

## ZahnradSchwingungen und der Doppler-Effekt

**Dr. Michael Elbs<sup>1</sup>, Dietmar Sterns<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> ISMB Dautermann GmbH, 87600 Kaufbeuren, Deutschland, michael.elbs@ismb.de

<sup>2</sup> Renk AG, 86159 Augsburg, Deutschland, dietmar.sterns@renk.biz

### Kurzfassung

Bei Testläufen eines zwischen Elektromotor und Verdichter eingesetzten Stirnradgetriebes wiesen die Gehäuseschwingungen sehr schmalbandige Resonanzen auf. Eine Ordnungsanalyse zeigt vornehmlich die Zahneingriffsfrequenz bzw. deren Vielfache. Zusätzlich treten meist aber auch einseitige Seitenbänder hierzu auf. Um dieses Verhalten zu analysieren, wurde ein FE-Modell des Radsatzes erstellt. Damit konnten den im Betrieb beobachteten schmalbandigen Resonanzen bezüglich ihrer Frequenzlage, ihrem Dämpfungsverhalten und ihren Betriebsschwingformen Moden der Radscheibe zugeordnet werden. Die genaue Lage der Resonanzstellen kann dabei nur erklärt werden, wenn der Doppler-Effekt der körperfesten Radschwingungen bezüglich der ortsfesten parametrischen Erregung in der Laufverzahnung berücksichtigt wird. Wie in der Messung stellen sich dann auch in der Simulation für jede Radeigenfrequenz je zwei Resonanzstellen ein. Gleichzeitig liefert der Doppler-Effekt auch die Erklärung für die im Spektrum beobachteten, asymmetrischen Seitenbänder. Es konnte ferner gezeigt werden, dass in diesen Resonanzen keine lebensdauerrelevante Zusatzbelastung für die Verzahnung besteht. Schließlich wurden Maßnahmen zur Vermeidung dieser Resonanzphänomene erarbeitet.

### 1 Einleitung

Bei einem Stirnradgetriebe mit Doppelschrägverzahnung wurden während gezielter Versuchsläufe innerhalb sehr schmaler Drehzahlbereiche signifikant erhöhte Gehäuseschwingungen beobachtet. Der untersuchte Getriebetyp mit einer Übersetzung von etwa  $i = 8$  wird zwischen Elektromotor und Verdichter bei Leistungen bis etwa 4 [MW] in einem weiten Drehzahlbereich eingesetzt. Über eine detaillierte Messdatenanalyse und ein geeignetes Simulationsmodell sollten die Ursachen für dieses ungewöhnliche Resonanzverhalten ermittelt werden.

### 2 Messdatenanalyse

Zur Analyse des beobachteten Resonanzphänomens wurden Gehäuse- und Radschwingungen im Zuge langsam durchlaufener Drehzahlrampen im Teillastbetrieb aufgezeichnet. Die Gehäuseschwingungen wurden dabei mittels piezoelektrischer Beschleunigungssensoren erfasst, die Radschwingungen mittels induktiver Wegsensoren, welche die axiale Radbewegung am Radkranz erfassen.

Die Abbildung 1 zeigt den Verlauf des rms-Werts der Gehäuseschwingungen über der Drehzahl. Man erkennt eine Vielzahl von sehr schmalbandigen Resonanzstellen mit einer Resonanzbreite von teilweise deutlich kleiner als 1 [rpm] und sehr hohen Beschleunigungsamplituden. Auch die Radschwingungssensoren zeichnen ein sehr ähnliches Resonanzverhalten auf. Das Verhältnis zwischen den Amplituden von Gehäuse- und Radschwingung variiert jedoch von Resonanzstelle zu Resonanzstelle teilweise erheblich.

Eine Ordnungsanalyse der Zeitreihendaten zeigt, dass die schmalbandigen Resonanzen vor allem durch die Zahneingriffsfrequenz zwischen Rad und Ritzel sowie deren Vielfachen dominiert werden. Da sich die Zahneingriffsfrequenz bis etwa 8 [kHz] erstreckt, handelt es sich um ein vergleichsweise hochfrequentes Schwingungsphänomen.

Oft treten zudem Seitenbänder im Abstand von geradzahligem Vielfachen der Raddrehfrequenz auf. Meist tritt dabei nur genau ein zusätzliches Seitenband entweder unterhalb oder oberhalb der Zahneingriffsfrequenz auf. Klassische Amplituden- oder Phasenmodulationen würden hingegen symmetrische Seitenbänder erzeugen.

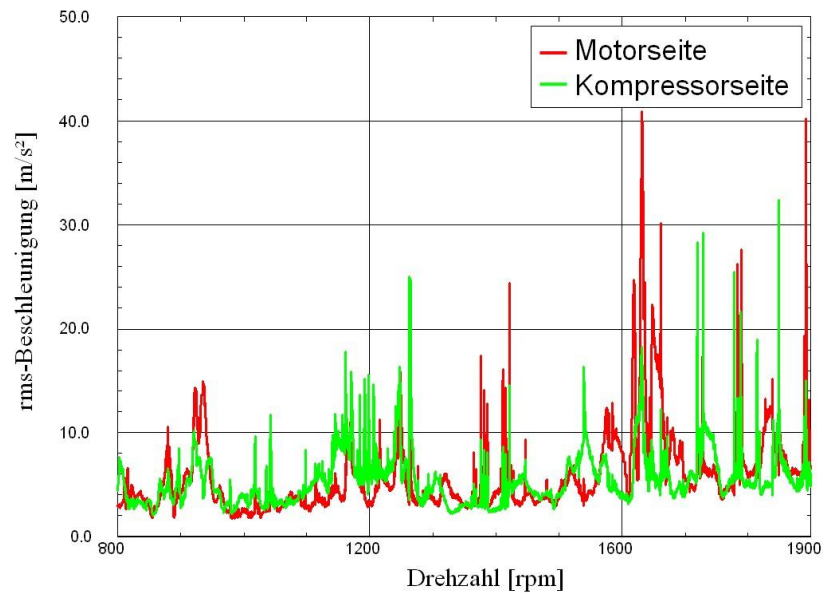


Abbildung 1: Drehzahlabhängigkeit des rms-Werts der Gehäuseschwingungen

### 3 Simulation

#### 3.1 Stehendes Rad

Ausgehend von 3D-CAD-Daten wurde ein FE-Modell der Radwelle erstellt. Nach Anpassung der Koppelbedingungen zwischen Radscheibe und Radwelle zeigt der Vergleich von rechnerischer und experimenteller Modalanalyse eine relative Vorhersagegenauigkeit von besser als 1% für die etwa 120 auftretenden Radeigenfrequenzen bis zur maximalen Zahneingriffsfrequenz. Die in der experimentellen Modalanalyse ermittelten, sehr niedrigen Dämpfungswerte für die Radscheibenmoden können die im Betrieb beobachteten schmalbandigen Resonanzen erklären. Die experimentell ermittelten Dämpfungswerte für die Ritzel- und Radwelle sind dagegen erheblich größer.

In einer nachgeschalteten Responseanalyse für das *stehende* Rad ergeben sich trotzdem charakteristische Abweichungen zwischen den simulierten Radschwingungen und den Ergebnissen der Betriebsschwingungsmessungen. Am deutlichsten wird dies, wenn man einen Ordnungsschnitt entlang der doppelten Zahneingriffsfrequenz betrachtet, wie in der Abbildung 2 gezeigt. Während in der Messung Resonanzpaare auftreten, liefert die Simulation nur Einzelresonanzen.

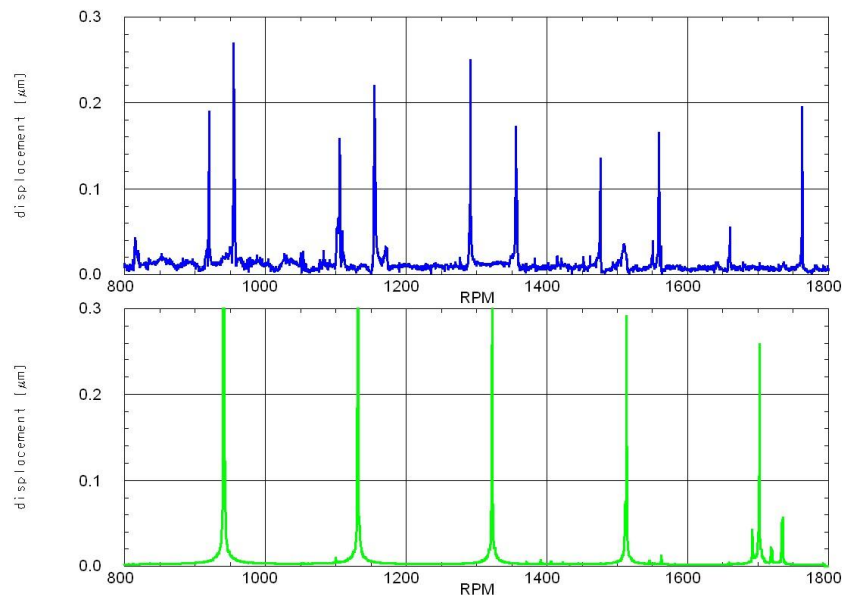
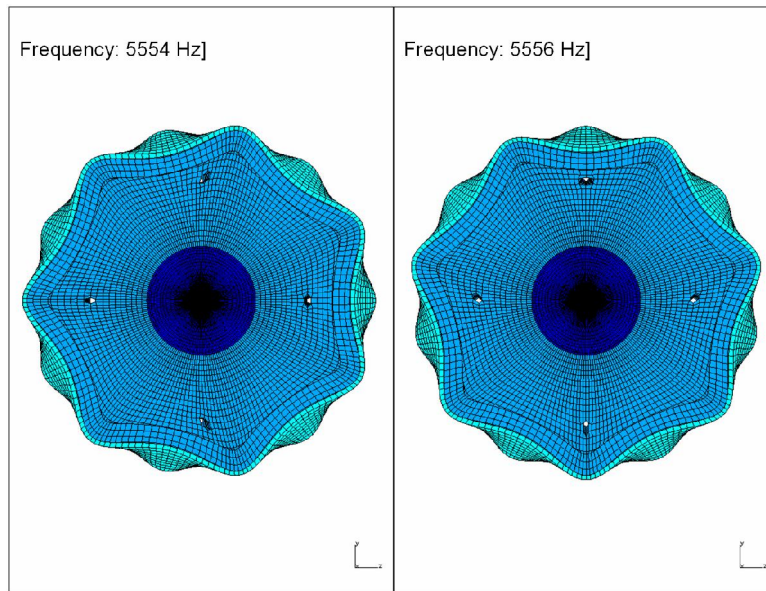


Abbildung 2: Ordnungsschnitt entlang der zweifachen Zahneingriffsfrequenz Vergleich zwischen Messung (oben) und Simulation ohne Raddrehung (unten)

Die hier beschriebene Vorgehensweise zur Responseanalyse von Getrieben unter dem Einfluss der durch Steifigkeitsschwankungen im Zahneingriff bedingten Parametererregung findet sich vielfach in der einschlägigen Literatur zur Maschinendynamik und zum Geräuschverhalten von Getrieben [1,2]. In der Literatur konnten jedoch keine Hinweise auf die hier beobachteten Resonanzpaare gefunden werden. Ein Erklärungsmodell für dieses Phänomen wird im Folgenden vorgestellt.

### 3.2 Resonanzverdopplung durch den Doppler-Effekt

Aufgrund der Rotationssymmetrie des Rades treten meist Paare von entarteten Radmoden auf. Es sei deshalb ein Radmodenpaar derselben Eigenfrequenz  $\omega_0/2\pi$  und der Umfangsordnung  $k$  betrachtet. Die Umfangsordnung gibt dabei die Periodizität der Eigenform entlang der Umfangskoordinate an. Beispielhaft zeigt die Abbildung 3 ein Modenpaar mit der Umfangsordnung  $k = 7$ .



**Abbildung 3:** Beinahe entartetes Modenpaar mit Umfangsordnung  $k = 7$ , aufgrund der 4 Bohrungen um etwa 0,04 % voneinander frequenzverschoben

Aus den beiden entarteten Radmoden können durch Superposition entgegengesetzt laufende Umfangswellen gebildet werden, deren Umfangs- und Zeitabhängigkeit im körperfesten Koordinatensystem des Rades wie folgt beschrieben werden kann:

$$s(\varphi, t) = s_0 [\cos(\omega_0 t) * \cos(k\varphi) + \sin(\omega_0 t) * \sin(k\varphi)] \quad (1)$$

oder

$$s(\varphi, t) = s_0 [\cos(\omega_0 t) * \cos(k\varphi) - \sin(\omega_0 t) * \sin(k\varphi)] \quad (2)$$

Die in Gleichung (1) beschriebene Körperschallwelle läuft hierbei im Drehsinn des Rades um, die Welle aus Gleichung (2) läuft der Raddrehung entgegen. Die Umfangskoordinate eines Wellenberges kann somit beschrieben werden durch:

$$\varphi_{Wellenberg}(t) = \frac{\omega_0}{k} t \quad \text{oder} \quad \varphi_{Wellenberg}(t) = -\frac{\omega_0}{k} t \quad (3)$$

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  dieser Radbiegewellen am Außendurchmesser  $d_a$  des Rades beträgt:

$$c = \frac{\omega_0}{k} \frac{d_a}{2} \quad \text{oder} \quad c = -\frac{\omega_0}{k} \frac{d_a}{2} \quad (4)$$

Die Raddrehung mit der Drehfrequenz  $\omega_{Rad}/2\pi$  führt zu einer Relativgeschwindigkeit zwischen dem Ausbreitungsmedium „Radscheibe“ und der raumfesten Position des Zahneingriffes zwischen Rad und Ritzel von:

$$v_{rel} = \omega_{Rad} \frac{d_a}{2} \quad (5)$$

Der Doppler-Effekt [3] bewirkt, dass ein raumfester Beobachter die körperfeste Radschwingungen nicht mit der Frequenz  $\omega_0 / 2\pi$  wahrnimmt, sondern frequenzverschoben, nämlich mit der Frequenz  $\omega_{raumfest} / 2\pi$ , wobei:

$$\omega_{raumfest} = \omega_0 \left( 1 + \frac{v_{rel}}{c} \right) \quad (6)$$

Die Radschwingungen werden durch die Steifigkeitsschwankung in der Laufverzahnung zwischen Rad und Ritzel angeregt. Dabei sei  $z$  die Zähnezahzahl des Rades. Die Resonanzbedingung für die raumfeste Parametererregung mit der Zahneingriffsfrequenz  $\omega_Z = z\omega_{Rad} = \omega_{raumfest}$  liefert unter Verwendung der Gleichungen (4), (5) und (6) folgende Bedingungen:

$$\omega_Z = z\omega_{Rad} = \omega_0 \left( 1 + \frac{\omega_{Rad} \frac{d_a}{2}}{\frac{\omega_0 d_a}{k 2}} \right) = \omega_0 + k\omega_{Rad} \quad \text{oder} \quad \omega_Z = z\omega_{Rad} = \omega_0 \left( 1 - \frac{\omega_{Rad} \frac{d_a}{2}}{\frac{\omega_0 d_a}{k 2}} \right) = \omega_0 - k\omega_{Rad} \quad (7)$$

Hieraus folgen die Resonanzbedingungen für die Drehfrequenz des Rades  $\omega_{Rad} / 2\pi$ :

$$\frac{\omega_{Rad}}{2\pi} = \frac{\omega_0}{2\pi(z-k)} \quad \text{oder} \quad \frac{\omega_{Rad}}{2\pi} = \frac{\omega_0}{2\pi(z+k)} \quad (8)$$

Für jede Radeigenfrequenz  $\omega_0 / 2\pi$  ergeben sich somit zwei Resonanzdrehzahlen  $n_{Rad}$ :

$$n_{Rad} \left[ \frac{1}{\min} \right] = \frac{60}{z-k} \cdot \frac{\omega_0}{2\pi} \left[ \frac{1}{s} \right] \quad \text{und} \quad n_{Rad} \left[ \frac{1}{\min} \right] = \frac{60}{z+k} \cdot \frac{\omega_0}{2\pi} \left[ \frac{1}{s} \right] \quad (9)$$

In beiden Resonanzstellen schwingt das Rad jeweils mit seiner Eigenfrequenz  $\omega_0 / 2\pi$ . Jeder raumfeste Beobachter, so z. B. auch ein im Gehäuse montierter Beschleunigungs- oder Wegsensor nimmt dagegen eine dopplerverschobene Schwingfrequenz wahr. Diese entspricht in beiden Fällen der Zahneingriffsfrequenz  $\omega_Z / 2\pi$ . Im Fall von exakt entarteten Modenpaaren treten somit keine Seitenbänder auf.

### 3.3 Resonanzverdopplung bei einer einzelnen Radmode

Durch eine Störung der Rotationssymmetrie des Rades z. B. durch axiale Bohrungen kann die Entartung der Modenpaare aufgehoben werden. Es sei deshalb nun nur eine einzelne Radmode mit der Eigenfrequenz  $\omega_0 / 2\pi$  und der Umfangsordnung  $k$  betrachtet. Die Umfangsordnung gibt dabei wiederum die Periodizität der Eigenform entlang der Umfangskoordinate an. Im körperfesten Koordinatensystem des Rades kann die Umfangs- und Zeitabhängigkeit der Radschwingung zu

$$s(\varphi, t) = s_0 \cos(\omega_0 t) * \cos(k\varphi) \quad (10)$$

angegeben werden.

Bei vorgegebener Raddrehfrequenz  $\omega_{Rad} / 2\pi$  kann die zeitabhängige Umfangskoordinate des Zahneingriffes zwischen Rad- und Ritzelwelle im körperfesten Koordinatensystem des Rades angegeben werden zu:

$$\varphi_Z(t) = \omega_{Rad} t \quad (11)$$

Durch Kombinieren der Gleichungen (10) und (11) erhält man die Schwingamplitude an der Position des Zahneingriffes zu:

$$\begin{aligned} s_Z(t) &= s_0 \cos(\omega_0 t) * \cos(k\varphi_Z(t)) \\ &= s_0 \cos(\omega_0 t) * \cos(k\omega_{Rad} t) \\ &= \frac{s_0}{2} \left( \cos[(\omega_0 + k\omega_{Rad})t] + \cos[(\omega_0 - k\omega_{Rad})t] \right) \end{aligned} \quad (12)$$

Die Resonanzbedingung liefert wiederum zwei Resonanzstellen für die Parametererregung in der Laufverzahnung mit der Radzähnezahzahl  $z$ :

$$\omega_Z = z\omega_{Rad} = \omega_0 + k\omega_{Rad} \quad \text{oder} \quad \omega_Z = z\omega_{Rad} = \omega_0 - k\omega_{Rad} \quad (13)$$

bzw. aufgelöst nach der Raddrehfrequenz  $\omega_{Rad}/2\pi$

$$\frac{\omega_{Rad}}{2\pi} = \frac{\omega_0}{2\pi(z-k)} \quad \text{oder} \quad \frac{\omega_{Rad}}{2\pi} = \frac{\omega_0}{2\pi(z+k)} \quad (14)$$

Für jede Radeigenfrequenz  $\omega_0/2\pi$  ergeben sich somit wiederum zwei Resonanzdrehzahlen  $n_{Rad}$ :

$$n_{Rad} \left[ \frac{1}{\text{min}} \right] = \frac{60}{z-k} \cdot \frac{\omega_0}{2\pi} \left[ \frac{1}{s} \right] \quad \text{und} \quad n_{Rad} \left[ \frac{1}{\text{min}} \right] = \frac{60}{z+k} \cdot \frac{\omega_0}{2\pi} \left[ \frac{1}{s} \right] \quad (15)$$

Der Vergleich der Gleichung (14) und (15) mit den Gleichungen (8) und (9) zeigt, dass für die Einzelmode und das entartete Modenpaar dieselben Resonanzbedingungen gelten.

Setzt man die Resonanzdrehfrequenzen aus Gleichung (14) in die Gleichung (12) ein, so erhält man folgende Schwingamplituden an der Position des Zahneingriffs:

$$s_Z(t) = \frac{s_0}{2} (\cos[\omega_Z t] + \cos[(\omega_Z - 2k\omega_{Rad})t]) \quad \text{bzw.} \quad s_Z(t) = \frac{s_0}{2} (\cos[(\omega_Z + 2k\omega_{Rad})t] + \cos[\omega_Z t]) \quad (16)$$

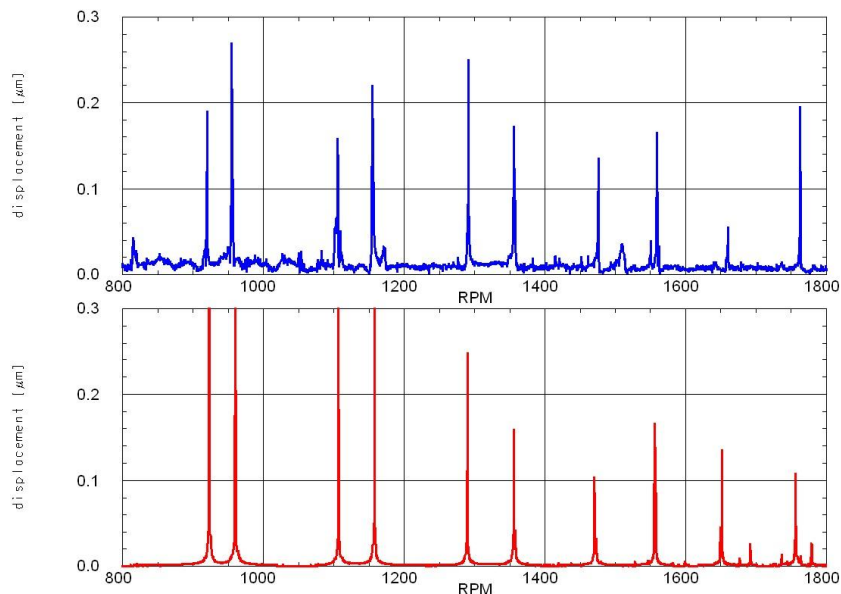
Ein ortsfester Beobachter registriert somit neben der Zahneingriffsfrequenz  $\omega_Z/2\pi$  noch ein einzelnes Seitenband bei  $(\omega_Z - 2k\omega_{Rad})/2\pi$  bzw. bei  $(\omega_Z + 2k\omega_{Rad})/2\pi$ . Diese Seitenbänder treten dann auf, wenn die Entartung der Modenpaare durch Asymmetrien aufgehoben wird. Aufgrund der schmalen Resonanzbreiten genügen hierzu bereits sehr kleine Asymmetrien, wie z. B. die Bohrungen in der Abbildung 3.

Mit dem hier beschriebenen Formalismus kann auch der Fall eines entarteten Modenpaares behandelt werden. Man kommt hierbei zu den gleichen Ergebnissen wie mithilfe der im Abschnitt 3.2 beschriebenen Herleitung über den Doppler-Effekt. Umgekehrt kann auch der Beitrag einer einzelnen Mode mithilfe des Doppler-Effekts hergeleitet werden, indem die stehende Mode als Überlagerung zweier entgegengesetzt laufender Umfangswellen interpretiert wird.

### 3.4 Resonanzverhalten des drehenden Rades

Die in den vorangehenden Abschnitten 3.2 und 3.3 erarbeiteten Resonanzbedingungen wurden schließlich auf das untersuchte Rad angewandt. Mittels einer rechnerischen Modalanalyse für die *stehende* Radwelle wurden zunächst die Eigenfrequenzen und deren zugehörigen Eigenschwingungsformen bis über den Frequenzbereich der Zahneingriffsfrequenz hinaus ermittelt. Aus jeder Eigenschwingungsform kann dann jeweils die für die Resonanzverdopplung wesentliche Umfangsordnung  $k$  bestimmt werden. Damit können gemäß den Gleichungen (8) bzw. (13) die zugehörigen Resonanzdrehzahlen ermittelt werden.

Die untersuchte Radwelle weist im Frequenzbereich bis zur Zahneingriffsfrequenz etwa 120 Schwingungsmoden mit Umfangsordnungen bis zu  $k = 7$  auf. Bis zur zweiten Ordnung der Zahneingriffsfrequenz liegen sogar etwa 300 Schwingungsmoden mit Umfangsordnungen bis zu  $k = 11$ .



**Abbildung 4:** Ordnungsschnitt entlang der zweifachen Zahneingriffsfrequenz  
Vergleich zwischen Messung (oben) und Simulation mit Raddrehung (unten)

Zusätzlich wurden auch Zeitbereichssimulationen in MATLAB durchgeführt. Diese erfolgen in einem radfesten Koordinatensystem, wobei der Drehung des Rades dadurch Rechnung getragen wird, dass die Position der Parametererregung in der Laufverzahnung mit der Drehfrequenz des Rades  $\omega_{Rad} / 2\pi$  auf der Radscheibe umläuft. Diese Simulationen bestätigten ebenfalls die Resonanzverdopplung aufgrund des Doppler-Effekts. Die Abbildung 4 zeigt ein Ergebnis dieser Zeitbereichssimulation. Man erkennt eine sehr gute Übereinstimmung zwischen der Messung und der Simulation. Insbesondere wird die Resonanzverdopplung mit hoher Genauigkeit wiedergegeben. Als weitere Bestätigung des vorgestellten Modells können in der Messung und in der Simulation jeweils dieselben einseitigen Seitenbänder im Frequenzbereich identifiziert werden.

### 3.5 Dynamikfaktor: Dynamische Überhöhung der Beanspruchungen in der Laufverzahnung

Die auf dem Getriebegehäuse und auf der Radscheibe gemessenen Schwingamplituden geben nicht direkt Aufschluss darüber, ob hierdurch auch eine nennenswerte Zusatzbelastung der Verzahnung zu erwarten ist. Um hierzu Aussagen zu treffen, wurde das FE-Modell um die Ritzelwelle und die Kupplungen erweitert, wie in Abbildung 5 dargestellt. Als Modell für die Laufverzahnungen wurden das Rad und das Ritzel über Feder-elemente miteinander gekoppelt. In einer Responseanalyse wurde die dynamische Überhöhung der parametrischen Erregung in der Laufverzahnung simuliert und somit der Dynamikfaktor  $K_v$  bestimmt. Dieser liegt für das vorliegende Getriebe selbst in den Resonanzen bei maximal  $K_v=1,2$ . Die so ermittelten Werte für  $K_v$  wurden in der Festigkeitsberechnung der Verzahnung gemäß ISO 6336 eingesetzt [4,5]. Dabei zeigte sich, dass die beobachteten Schwingungsphänomene keine wesentlichen Zusatzbelastungen für die Verzahnungen darstellen. Gleichwohl führen diese Resonanzphänomene zu zusätzlicher Geräuschemission.

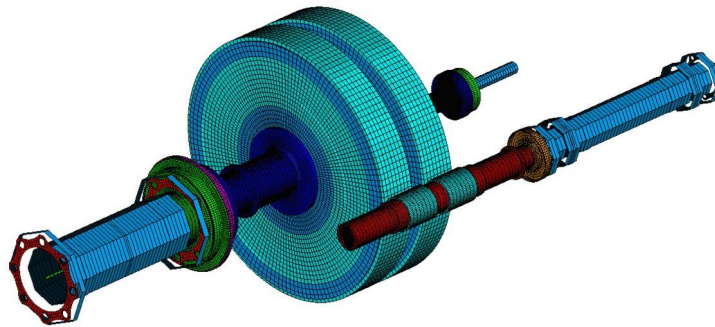


Abbildung 5: FE-Modell des Antriebsstranges zur Ermittlung des Dynamikfaktors  $K_v$

## 4. Optimierungsmaßnahmen

Die beobachteten schmalbandigen Resonanzen sind an sich unbedenklich. Falls gewünscht, können aber Maßnahmen ergriffen werden, um sie zu vermeiden oder um die Resonanzamplituden zu reduzieren.

Da die Resonanzen auf Eigenfrequenzen der Radscheibe zurückzuführen sind und deshalb eine geringe Abhängigkeit von äußeren Parametern aufweisen, sind die Resonanzstellen weitgehend unabhängig von äußeren Kenngrößen wie Drehmoment, Öldruck- und Temperatur. Sie können deshalb durch das Ausweisen von Drehzahlsperrbereichen sicher vermieden werden.

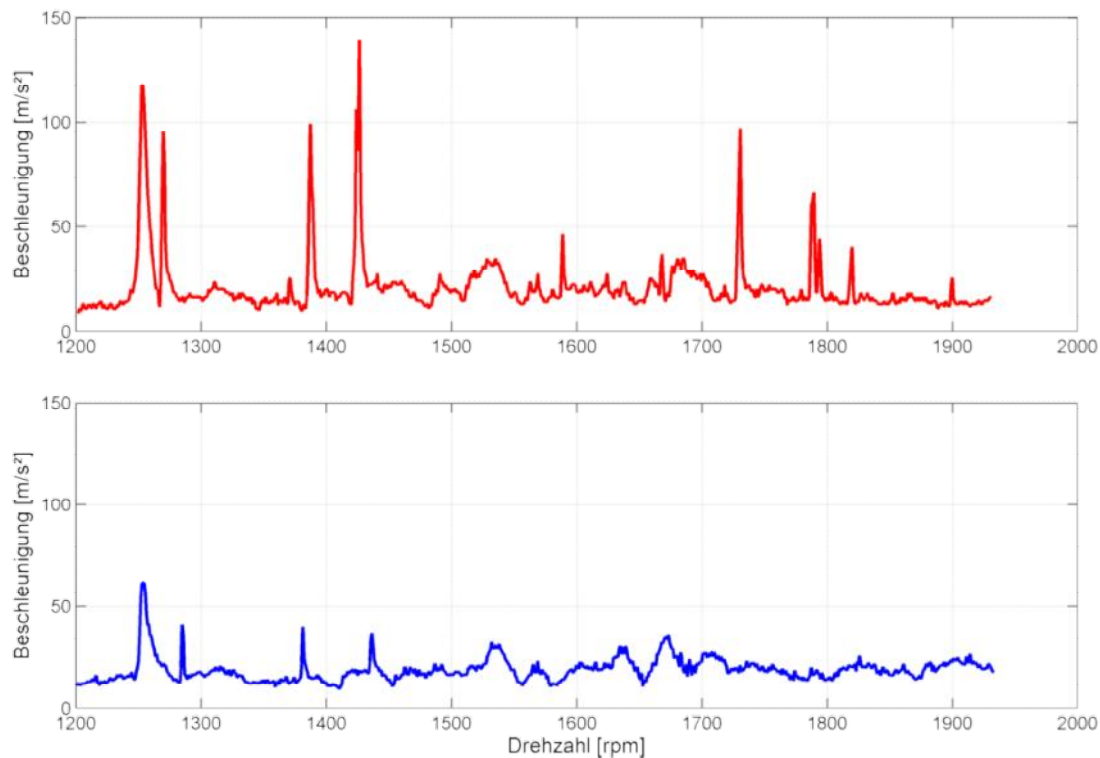
Durch konstruktive Änderungen an der Radgeometrie kann die Lage der Resonanzstellen gezielt beeinflusst werden. Aufgrund der Vielzahl von Eigenschwingungsformen (Moden) des Rades ist dies jedoch nur für schmale Drehzahl-Betriebsbereiche zielführend.

Durch das Weglassen oder nachträgliche Verschließen der axialen Transportbohrungen können die Amplituden der einseitigen Seitenbänder und die Schallemission reduziert werden.

Als weitere Maßnahme bietet sich eine Erhöhung der Dämpfung an. Bislang wird die Dämpfung der relevanten Moden durch die sehr niedrige Strukturdämpfung der Radscheibe bestimmt. Da die Radwelle an den relevanten Radscheibenmoden nur schwach beteiligt ist, ist eine Erhöhung der Lagerdämpfung wenig effektiv. Werden hingegen an die Radscheibe stirnseitig Kreisringplatten angeschraubt, führt die damit verbundene zusätzliche Schnittstellendämpfung zwischen der Radscheibe und diesen Kreisringplatten zu einer erheblichen Erhöhung der Dämpfung der Radmoden und somit zu einer deutlichen Absenkung der Resonanzamplituden und der Geräuschemission. Über eine FE-Simulation wurden die optimale Geometrie und optimale Anschraubpunkte für diese „Dämpferplatten“ ermittelt.

Die Dämpferplatten werden zuverlässig und sicher auf der Radwelle zentriert und über zwei Schraubenkränze an den Radscheiben befestigt. Um negative Effekte auf das Schwingungsverhalten der Radwelle zu vermeiden, wird die Radwellenbaugruppe samt Dämpferplatten gewuchtet. Zudem erfolgt die rotordynamische Auslegung unter Berücksichtigung der zusätzlichen Massen und Massenträgheitsmomente der Dämpferplatten.

Die Dämpferplatten wirken besonders effektiv auf die besonders zahlreichen Axialmoden der Radscheibe. Etwas weniger ausgeprägt ist der Dämpfungseinfluss auf die erheblich weniger zahlreichen Radial- und Umfangsmode. Im Versuch bestätigte sich der sehr positive Einfluss der Dämpferplatten, wie in Abbildung 5 gezeigt.



**Abbildung 5:** Einfluss der Dämpferplatten auf den rms-Wert der Gehäuseschwingungen: ohne Dämpferplatten (oben) und mit Dämpferplatten (unten)

## 7 Zusammenfassung

Die bei einem Stirnradgetriebe mit Doppelschrägverzahnung während gezielter Versuchsläufe beobachteten, sehr schmalbandigen Resonanzen können Moden der Radscheibe zugeordnet werden. Zur Vorhersage der Resonanzstellen muss der Doppler-Effekt der körperfesten Radschwingungen bezüglich der ortsfesten parametrischen Erregung in der Laufverzahnung berücksichtigt werden. Der Doppler-Effekt erklärt auch die im Versuch beobachteten einseitigen Seitenbänder. Durch den Einsatz von zusätzlichen Dämpferplatten können die schmalbandigen Resonanzen weitgehend vermieden werden.

Für die Idee, Schwingungen an Zahnrädern wie oben beschrieben mit zusätzlichen Platten zu dämpfen, liegt eine noch nicht veröffentlichte Patentanmeldung vor.

## Danksagung

Wir bedanken uns bei Markus Muschiol, Florian Greiner und Christian Bechtel für die Unterstützung bei den Messungen, bei Benjamin Puchele für die Zeitbereichssimulationen sowie bei Peter Boiger und Bernd Dautermann für die fruchtbaren Diskussionen.

## Literatur

- [1] Niemann, Gustav und Winter, Hans (2003): *Maschinenelemente, Band 2*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, pp. 243 – 257
- [2] Dresig, Hans und Holzweilig, Franz (2004): *Maschinendynamik*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York
- [3] Hering, Martin, Stohrer (1989): *Physik für Ingenieure*. VDI-Verlag, Düsseldorf, pp. 390 – 392.
- [4] Niemann, Gustav und Winter, Hans (2003): *Maschinenelemente, Band 2*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, pp. 115 – 121
- [5] ISO 6336-1:2006-09, *Calculation of load capacity of spur and helical gears*