Vorfassung eines Beitrags in: Linneweber, H. (Hrsg.): Mathematikdidaktik, Bildungsstandards und mathematische Kompetenz. Aus der Reihe: Lehren lernen – Basiswissen für die Lehrerinnen- und Lehrerbildung. Zug: Klett & Balmer, S. 237-264

Timo Leuders

# 13 Entdeckendes Lernen – Produktives Üben

*"Was dem erwachsenen Mathematiker recht ist - seine eigenen Begriffe zu erfinden [...], Mathematik nicht als einen Sachbestand, sondern als Tätigkeit zu üben - das soll dem Lernenden von Kindesbeinen an billig sein."*
*Hans Freudenthal (1976)*

Auf den ersten Blick mag es scheinen, als würden hier zwei ganz unterschiedliche Phasen des Unterrichts miteinander vermischt: Entdeckendes Lernen erwartet man eher bei der Erarbeitung neuer Inhalte, während man das Üben eher beim Wiederholen und Festigen von bereits Erarbeitetem verortet sieht. Dass auch beim Entdecken geübt wird und dass Üben entdeckenden Charakter haben kann, ist in der Didaktik der Primarstufe keine neue Erkenntnis (Winter 1989, Müller/Wittmann 1992, Selter 1995). In der Sekundarstufe erscheinen die Lernsituationen allerdings bislang in der Regel getrennt, auch wenn Konzepte wie „Produktive Aufgaben“ (Herget, Jahnke & Kroll 2001) und „Intelligentes Üben“ (Leuders 2009) zunehmend Beachtung finden. Was Entdecken und Üben charakterisiert und unterscheidet und wie es getrennt oder vereint umgesetzt werden kann, ist Gegenstand dieses Kapitels.

## 13.1 Entdecken und Üben in verschiedenen Phasen des Unterrichts

Man kann sich das schulische Mathematiklernen als eine Abfolge von charakteristischen, sich immer wieder abwechselnden und ineinander greifenden Phasen vorstellen (Aebli 1983, Zech 1996, Büchter/Leuders 2005; „Kernprozesse“ bei Prediger et al 2013):
Beim Prozess des „**Erkundens**“ geht es um (vgl. Winter 1989, Gallin/Ruf 1998):

- das aktive Konstruieren von Mathematik auf eigenen Wegen
- das Zulassen und Wertschätzen von singulären Ideen und Divergenz
- das Anknüpfen an lebensweltliche Vorstellungen.

Beim Prozess des **„Ordnens“** geht es um (vgl. Prediger et al. 2011):

- das Systematisieren von individuell Erkundetem
- das Regularisieren, d.h. das Einordnen in die „fertige Mathematik“
- das Sichern, d.h. das Dokumentieren von Ergebnissen

Beim Prozess des „**Vertiefens**“ geht es um (vgl. Renkl 2000, Winter 1984, Leuders 2009):

- das wiederholende Sichern von Wissen und Fertigkeiten (Trainieren)
- das Flexibilisieren von Fähigkeiten

- das Erhöhen von Transferfähigkeit, auch außerhalb des Erarbeitungskontextes
- das Vernetzen mit anderem Wissen

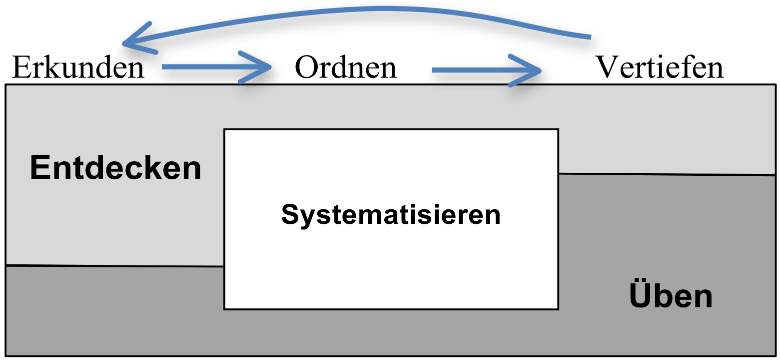



Abbildung 13.1: Entdecken und Üben in verschiedenen Phasen des Unterrichts

Prozesse des Entdeckens und Übens finden sich – wenn auch in verschiedener Gewichtung - sowohl in der Phase des Erkundens als auch in der Phase des Vertiefens und müssen (auf jeweils verschiedene Weise) dieselben Anforderungen erfüllen. Sie müssen

- die Kompetenzziele berücksichtigen,
- einen sinnstiftenden Charakter besitzen, d.h. den Zweck des Lernens deutlich werden lassen,
- individuelle Entdeckungen ermöglichen,
- alle Lernenden kognitiv aktivieren, d.h. zum mathematischen Denken anregen,
- differenzierende Zugänge ermöglichen (vgl. Leuders/Prediger 2012).

Was diese Unterschiede und Gemeinsamkeiten der Phasen „Erkunden" und „Üben" für die Lernsituationen konkret bedeuten, wird in diesem Kapitel ausführlich diskutiert. (An dieser Stelle kann Aufgabe 1 aus13.5 bearbeitet werden.)

## 13.2 Entdeckendes Lernen: Konzepte und Begründungen

### 13.2.1 Begründungen für und Kritik am Entdeckenden Lernen

Entdeckendes Lernen (discovery learning) ist ein fachübergreifendes Lehr-Lernmodell, das Jerome Bruner (1961) als Gegenmodell zum so genannten „expositorischen Lernen" umrissen hat und das im Zusammenhang mit konstruktivistischen Auffassungen vom menschlichen Lernen als geeignet für schulisches Lernen angesehen wird. Kennzeichen entdeckenden Lernens ist, dass sich der Lernende auf der Basis angebotener, nicht vorstrukturierter Beispiele, Phänomene, Situationen oder Probleme Wissen in Form von Konzepten oder Zusammenhängen selbst erarbeiten muss.

Diese aktive Konstruktion, so die These des entdeckenden Lernens, führt zu einer tieferen Verarbeitung, einem nachhaltigeren Behalten, einer Förderung von

Lernstrategien, der Selbstregulation beim Lernen und der intrinsischen Motivation. Dass entdeckendes Lernen in konkreten Kontexten stattfindet, soll zudem „träges Wissen“ verhindern, sich also günstig auf die Transferfähigkeit auswirken.

Die Adäquatheit von Lernumgebungen, die nach dem Prinzip des entdeckenden Lernens gestaltet sind, wurde aber auch vielfach in Frage gestellt. Das Hauptargument lautet: Entdeckendes Lernen erzeugt zusätzliche, dem Erreichen der Lernziele abträgliche Belastungen (Mayer 2004). Lernende müssen den Entdeckungsprozess selbstreguliert steuern, also entscheiden, welchen Schritt sie als nächstes gehen, bewerten, wie weit sie schon gekommen sind und alle bisherigen Erkenntnisse im Blick behalten. Sie müssen in der Lage sein, in einem für sie noch unstrukturierten Bereich Vermutungen zu generieren (noch dazu solche, die auf das erwünschte Lernziel hinführen) und diese auf geeignete Weise zu überprüfen.

Was wiegt nun mehr? Fördern oder behindern die unbestreitbar vorhandenen zusätzlichen Verarbeitungsprozesse das Lernen? Lohnt sich der höhere Aufwand für Lernende und Lehrende? Nach fünfzig Jahren Forschung lautet die Antwort, dass dies von den Zielen und den jeweiligen Umsetzungsformen abhängig ist.

### 13.2.2 Varianten des Entdeckenden Lernens

Mathematische Begriffe, Verfahren, Zusammenhänge oder Strategien enthalten einerseits mathematische Ideen, die entdeckend gelernt werden können. Sie enthalten aber auch Normen und Konventionen: diese müssen mitgeteilt werden und können allenfalls noch hinsichtlich ihre Angemessenheit oder Nützlichkeit diskutiert werden. Verschiedene Formen des entdeckenden Lernens lassen sich unterscheiden:

**Induktive Begriffsbildung**: Lernende entdecken Begriffe, indem sie hinreichend viele Beispiele und Gegenbeispiele für einen Begriff untersuchen. Sie finden dann möglicherweise die Regeln oder Eigenschaften, die den Begriff charakterisieren, präzisieren diese und prüfen sie gegebenenfalls an weiteren Beispielen, die sie selbst erstellen (z.B. bereits bei Bruner, Goodnow & Austin 1956 in: Aebli 1981, S.175ff.).

**Forschendes Lernen** (inquiry learning): Lernende untersuchen eine Fragestellung und entwickeln dabei die Strategien für die Bearbeitung dieser Fragestellung selbst. Eine sehr häufig betrachtete Spezialform ist die des „Lernen durch Experimentieren“ (scientific inquiry learning). In Analogie zum experimentellen Vorgehen in den Naturwissenschaften entwickeln Lernende Vermutungen über Zusammenhänge bzw. Gesetzmäßigkeiten und prüfen diese anhand geeignet ausgewählter oder gestalteter Experimente (z.B. Klahr/Dunbar 1988).

**Problembasiertes Lernen** (problem-based learning): Lernende sollen ein gegebenes (mitunter bewusst wenig strukturiertes) Problem lösen und müssen gegenstandsspezifisches Wissen entdecken (generieren oder finden), welches dann das Problem löst. Wenn das Problem darin besteht ein Produkt mit gewissen Qualitäten herzustellen, spricht man auch vom „design-based learning“ (Albanese/Mitchell 1993).

Wie unterscheiden sich diese drei Formen? Bei der induktiven Begriffsbildung steht der zu bildende Begriff im Zentrum, forschendes Lernen fokussiert eher auf Zusammenhänge. Beim problembasierten Lernen dient der Entdeckungsprozess primär der Lösung eines konkreten Problems oder der Herstellung eines Produktes (kann dabei aber auch Zusammenhänge und/oder Begriffe zu Tage fördern). Was dies alles für das Fach Mathematik konkret bedeuten kann, wird im nachfolgenden Abschnitt diskutiert.

Ob ein Begriff, Verfahren oder Zusammenhang im Mittelpunkt der Entdeckung steht, hat Auswirkungen auf die Art der Entdeckungssituation. Allerdings sind diese unterschiedlichen Typen von „Entdeckungsobjekten“ nicht immer einfach zu trennen (Gray/Tall 1994) und auch die Frage, ob Begriffe oder Verfahren am Anfang einer Entdeckung stehen sollen, ist nicht grundsätzlich zu klären (Rittle-Johnson/Alibali 1999), sondern muss wohl bei jedem Lerngegenstand neu geprüft werden. (An dieser Stelle kann Aufgabe 2 aus13.5 bearbeitet werden.)

### 13.2.3 Effektivität entdeckenden Lernens

Tendenziell steht die Effektivität entdeckenden Lernens in den letzten Jahren in der Kritik der Lehr-Lernforschung (Mayer 2004). Eine umfassende Metastudie (Alfieri et al 2011) hat die Ergebnisse von über 900 Teilstudien systematisch verglichen und die folgenden Tendenzen herausgearbeitet: effektive Formen des entdeckenden Lernens zeigen sich in den unterschiedlichsten Bereichen. *Reines* Entdecken lassen (ohne zusätzliche Unterstützung, so genanntes „pure discovery learning“) ist allerdings im Mittel weniger effektiv als direkte Instruktion. Die vielen Formen des entdeckenden Lernens mit Unterstützung („guided discovery“) sind in der Regel effektiver als die jeweiligen Vergleichsverfahren ohne oder mit nur minimaler Unterstützung (Kirschner et al. 2006). Dabei wurden in den letzten Jahren vielfältige Formen solchen „unterstützenden Entdeckens“ intensiver untersucht und als in der Tendenz wirksam befunden, z.B.

- die schrittweise Reduktion von Unterstützung (scaffolding and fading)
- das Anregen und Fördern von Strategien, die dem Entdecken zuträglich sein können (z.B. Variablenkontrollstrategie, s.u.)
- das Anbieten von unterstützenden „kognitiven Tools“ (Joolingen 1999) (z.B. Planungsraster für das Vorgehen)
- das Auffordern zu Erklärungen („Selbsterklärungen“, nach Chi et al. 1994) usw.

Vor einer direkten Übertragung solcher Befunde aus sorgfältig kontrollierten Studien aus der Lehr-Lernforschung auf das Klassenzimmer sei allerdings gewarnt, dazu sind die Faktoren, die den Unterricht beeinflussen zu vielfältig. Allgemeine Erkenntnisse zum entdeckenden Lernen lassen sich bestenfalls ‚heuristisch’, aber nicht ‚gesetzesartig’ auf konkreten Unterricht anwenden.

Auch ist entdeckendes Lernen bislang noch kaum hinsichtlich der Langzeiteffekte, der Wirkungen auf allgemeine Kompetenzen und der Förderung von Transfer untersucht (vgl. Dean/Kuhn 2006). Hinsichtlich der Wirkung auf die mathematischen Überzeugungen ist bekannt, dass Formen des entdeckenden Lernens ein eher dynamisches, prozesshaftes Mathematikbild fördern (Schoenfeld 1989, 1992).
Die Wirksamkeit bestimmter Formen entdeckenden Lernens in unterschiedlichen Domänen und Inhaltsbereichen und unter bestimmten Bedingungen lässt jedenfalls hoffen, dass es sich lohnt, die Befunde und Erfahrungen aus Forschung und Praxis in konkrete Lehr-Lern-Arrangements umzusetzen. (An dieser Stelle kann Aufgabe 3 aus13.5 bearbeitet werden.)

## 13.3 Entdeckendes Lernen: Umsetzungen für den Mathematikunterricht

> *"Nacherfundene Kenntnisse und Fähigkeiten werden besser verstanden und schärfer eingeprägt als solche, die weniger aktiv erworben wurden – davon ist man überzeugt. Ich glaube nicht, daß es zweifelsfrei nachgeprüft worden ist, aber allerlei Experimente machen es doch wohl wahrscheinlich" (Hans Freudenthal 1976).*

Das führt unmittelbar auf die Frage, welche Formen des entdeckenden Lernens im Fach Mathematik, wenn schon nicht empirisch abgesichert, so doch über viele Jahrzehnte in der Didaktik entwickelt und in der Praxis erprobt wurden. Im Folgenden werden vier Konzepte des entdeckenden Lernens vorgestellt, die spezifisch für den Mathematikunterricht entwickelt wurden und die dort zum Teil sehr einflussreich sind.

### 13.3.1 Induktive Begriffsbildung

Das Entdecken (vielleicht besser ‚Aufdecken') eines Begriffes durch die Analyse von Beispielen und Gegenbeispielen ist eine Form des Begriffslernens (Winter 1983, Vollrath 1986), welche sich in mathematischen Themenbereichen anbietet, in denen eine phänomenologische Vielfalt von Objekten begrifflich geordnet werden kann. Die Lernenden können dabei von einer rein prototypischen Sicht auf die Objekte zu einer (hierarchisch oder disjunktiv) klassifizierenden Ordnung gelangen. (Dabei geht es um die logische Struktur der Begriffe und nicht um die Bezeichnungen!)

Das Entdecken von Begriffen als Kategorien des Strukturierens von Phänomenbereichen ist allerdings innerhalb der Themen des Mathematikunterrichts eher selten einzusetzen. Das liegt auch daran, dass diese Variante des entdeckenden Lernens einigen Herausforderungen begegnen muss: Es muss eine große Vielfalt an Beispielen vorliegen, die den Lernenden phänomenologisch direkt zugänglich ist („Gestalten"). Die Lernenden benötigen ein grundlegendes Repertoire, um über Eigenschaften der Beispiele zu reflektieren und zu kommunizieren (oder können sich dieses Repertoire im Prozess aneignen). Oft besteht die Gefahr, dass die Lernenden bei dem Versuch zu klassifizieren, sich nicht von irrelevanten Merkmalen lösen können. Hier braucht es einen Moderator oder eine Anleitung, welche die Lernenden dabei unterstützt, auf die erwünschten Aspekte zu fokussieren.

Mögliche Themenbereiche für den Unterricht der Primar- oder Sekundarstufe sind z.B.: Typen von Vierecken, Körperformen, Strukturtypen, Symmetrietypen (Spiegeln, Drehen, mehrfache und gemischte Symmetrien), Typen von quadratischen Funktionen, Typen von Funktionsgraphen, etc. Abb. 13.2 zeigt eine Entdeckungsaufgabe (aus einer Aufgabensequenz) zur ebenen Symmetrie.

**5 Das Gleiche woanders zeichnen**

In den Bildern zu den Aufgaben 2, 3 und 4 haben die Künstler die Regel „Das Gleiche woanders" auf ganz verschiedene Arten umgesetzt.

**a)** Untersuche die Bilder in den drei Aufgaben genauer.


Beantworte zu allen diesen Bildern die folgenden Fragen:

- Welches Muster taucht immer wieder auf? Markiere gleiche Muster in jedem Bild.
- Was hat der Künstler jeweils getan, damit sich das Muster woanders wiederholt?

Abbildung 13.2: Eine Aufgabe zur Entdeckung von Symmetriebegriffen (Hußmann/Leuders 2011)

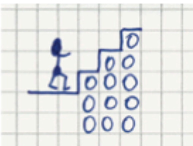
### 13.3.2 Mathematisches Experimentieren

Aussagen über die logische Abhängigkeit von Eigenschaften (z.B. „Wenn... dann...") oder die funktionale Abhängigkeit Größen (z.B. „Je... desto..."), eignen sich in vielen Fällen dazu, von Lernenden aktiv entdeckt zu werden und werden in der Praxis auch in mehr oder weniger schüleraktiven Entdeckungsphasen realisiert. Das Vorgehen der Lernenden ähnelt dabei dem eines Naturwissenschaftlers beim Entwickeln von Vermutungen über naturgesetzliche Zusammenhänge: Durch Betrachtung eines Phänomens werden Vermutungen über Zusammenhänge (meist zwischen bestimmten Variablen) aufgestellt und diese dann im Experiment überprüft (Klahr/Dunbar 1988).

In der Mathematik hat diese Form des forschenden Lernens eine fachspezifische Form. Schülerinnen und Schüler beginnen mit der Analyse von vorgegebenen oder selbst erzeugten Beispielen. Die Beispiele dienen zunächst dazu, Vermutungen zu suggerieren (‚suggestive examples', Polya, 1954), später, Vermutungen zu prüfen (‚supportive examples'), um sie zu stützen oder zu verwerfen. Schon

Euler (1761) beschrieb dieses mathematische Vorgehen als ‚quasi-experiment'. Somit können Situationen des mathematischen Experimentierens auch dazu beitragen, dass Lernende ein authentisches Bild der Mathematik – zumindest bezüglich dieser typischen Form mathematischen Erkenntnisgewinns aufbauen können.

**Erkunden B** **Wie gehe ich vor, wenn ich Zahlen erforschen will?**



**4 Treppenzahlen**

Ole und Till haben aus Münzen Treppen gebaut.
Dabei ist jede Treppenstufe eins höher als die vorige Stufe.
Nun untersuchen sie, ob man für jede Anzahl von Münzen solche Treppen bauen kann.


**a)** Baue Tills Treppe nach und füge noch eine weitere Stufe hinzu.
Wie viele Münzen hat die Treppe nun insgesamt?

**b)** Ole, Till, Merve und Pia haben folgende Frage untersucht:

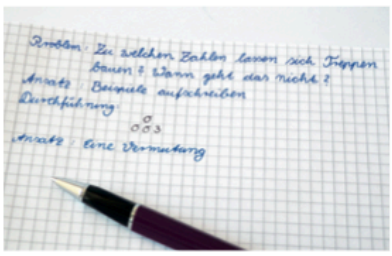
Zu welchen Zahlen lassen sich Treppen bauen?

*Erinnere dich*
*Ein Ansatz ist ein Weg, den man aussucht, um eine Aufgabe zu bearbeiten.*

Diese Ansätze haben ihnen beim Zahlenforschen geholfen:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Beispiele aufschreiben | Beispiele ordnen (z. B. als Liste oder Tabelle) | eine andere Darstellung suchen (z. B. eine Zeichnung oder Rechnung) | eine Vermutung formulieren und überprüfen |


Merve hat alle ihre Überlegungen schriftlich festgehalten. An den Stellen, wo sie nicht weiterkam, wählte sie einen neuen Ansatz aus.




Untersuche auch du die Frage „Zu welchen Zahlen lassen sich Treppen bauen?"
Schreibe so wie Merve alle Schritte bei deiner Zahlenforschung auf.

**c)** Überlege dir, ob es eine Treppe aus 100 Münzen gibt.
Wenn es sie gibt, versuche zu beschreiben, wie diese Treppe aussieht.

nachgedacht **d)** Welche Ansätze hast du benutzt?
Welche Ansätze waren bei dieser Zahlenforschung nützlich?

Abbildung 13.3: Ein mathematisches Experiment (aus Leuders 2013)

Das Beispiel in Abb. 13.3 zeigt eine Exploration, die für Lernende ab Klassenstufe 3 geeignet ist (Leuders, Naccarella & Philipp 2011, vgl. auch Schwätzer & Selter 1998). Schülerinnen und Schüler untersuchen die Situation „Treppenzahlen“ und gelangen im Wechselspiel von Beispielen und Vermutungen zum Schluss: Alle Zahlen lassen sich als Treppenzahlen darstellen, außer solche der Form 2, 4, 8, 16, 32, ... Die „Ansätze“ in Aufgabenteil b) sind ein Unterstützungsangebot.Lernende sollen angeleitet werden, Beispiele und Vermutungen zu generieren.

Der Erkundungsprozess vollzieht sich nun so wie in Abb. 13.4 dargestellt, als Wechsel zwischen Beispielen und Vermutungen.

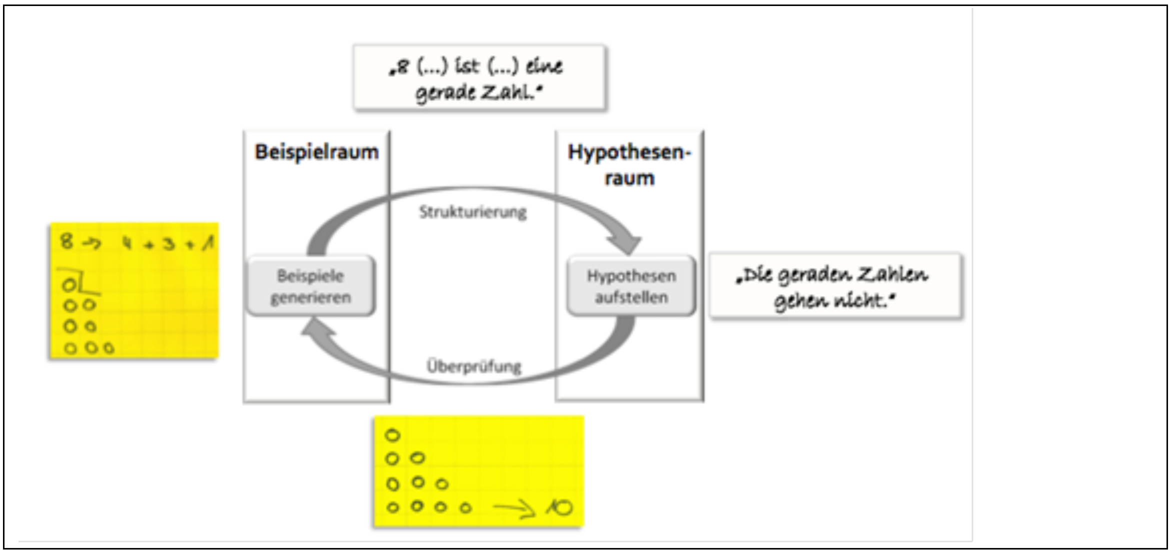



Abbildung 13.4: Das Entdecken von Zusammenhängen als Kreislauf zwischen Beispielen und Vermutungen

Weitere mögliche Themenbereiche im Unterricht der Primar- oder Sekundarstufe sind: Sätze der ebenen Geometrie, wie z.B. Winkelsumme im Vieleck, Satz des Thales (vgl. Leuders/Ulm 2007), Funktionale Zusammenhänge aus Wertetabellen usw.

Das erfolgreiche mathematische Experimentieren setzt strategische Kompetenzen der Lernenden voraus, die nicht unbedingt bei allen gegeben sind. Sie können durch geeignete Anleitung (guiding), durch Lehrerimpulse (prompts), durch schrittweise ausgeblendete Unterstützung (scaffolding and fading) gefördert werden. Das Arbeiten an der Aufgabe „Treppenzahlen“ kann auch als Strategietraining zum Aufbau solcher strategischer Kompetenzen eingesetzt werden (Philipp 2012). Zu diesen „Experimentierstrategien“ gehören u.a.:

- die Fähigkeit und Bereitschaft mehrere Beispiele zu erzeugen und nicht bei wenigen stehen zu bleiben,
- Beispiele strukturiert und systematisch anzusehen, z.B. durch Betrachtung von Untermengen oder Reihenfolgebeispiele,
- geeignete Beispiele zu finden, um Vermutungen zu prüfen („Experiment planen“),
- eine Balance zwischen Vermutungen und Beispielen zu finden, also in geeigneter Weise zwischen Beispielen und Vermutungen springen.

Manchmal müssen Lernende zudem noch in der Lage sein, entscheidende Variablen zu separieren und ihre Wirkung kontrolliert zu überprüfen („Variablenkontrollstrategie“, vgl. Klahr/Dunbar 1988). Bei den Treppenzahlen sind z.B. geeignete Teilmengen (etwa ungerade / gerade Zahlen) zu finden und zu untersuchen. Als eine wesentliche Voraussetzung für den „Experimentiererfolg“ finden Haverty et al. (2000) die Fähigkeit beim Experimentieren auf bisher erlangtes Wissen aufzubauen. Das Entdecken mathematischer Zusammenhänge steht in der Regel im Kontext umfassender Lerninhalte und Lernziele. Das führt zur Frage: Was passiert *nach* der Entdeckung? Meist ist die Entdeckung als Tatsache nicht allein bedeutsam, sondern erst ihre Durchdringung, z.B. in Form einer Erklärung, einer Begründung oder eines Beweises. Dabei müssen Entdeckungen, die Lernende im Rahmen produktiver Übungsaufgaben gewissermaßen ‚nebenbei’ machen, müssen nicht unbedingt von allen Mitschülern durchdrungen werden. Bei den Treppenzahlen bleibt vielleicht für manche die Frage offen, warum gerade die Zweierpotenzen nicht darstellbar sind. (An dieser Stelle kann Aufgabe 3 aus13.5 bearbeitet werden.)
Am Beispiel des Experimentierens zeigt sich eine weitere grundsätzliche Herausforderung des entdeckenden Lernens: Wie vereinbart man die Offenheit der Entdeckungen mit der Zielorientierung des Unterrichts? Es bedarf einer hohen Kompetenz der Lehrkraft, die Lernenden aus der Fülle der Entdeckungen zu einer gemeinsamen Einsicht zu führen – und das ohne individuelle Entdeckungen abzuwerten, die nicht zum intendierten Ziel führen. Beispiele für Entdeckungssituation mit radikaler Offenheit findet sich im Rahmen des so genannten open-ended-approach (Becker/Shimada 1997) und Anregungen wie man methodisch mit den Ergebnissen umgeht im japanischen Mathematikunterricht (Stigler/Hiebert 1999).
**Computergestütztes Entdecken**: Das Untersuchen von Beispielen setzt voraus, dass die Lernenden Beispiele leicht und in großer Zahl erzeugen können. Bei einigen mathematischen Objekten ist das sehr aufwändig, kann aber durch Computerunterstützung realisiert werden. In der dynamischen Geometrie (aber auch in anderen Bereichen des Arbeitens mit Computerwerkzeugen) findet man beispielsweise so genannte ‚black boxes’ (Knipping/Reid 2005, Haug 2010). Das sind interaktive Lernumgebungen, bei denen durch systematisches Experimentieren mathematische Zusammenhänge zu erkunden sind, wobei die Lernenden nicht nur zu begründeten Vermutungen, sondern sogar zu neuen Konzepten gelangen.

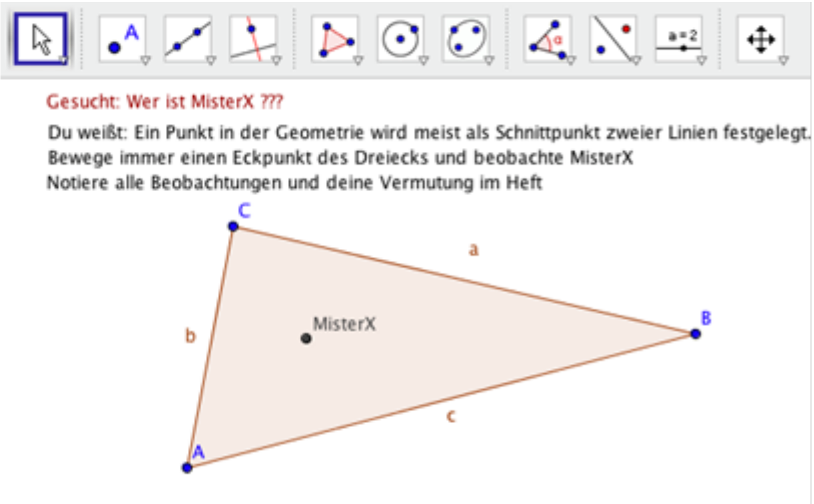



Abbildung 13.5: Computergestütztes Entdecken von Zusammenhängen im Dreieck (Herold 2012)

**Gruppenexplorationen:** Eine andere Möglichkeit besteht darin, eine ganze Gruppe arbeitsteilig zum Erzeugen von Beispielen anzuhalten und danach gemeinsam die Ergebnisse zu betrachten und Zusammenhänge zu entdecken. Wenn dabei der experimentelle Charakter erhalten bleiben soll, sollten die Lernenden ihre Beispiele nach und nach einbringen und auch dazu angehalten werden, zwischendurch Vermutungen zu äußern. Diese methodische Umsetzung mathematischen Experimentierens in einer Gruppenexploration zeigt das folgende Beispiel zum Zusammenhang Fläche-Umfang (Leuders et al. 2007, vgl. auch zum Thema Primfaktorzerlegung Barzel, Büchter & Leuders 2010).

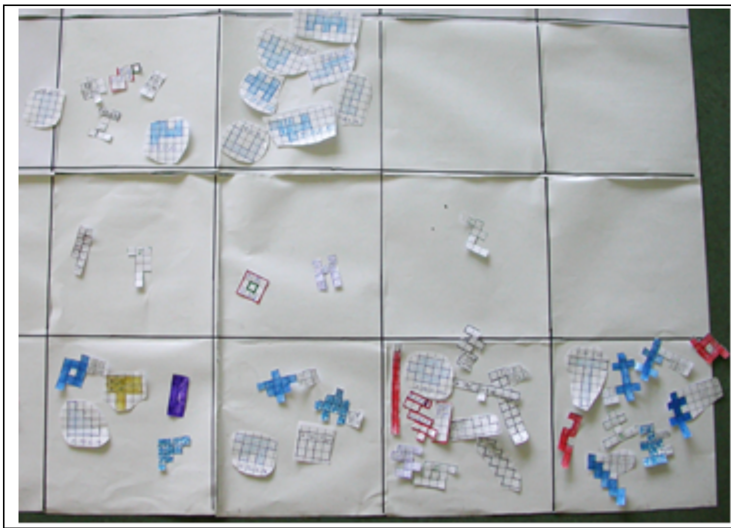


Abbildung 13.6: Gruppenexploration von Zusammenhängen zwischen Umfang und Flächeninhalt

### 13.3.3 Problemgenetisches Lernen

Genetisches Lernen wird aufgefasst als der durch Probleme angestoßene individuelle, aktive Vollzug eines Prozesses der Konstruktion eines mathematischen Begriffes oder Zusammenhangs, der sich schließlich als Lösung des Ausgangsproblems erweist (Klein 1908, Wagenschein 1968, Freudenthal 1976, Leuders/Prediger 2012). Damit lässt sich genetisches Lernen sowohl als Form des problembasierten Lernens verstehen (Wissen entsteht beim Lösen konkreter Probleme), mitunter auch als „learning by design“ (sofern das Problem darin besteht, ein gewisses Produkt zu herzustellen, z.B. eine zylindrische Dose mit dem Volumen von 1 Liter – wenn die Flächen- und Umfangsformel für den Kreis noch nicht bekannt sind).

Dieser Prozess wurde von Freudenthal (1976) als „horizontale Mathematisierung“ bezeichnet und steht am Ausgangspunkt des einflussreichen Modells der "realistic mathematics education" (Panhuizen 2003). Dabei bedeutet „realistic“, dass das Lernen von einem „realisierbaren“ also „vorstellbaren“ Kontext ausgeht. Eine besondere Qualität des problemgenetischen Lernens besteht darin, dass Lernende hier „Mathematik in statu nascendi“ erleben (Freudenthal 1976, 113). Schülerinnen und Schüler werden nicht mit „fertiger Mathematik“ konfrontiert, sondern nähern sich den mathematischen Inhalten über deren „Kernideen“ aus der Vorschauperspektive (Gallin/Ruf 1998). Ein genetischer Lernweg trägt so zur Sinnstiftung für das schulische Mathematiklernen bei (Leuders al. 2011). Das folgende Beispiel in Abb.13.7 zeigt, wie Lernende das Konzept des arithmetischen Mittels aus einer Problemsituation heraus „genetisch“ entdecken (Barzel/Leuders 2012).

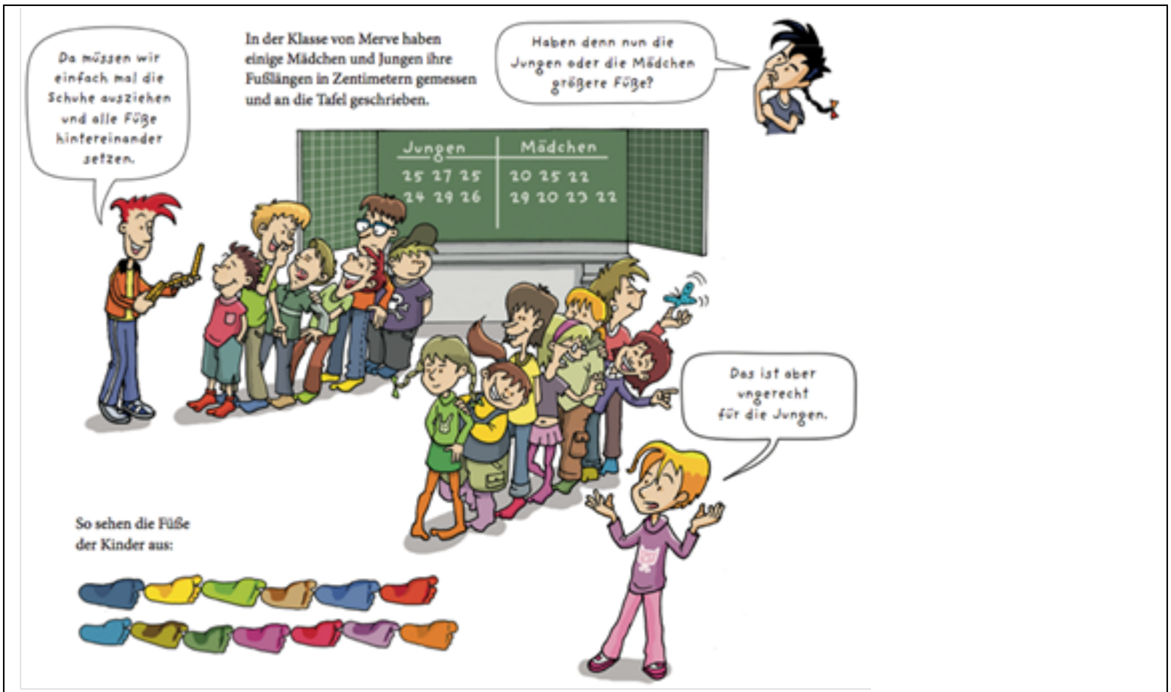



Abbildung 13.7: Eine genetische Lernsituation zur Entdeckung des Durchschnittsbegriffs

Das Problem, das hier angestoßen wird, lautet „Wie vergleicht man Gruppen, wenn jeder in der Gruppe anders beiträgt und die Gruppen sogar noch unterschiedlich groß sind?“ Die Lösung, die hier durch die Handlungssituation gestützt wird, lautet: „Durch Zusammenlegen und gleichmäßiges Aufteilen“. Die Lösung des Problems ist das vollständige Konzept des arithmetischen Mittels, sogar in einer Form, in der die Grundvorstellung und nicht etwa eine Berechnungsvorschrift gelernt wird. (Ein weitergehendes Beispiel für andere Kennwerte findet sich z.B. bei Lengnink 2009, Becker/Shimada 1999; Büchter/Leuders 2005, 83).

Problemgenetisches Lernen eignet sich für die Erarbeitung von mathematischen Konzepten und wird daher auch oft als „begriffsgenetisches Lernen“ bezeichnet (Winter 1983). Aber auch Verfahren können erarbeitet werden – oft genug stehen Verfahren und Konzepte ja in einem engen Wechselverhältnis (Gray/Tall 1994). (An dieser Stelle kann Aufgabe 1 aus13.5 bearbeitet werden.)

Problemgenetische Lernsituationen stellen ähnliche Herausforderungen an Lernende und Lehrende wie mathematisches Experimentieren. Noch größer sind aber die Herausforderungen an die Konstrukteure solcher Aufgaben (Leuders et al. 2011). Hier gilt es, die fertige Mathematik wieder „in lebendige Handlungen zurückzuverwandeln, aus denen sie entsprungen sind: Gegenstände in Erfindungen und Entdeckungen, [...] Lösungen in Aufgaben, Phänomene in Urphänomene.“ (Roth 1970, 116). Wie dies vor sich gehen kann zeigt das folgende Beispiel des „Säulendiagramms“ (s. Abb. 13.8). Im ersten Schritt gilt es, die mathematischen Konzepte zu identifizieren, die der Zielpunkt des Entdeckungsprozesses sein sollen. Die mathematische Definition, die „fertige Mathematik“ allein reicht für die Gestaltung des Lernprozesses nicht aus. Es gilt, die Kernidee des mathematischen Konzeptes, seine *Bedeutung* und sein *Zweck* herauszuschälen: Auf welches Problem ist das mathematische Konzept eine Antwort? *Wozu* sollt soll es dienen? In einem Säulendiagramm wird eine große Zahl von Daten zu Gruppen bezüglich eines Aspekts „gleicher“ Daten zusammengefasst, so dass man schnell einen Überblick darüber gewinnen kann, wie dieser Aspekt sich in den Daten verteilt. Daten werden also systematisch aggregiert und zu Information verdichtet. Nun kann man einige Fragen an die Daten leichter beantworten. Sobald man diesen Zweck herausgearbeitet hat, kann man die Kernidee als Antwort auf eine Kernfrage verstehen. Im Gegensatz zur Kernidee formuliert eine Kernfrage ein Problem aus der Vorschauperspektive, also auf eine Weise, wie der *Lernende* sie formulieren könnte. Eine solche Frage ist meist eingebettet in einen konkreten Kontext, eine konkrete Situation – die übrigens auch eine innermathematische sein kann.

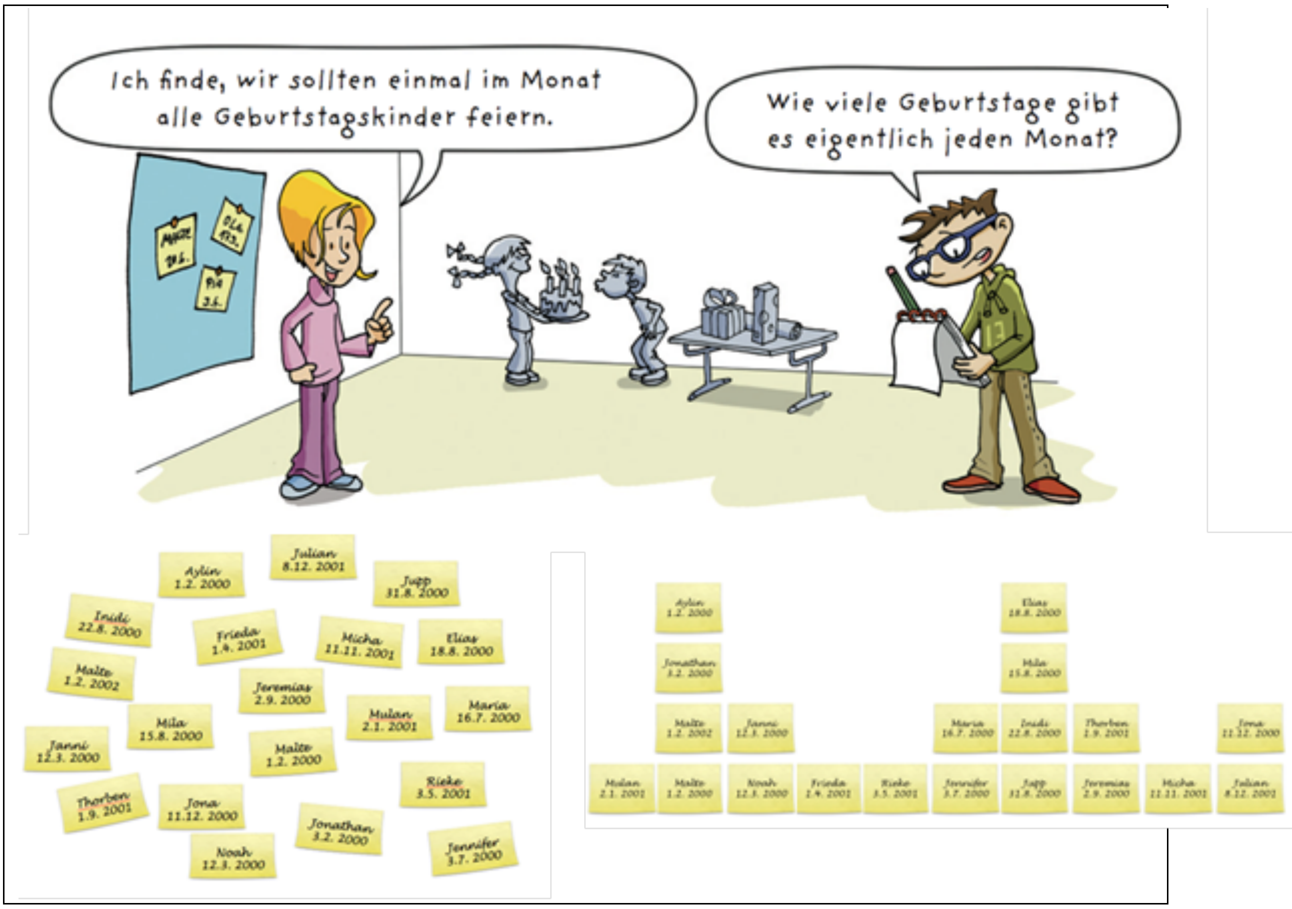



Abbildung 13.8: Eine genetische Lernsituation zur Entdeckung des Säulendiagramms (Barzel/Leuders 2012)

Die „genetische Qualität“ der Lernumgebung kann man an den Antworten auf die folgenden Fragen messen:

> **Inhaltliche Notwendigkeit:** Wie „unmerklich zwangsläufig“ laufen die Entdeckungen auf das intendierte Konzept hinaus? (Das bedeutet nicht, dass Lernende nicht auch alternative Wege und Lösungen finden können, wichtig ist nur, dass das intendierte Ziel am Schluss für alle plausibel und bedeutsam erscheint.) Wie „authentisch“ ist die Lösung? Erscheint den Lernenden sowohl das Ausgangsproblem als auch seine Lösung glaubwürdig? Machen Sie es sich zu eigen? Gehen sie die Wege dazwischen auf natürliche, vor allem durch die Sache und nicht durch die Lehrperson gelenkte Weise?

> **Kognitive Aktivierung:** Wie hoch ist der Grad der aktiven Beteiligung der Lernenden an der Lösung? Wie sehr können auch weniger starke Lernende aktiviert und in den Prozess einbezogen werden? Können schließlich *alle* verstehen, wie die entdeckte Mathematik entstanden ist?

> **Konzeptuelle Passung:** Werden im Entdeckungsprozess alle wesentlichen Aspekte des Entdeckungsziels repräsentiert? Unterstützen die Entdeckungsschritte das inhaltliche Verständnis für die Bedingungen und Charakteristika des Entdeckungsziels oder sind sie nur ein „Zusatzaufwand“?

### 13.3.4 Entdecken an Stationen

Eine beliebte Form, entdeckendes Lernen methodisch zu gestalten, sind so genannte Stationenzirkel (auch „Lernzirkel", „Stationenlernen" oder „Lernwerkstätten" - Barzel, Büchter & Leuders 2007). Hier bearbeiten die Schülerinnen und Schüler an mehreren Stationen Materialien, die eine vielfältige Auseinandersetzung mit einem bestimmten Thema anregen. Ein Stationenzirkel kann organisatorisch variantenreich gestaltet werden (mit Pflicht- und Wahlstationen, Stationen für die Einzel-, Partner- oder Gruppenarbeit usw.) und in verschiedenen Phasen des Unterrichts eingesetzt werden (Bauer 1997, Heske 2003). Als methodische Rahmung für entdeckendes Lernen hat ein Lernen an Stationen das Ziel, die Vielfalt eines Themas (verschiedene Zugänge, Kontexte, Aspekte, Grundvorstellungen) erlebbar zu machen.

Lernende sollen bei der Auseinandersetzung mit diesen vielen Facetten eines Themas individuelle Lernwege beschreiten und eigene Schwerpunkte setzen. Stationenzirkel fördern und fordern daher die Fähigkeit, den eigenen Lernprozess zu organisieren. Sie bieten zudem den methodischen Vorteil, dass bestimmte Materialien (wie Modelle, Spiele, PCs), die nur einmal oder in geringer Anzahl zur Verfügung stehen, nacheinander von allen benutzt werden können.

Ein Thema eignet sich für eine Umsetzung als Stationenzirkel besonders dann, wenn es eine hinreichende Anzahl verschiedener relevanter Aspekte enthält. Um zu prüfen, ob sich ein Thema eignet, kann man folgende Fragen stellen (vgl. Barzel, Büchter & Leuders 2007):

- Welche verschiedenen Darstellungsformen gibt es zu diesem Thema?
  - z.B.: Funktionen als Graf, Tabelle, Term, Situation
  - z.B.: Bruch als Bruchzahl, Prozentzahl, Dezimalzahl
  - z.B.: Körper als Netz, Kantenmodell, Flächenmodell, Schrägbild
- Welche verschiedenen Grundvorstellungen gibt es zu dem relevanten Begriff?
  - z.B.: Bruch als Anteil, Verhältnis, Operator
  - z.B.: Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit, subjektiver Grad der Überzeugung oder theoretisches Chancenverhältnis
  - z.B.: Funktion als Zuordnung, Kovariation, Objekt
  - Welche verschiedenen **Anwendungen** gibt es zu diesem Thema? z.B.: Wahrscheinlichkeiten bei verschiedenen Spielen oder Risikoabschätzungen im Alltag
- Welche verschiedenen Zugänge bieten sich bei dem Thema an?
  - z.B.: Parabel als geometrischer Ort, als Funktionsgraph, als Kegelschnitt, als Modell eines physikalischen Zusammenhangs

Stationenzirkel sind in der pädagogischen Praxis beliebt, da sie ein hohes Maß an Aktivität und Motivation zu generieren scheinen. Allerdings werden die hohen Anforderungen, die sie an Lernende und Lehrende stellen, oft nicht hinreichend beachtet:

- Die zusätzlichen Anforderungen hinsichtlich Selbstregulation und Lernorga-

nisation können für die Lernenden so belastend sein, dass das Lernen der Inhalte darunter leidet.
- Die Vielfalt und Breite eines mathematischen Inhaltes kann die Lernenden, die sich dem neuen Inhalt erst nähern müssen, überfordern. Insbesondere ist es nicht selbstverständlich, dass sie die einzelnen Aspekte integrieren können.
- Die einzelnen Aspekte eines Inhalts, die im Stationenbetrieb zur Auswahl stehen, müssen wohl überlegt sein. Selter/Sundermann (2000) zeigen, wie fachlich unangemessen und didaktisch bedenklich eine oberflächliche Auswahl an Aspekten sein kann, wenn etwa zum Üben der Multiplikation Malaufgaben mit einer Taschenlampe geblinkt werden müssen (3 mal Blinken, gefolgt von 5 mal Blinken, soll als 3 mal 5 verstanden und berechnet werden).

Dennoch erweisen sich einige Unterrichtsmodelle, die Stationenbetrieb einsetzen, durchaus als empirisch wirksam (Barzel 2006), dies setzt aber voraus, dass die Umsetzung im Zusammenhang mit vielen anderen Gestaltungsmerkmalen passend konzipiert ist. (An dieser Stelle kann Aufgabe 6 aus13.5 bearbeitet werden.)

## 13.4 Produktives Üben: Konzepte und Begründungen[1]

Die Phase des Vertiefens umfasst alle Lernsituationen, in denen nicht mehr die Konstruktion mathematischer Begriffe, das (Nach-)erschaffen von Mathematik im Vordergrund steht, sondern die Absicherung, dass das erworbene Wissen flexibel und nachhaltig verfügbar bleibt. Zum Vertiefen gehört also zweierlei: Das *Konsolidieren* der erworbenen Kompetenzen (prozedurales und konzeptuelles Wissen, Vorstellungen, Fähigkeiten, usw.) und das *Flexibilisieren* von Wissensbeständen, also im Wesentlichen die Fähigkeit des Transfers auf verwandte Situationen (Aebli 1983, Renkl 2000). Insbesondere muss das Wissen vom Erfahrungskontext unabhängig gemacht werden: Brüche kann man beispielsweise nicht nur bei Pizzen und Schokolade anwenden. Dies ist nicht nur im Sinne der Flexibilität der Fähigkeiten (Spiro/Jehng 1990), sondern auch für den Aufbau eines angemessenen Mathematikbildes wichtig (Mähler/Stern 2006). Was das bedeuten kann, zeigt die Aufgabe in Abb. 13.9 (aus Schütte u.a. 2002).

[1] Dieser Abschnitt greift in Teilen auf einen Abschnitt aus Leuders/Prediger (2011) zurück.


Abbildung 13.9: Üben und Entdecken in einer Aufgabe (Schütte et al. 2002)

Hier werden mathematische Zusammenhänge entdeckt: Die Differenz von dreistelligen Zahlen der Form ABA-BAB ist immer ein Vielfaches von 91. Diese Entdeckung ist aber nicht Kernziel einer Erarbeitung und wird daher auch nicht für alle Lernenden gesichert. Geübt wird hingegen das Verständnis des Stellenwertsystems und die schriftliche Subtraktion. Daneben sind prozessbezogene Kompetenzen durchgehendes Ziel, hier z.B. das Problemlösen und Argumentieren. Neben dem Wissensaufbau fördert diese Aufgabe aber auch den Aufbau eines angemessenen Bildes von Mathematik als Bereich des individuellen kreativen Entdeckens von Mustern.

### 13.4.1 Formen des produktiven Übens

Zur Gestaltung von Übephasen findet man eine große Zahl theoretischer Konzepte sowohl in der allgemeinen Didaktik (z.B. Heymann 2005, Paradies/Linser 2001) als auch in der Instruktionspsychologie (z.B. Schneider 1985, Brophy 2000, van Merrienboër et al. 2002). Die pädagogische Psychologie hat viel zum Grundverständnis der Wirksamkeit des Übens (oder „Trainings“) beigetragen, wie z.B. Prinzipien des Überlernens von Fertigkeiten (z. B. Driskell, Willis & Cooper 1992) oder der zeitlichen und inhaltlichen Verteilung von Üben (Donovan/Radosevich 1999), die Anforderungen der Transparenz der Übeziele (van Lehn 1990) oder die ausbalancierte Berücksichtigung verschiedener Facetten der Übeziele, wie die Ausbildung von Automatisierungsroutinen, die Transfersteigerung und im weitesten Sinne die Qualitätssteigerung des erworbenen Wissens (Renkl 2000). Dabei wird allerdings deutlich, dass die empirische Forschung, die

die Wirkungen eher kurzfristiger Trainings im Blick hat, überwiegt und bzgl. fachspezifischer und vor allem curricular über mehrere Jahre reichender Vertiefungsprozesse bislang wenig grundlegende Forschung vorliegt. Insbesondere betont Lipowsky den Mangel an Studien, die Wirkungen „auf schulrelevantes Wissen und schulbezogene Fähigkeiten explizit untersuchen“ (Lipowsky 2009, 92).

Die Übekonzepte und -prinzipien der allgemeinen Didaktik und pädagogischen Psychologie sind von der deutschen Mathematikdidaktik immer wieder aufgenommen und fachspezifisch konkretisiert worden (Winter 1984, Wittmann 1992, Leuders 2005, 2009) und haben in der Theorie (und zunehmend auch in der Unterrichtspraxis) zu einem breiten Übeverständnis unter der Bezeichnung des „produktiven Übens“ bzw. des „intelligenten Übens“ beigetragen. Diese Übekonzepte sind ausgesprochen fachspezifischer Natur – wiewohl in Teilen übertragbar – und manifestieren sich vor allem in charakteristischen Aufgabenformaten. Dabei werden eine Reihe von Anforderungen an Übeaufgaben formuliert, die jeweils unterschiedliche Aspekte ansprechen, insgesamt aber zum Konzept eines intelligenten Übens beitragen. Diese Anforderungen lassen sich in etwa so zusammenfassen (Leuders 2012):
Intelligentes Üben ist charakterisiert durch:

- Reflexion: Zum Nachdenken über den Aufgabeninhalt anregen,
- Struktur: Mathematische Entdeckungen durch Strukturen ermöglichen,
- Differenzierungsvermögen: Starken Schülern etwas bieten, ohne schwache abzuhängen.

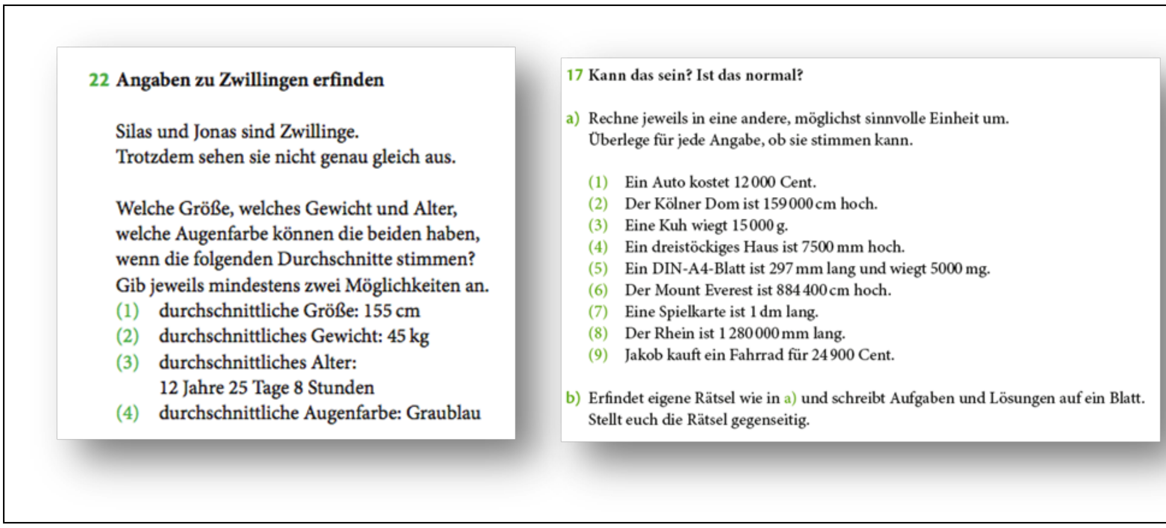
Individuelle Aktivität, häufige Wiederholung und Flexibilisierung sind die Voraussetzungen für effektives Üben. Diesen Anforderungen kann man auf verschiedene Weise begegnen. Aufgabenserien in traditionellen Übekonzepten realisieren diese Anforderungen z.B. so (vgl Wittmann 1992): Zunächst werden durch eine Wiederholdung von vielen kleinschrittigen Einzelaufgaben Fertigkeiten automatisiert und auch bei steigender Komplexität der Aufgaben immer sicherer. Dadurch wird der Lernende kognitiv von den Denkprozessen bei der Durchführung – etwa der Lösung einer quadratischen Gleichung – entlastet und kann anschließend Anwendungsaufgaben durchführen. Das Problem besteht aber meistens darin, dass solche automatisierten Fertigkeiten langfristig nicht stabil sind.

Von reflektiertem, auf Verstehen zielendem Üben spricht man hingegen, wenn die „Monokultur des Automatisierens“ durchbrochen wird und unterschiedliche Kompetenzfacetten *zugleich* angesprochen werden:

- Sichern von Faktenwissen und Automatisieren von Fertigkeiten
- Aufbau und Vertiefen von Vorstellungen
- Reflexion von Konzepten und deren Anwendung
- Anwendung im Rahmen von Problemlösen
- Aufbau eines angemessenen Mathematikbildes

Intelligentes Üben zeichnet sich durch eine Balance dieser Übeziele aus und durch Aufgaben, die nicht immer alle, aber doch viele dieser Ziele im Blick haben. Ein

Beispiel zeigen die Aufgaben in Abb. 13.10.



**22 Angaben zu Zwillingen erfinden**

Silas und Jonas sind Zwillinge.
Trotzdem sehen sie nicht genau gleich aus.

Welche Größe, welches Gewicht und Alter, welche Augenfarbe können die beiden haben, wenn die folgenden Durchschnitte stimmen? Gib jeweils mindestens zwei Möglichkeiten an.
(1) durchschnittliche Größe: 155 cm
(2) durchschnittliches Gewicht: 45 kg
(3) durchschnittliches Alter: 12 Jahre 25 Tage 8 Stunden
(4) durchschnittliche Augenfarbe: Graublau

**17 Kann das sein? Ist das normal?**

a) Rechne jeweils in eine andere, möglichst sinnvolle Einheit um. Überlege für jede Angabe, ob sie stimmen kann.

(1) Ein Auto kostet 12 000 Cent.
(2) Der Kölner Dom ist 159 000 cm hoch.
(3) Eine Kuh wiegt 15 000 g.
(4) Ein dreistöckiges Haus ist 7500 mm hoch.
(5) Ein DIN-A4-Blatt ist 297 mm lang und wiegt 5000 mg.
(6) Der Mount Everest ist 884 400 cm hoch.
(7) Eine Spielkarte ist 1 dm lang.
(8) Der Rhein ist 1 280 000 mm lang.
(9) Jakob kauft ein Fahrrad für 24 900 Cent.

b) Erfindet eigene Rätsel wie in a) und schreibt Aufgaben und Lösungen auf ein Blatt. Stellt euch die Rätsel gegenseitig.

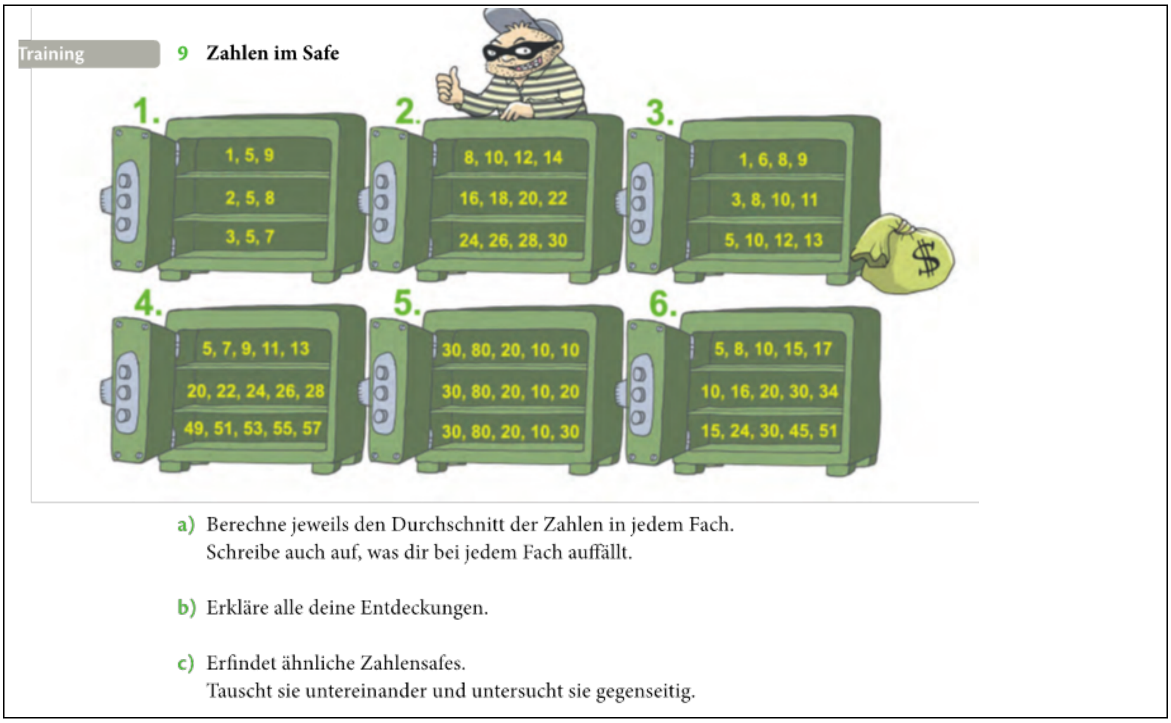
Abbildung 13.10: Einfache Beispiele für intelligentes Üben (Barzel/Leuders 2012)

Beide Aufgaben vernachlässigen die wiederholende Automatisierung nicht, links durch die Aufforderung mehrere Lösungen zu produzieren, rechts durch den Austausch weiterer Aufgaben. (Die Lösungskontrolle wird so allerdings schwieriger.) Beide Aufgaben verbinden die Fertigkeit des Rechnens mit Vorstellungen: Ergebnisse werden vor dem Hintergrund von Größenvorstellungen überprüfbar. Links werden zusätzliche Aspekte des Mittelwertes („gleicher Abstand von der Mitte") angeregt, rechts erlebt man, warum Einheiten nützlich sind („einfache Schreibweise", „einfachere Vorstellung"). Beide Aufgaben fördern zudem Problemlösekompetenzen (rechts in b), da hier keine fertigen Verfahren zur Lösung führen.

### 13.4.2 Zwei Aufgabenformen: Struktur- und Problemlöseaufgaben

Es gibt zwei immer wiederkehrende Aufgabentypen, die solche Reflexions- und Problemlöseprozesse begünstigen. Dies sind Strukturaufgaben und Problemlöseaufgaben (Wittmann 1992, Leuders 2009).

In **Strukturaufgaben** werden Aufgabenserien präsentiert, die nicht nur durchgearbeitet werden, sondern gleichzeitig zur Untersuchung der dahinterliegenden Strukturen anregen sollen. Dabei können Lernende eine Reihe zusätzlicher Entdeckungen machen. Gelegentlich werden sie auch aufgefordert, Aufgaben in eine strukturelle Ordnung zu bringen. Beides leitet dazu an, die Aufgaben nicht nur als kalkülhafte Exerzierübungen anzusehen, sondern über die Bedeutung und Konsequenzen von Strukturen nachzudenken. Unstrukturierte Aufgabensequenzen („graue Päckchen", Wittmann 1992) hingegen lassen solche Reflexionen nicht zu, sie vermitteln zudem noch ein Bild von Mathematik als langweiligem Training von Aufgabentypen.


Training 9 **Zahlen im Safe**

1. 1, 5, 9 | 2, 5, 8 | 3, 5, 7
2. 8, 10, 12, 14 | 16, 18, 20, 22 | 24, 26, 28, 30
3. 1, 6, 8, 9 | 3, 8, 10, 11 | 5, 10, 12, 13
4. 5, 7, 9, 11, 13 | 20, 22, 24, 26, 28 | 49, 51, 53, 55, 57
5. 30, 80, 20, 10, 10 | 30, 80, 20, 10, 20 | 30, 80, 20, 10, 30
6. 5, 8, 10, 15, 17 | 10, 16, 20, 30, 34 | 15, 24, 30, 45, 51

a) Berechne jeweils den Durchschnitt der Zahlen in jedem Fach. Schreibe auch auf, was dir bei jedem Fach auffällt.

b) Erkläre alle deine Entdeckungen.

c) Erfindet ähnliche Zahlensafes. Tauscht sie untereinander und untersucht sie gegenseitig.

Abbildung 13.11: Ein Päckchen mit Struktur (Barzel/Leuders 2012)

Die Grundidee von Strukturaufgaben lautet: „Untersuche diese Struktur, und übe dabei“.
Der zweite Typ von Aufgaben, die **Problemlöseaufgaben** verfolgen die Grundiddee „Löse das Problem und übe dabei“. Problemlöseaufgaben sollen nicht komplex sein, das Problem kann schlicht darin bestehen, dass es kein fertiges Verfahren gibt, sondern dass die Lernenden sich einer Lösung durch systematisches Probieren nähern (so die linke Aufgabe in Abb. 13.11). Viele solcher Aufgaben entstehen durch Umkehren von einfachen Verfahrensaufgaben, also statt „Berechne 1/3 + 1/4" die Aufgabe „Finde zwei Brüche, so dass □/□ + □/□ =1/2. „Gibt es mehrere Lösungen?“, oder: „Zeichne ein Dreieck mit dem Flächeninhalt 12cm$^2$“ (Winter 1984).

### 13.4.3 Differenzieren beim Üben

Wie beim Erkunden will man auch beim Üben starken Schülerinnen und Schülern etwas bieten, ohne schwache abzuhängen. Wie gewährleistet man hier, dass das Üben nicht alle Lernenden zu denselben Arbeiten „verdonnert“, nicht die Starken langweilt und die Schwachen überfordert? Zentrale Anforderung an ein intelligentes Üben ist die Effektivität hinsichtlich der gesetzten Übeziele, d.h. dass die Übezeit auf bestmöglich lernwirksame Weise verwendet wird. Dies setzt eine gewisse Adaptivität voraus und führt direkt auf die Frage nach dem Differenzierungsvermögen. Die fachspezifischen Herausforderungen liegen in der wohldosierten Differenzierung nach Lernzielen: Welches sind die Fähigkeiten, die alle Lernenden üben müssen, welche Ebenen des Übens können darüber hinaus erreicht werden (z.B. das Erkennen vertiefter begrifflicher Zusammenhänge oder das kreative

Weiterdenken in Mustern und Strukturen)? Dies soll an konkreten Beispielen zu geschlossenen und selbstdifferenzierenden Übeformaten erläutert werden.

**1 Addieren von Größen** (in geschlossener Differenzierung)

| | |
|---|---|
| a) 1m + 1cm = ____ cm | a) 1km + 1m + 1mm = _____cm |
| 1km + 1m = ____ m | 1m + 1dm + 1cm + 1mm = _____mm |
| 1kg + 1g = ____ g | 1000 ___ + 1____ + 1g = 2001 g |
| 1___ + 1 ____ = 1001 kg | 1m + 1kg + 1cm = _____ cm |

Abbildung 13.12: Geschlossene differenzierte Übungsaufgaben

Geschlossene Übeformate wie das Beispiel in Abb. 13.12 erlauben Individualisierungen hinsichtlich aller relevanten Aspekte (Lerntempo, Zugangsweise, Anspruchsniveau, Lerninhalt). Deswegen gehören zu Recht Wahlaufgaben oder im Niveau gestufte Aufgabensets zu den Standard-Differenzierungsansätzen vieler Lehrkräfte.

Aus mathematikdidaktischer Sicht ist es zentral, bei geschlossener Differenzierung durch Aufgaben nicht nur deren technische Kompliziertheit auszuschöpfen (also z. B. durch größere Zahlen oder kompliziertere Terme o.ä.), sondern alle zur Verfügung stehenden schwierigkeitsgenerierenden Merkmale (Hußmann/Prediger 2007, Leuders 2009) zu berücksichtigen: Art der kognitiven Aktivitäten (z.B. Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten nach dem operativen Prinzip, Explorieren, Formulieren, Verallgemeinern, Begründen), Komplexitätsgrad („Wie übersichtlich ist die Situation und wie vielschrittig der Lösungsweg?"), sprachliche Komplexität der Aufgabenstellung („Welche Hürden im Textverständnis müssen überwunden werden?"), Grad der Formalisierung der Aufgabenstellung und der geforderten Lösung („Erfordert die Aufgabe formale Schreibweisen?" „Wie vertraut sind diese?"), Vorstrukturiertheit der Lösung versus Offenheit („Inwieweit ist durch die Enge der Aufgabenstellung bereits alle Vorstrukturierungsarbeit geleistet?") und Bekanntheitsgrad der Mittel (abhängig von der Positionierung im Lernprozess).

Im Beispiel aus Abb. 13.13 findet man ein Angebot verschiedener Komplexitäts- und Kompliziertheitsgrade. Beide Spalten enthalten im Sinne der operativen Durcharbeitung Rückwärtsaufgaben (1___ + 1 ____ = 1001 kg bzw. 1000 ___ + 1____ + 1g = 2001 g), während eine unlösbare „Störaufgabe", die zur erhöhten Reflexion zwingt, nur der rechten Spalte vorbehalten ist (1m + 1kg + 1cm = _____ cm).

Insgesamt allerdings stellen rein geschlossen differenzierte Übungsphasen die Lehrperson vor die diagnostische Herausforderung, die für die jeweilige Lernendengruppe geeignete Auswahl zu finden. Diesem Ansatz sind also Grenzen durch die diagnostischen Möglichkeiten und die Unterrichtsökonomie gesetzt. Setzt man die geschlosseneren Formate hingegen pragmatisch „im Gleichschritt" für die ganze Klasse ein – und dies entspricht der gängigen Unterrichtspraxis –

sind viele Lernende über- oder unterfordert.

*Selbstdifferenzierende Übeformate* wie die Beispielaufgaben in Abb. 13.13 legen die Lernenden nicht auf ein Bearbeitungsniveau fest, sondern lassen verschiedene Bearbeitungstiefen und Reflexionsniveaus zu. Oft erlauben sie auch deutlich weitergehende kreative Bearbeitungen und bieten somit Möglichkeiten zur Förderung begabter Schülerinnen und Schüler.

Einige immer wiederkehrende Aufgabenformate entstehen dadurch, dass Automatisierungsprozesse und Prozesse der operativen Durcharbeitung (Aebli 1993) mit mathematischen Tätigkeitstypen (Muster finden, Strukturieren, Problemlösen) verbunden werden. Die entstehenden Aufgabentypen (Wittmann 1992, Leuders 2009) sind so konstruiert, dass sie zunächst allen Lernenden einen leichten Einstieg und Gelegenheit für das Üben von Grundfertigkeiten bieten.

**2 Binomische Formeln** (in selbstdifferenzierender Aufgabe „Muster erkunden")

**a)** Wie geht es weiter? Rechne und setzte die Päckchen fort.

| (1) | (2) |
|---|---|
| $(x+3)^2+2=x^2+6x+11$ | $(x+1)(x+3)=x^2+4x+3$ |
| $(x+2)^2+2=\ldots$ | $(x+1)(x+2)=\ldots$ |
| $(x+1)^2+2=\ldots$ | $(x+1)(x+1)=$ |

**b)** Hinter diesen Päckchen stecken immer Muster. Welche Muster kannst du erkennen? Versuche deine Vermutungen zu begründen.

**c)** Erfindet selbst Päckchen mit ähnlichem Muster und stellt sie euch gegenseitig als Aufgaben.

**3 Binomische Formeln** (in selbstdifferenzierender Aufgabe „Beispiele ordnen ")

**a)** Ordne die Aufgaben.
Überlege dazu, welche Aufgaben sich zu Gruppen zusammenfassen lassen.

| | |
|---|---|
| (1) $x^2+3x-10$ | (5) $x^2-25$ |
| (2) $x^2-2x-1$ | (6) $x^3+14x^2+49x$ |
| (3) $2x^2+8x$ | (7) $4x^2-64$ |
| (4) $x^2-20x+100$ | (8) $x^2+24x+144$ |

**b)** Beschreibe, worin sich die Aufgaben in einer Gruppe jeweils ähneln.

**c)** Tauscht eure Zettel aus und vergleicht die Gruppen, die ihr gebildet habt.
Überprüfe mit Umformungen, ob wirklich alle Aufgaben je zu einer Gruppe gehören.

**4 Binomische Formeln** (in selbstdifferenzierender Aufgabe „Probleme lösen")

$$\square x^2+\square x+\square=(\square x+\square)^2$$

Welche Zahlen passen in die Kästchen? Suche zu jeder der folgenden Teilaufgaben möglichst viele verschiedene Lösungen:

a) irgendwelche Zahlen b) nur gerade Zahlen c) nur ungerade Zahlen
d) nur Quadratzahlen d) nur negative Zahlen



Abbildung 13.13: Geschlossene und selbstdifferenzierende Übungsaufgaben (nach Leuders, Marxer & Rülander, i. V.)

In Aufgaben wie denen des Aufgabentyps 2 in Abb. 13.13 kann jeder Lernende zunächst die Aufgabenfolge abarbeiten und dann je nach Reflexionsniveau die entstehenden Muster analysieren. In Aufgabentyp 3 werden Lernende aufgefordert, vor der Bearbeitung erst einmal subjektiv leicht empfundene Aufgabentypen zu identifizieren, wodurch das Üben um eine reflektive Kompetente ergänzt wird. Im einfachsten Fall ist diese Schwierigkeitsreflexion eine intuitive, bei stärkeren Lernenden kann sie das Erkennen von hilfreichen Mustern fördern. In Aufgabentyp 4 schließlich wird das Üben in eine einfache Problemlöseaufgabe eingebettet, die durch Probieren allen Lernenden einen Zugang erlaubt. Stärkere werden angeregt, das Problem systematisch für alle Fälle anzugehen. Übungsaufgaben dieses Typs lassen sich durch Lehrkräfte mit etwas Routine in großer Zahl und für alle Inhaltsgebiete selbst herstellen (Leuders 2006, 2009). (An dieser Stelle kann Aufgabe 7 aus 13.5 bearbeitet werden.)

Die Beispiele zeigen den Vorzug selbstdifferenzierter Übeformate: Neben der Offenheit für die Bearbeitung auf verschiedenen Niveaustufen puffern sie die Bearbeitung auch zeitlich, bieten stärkeren Lernenden vertiefte Verstehensoptionen an, ohne sie im Lernprozess zu weit vorauseilen zu lassen und fördern schließlich bei allen Lernenden prozessbezogene Kompetenzen. Diese Beispiele und Überlegungen verdeutlichen, wie sehr solche Differenzierungsansätze mit fachspezifischen Konzepten verwoben sind und was mit „Offenheit vom Fach" (Wittmann 1996) gemeint ist.

Die Adaptivität solcher Aufgabenformate ist in der Fachdidaktik auf der Seite der Konstruktionsprinzipien ausführlich beschrieben und ein sinnvoller Einsatz in der Praxis wird aus vielen Modellprojekten berichtet, weil sie den Umgang mit einer große Niveaustreuung innerhalb einer Klasse ermöglichen (Wittmann 1995, Hengartner et al. 2006, Krauthausen/Scherer 2010).

Eine Grenze der Differenzierung durch selbstdifferenzierende Aufgaben wird deutlich bei vertieftem Förderbedarf: Wenn eine Lerngruppe noch substantiell am Grundverständnis der Inhalte arbeiten muss, während andere bereits problemlösend und abstrahierend mit diesen Inhalten umgehen können, ist dies nicht auf der Aufgabenebene alleine zu lösen, dann sind spezifische Förderprogramme notwendig, die durch geeignete Unterrichtsstrukturen verankert sein müssen.

### 13.4.4 Organisationsformen des Übens

Hinsichtlich der methodischen Gestaltung haben sich Unterrichtsstrukturen bewährt, die die Eigenverantwortlichkeit des Lernens stützen (Bönsch 2004, Barzel, Büchter & Leuders 2007, Prediger et al. 2006). Übergibt man zum Beispiel den Lernenden etwas Eigenverantwortung bei der Auswahl von Aufgaben, so können sie (trotz verbindlicher Anforderungsniveaus innerhalb der Aufgaben) in die Verantwortung für die Adaptivität einbezogen werden. Allerdings sind Arbeitsaufträge wie „Bearbeite so viele Aufgaben wie du brauchst, um sicher Dezimalzahlen der Größe nach ordnen zu können", ohne eine Zielorientierung (Köller/Schiefele 2010) nur schwer erfüllbar, weil sich viele Lernenden unter- oder überfordern.

Eine in vielen Unterrichtsversuchen bewährte Struktur zur Ermöglichung von Transparenz und Zielorientierung bieten die sogenannten Checklisten (z.B. Prediger 2007).

| **Checkliste** Essen und Trinken – Teilen und Zusammenfügen | | |
|---|---|---|
| Ich kann …<br>Ich kenne … | So gut kann ich das … | Hier kann ich noch üben … |
| Ich kann Beispiele nennen, bei denen ein Bruch die Größe eines Anteils beschreibt.<br>Gib eine Situation an, bei der $\frac{3}{4}$ einen Anteil beschreibt. | | S. 11 Nr. 5<br>S. 19 Nr. 26, 27 |
| Ich kann zu einer Verteilungssituation, einem Bruch-Bild oder einer Mischung den passenden Bruch angeben.<br>Welcher Bruch gehört zu dem Bild? | | S. 10 Nr. 2, 3<br>S. 12 Nr. 7, 8<br>S. 13 Nr. 9<br>S. 16 Nr. 19 |
| Ich kann einfache Brüche (z.B. mit einer 1 im Zähler) der Größe nach sortieren.<br>Welcher Bruch ist größer: $\frac{1}{2}$ oder $\frac{1}{11}$; $\frac{1}{5}$ oder $\frac{1}{3}$? | | S.12 Nr.8,<br>S. 15 Nr. 16 |



Abbildung 13.14: Auszug einer Checkliste (aus Barzel et al. 2012a)

Abb. 13.14 zeigt an einem Beispiel, wie Checklisten für Lernende und Lehrende die Lernziele einer Unterrichtseinheit transparent darstellen in Form von Kompetenzen, illustrierenden Aufgaben, einer Möglichkeit zur Selbsteinschätzung sowie einem Angebot von passenden Übungsaufgaben.

Dies geschieht nicht im Sinne eines programmierten Übens, sondern soll dem Üben eine gewisse Flexibilität und Transparenz verleihen, eine Selbststeuerung der Lernenden ermöglichen, sowie die Autonomieerfahrungen beim Üben erhöhen (Deci/Ryan 1993). Allerdings benötigen Lernende – vor allem schwächere – eine geduldige Anleitung in der Nutzung eines solchen Instrumentes. Dies sind aber bereits allgemeindidaktische Überlegungen, die nicht spezifisch für das Üben im Mathematikunterricht sind.

## 13.5 Aufgaben

**Aufgabe 1:** Kann man die Unterschiede der Prozesse des „Erkundens“ und „Übens“ bereits an den eingesetzten Aufgaben erkennen? Diskutieren Sie Gemeinsamkeiten und Unterscheide der Aufgaben. Welche Aufgabe gehört zu welchem Prozess? Inwieweit sind die Aufgaben auf die Prozesse abgestimmt? Lesen Sie anschließend Prediger et al. (2013).

**Aufgabe 2:** „Entdeckendes Lernen“ ist ein sehr facettenreicher Begriff, der von Fachdidaktik, Lernforschung und Schulpraxis unter Betonung ganz unterschiedlicher Aspekte verwendet wird. Die wohl älteste „Didaktik des Entdeckens“ findet man in Platons Dialogepisode zwischen Sokrates und Menon, in dem uns vor Augen geführt wird, wie ein Sklave durch geeignete Fragen des Lehrers zur Entdeckung eines mathematischen Sachverhaltes geführt werden kann. Diskutieren Sie, inwiefern man diese Situation als Beispiel für entdeckendes Lernen anführen kann. Lässt sich die Situation auch mit Hilfe der Konzepte „guided discovery“ (gestütztes Entdecken) oder „adaptive prompts“ (angepassten Lernhil-

fen) verstehen.
**Aufgabe 3**: Dean/Kuhn (2006) berichten über die langfristigen Wirkungen des entdeckenden Lernens. Wie ordnen sich die dort vorgebrachten Argumente und empirischen Befunde in die Effektivitätsdiskussion ein?
**Aufgabe 4:** Haverty et al (2000) beschreiben eine Studie zum entdeckenden Lernen. Lernende hatten zuvor zwar mit Termen linearer Funktionen gearbeitet, aber bislang noch keine quadratischen Funktionsterme notiert. Nun sollen Sie entdecken, dass sie nur mithilfe eines Terms der Form x·x zur Beschreibung des Zusammenhangs gelangen. Lesen Sie die ausführlichen Darstellungen der Entdeckungsprozesse im genannten Artikel. Welche Konsequenzen ziehen Sie für eine unterrichtspraktische Umsetzung?
**Aufgabe 5:** Beim genetischen Lernen werden oft Verfahren entdeckt, die erst nach und nach zu neuen Begriffen verdichtet werden. Untersuchen Sie die Aufgabenbeispiele im Abschnitt darauf, wie dies ineinander greift. Wie sieht das etwas bei den Begriffen „Mittelsenkrechte“, „Bruch“ oder „Mittelwert“ aus? Konstruieren oder suchen Sie passende Aufgaben(-sequenzen).
**Aufgabe 6:** Wird Mathematik entdeckt oder erfunden? In der Diskussion über entdeckendes Lernen findet man auch immer wieder Argumente, die sich nicht etwa auf die Wirksamkeit der Lernform beziehen, sondern auf deren epistemologische Qualität. Oft wird eingeräumt, dass Lernende ja keine neue Mathematik erfinden, sondern bestenfalls bereits bekannte Mathematik nacherfinden. Welche Position haben Sie hier? Was sollte man bei der Diskussion berücksichtigen?
Ganz grundsätzlich kann man aber auch fragen, ob Mathematik denn entdeckt oder erfunden wird. Gibt es eine Mathematik außerhalb des Menschen, die wir entdecken können? Die Antwort auf diese Frage muss sich jeder selbst geben, solche „epistemologischen Grundpositionen“ sind nicht empirisch zu klären. Finden Sie heraus, welche Haltung hierzu Platonisten, Formalisten, Konstruktivisten oder Physikalisten einnehmen. Welche Grundposition entspricht am ehesten der Ihren?
**Aufgabe 7:** Befassen Sie sich mit Übungsaufgaben zum Thema „Brüche addieren.“ Welche Formen von Übungsaufgaben finden sie in Schulbüchern? Wie sind sie zu bewerten hinsichtlich der Prinzipien intelligenten Übens? Entwickeln Sie eigene Aufgaben, indem sie sich an den Typen „Problemlöse-“ und „Strukturaufgaben“ orientieren. Weitere Hinweise für die kreative Arbeit finden Sie bei Leuders (2009).

## 13.6 Literatur

Aebli (1981). Denken: das Ordnen des Tuns. Bd. 2: Denkprozesse. Stuttgart: Klett-Cotta

Aebli, Hans (1983). Zwölf Grundformen des Lehrens. Eine Allgemeine Didaktik auf psychologischer Grundlage. Stuttgart: Klett-Cotta

Albanese, M.A. Mitchell, S. (1993). Problem-based learning: A review of literature on its outcomes and implementation issues. Academic medicine: Journal of the Association of American Medical Colleges, 68 (1), 52-81.

Alfieri, Louis/Patricia J. Brooks/Naomi J. Aldrich/Harriet Tenenbaum 2011: Does discovery-based instruction enhance learning? Journal of Educational Psychology 103(1). S. 1-18

Barzel, Bärbel 2006a: Mathematik zwischen Konstruktion und Instruktion. Evaluation einer Lernwerkstatt 11 Jahrgang mit integriertem Einsatz Computeralgebra. Dissertation. Universität Duisburg-Essen. In: http://duepublico.uni-duisburg-essen.de/servlets/DerivateServlet/Derivate-14643/DissertationBarzel.pdf, recherchiert am 06.04.2013

Barzel, Bärbel/Andreas Büchter/Timo Leuders 2010: Gruppenexplorationen: Arbeitsteilige Gruppenarbeit mit der ganzen Klasse. Praxis der Mathematik in der Schule, 52(35).S. 14-16

Barzel, Bärbel/Andreas Büchter/TimoLeuders 2007: Mathematik - Methodik - Handbuch für die Sekundarstufe I und II. Berlin

Barzel, Bärbel/Timo Leuders 2012: Meine Klasse und ich – Zahlen sammeln und vergleichen., erscheint in: Barzel, Bärbel / Hußmann, Stephan / Leuders, Timo / Prediger, Susanne (Hg.): mathewerkstatt. Klasse 5. Berlin

Bauer, Roland (1997). Schülergerechtes Arbeiten in der Sekundarstufe I: Lernen an Stationen. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Becker, Jerry P/Shigeru Shimada (Hg.) 1997: The open-ended approach: a new proposal for teaching mathematics. Reston, Virginia

Bönsch, Manfred 2004:: Intelligente Unterrichtsstrukturen. Baltmannsweiler

Brophy, Jere 2000. Teaching (Educational Practices Series Vol. 1). Brüssel

Bruner, Jerome S. 1961: The act of discovery. Harvard Educational Review 31.S. 21–32

Büchter, Andreas/TimoLeuders 2005: Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern – Leistung überprüfen. Berlin

Chi, Michelene T. H./Nicholas DeLeeuw/Mei-Hung Chiu/Christian LaVancher 1994: Eliciting self-explanations improves understanding. Cognitive Science, 18.S. 439-477

Dean, David Jr./Deanna Kuhn 2006: Direct instruction vs. discovery: The long view. Science Education 91 (3). S. 384–397

Deci, E. & Ryan, R. (1993). Die Selbstbestimmungstheorie der Motivation und ihre Bedeutung für die Pädagogik. Zeitschrift für Pädagogik, 39, 223-238.

Donovan, John J/David J. Radosevich 1999: A meta-analytic review of the distribution of practice effect. Journal of Applied Psychology, 84 (5). S. 795–805

Driskell, James E./Willis, Ruth P./Carolyn Copper 1992: Effect of overlearning on retention. Journal of Applied Psychology, 77.S. 615–622

Euler. Leonhard 1761: Specimen de usu observationum in mathesi pura. In: Opera omnia, ser. 1, vol. 2. Commentationes arithmeticae. Leipzig 1915. S. 459-

Freudenthal, Hans 1976: Mathematik als pädagogische Aufgabe. Stuttgart
Gallin, Peter/Urs Ruf 1998: Dialogisches Lernen im Mathematikunterricht. Seelze
Gray, Eddie M./David O. Tall 1994: Duality, Ambiguity and Flexibility: A „Proceptual“ View of Simple Arithmetic. Journal for Research in Mathematics Education, 25 (1)S. 116–140
Haug, Reinhold 2008: Problemlösen Lernen mit interaktiven Lernumgebungen. Eine empirische Studie zur Förderung heuristischer Strategien durch den Einsatz Dynamischer Geometriesoftware (DGS). Springer, 2008
Haug, Reinhold 2010: Black Boxes (schwarze Kisten) als motivierender Einstieg im Umgang mit einem dynamischen Geometriesystem. [Blackboxes as a motivating introduction in the use of a dynamic geometry system.] Praxis der Mathematik in der Schule, 52(34). S. 9-14
Haverty, Lisa A./Kenneth R. Koedinger/David Klahr/Martha W. Alibali 2000: Solving Inductive Reasoning Problems in Mathematics: Not-so-Trivial Pursuit. Cognitive Science, (2). S. 249–298
Herget, Wilfried/Thomas Jahnke/Wolfgang Kroll 2001: Produktive Aufgaben für den Mathematikunterricht der Sekundarstufe I. Berlin
Herold, Joachim: 2012: Besondere Punkte im Dreieck. In: http://www.digitale-schule-bay-ern.de/ds.py?sid=da42f942e44eb412fc&_controller=DSController2&JS7_sparte_hmid=6&faecherid=5&themaid=199, recherchiert am 06.04.2013
Heymann, HansW. (Hg.) 2005: Was macht Üben „intelligent“? Pädagogik 57(11). S. 6–10
Hußmann, Stephan/Timo Leuders 2011: Das Gleiche woanders. Eine sinnstiftende Annäherung anden Symmetriebegriff. Praxis der Mathematik in der Schule 53 (37).S. 10-18
Joolingen, Wouter van 1999: Cognitive tools for discovery learning, International Journal of Artificial Intelligence in Education, 10.S. 385-397
Klahr, David/Kevin Dunbar 1988:). Dual space search during scientific reasoning. Cognitive Science, (12). S. 1-48
Knipping, Christine/Reid, David A. 2005: Schwarze Kisten - Mit Black boxes Zusammenhänge erkunden. In: Bärbel Barzel/Stephan Hußmann/Timo Leuders (Hg.): Computer, Internet & Co im Mathematikunterricht. Berlin. S. 167-180
Köller, Olaf/Ulrich Schiefele 2006: Zielorientierung. In: Detlef H. Rost (Hg.): Handwörterbuch Pädagogische Psychologie. Weinheim. S. 880-886
Lengnink, Katja 2009: Vorstellungen bilden: Zwischen Lebenswelt und Mathematik. In: Timo Leuders/Lisa Hefendehl-Hebeker/Hans-Georg Weigand (Hg.): Mathemagische Momente. Berlin.S. 120-129
Leuders, Timo (2005). Intelligentes Üben selbst gestalten! - Erfahrungen aus dem

Mathematikunterricht. Pädagogik(11/05), 29–32.
Leuders, Timo 2006: Reflektierendes Üben mit Plantagenaufgaben. Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht (MNU), 59(5). S. 276–284
Leuders, Timo 2009: Intelligent üben und Mathematik erleben. In Timo Leuders/Lisa Hefendehl- Hebeker/Hans-Georg Weigand (Hg.): Mathemagische Momente. Berlin. S. 130-143
Leuders, Timo 2012: Einüben oder Ausüben? Übekonzepte im Mathematikunterricht. Pädagogik, 64(12). S. 17-21
Leuders, Timo 2013: Zahlen unter der Lupe – Zahlen zerlegen und erforschen. In: Prediger, Susanne/Barzel, Bärbel/Hußmann, Stephan/Leuders, Timo (2012) (Hg.): mathewerkstatt 6. Berlin
Leuders, Timo, Naccarella, Dominik und Philipp, Kathleen (2011): Experimentelles Denken – Vorgehensweisen beim innermathematischen Experimentieren. In: Journal für Mathematik- Didaktik, 32(2), 205 - 231
Leuders, Timo, Prediger, Susanne, Hußmann, Stehan & Barzel, Barzel (2012): Genetische Lernarrangements entwickeln - Vom Möglichen im Unmöglichen bei der Entwicklung der Mathewerkstatt. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2012, WTM Verlag, Münster, 541 - 544.
Leuders, Timo, Reischmann, Andrea, & Zachmann, S. (2007). Drinnen ist nicht drumherum. Eine Gruppenexploration zum Zusammenhang zwischen Flächeninhalt und Umfang. Praxis der Mathematik in der Schule (PM)(18), 1–9.
Leuders, Timo/Andrea Reischmann/Stefanie Zachmann. 2007: Drinnen ist nicht drumherum. Eine Gruppenexploration zum Zusammenhang zwischen Flächeninhalt und Umfang. Praxis der Mathematik in der Schule (18). S. 1-9
Leuders, Timo/Dominik Naccarella/Philipp, Kathleen 2011: Experimentelles Denken - Vorgehensweisen beim innermathematischen Experimentieren. Journal für Mathematik-Didaktik. Volume 32 Number 2. S. 205-231
Leuders, Timo/Michael Marxer/Nora Rülander (i. Vorb. für 2014): Rechenkünstler und Zahlenzauberer- Mit Termen Rechnungen vereinfachen und durchschauen. (Arbeitstitel). Erscheint in: Stephan Hußmann/Timo Leuders/Susanne Prediger/Bärbel Barzel (Hg.). mathewerkstatt 8. Berlin
Leuders, Timo/Stephan Hußmann/Bärbel Barzel/Susanne Prediger 2011: „Das macht Sinn!" Sinnstiftung mit Kontexten und Kernideen.In: Praxis der Mathematik in der Schule 53(37). S. 2-9
Leuders, Timo/Stephan Hußmann/Bärbel Barzel/Susanne Prediger 2011: „Das macht Sinn!" Sinnstiftung mit Kontexten und Kernideen. In: Praxis der Mathematik in der Schule 53(37).S. 2-9
Leuders, Timo/Susanne Prediger 2012: „Differenziert Differenzieren“ – Mit Heterogenität in verschiedenen Phasen des Mathematikunterrichts umgehen. In: Rebecca Lazarides/Angela Ittel (Hg.): Differenzierung im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht - Implikationen für Theorie und Praxis. Heilbrunn. S. 35-66

Leuders, Timo/Volker Ulm 2007: Viel Eckiges – forschend entdecken. Praxis der Mathematik in der Schule (18). S. 1–9

Lipowsky, Frank 2009: Unterricht. In: Elke Wild/Jens Möller (Hg.): Pädagogische Psychologie. Berlin. S. 73-101

Mayer, Richard E. 2004: Should There Be a Three-Strikes Rule Against Pure Discovery Learning? American Psychologist 59(1). S. 14–19

Müller, Gerhard N./Wittmann, Erich. C. (Hg.) 1992: Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 1, 2. Stuttgart u.a.

Paradies, Liane/Linser, Hans J. 2001: Differenzieren im Unterricht. Berlin

Philipp, Kathleen (2013). Experimentelles Denken von Schülerinnen und Schülern im Fach Mathematik - Theoretische und empirische Konkretisierung einer fundamentalen Kompetenz. Wiesbaden: Springer

Pólya, George 1954: Induction and analogy in mathematics (Vol. 1). Oxford

Prediger, Susanne/Bärbel Barzel/Timo Leuders/Stephan Hußmann 2011: Systematisieren und Sichern. Nachhaltiges Lernen durch aktives Ordnen. In: Mathematik lehren 164. S. 2-9

Prediger, Susanne/Timo Leuders/Bärbel BarzelStephan Hußmann 2013: Anknüpfen, Erkunden, Ordnen, Vertiefen – Ein Modell zur Strukturierung von Design und Unterrichtshandeln. Beiträge zum Mathematikunterricht 2013

Renkl, Alexander 2000: Automatisierung allein reicht nicht aus: Üben aus kognitionspsychologischer Perspektive. Friedrich Jahresheft, Üben und Wiederholen. S. 16-19

Rittle-Johnson, Bethany/Martha W. Alibali1999: Conceptual and procedural knowledge of mathematics: Does one lead to the other? Journal of Educational Psychology 91.S 175-189

Roth, Heinrich (1976). Pädagogische Psychologie des Lehrens und Lernens. Hannover: Beltz

Schneider, Walter 1985: Toward a model of attention and the development of automatic processing. In: Michael I. Posner (Hg.): Attention and performance. Hillsdale. S. 475-492

Schoenfeld, Alan 1989: Teaching mathematical thinking and problem solving. In: Lauren B. Resnick/Leopold Klopfer (Hg.): Toward the thinking curriculum: Current cognitive research. Washington. S. 83-103

Schoenfeld, Alan 1992: Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In: National Council of Teachers of Mathematics/Douglas A. Grouws (Hg.): Handbook of research on mathematics teaching and learning. New York. S. 334–370

Schütte, Sybille (Hg.) 2002: Die Matheprofis 3. München u.a.

Schwätzer, Ulrich/Christoph Selter 1998: Summen von Reihenfolgezahlen - Vorgehensweisen von Viertklässlern bei einer arithmetisch substantiellen Aufgabenstellung. In: Journal für Mathematik-Didaktik, 19(2/3).S. 123-148

Selter, Christoph (1995). Entdeckend üben - übend entdecken. Grundschule,

27(5/1995), 30–34.
Spiro, Rand J./Jehng, Jihn Chang 1990: Cognitive flexibility and hypertext: Theory and technology for the nonlinear and multidimensional traversal of complex subject matter. In: Don Nix/Rand Spiro (Hg.), Cognition, education and multimedia: Exploring ideas in high technology. Hillsdale

Stigler, James W./James Hiebert. 1999: The Teaching Gap. New York

Sundermann, Beate/Christoph Selter 2000: QUATTRO STAGIONI. Nachdenkliches zum Stationenlernen aus mathematikdidaktischer Perspektive. In: Richard Meier/Ute Rampillon/Uwe Sandfuchs/Lutz Stäudel (Hg.): Friedrich Jahresheft XVIII. S. 110–113

van den Heuvel-Panhuizen, Marja 2003: Die Geschichte der „Realistic Mathematics Education" anhand von Aufgaben erläutert. In: Silke Ruwisch/Andrea Peter-Koop (Hg.): Gute Aufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule. Offenburg. S. 25–39

Van Lehn, Kurt 1990: Mind Bugs: The origins of procedural misconceptions. Cambridge, Massachusetts

Vollrath, Hans-Joachim 1986: Zur Beziehung zwischen Begriff und Problem in der Mathematik. In: Journal für Mathematikdidaktik 7 (1986).S. 243-268

Wagenschein, M. (1968). Verstehen lehren. Genetisch – Sokratisch – Exemplarisch. Weinheim: Beltz.

Winter, Heinrich (1983). Zur Problematik des Beweisbedürfnisses. Journal für Mathematik-Didaktik (JMD), 4(1).

Winter, Heinrich 1984: Begriff und Bedeutung des Übens im Mathematikunterricht. Mathematik lehren 2. S. 4-16

Winter, Heinrich 1989: Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Braunschweig

Wittmann, Erich C. (1994). Üben im Lernprozess. In G. Müller & E. C. Wittmann (Eds.), Handbuch produktiver Rechenübungen (pp. 175–182). Stuttgart, Düsseldorf, Berlin, Leipzig: Klett.

Wittmann, Erich Ch. (1996). Offener Mathematikunterricht in der Grundschule – vom FACH aus. Grundschulunterricht, 6, 3-7.

Wittmann, Erich Ch. 1992: Wider die Flut der bunten Hunde und der grauen Päckchen: Die Konzeption des aktiv-entdeckenden Lernens und produktiven Übens. In: Gerhard N. Müller/Erich Ch. Wittmann (Hg.): Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 1. Stuttgart u.a. S. 152–166). Stuttgart

Zech, Friedrich 1996: Grundkurs Mathematikdidaktik. Theoretische und praktische Anleitungen für das Lehren und Lernen von Mathematik (1996, Erstausgabe: 1977). Weinheim