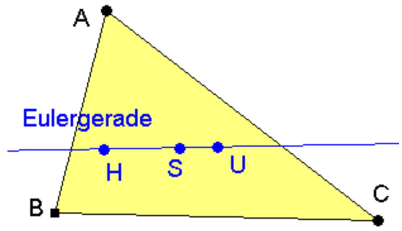
Die Eulergerade

(Schönes Anwendungsbeispiel für das Skalarprodukt)



Die folgende, bemerkenswerte, allgemein gültige Dreieckseigenschaft wird dem schweizer Mathematiker Leonhard Euler (1707-1783) zugesprochen:

Bei jedem Dreieck liegen der Umkreismittelpunkt U, der Schwerpunkt S und der Höhenschnittpunkt H auf einer gemeinsamen Geraden, der so genannten ***Eulergeraden****. Darüber hinaus gilt:* $\overline{HS}=2\cdot\overline{US}$.

Beweis:

Wir legen das Dreieck so in ein Koordinatensystem, dass der Umkreismittelpunkt den Ursprung bildet. Die Ortsvektoren der drei Eckpunkte haben somit die gleiche Länge.

Hinweis: Zur vereinfachten Darstellung schreiben wir die Vektoren in Großbuchstaben und ohne Pfeile.

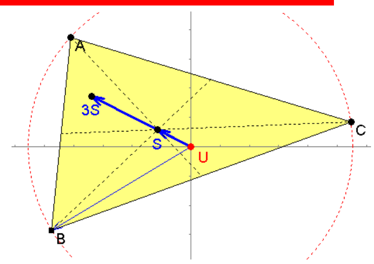
Für den Dreiecksschwerpunkt *S* gilt bekanntermaßen: $S=\frac{1}{3}(A+B+C)$.

Da die Höhe h_C auf der Seite *c* senkrecht steht, erfüllen alle Punkte *X* auf h_C die folgende Gleichung:

$$(X-C)\cdot(B-A)=0 \qquad (1)$$

Hierbei beschreibt das Produkt auf der linken Seite das Skalarprodukt aus je einem Richtungsvektoren der Höhe h_C und der Seite *c.* Wir wenden hierbei die folgende Regel an:

Genau dann, wenn zwei Seiten aufeinander senkrecht stehen, muss das Skalarprodukt der Richtungsvektoren null sein.



Der Punkt 3*S* geht durch zentrische Streckung (Zentrum *U*) mit dem Faktor 3 aus *S* hervor. 3*S* liegt daher auf alle Fälle auf der Geraden *US.* Außerdem teilt S die Strecke zwischen 3*S* und *U* im Verhältnis 2:1. Wir müssen somit für unseren Beweis nur noch den Punkt 3*S* als Höhenschnittpunkt *H* überführen.

Setzt man 3*S* für *X* in die linke Seite von (1) mit dem Skalarprodukt ein, ergibt sich:

$$(3S-C)\cdot(B-A)=(A+B+C-C)\cdot(B-A)=(A+B)\cdot(B-A)$$

Nun gilt mit den Rechenregeln des Skalarproduktes:

$$(A+B)\cdot(B-A)=\begin{pmatrix}x_A+x_B\\ y_A+y_B\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_B-x_A\\ y_B-y_A\end{pmatrix}=(x_B+x_A)\cdot(x_B-x_A)+(y_B+y_A)\cdot(y_B-y_A) \qquad (2)$$

Nach der dritten binomischen Formel ergibt der letzte Ausdruck von (2):

$$x_B^2 - x_A^2 + y_B^2 - y_A^2 = (x_B^2 + y_B^2) - (x_A^2 + y_A^2) \tag{3}$$

Die beiden Klammern in (3) stehen nach dem Satz von Pythagoras für die Streckenlängen $\overline{UA}$ und $\overline{UB}$. Da U der Umkreismittelpunkt ist, sind $\overline{UA}$ und $\overline{UB}$ gleich lang, d. h. das Skalarprodukt (2) ist null. Wir haben gezeigt, dass der Punkt $3S$ auf der Höhe h_C liegt.

Auf die gleiche Art lässt sich zeigen, dass der Punkt $3S$ auf einer weiteren Höhe liegt. Damit ist der Nachweis gelungen: $3S$ ist gleich dem Höhenschnittpunkt H. q.e.d.

Frage: Warum müssen wir nicht zeigen, dass $3S$ auch auf der dritten Höhe liegt?

Hinweis:

Wir sind bei unserem Beweis auf die beiden Gleichungen $A+B+C=3S$ und $3S=H$ gestoßen. Dadurch haben wir nebenbei eine interessante Konstruktionsmöglichkeit für den Höhenschnittpunkt entdeckt:

Man verschiebe von unserem Koordinatenursprung U aus die Strecke $\overline{UB}$ (= Vektor B) parallel, so dass $U'=A$ gilt und lege an B' die in gleicher Weise verschobene Strecke $\overline{UC}$ (= Vektor C). Damit ist der Endpunkt des Streckenzuges unser Höhenschnittpunkt *H.*