Übungen zu Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2, SS 07
2. Übungsblatt, auszuarbeiten bis 19.03.2007

9. Definition: Unter dem *Zyklus* $(a_1, \ldots, a_n)$ versteht man folgende bijektive Abbildung:
   $a_i \to a_{i+1}$ für $1 \le i < n$
   $a_n \to a_1$

   (a) Zeigen Sie: Jede Permutation lässt sich als Hintereinanderausführung von Zyklen schreiben.
   (b) Sei $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 8 & 5 & 6 & 7 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Zerlegen Sie π in ein Produkt von Zyklen. Ist die Zerlegung eindeutig?

10. Zeigen Sie: Für jede Transposition τ gilt: $\mathrm{sign}(\tau) = -1$

11. (a) Zerlegen Sie π aus 9b in ein Produkt von Transpositionen. Ist diese Zerlegung eindeutig?
    (b) Bestimmen Sie die Menge und die Anzahl der Fehlstellen von π
    (c) Bestimmen Sie die Signatur von π sowohl mittels Bsp 11a (also über die Transpositionen) und einmal mit Bsp 11b (also über die Fehlstellen) und vergleichen Sie die Ergebnisse.

12. (a) Zeigen Sie **ausführlich** die Formel aus Bsp 7.16. (Vandermonde'sche Determinante) (im Skriptum ist der Beweis nur skizziert)
    (b) Berechnen Sie (ohne Computer) die Determinante von:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & 5 & 25 & 125 & 625 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & -8 & 16 \end{pmatrix};$$

13. (a) Berechnen Sie mit Hilfe von Sätzen aus dem Skript möglichst effizient die Determinanten folgender Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix};\ C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

    (b) wie (a), aber einmal über $\mathbb{R}$ und über $\mathbb{Z}_2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

    (c) Seien A, b wie folgt:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix};\ b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix};$$

    Bestimmen Sie im Gleichungssystem $Ax = b$ den Wert von x_3 mittels der Cramer'schen Regel.

(d) Überprüfen Sie die Ergebnisse von (a)-(c) mit Mathematica oder einem anderen Computer-Algebra-System.

14. Sei h: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

(a) Finden Sie eine Basis B von $\mathbb{R}^3$, sodass A(h;B,B) eine Diagonalmatrix ist.
(b) Finden Sie eine Matrix C, sodass $C^{-1} \cdot A(h;K,K) \cdot C$ eine Diagonalmatrix ist.
(c) Überprüfen Sie alle Ergebnisse mit Mathematica oder einem anderen Computer-Algebra-System.

15. (Fortsetzung von Bsp. 14)
(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von *h* mit den algebraischen und geometrischen Vielfachheiten.
(b) Bestimmen Sie die zugehörigen Eigenvektoren und Eigenräume.
(c) Überprüfen Sie alle Ergebnisse mit Mathematica oder einem anderen Computer-Algebra-System.

16. Diagonalisieren Sie die Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -6 & 7 & -4 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix}$ und bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren.

17. (Ein Beispiel zu „Markov-Ketten") Ein Teilchen startet eine zufällige Wanderung auf den ganzen Zahlen der Zahlengerade im Punkt 0, nach folgenden Regeln:
Mit Wahrscheinlichkeit ¼ geht das Teilchen um eins nach links, mit Wahrscheinlichkeit ¼ bleibt das Teilchen wo es ist und mit Wahrscheinlichkeit ½ geht das Teilchen um eins nach rechts.
Gelangt es in die Punkte -2 oder +2, so ist es gefangen!
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten, mit denen sich das Teilchen nach sehr sehr langer Zeit in den Punkten -2,-1,0,1,2 befindet. Nebenrechnungen mit MATHEMATICA sind wieder erlaubt!
<u>Anleitung:</u> Bestimmen Sie eine „Übergangsmatrix" P, sodass P^n x den Wahrscheinlichkeits-vektor für den Aufenthalte in den 5 Punkten nach n Schritten angibt. Berechnen Sie den Grenzwert von P^n, indem Sie P diagonalisieren.