweiterte* aber die Aufgabe um *fünf* weitere auf die *sechs* Entfernungen zwischen Höhenpunkt, Schwerpunkt, Umkreis- und Inkreismittelpunkt und zeigte darüberhinaus noch, wie das zugehörige Dreieck konstruiert werden kann, wenn drei der sechs Entfernungen vorgegeben werden. Aus Bramers *Frage* IX mit gerade elfeinhalb dürren Zeilen wurde eine neunzehnseitige Abhandlung vollgepackt mit algebraischen Funktionsformeln.

Unwillkürlich denkt man an den berühmten Fall „Robins“. Benjamin Robins (1707-1751), Altersgenosse Eulers, hochbegabter Autodidakt, Mitglied der Royal Society und Parteigänger Newtons, hatte 1742 seine *New Principles of Gunnery* veröffentlicht, eine der ersten Darstellungen, in denen die Denkweise der noch ungewohnten Newtonschen Mechanik auf konkrete Fragen der Ingenieurwissenschaften, in diesem Falle der inneren und äußeren Ballistik, angewandt wurde.

Robins' Schrift erregte im akademischen Umfeld sofort verbreitete Aufmerksamkeit und erlebte 1805 eine Neubearbeitung durch Charles Hutton (1737-1823). Schon 1745 „übersetzte“ aber Euler Robins' *Principles* ins Deutsche unter dem inhaltsschweren Titel:

Neue Grundsätze der Artillerie, enthaltend die Bestimmung der Gewalt des Pulvers nebst einer Untersuchung über den Unterscheid des Wiederstands der Luft in schnellen und langsamen Bewegungen, aus dem Englischen des Hrn. Benjamin Robins übersetzt und mit den nöthigen Erläuterungen und vielen Anmerkungen versehen von Leonhard Euler, Königlichem Professor in Berlin. Berlin bey A. Haude, Königl. und der Akademie der Wissenschaften privil. Buchhändler, 1745.

Im Hinweis auf die *nöthigen Erläuterungen und Anmerkungen* schimmert eine leichte Animosität durch, die sich durch vorangegangene kritische Äußerungen Robins' erklärt. Dieser glaubte, Ursache zu haben, sich verkannt und übergangen fühlen zu müssen. Die angetönten Erläuterungen und Anmerkungen kamen indes derart zahlreich und schwergewichtig heraus, daß Robins' Original von 340 Seiten in Eulers Version mit gegen 950 Seiten schließlich den zweieinhalbfachen Umfang erreichte und als eigenständige Arbeit Eulers bezeichnet werden muß. 1783 wurde der „Robins–Euler“ noch ins Französische übersetzt.

Eulers erster programmatischer Satz in der *Vorrede* lautet: „*Die Artillerie ist schon von langer Zeit her als ein Theil der Mathematic angesehen worden, indem dieselbe ohne eine hinlängliche Erkenntniß der Arithmetic und Geometrie nicht abgehandelt werden kann*.“ Dieser gewichtige „Kommentar“ muß den damals noch jungen König und späteren „Alten Fritz“ gebührend beeindruckt haben und ihm, der gerade seinen zweiten Schlesischen Krieg führte, bestens zustatten gekommen sein, wenn gleich der Interessenbereich des Königs nicht bis zur Mathematik, geschweige denn zu den neuartigen Fluxionsrechnungen, reichte.

Heinz Theo Lutstorf, Lally, den 24. März 2010

Summary

In 1763 Euler solved the problem to construct a triangle if three of four critical points are given by their mutual distances, which the Prussian Academy had stated as a problem in 1723 (Miscellanea Berolinensia, II, Berlin 1723, p. 89-128, *Problema Geometricum*). The four points are the centre of gravity F (centroid), the point of intersection E of the altitudes (perpendiculars), and the two centres G and H of the inscribed and circumscribed circles respectively.

Using side AB of the triangle as x-axis and the vertex A as origin Euler first determines the coordinates of the critical points, and, in a second step, their mutual distances f, g, h as functions of the sides a, b, c, which implicitly defines the latter as functions of f, g, h. Introducing the abbreviations $p = a+b+c$, $q = ab+ac+bc$, and $r = abc$, which may be interpreted as coefficients of the cubical equation

(1) $$\boldsymbol{z^3 - pz^2 + qz - r = 0}$$

whose roots are a, b, c, and, defining the new variables

(2) $$P = p^2, \quad Q = \frac{r}{p}, \quad R = \frac{r^2}{ps}$$

(with $4s = 4pq - p^2 - 8r$), i.e. as combinations of p, q, r, Euler expresses the distances f, g, h as functions of P, Q, R. He then regards the three resulting formulae $f(P,Q,R)$, $g(P,Q,R)$, $h(P,Q,R)$ as a system of three equations for the three unknown quantities P, Q, R, and, by an artifice withheld in the text, he then solves the system, thus receiving P, Q, and R as explicit functions of the distances f, g, h. Once P, Q, R are known it is easy to calculate p, q, r from (2) in terms of f, g, h, and formulate equation (1). Finally Euler solves (1) and finds the lengths of the sides a, b, c, which are the roots of equation (1). The construction of the triangle required is then but an elementary problem.

The mutual distances – absolute values and directions – between points E, F, G, H are subject to certain conditions, which the author investigates. By comparing the formulae – functions f, g, h of a, b, c or p, q, r respectively – expressing the positions of E, F, G, H it is easily shown that in every triangle points E, F, and H must lie on a straight line, later called *Euler (straight) line*, while centroid F divides EH in the ratio $EF : FH = 2 : 1$. If the triangle is isosceles the centre G of the inscribed circle also lies on the Euler line, which then is identical with the perpendicular from vertex to base.

Euler's study was published in the proceedings of the St.Petersburg Academy 1765 (printed 1767), in the shape of a 19-page sketch. Euler perspicuously states the various partial problems, but notes results only, leaving intricate and lengthy calculations to the reader. The present study tries to specify in greater detail some of the less obvious intermediary steps of Euler's calculations and to give explicit solutions of equations appearing in the study.

Benutzte Literatur

1. Bramer, Benjamin. Etliche Geometrische Quaestiones, so mehrertheyls bißhero nicht vblich gewesen: Solvirt und beschrieben von B.B. Philomathematico und Bawmeystern zu Marpurg. Marburg, Paul Egenolff, 1618.

2. Carnot, Lazare Nicolas Marguerite. Géométrie de position. Paris, J.B.M. Duprat, 1803.

3. Euler, Leonhard. Solutio facilis problematum quorumdam geometricorum difficillimorum. Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 11(1765), 1767, p. 103-123. Summarium ibidem p. 12-14.

4. Tropfke, Johannes. Geschichte der Elementarmathematik. Vierter Band. Ebene Geometrie. Berlin und Leipzig, 1923.

5. Biographische Daten aus WIKIPEDIA.

Namen- und Sachverzeichnis