



Didaktik der Arithmetik Klasse 1-3

SS 2009

Hans-Dieter Rinkens

Inhalt

- Lehrplan Mathematik für die Grundschule des Landes NRW
- Arithmetische Vorkenntnisse am Schulanfang
- Zahlaspekte, Zählen, Zahlzeichen
- Zum Gleichheitszeichen
- Materialien im Anfangsunterricht
- Addieren und Subtrahieren: Grundvorstellungen und Grundverständnis
- Beginn der Rechenfertigkeit bei Erstklässlern
- Addieren und Subtrahieren: Rechen-Strategien
- Der Zahlenraum bis 100: Aufbau und additives Rechnen
- Multiplizieren und Dividieren: Grundvorstellungen, Grundverständnis, Einmaleins
- **Prinzipien des Übens**
- Der Zahlenraum bis 1 Million: Stellenwertsystem
- Halbschriftliches Rechnen
- Umgang mit Daten und Größen: Sachrechnen
- Rechenstörung: Prävention und Förderung (Dr. Thomas Rottmann)

Üben

Üben

Üben

Üben

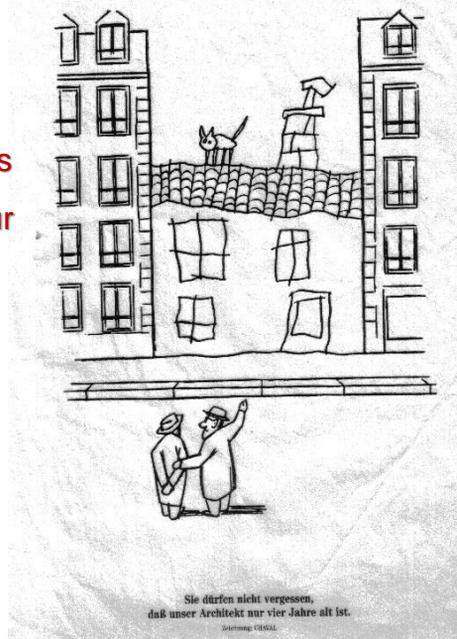
Üben

Üben

Aber wie?



Das Kind als
Konstrukteur
seines
Wissens



Prinzipien des Übens

- Kernlehrplan Mathematik für die Grundschule
- Zum Sinn des Übens
- Üben und Unterrichtsmodelle nach H. Winter
- Üben und Zielkategorien des Mathematikunterrichts nach H. Winter
- Übungsformen

5

Ministerium für Schule und Weiterbildung – NRW Lehrplan Mathematik für die Grundschule des Landes NRW

Lernen und Lehren

Zentrale Leitideen eines Mathematikunterrichts, in dem Schülerinnen und Schüler eine grundlegende mathematische Bildung erwerben können, sind

- das **entdeckende Lernen**
- das **beziehungsreiche Üben**
- der Einsatz **ergiebiger Aufgaben**
- die **Vernetzung verschiedener Darstellungsformen** sowie
- **Anwendungs- und Strukturorientierung.**

Den Aufgaben und Zielen des Mathematikunterrichts und dem Wesen der Mathematik wird in besonderer Weise eine Konzeption gerecht, in der das **Mathematiklernen** durchgängig als **konstruktiver, entdeckender Prozess** verstanden wird.

Fehler gehören zum Lernen. Sie sind häufig Konstruktionsversuche auf der Basis vernünftiger Überlegungen und liefern wertvolle Einsichten in die Denkweisen der Schülerinnen und Schüler.

6

Lernen und Lehren

Beziehungsreiches Üben

- dient der **Geläufigkeit** und der **Beweglichkeit**
- **sichert, vernetzt** und **vertieft** vorhandenes Wissen und Können
- **fördert** die **Einsicht** in Gesetzmäßigkeiten und Beziehungen, die Phänomene aus der Welt der Zahlen, Formen und Größen strukturieren.

Ergiebige Aufgaben haben eine zentrale Bedeutung für den Unterricht. Sie

- beinhalten **differenzierte Fragestellungen auf unterschiedlichem Niveau**,
- ermöglichen **verschiedene Lösungswege** und
- fördern die Entwicklung grundlegender mathematischer Bildung.

7

Lernen und Lehren

Übungen sollten möglichst

- **problemorientiert**,
- **operativ** oder
- **anwendungsbezogen**

angelegt sein.

Die **notwendigen automatisierenden Übungen**

bauen auf einer sicheren Verständnisgrundlage auf.

Der Mathematikunterricht trägt dazu bei, dass die Schülerinnen und Schüler in zunehmendem Maße **eigenverantwortlich üben**.

8

Lernen und Lehren

Operative Übungen (Erläuterung Lehrplan)

Im Rahmen operativer Übungen werden die **Auswirkungen bestimmter Operationen** wie Vergrößern, Verkleinern, Vertauschen, gleich- und gegensinnig Verändern bezüglich des Ergebnisses untersucht.

Aufgaben werden nicht unsystematisch und isoliert geübt; vielmehr werden in einem **strukturierten Aufgabengeflecht** aus z. B. Grund-, Tausch-, Umkehr- und Nachbargaufgaben oder aus Grund- und Analogieaufgaben die Zusammenhänge und Beziehungen zwischen den einzelnen Aufgaben herausgearbeitet und zum (vorteilhaften) Rechnen genutzt.

Operative Übungen fördern – im Gegensatz zu reinen Routineübungen – **die Beweglichkeit des Denkens und Rechnens.**

9

Lernen und Lehren

Automatisierendes Üben (Erläuterung Lehrplan)

Automatisierende Übungen **festigen Grundkenntnisse** wie das Einspluseins und das Einmaleins **sowie elementare Techniken** wie die schriftlichen Rechenverfahren.

Als gesichert verfügbare Routinen **entlasten sie das Bewusstsein und die Konzentration** beim Lösen komplexerer Aufgaben.

Automatisierende Übungen sollten jedoch immer **erst dann im Unterricht eingesetzt** werden, **wenn** die Schülerinnen und Schüler die entsprechenden Operationen, Rechengesetze, Rechenstrategien und Verfahren **verstanden** haben.

Bei einem verfrühten Übergang zum Auswendiglernen bzw. bei einem verfrühten Einüben von Routinen besteht die Gefahr, dass sich mögliche Fehler oder falsch verstandene Regeln verfestigen. Vergessene Gedächtnisinhalte müssen dann mühsam durch wenig elaborierte Techniken wie zählendes Rechnen oder Aufsagen der Einmaleinsreihen (neu) aufgebaut werden, statt sie z. B. aus bekannten Aufgaben abzuleiten.

10

Leistung fördern und bewerten

Die Schülerinnen und Schüler erhalten **individuelle Rückmeldungen** über ihre **Lernentwicklung** und den **erreichten Kompetenzstand**.

Lernerfolge und -schwierigkeiten werden mit **Anregungen zum zielgerichteten Weiterlernen** verbunden.

Fehler und Unsicherheiten werden nicht sanktioniert, sondern als **Lerngelegenheiten und -herausforderungen** genutzt.

Kriterien und Maßstäbe der Leistungsbewertung sollen für die Schülerinnen und Schüler **transparent** sein. Nur so werden Rückmeldungen durch die Lehrkraft und individuelle Förderhinweise nachvollziehbar und die Schülerinnen und Schüler können in die Beobachtung ihrer Lernentwicklung einbezogen werden. Sie lernen, ihre Arbeitsergebnisse selbst einzuschätzen, Lernprozesse und unterschiedliche Lernwege und -strategien gemeinsam zu reflektieren und zunehmend selbst Verantwortung für ihr weiteres Lernen zu übernehmen.

11

Leistung fördern und bewerten

Fachspezifische Beurteilungskriterien sind insbesondere:

- **Verständnis** von mathematischen Begriffen und Operationen
- **Schnelligkeit** im Abrufen von Kenntnissen
- **Sicherheit** im Ausführen von Fertigkeiten
- **Richtigkeit** bzw. **Angemessenheit** von Ergebnissen bzw. Teilergebnissen
- **Flexibilität** und **Problemangemessenheit** des Vorgehens
- Fähigkeit zur Nutzung vorhandenen Wissens und Könnens in **ungewohnten Situationen**
- Selbstständigkeit und **Originalität** der Vorgehensweisen
- Fähigkeit zum Anwenden von Mathematik bei **lebensweltlichen Aufgabenstellungen**
- **Schlüssigkeit** der Lösungswege und Überlegungen
- mündliche und schriftliche **Darstellungsfähigkeit**
- **Ausdauer** beim Bearbeiten mathematischer Fragestellungen
- Fähigkeit zur **Kooperation** bei der Lösung mathematischer Aufgaben

12

Leistung fördern und bewerten

Für eine umfassende Leistungsbewertung, die Ergebnisse und Prozesse gleichermaßen mit einbezieht, sind neben

- **punktuelle Leistungsüberprüfungen**, z. B. durch schriftliche Übungen oder Klassenarbeiten,
- **geeignete** Instrumente und Verfahrensweisen der **Beobachtung**

erforderlich, die die individuelle Entwicklung der Kompetenzen über einen längeren Zeitraum erfassen und kontinuierlich dokumentieren.

Dazu können **Lerndokumentationen** der Kinder wie **Fachhefte**, **Lerntagebücher** und **Portfolios** herangezogen werden.

13

Zum Sinn des Übens

„Üben im Mathematikunterricht der Grundschule“
ist ein Thema voller
Widersprüche, Probleme und Ungereimtheiten -
tatsächlicher und vermeintlicher.

(Radatz/Schipper, Handbuch für den MU an GS, 1983 S. 190)



14

Zum Sinn des Übens



15

Zum Sinn des Übens

Winter, Heinrich (1984): *Begriff und Bedeutung des Übens im Mathematikunterricht*

In: *mathematik lehren* 2, 1984, S. 4-16

Auch auf Einsicht beruhende Verfahren können wieder verlernt werden.

„Der denkende Mensch vergisst bekanntlich seine eigenen guten Ideen, wenn er sie nicht einprägt.“

(aus Aebli: *Denken das Ordnen des Tuns*, 1981 S.366)

So ist Üben nicht erst zur **Steigerung der Geläufigkeit** notwendig, sondern schon für die **Aufrechterhaltung der Einsicht** in die Schematik des Verfahrens. (S. 7)

Tatsächlich kann man aber auch Wissen vergessen, das mit Einsicht erworben worden ist, daher benötigen wir Reaktivierung von Wissen, und das ist einprägendes Üben.

Vor allem aber ist Einsicht kein globales und endgültiges, sondern ein lokales (auf subjektive Erfahrungsbereiche eingeschränktes) und instabiles Ereignis.

Man kann und muss ein **Wissen** durch beständiges

Reaktivieren, Umwälzen, Neuordnen im Wege entdeckenden Lernens

ausbauen, festigen, verfeinern,

vertiefen, verallgemeinern.

(S. 9)

Üben und Unterrichtsmodelle

nach H. Winter

**„Lernen durch
Belehrung“**

**„Lernen durch
gelenkte Entdeckung“**

Sicht vom Lernen

Vormachen - Nachmachen

Aktive Konstruktion des Wissens

Sicht vom Unterrichten

Kunst des Erklärens

Organisieren von Lern-Situationen

17

Üben und Unterrichtsmodelle

nach H. Winter

„Lernen durch Belehrung“

Zwei-Phasen-Modell

Einführung:

Kennenlernen des Stoffes,

Muster-Aufgabe

Lehrer-Dominanz

Üben:

Reproduzieren

Variieren, „Transfer“

Schüler-Dominanz

Unterrichtsprinzipien

Prinzip der Isolierung der Schwierigkeiten

Prinzip der kleinen Schritte

18

„Lernen durch Belehrung“

Vorsicht bei naiven Transfer-Theorien!

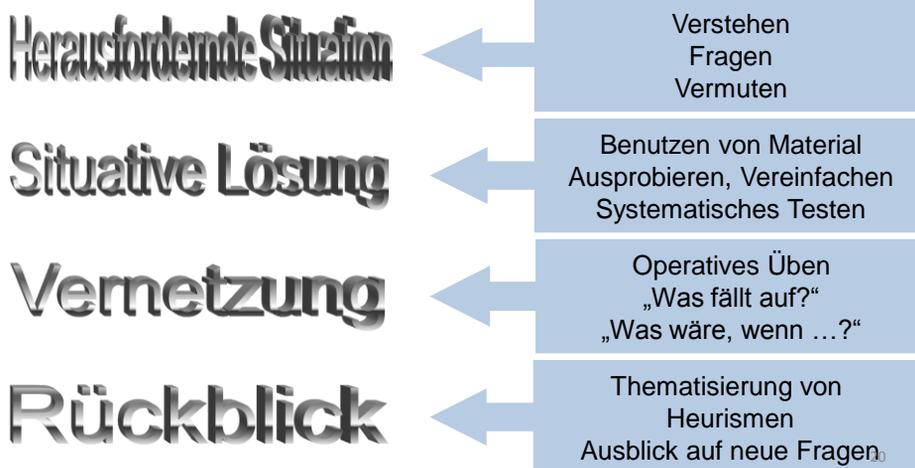
Dasselbe **anderen** erkennen
Dasselbe in der **anderen** Aufgabe **erkennen**
ist mehr als nur **dasselbe tun!**
dasselbe tun!

„Eine moderne Transfer-Theorie als psychologisches Kernstück der Lehr-Lern-Forschung ist nicht einmal in Umrissen erkennbar.“

B. Treiber/F.E. Weinert,
Lehr-Lern-Forschung, 1982, S.8

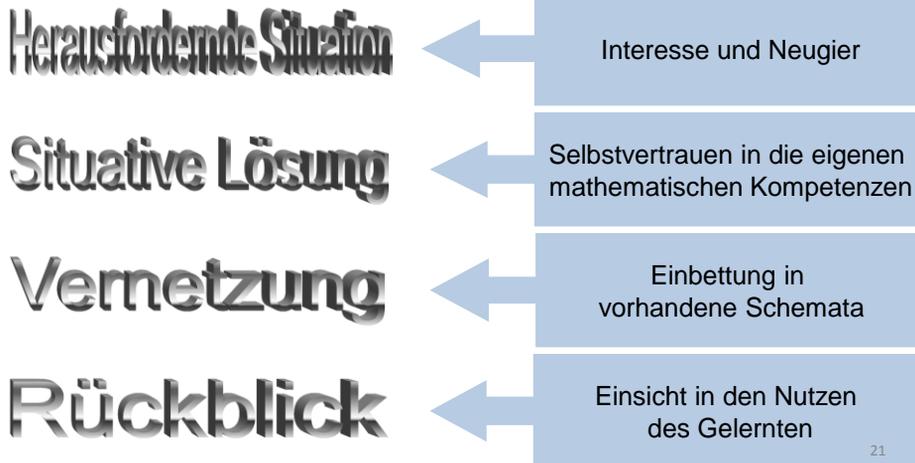
„Lernen durch gelenkte Entdeckung“

Vier-Phasen-Modell



„Lernen durch gelenkte Entdeckung“

Vier-Phasen-Modell



„Lernen durch gelenkte Entdeckung“

Vorsicht bei naiven konstruktivistischen Theorien!

„Da der Radikale Konstruktivismus an Popularität gewinnt, besteht eine Gefahr darin, dass er zu einem **übertrieben kindzentrierten, romantischen Fortschrittsglauben** führt. ...

Dieser Romantizismus als Teil einer progressiven Unterrichtsideologie heißt alles, was das Kind tut, als Ausdruck seiner individuellen Kreativität gut und unterstellt naiv, dass das Kind einen Großteil des konventionellen Schulstoffs von sich aus entdecken kann.

Entdeckendes Lernen in den Sechzigern und danach war oft verbunden mit einem Romantizismus, der im Endeffekt nicht ganz ergiebig für die Lernenden war...“

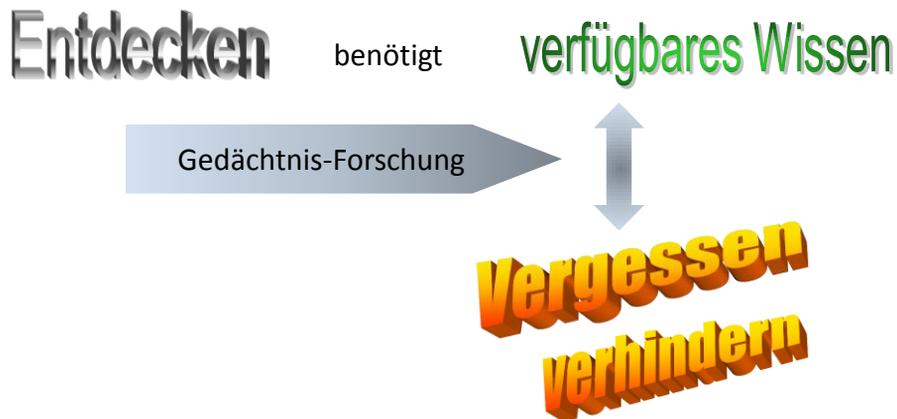
Paul Ernest:

Constructivism: Which Form Provides the Most Adequate Theory of Mathematics Learning?

In: JMD 1994 S. 337 (Übers.: hdr)

„Lernen durch gelenkte Entdeckung“

„Lernen ist immer nur ein Weiterlernen.“ (H. Winter)



23

Gedächtnis-Forschung

Lerngesetze

Übungszeiteffekt

Je mehr Zeit man auf Einüben verwendet, desto länger behält man.

Effekt der verteilten Übungen

Es ist besser, das Üben über einen gewissen Zeitraum zu verteilen als in einem einzigen Lernblock zusammenzufassen.

Effekt der Motivation

Die Motivation bestimmt, wie viel Zeit für den Lerninhalt aufgewendet wird, und das wiederum beeinflusst die Menge, die gelernt werden kann.

24

Üben und Zielkategorien des Mathematikunterrichts

nach H. Winter

Zielkategorien des Mathematikunterrichts:

Ziel des Übens:

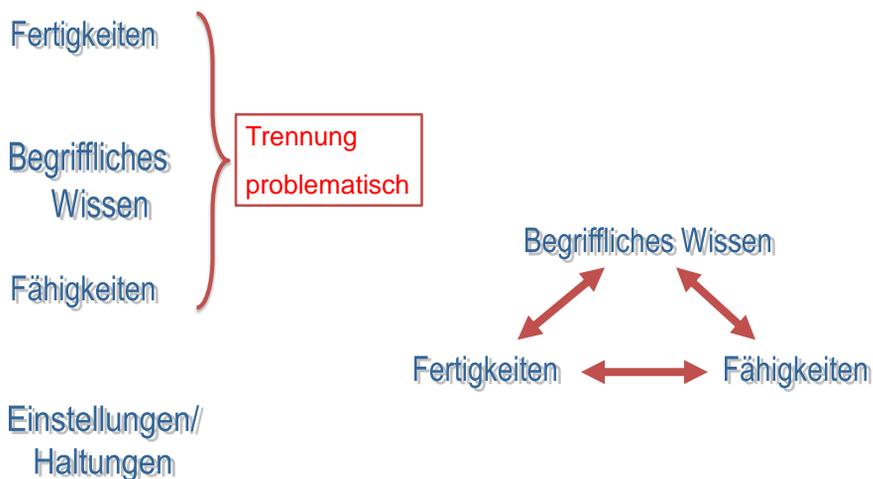
Fertigkeiten	Kenntnis von Rechensätzen, Algorithmen	Geläufigere Ausführung
Begriffliches Wissen	Wissen über Zusammenhänge	Klarere Darstellung Größerer Begriffsumfang
Fähigkeiten	Komplexe Könnens- Schemata	Mehr Sicherheit bei Strategien Größere Anwendungsbreite
Einstellungen/ Haltungen	Arbeitshaltung Emotionale Einstellung	Steigerung von Selbstvertrauen, Konzentration, Ausdauer, Kreativität

25

Üben und Zielkategorien des Mathematikunterrichts

nach H. Winter

Zielkategorien des Mathematikunterrichts:



26

Übungsformen

Unterscheide

Standard-Übungen
Standard-Übungen

Besondere Übungsformen

Hier muss auch die Übungsform
erst gelernt werden.

Übergang fließend

Päckchen

$6 + 6 =$

$4 + 9 =$

$11 + 5 =$

$7 + 5 =$

„Ergiebige“

Päckchen

$7 + 6 =$

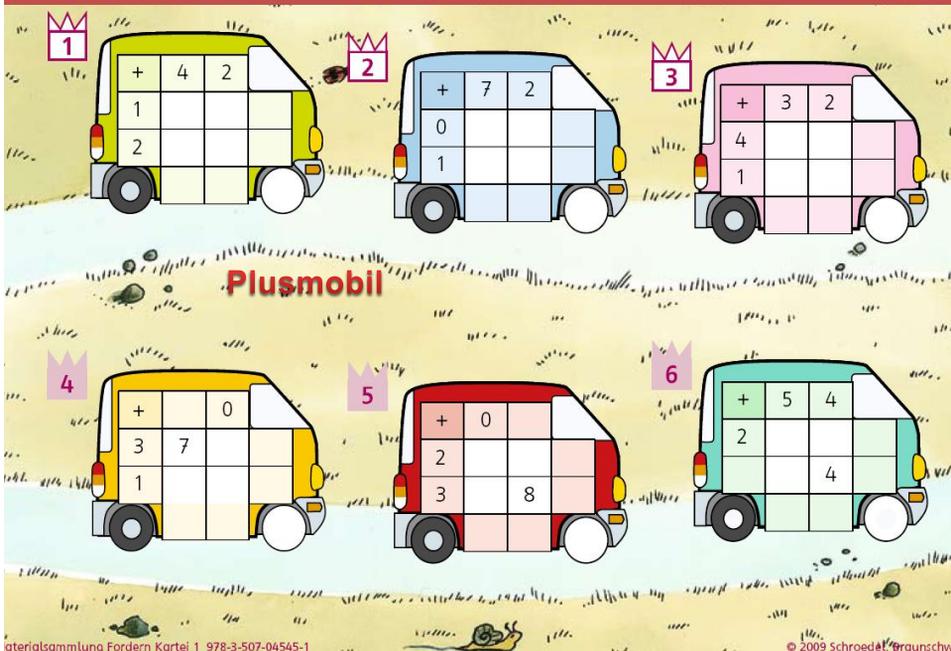
$8 + 5 =$

$9 + 4 =$



27

Übungsformen



Übungsformen

1

+	3	1

10

16

2

+		
4		
7		

13

28

3

+		
2		
6		

14

24

Plusmobil

4

+		
1		6
2		

18

5

+	1	3
2		

20

6

+		
2		
3		5

16

Übungsformen

1

+	2	3
5		

20

2

+	2	3
4		

20

3

+	2	3
3		

20

Plusmobil

4

+	2	4

20

5

+	2	4

20

6

+	2	4

20

Radzahl immer 20!

Übungsformen

Produktive Übungsformen

- sind Übungsformen mit einer **inneren Differenzierung**.
- bestätigen die erreichte **Rechenfertigkeit**.
- fördern die **Beweglichkeit** des Rechnens
(z.B. indem sie verschiedene Rechenwege zulassen).
- ermöglichen eine **tieferen Einsicht** in die Rechenoperationen
(z.B. durch Entdeckung von Gesetzmäßigkeiten während des Lösungsprozesses oder in der Rückschau).

31

Übungsformen

Produktive Übungsformen

- sind Übungsformen mit einer **inneren Differenzierung**.
- lassen möglichst einen **"produktiven Rest"**
D.h. sie fordern zum Weiterdenken auf
(z.B. durch Variation der Daten oder der Aufgabenstellung)
... auch wenn das selbst gesteckte Ziel nicht immer erreicht werden kann.

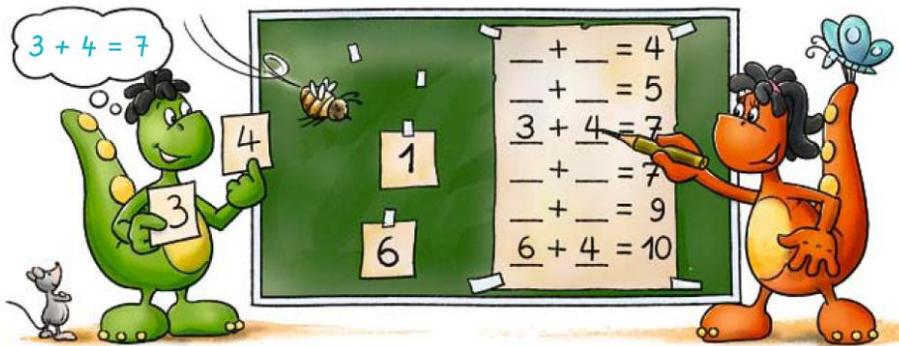
„Das Prinzip der produktiven Reste:

Um die Dynamik des Weiterdenkens zu aktivieren, muss möglichst jeder vollständige Lernprozess mit dem Aufweis eines geistig noch nicht bewältigten Restes abschließen, der seinerseits geeignet ist, einen neuen Lernprozess zu motivieren.“

Horst Karaschewski:
Wesen und Weg des ganzheitlichen Rechenunterrichts, 1966

Übungsformen

Sechser-Pack



Aus vier verschiedenen Zahlenkarten sechs Aufgaben bilden.
Aufgaben und Tauschaufgaben gelten als eine Aufgabe.

Übungsformen

Sechser-Pack



1

3	$_ + _ = 5$
6	$_ + _ = 7$
2	$_ + _ = 8$
5	$_ + _ = 9$
	$_ + _ = 11$

2

4	$_ + _ = 6$
7	$_ + _ = 9$
2	$_ + _ = 11$
9	$_ + _ = 13$
	$_ + _ = 16$

3

4	$_ + _ = 12$
7	$_ + _ = 14$
8	$_ + _ = 15$
10	$_ + _ = 17$
	$_ + _ =$

4

9	$_ + _ =$
7	$_ + _ = 17$
12	$_ + _ = 16$
5	$_ + _ = 19$
	$_ + _ =$

5

3	$_ + _ = 9$
6	$_ + _ = 14$
8	$_ + _ = 14$
11	$_ + _ = 19$
	$_ + _ =$

Übungsformen

Finde alle sechs Aufgaben und die fehlende Zahlenkarte!



Wie heißt die Zahlenkarte?

1

5	__ + __ = 3
1	__ + __ = 5
2	__ + __ = 6
	__ + __ = 6
	__ + __ = 7
	__ + __ = 9

2

3	__ + __ = 10
11	__ + __ = 11
8	__ + __ = 14
	__ + __ = 15
	__ + __ = 18
	__ + __ = 19

3

4	__ + __ = 10
9	__ + __ = 13
12	__ + __ = 15
	__ + __ = 16
	__ + __ = 18
	__ + __ = 21

4

6	__ + __ = 13
9	__ + __ = 14
8	__ + __ = 15
	__ + __ = 15
	__ + __ = 16
	__ + __ = 17

5

5	__ + __ = 12
7	__ + __ = 16
12	__ + __ = 17
	__ + __ = 18
	__ + __ = 19
	__ + __ = 23

Sechser-Pack

Übungsformen

Finde alle sechs Aufgaben und die fehlenden Zahlenkarten!

1

4	__ + __ = 4
1	__ + __ = 5
	1 + __ = 7
	__ + 4 = 7
	__ + __ = 9
	__ + __ = 10

2

2	__ + __ = 2
5	__ + __ = 4
	__ + __ = 5
	2 + __ = 6
	__ + 5 = 7
	__ + __ = 9

3

3	__ + __ = 3
6	__ + __ = 4
	__ + 3 = 5
	__ + __ = 7
	__ + __ = 8
	__ + 6 = 9

4

4	__ + __ = 6
10	__ + __ = 7
	__ + __ = 9
	__ + 10 = 12
	4 + __ = 14
	__ + __ = 15

5

4	4 + __ = 11
9	__ + __ = 12
	__ + 9 = 13
	__ + __ = 15
	__ + __ = 16
	__ + __ = 17

6

2	__ + __ = 8
12	2 + __ = 10
	__ + __ = 14
	__ + __ = 14
	12 + __ = 18
	__ + __ = 20

Sechser-Pack

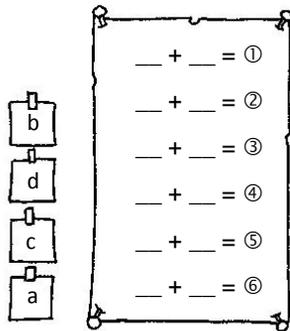
Übungsformen

Kleine Theorie zum Sechser-Pack

Die vier **Zahlenkarten** sind **verschieden**.

Man kann sie der Größe nach ordnen:

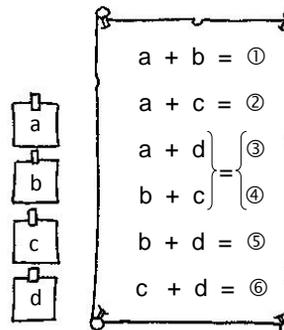
$$0 \leq a < b < c < d.$$



Für die sechs **Ergebniszahlen** gilt:

Mindestens 5 Ergebniszahlen sind verschieden.

$$0 < ① < ② < ③ \leq ④ < ⑤ < ⑥$$



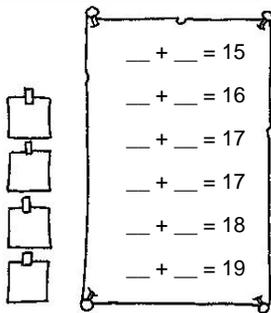
Übungsformen

Kleine Theorie zum Sechser-Pack

Gesetzmäßigkeiten, die Kinder im Verlauf der Übung entdecken können, sind folgende:

- Kleine Summanden → kleine Summe,
große Summanden → große Summe
- Die kleinste Ergebniszahl ergibt sich aus den kleinsten Zahlenkarten, die größte Ergebniszahl aus den größten Zahlenkarten.
- Die Summe aus der kleinsten und der größten Ergebniszahl ist gleich der Summe aller Zahlenkarten.
(Es gibt drei Paare von Ergebniszahlen mit dieser Summe.)
- Die Summe aller Ergebniszahlen ist die dreifache Summe aller Zahlenkarten.

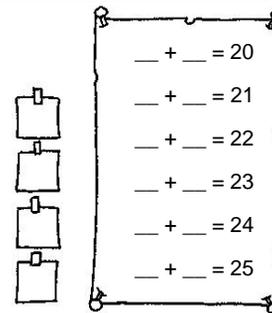
Übungsformen



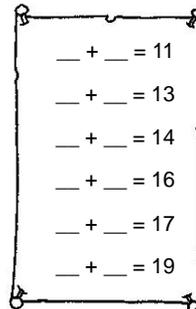
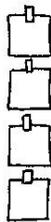
Sechser-Pack

Ein Sechser-Pack hat zwei Lösungen.

Ein Sechser-Pack hat keine Lösung.



Das Aufgaben-Format eignet sich auch als interaktives Spiel für die CD einschl. verschiedener Schwierigkeitsgrade.



Ähnlich wie bei Sudoku lassen sich „Sechser-Pack“-Heftchen zum Süchtigwerden herstellen.

Übungsformen

selbstkontrolle

= Überprüfen/Bestätigen der Richtigkeit des eigenen Ergebnisses

➡ als Einstellung zum Rechnen

Überprüfen/Bestätigen durch

- Wiederholen
- Probe
- Überschlag
- anderen Lösungsweg

➡ als methodisches Hilfsmittel, um individuelles Lerntempo zu ermöglichen

Bestätigen/Überprüfen durch

- Zugang zum Ergebnis (direkt oder indirekt)
- Entdecken und Anwenden von Gesetzmäßigkeiten