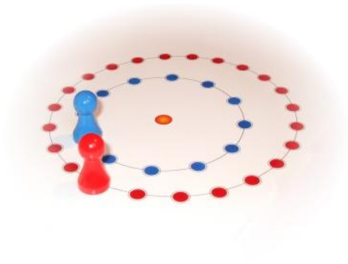
Mars- und Erdbahn

Dirk Brockmann-Behnsen, Benjamin Rott



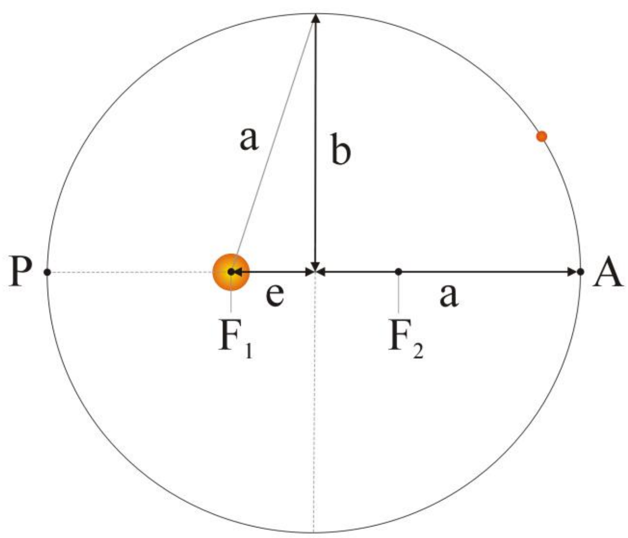
In dem folgenden Artikel werden einige Aspekte der Planetenbahnen von Erde und Mars beleuchtet, aus denen sich interessante Einsatzmöglichkeiten für den Unterricht ergeben. Die vorgestellten Materialien wurden in der Schule erprobt und fanden bei den Schülerinnen und Schülern großen Anklang.

Übersicht der Bezüge im WIS-Beitrag		
Astronomie	**Himmelsmechanik**	**Planetenbahnen von Erde und Mars**
Physik	**Mechanik**	**Gravitationsgesetz, Keplersche Gesetze, Energie und Energieerhaltung**
Fächer-verknüpfung	**Astro-Mathematik**	**Lösen von Gleichungen**
Lehre allgemein	**Inhaltsbezogene und handlungsorientierte Kompetenzen**	**Erfahrbarmachen von Zyklen in der Natur, Berechnen**

Hintergrund

Im Jahre 1605 gelangte Johannes Kepler mittels Analyse der ausgesprochen exakten Beobachtungsdaten des Mars durch Tycho Brahe zu der Erkenntnis, dass es sich bei dessen Bahn um eine Ellipse handeln muss. Er veröffentlichte diese Erkenntnis vier Jahre später in seinem großen Werk „Astronomia nova seu physica coelestis, tradita commentariis de motibus stellae Martis“. Am Beginn des Kapitels 60 fasst er die Erkenntnisse aus den vorangegangenen Kapiteln 56, 58 und 59 dahingehend zusammen, „daß sich der Planet auf dem gegen die Sonne zu gerichteten Durchmesser der Sonne nähert und sich von ihr entfernt und so die elliptische Bahn zustande kommt, sowie daß der Planet an den einzelnen Punkten seiner Bahn so lange weilt, als dem Abstand des betreffenden Punktes von der Sonne entspricht“ (zitiert nach Krafft 2005, S. 503).

Zur Veranschaulichung der Verhältnisse bei der Ellipsenbahn dient die nebenstehende Abbildung. Ein Körper, der sich so bewegt, dass die Summe der Entfernungen zu zwei festen Punkten F_1 und F_2 (*Brennpunkte*) konstant ist, folgt einer geschlossenen Kurve, die *Ellipse* genannt wird. Eine Ellipse besitzt zwei Symmetrieachsen, von denen eine durch die Brennpunkte verläuft. Die andere bildet die Mittelsenkrechte zu den Brennpunkten. Der Schnittpunkt dieser beiden Achsen wird als Mittelpunkt der Ellipse bezeichnet, der Abstand der Brennpunkte vom Mittelpunkt heißt *lineare Exzentrizität* e der Ellipse. Der größte Abstand der Bahn vom Mittelpunkt wird durch die *große Halbachse* a markiert, der kleinste Bahnabstand entsprechend durch die *kleine Halbachse* b. Der Quotient aus der linearen Exzentrizität e und der großen Halbachse a wird *numerische Exzentrizität* ε genannt. Sie ist ein Maß für die Gestalt der Bahn; liegt ε nahe bei Null, ähnelt die Ellipse einem Kreis, liegt ε nahe bei Eins, ist die Ellipse sehr lang gestreckt.



Bei einer Planetenbahn befindet sich das Zentralgestirn in einem der Brennpunkte. Dadurch werden sowohl der sternnächste Bahnpunkt (*Perihel*, P) als auch der sternfernste Bahnpunkt (*Aphel*, A) durch die Schnittpunkte der durch die Brennpunkte verlaufenden Symmetrieachse mit der Planetenbahn definiert. Diese beiden charakteristischen Bahnpunkte werden unter dem Namen *Apsiden* zusammengefasst.
Eine interessante Beziehung zwischen der linearen Exzentrizität und den Halbachsen lässt sich aus der eingangs gegebenen Definition der Ellipsenbahn ableiten: Die Summe der Abstände eines Bahnpunktes von den beiden Brennpunkten ist demnach konstant. Betrachtet man nun zunächst den Spezialfall, dass sich der Planet in einem der Apsiden befindet, so betragen die Abstände von den Brennpunkten ($a+e$) respektive (a-e), in der Summe also $2 \cdot a$. Befindet sich der Planet andererseits am Fußpunkt der kleinen Halbachse, so ist der Abstand zu den beiden Brennpunkten gleich groß. Da die Summe der Abstände auch in dieser Position $2 \cdot a$ betragen muss, entspricht der Abstand zu jedem der Brennpunkte jeweils der großen Halbachse a. Nach dem Satz des Pythagoras folgt als Beziehung zwischen der linearen Exzentrizität und den Halbachsen daher:

$$e^2 = a^2 - b^2$$

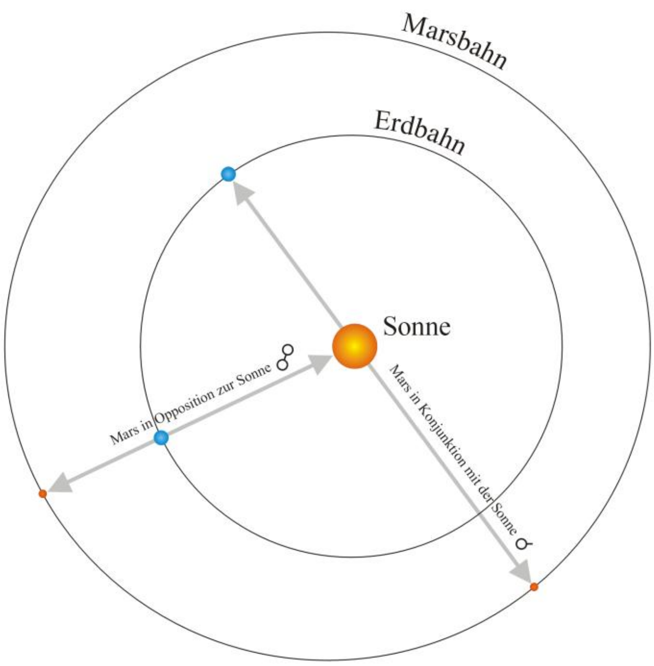
Für weitere interessante Ausführungen zu den Eigenschaften der Ellipse als mathematisches Objekt sowie als grundlegende Form der Planetenbahn sei auf Uffrecht & Poppe (2002) verwiesen.

Angebotene Aktivitäten

1. Modell zur Veranschaulichung der Planetenbahnen von Erde und Mars (Anhang 1)

Umlaufzeiten von Erde und Mars

Unsere Erde benötigt für einen Umlauf um die Sonne 365,26 Tage oder, etwas gröber, etwa zwölf Monate – nach dieser Zeit befindet sich die Erde in Bezug auf die Sonne in etwa wieder an derselben Stelle auf ihrer Umlaufbahn. Diese Art, die Umlaufzeit mit Bezug auf einen Fixstern (unsere Sonne) zu messen, nennt man *siderisch* (lat: sidus = Stern). Die siderische Umlaufzeit des Mars ist größer als die der Erde, da seine Bahn weiter außen im Sonnensystem verläuft. Der „rote Planet" benötigt 686,98 Tage, also etwa 1,88 Erdjahre bzw. knapp 23 Monate, bis er im Vergleich zur Sonne wieder an derselben Position steht. Diese Umläufe und ihre Dauern könnte man direkt sehen, wenn man als Beobachter aus einer genügend großen Entfernung und mit genügend Zeit und Geduld von „oben" auf unser Sonnensystem schauen könnte.



Von der Erde aus gesehen, steht der Mars nicht alle 687 Tage wieder an derselben Position am Himmel – denn während sich der Mars um die Sonne bewegt, verändert natürlich auch die Erde ihre Position im Sonnensystem. Tatsächlich dauert es 779,94 Tage, also etwa 26 Monate, bis Mars und Erde wieder in derselben Position zueinander stehen (z.B. größter oder kleinster Abstand). Diese Art, die Umlaufzeit in Bezug auf einen anderen Körper (unsere Erde) zu messen, heißt *synodisch* (griech: synodos = Versammlung).

Stehen Mars und Sonne in derselben Blickrichtung am Himmel, spricht man von einer *Konjunktion* (lat: con-iungere = verbinden) – der Mars steht dann auf der anderen Seite der Sonne in unserem Sonnensystem. Stehen sich Mars und Sonne am Himmel gegenüber, nennt man dies *Opposition* (lat: oppositio = das Entgegengesetzte) – Mars und Erde stehen auf derselben Seite der Sonne dicht beieinander.

Diese Unterschiede zwischen den verschiedenen Umlaufzeiten und den Positionen der Planeten zueinander und in Bezug auf die Sonne können insbesondere für jüngere Schüler verwirrend sein. Mit dem im Folgenden vorgestellten Modell lassen sich diese (und andere) Zusammenhänge aber gut darstellen und veranschaulichen.

Das Modell der Erd- und Marsbahnen

Der beigefügte Plan (Anhang 1) ist ein maßstabgetreues Modell der Planetenbahnen von Erde und Mars. Knapp neben der Mitte steht die Sonne, die bei diesem Maßstab als Punkt gerade noch auszumachen wäre, hier aber als orangefarbener Kreis dargestellt ist. Darum sind die Bahnen eingezeichnet: Die Erdbahn als Kreis mit der Sonne als Mittelpunkt (1 Astronomische Einheit entspricht im Model 5,6 cm); die Marsbahn als Ellipse mit der Sonne in einem der Brennpunkte, da ihre Exzentrizität deutlich größer als die der Erdbahn ist (der Mars ist im Mittel 1,52 Astronomische Einheiten von der Sonne entfernt, das entspricht im Modell etwa 8,5 cm).

Die Bahnen sind grob unterteilt in „(Erd-) Monate“ à 30 Tagen, was für die angestrebten Beobachtungen hinreichend genau ist und zwölf bzw. 23 Bahnpunkte für die Erde bzw. den Mars bedeutet. Setzt man nun zwei Spielsteine (am besten einen blauen und einen roten) auf die Bahnen, kann man die Positionen der Planeten monatsweise verändern und die jeweiligen Positionen beobachten.

Mit einem jahrgangsübergreifenden Astronomiekurs (Klasse 5 – 8) habe ich mit diesem Modell gearbeitet. Ein Schüler war als Taktgeber an der Tafel; er hat die Monatswechsel vorgegeben und mit einer Strichliste die Anzahl der verstrichenen Monate (und zusätzlich die Zahl der vergangenen Jahre) festgehalten. Zwei weitere Schüler haben nach den Taktvorgaben die beiden Planetenspielsteine gegen den Uhrzeigersinn fortbewegt. Startpunkt war die besonders nahe Opposition von Erde und Mars, wenn beide Planeten auf der sonnennahen Seite auf der Ellipsen-Hauptachse stehen.

Mit großer Motivation und Ausdauer haben meine Schüler mit dem Modell gearbeitet und konnten dabei unter anderem Folgendes beobachten:

- Immer wenn die Strichliste ein Vielfaches von 12 anzeigte, war die Erde wieder auf ihrem Ausgangspunkt.
- Bei allen Vielfachen von 23 hat der Mars eine vollständige Sonnenumrundung hinter sich. (Die Vielfachen von 12 und 23 eignen sich auch sehr gut zur Kontrolle, dass man sich beim Weitersetzen der Spielsteine nicht verzählt hat.)
- Die Erde ist etwa doppelt so schnell wie der Mars – aber eben nicht genau doppelt so schnell. Es dauert etwas mehr als zwei Erdumdrehungen, bis Mars und Erde wieder möglichst dicht beieinander stehen. Dies geschieht etwa alle 25 bis 26 Spielzüge, die entsprechenden Striche an der Tafel haben wir farblich gekennzeichnet.
- Die Positionen möglichst geringer Abstände waren: 0, 25, 50, 75, 100, 125, 151, 177, 201, 226, 261, 276.
- Nicht alle dieser Positionen waren gleich „gut“ – teilweise gab es erhebliche Unterschiede, was den Abstand zwischen Erde und Mars anbelangt.
- Nach 276 „Monaten“ steht das System wieder in der Anfangsposition. Die Fünftklässler haben damit zugleich das Prinzip des kleinsten gemeinsamen Vielfachen (wieder-) entdeckt, in diesem Fall die Anzahl der Spielzüge, bis die 12- und die 23-schrittigen Perioden wieder zusammentreffen (und 23 Erd- bzw. 12 Marsjahre vergangen sind).

Die Schüler haben anhand des Modells argumentiert, dass günstige Zeitpunkte für Mars-Beobachtungen rar gesät sind und dass es nicht ausreicht, einfach 25 Monate zu warten. Besonders geringe Abstände zwischen Erde und Mars treten deutlich viel seltener auf. Tatsächlich vergehen – das gibt das Modell allerdings nicht her – zwischen besonders nahen Oppositionen jeweils etwa 79 Jahre; zum Beispiel in den Jahren 1766, 1845, 1924 und 2003. Am 28. August 2003 betrug der Abstand Erde – Mars 55,76 Millionen Kilometer. Dies war die geringste Distanz seit etwa 60.000 Jahren. Erst im Jahre 2287 wird der Mars der Erde noch näher kommen, der Abstand beträgt dann 55,69 Millionen Kilometer.

Kriterium	Erde	Mars	Kommentar
Umlaufzeit um die Sonne (siderisch in Tagen)	**365,26**	**686,98**	**In Bezug auf die Sonne; ein Mars-Jahr dauert 1,88 Erdenahre**
Umlaufzeit (synodisch in Tagen)	**---**	**779,94**	**In Bezug auf die Erde; diese ist schneller als der Mars und überholt ihn alle 25 – 26 Monate.**
Entfernung von der Sonne in Millionen km **minimal** **durchschnittlich** **maximal**	 **147,1** **149,6** **152,1**	 **206,7** **227,9** **249,1**	**Die Marsbahn ist etwa 1,52-mal weiter von der Sonne entfernt als die Erdbahn; sie hat eine größere elliptische Abweichung von der Kreisbahn als die Erdbahn.**
Minimale Entfernung Erde – Mars (in Mio. km)	**55,6 bis 101,3 (0,37 bis 0,68 AE)**		**Die Unterschiede ergeben sich je nach Position auf den Ellipsenbahnen. Eine geringe Entfernung wird *Perihelopposition* genannt; eine große *Aphelopposition*. Alle 15 – 17 Jahre findet eine Perihelopposition statt.**
Atmosphärendruck (NN)	**$6 \cdot 10^{-3}$ bar**	**1,01 bar**	**Die Marsatmosphäre ist sehr dünn.**
Hauptbestandteile der Atmosphäre	**N_2: 78,08%** **O_2: 20,95%** **Ar: 0,93%** **CO_2: 0,04%**	**CO_2: 95,32%** **N_2: 2,70%** **Ar: 1,60%** **O_2: 0,13%**	

2. Arbeitsblatt mit Berechnungen für einen bemannten Raumflug zum Mars (Anhang 2)

Im Anhang finden Sie ein Arbeitsblatt mit zwei Aufgaben. Die erste Aufgabe beschäftigt sich mit energetischen Fragen bei der Beförderung eines großen interplanetaren Raumschiffes von 980 Tonnen Masse auf eine Erdumlaufbahn von 320 km Höhe.

Separat soll die Zunahme an potentieller und kinetischer Energie berechnet werden. Für die Zunahme an potentieller Energie gilt mit dem äquatorialen Erdradius r_{Erde} = 6378 km (Unsöld & Baschek 1991[5], S. 24):

$$\Delta W_{\text{pot}} = G \cdot M \cdot m \cdot \left(\frac{1}{6378 \cdot 10^3 \text{m}} - \frac{1}{6698 \cdot 10^3 \text{m}} \right) = 2{,}92 \cdot 10^{12} \text{J}.$$

Die Orbitalgeschwindigkeit kann bestimmt werden, indem man die allgemeine Formel für die Zentralkraft mit der Formel für die in diesem Fall verantwortliche Gravitationskraft gleichsetzt:

$$m \cdot \frac{v^2}{r} = G \cdot M \cdot m \cdot \left(\frac{1}{(6698 \cdot 10^3 \text{m})^2} \right)$$

$$\Rightarrow v = 7712 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Daraus ergibt für die kinetische Energie und die Umlaufzeit des Raumschiffes:

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = 2{,}91 \cdot 10^{13}\,\text{J},$$

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot 6698 \cdot 10^3\,\text{m}}{v} = 5457\,\text{s} = 1{,}52\,\text{h}.$$

Die Zunahme an kinetischer Energie berechnet sich aus der Differenz der oben berechneten kinetischen Energie des Raumschiffes in der Umlaufbahn und der kinetischen Energie, die das Raumschiff vor dem Start hatte. Zu diesem Zeitpunkt vollzog es immerhin die Rotation der Erde mit:

$$v_{\text{Äquator}} = \frac{40074 \cdot 10^3\,\text{m}}{86400\,\text{s}} 463{,}82\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

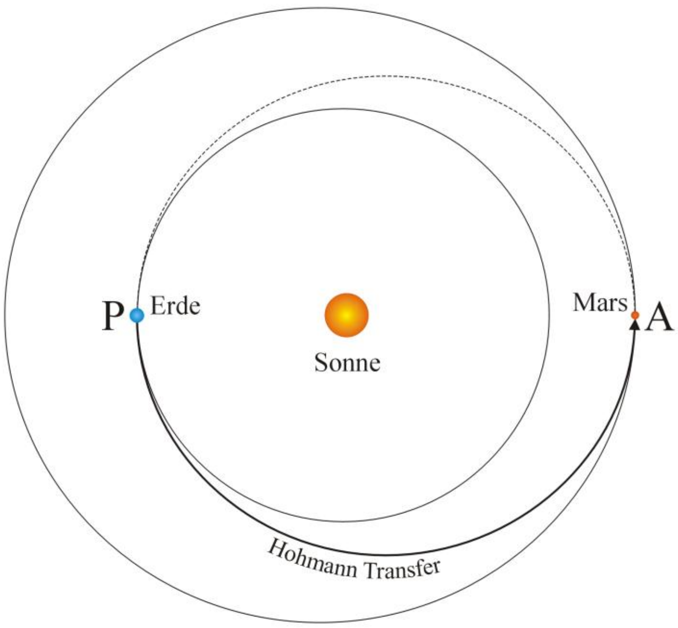
$$\Rightarrow W_{\text{kin,Äquator}} = 1{,}054 \cdot 10^{11}\,\text{J}$$

$$\Rightarrow \Delta W_{\text{kin}} = W_{\text{kin}} - W_{\text{kin,Äquator}} = 2{,}90 \cdot 10^{13}\,\text{J}.$$

Für die Gesamtenergiezunahme ergibt sich schließlich:

$$\Delta W_{\text{ges}} = \Delta W_{\text{pot}} + \Delta W_{\text{kin}} = 3{,}19 \cdot 10^{13}\,\text{J}.$$

Bei der zweiten Aufgabe sollen nun Berechnungen für den Transfer zum Mars angestellt werden. Dazu wird an einem geeigneten Punkt der als kreisförmig angenäherten Erdbahn das Triebwerk des Raumschiffes kurz gezündet und dieses auf eine elliptische Übergangsbahn gebracht. Diese elliptische Bahn verläuft um die Sonne und besitzt ihren sonnennächsten Punkt (Perihel) am Startpunkt des Transfers, also in Erdentfernung von der Sonne (Position P). Der sonnenfernste Punkt dieser elliptischen Bahn (Aphel) befindet sich im sonnennächsten Punkt der Marsbahn (Position A). Die nebenstehende Abbildung gibt einen Überblick über den Hohmann Transfer. Für die folgenden Berechnungen werden die Gravitationspotentiale der beiden Planeten nicht berücksichtigt.



Da die Gesamtenergie des Raumschiffes nach Ausschalten des Triebwerks konstant bleibt, kann folgende Energiegleichung aufgestellt werden (vgl. Uffrecht & Poppe 2002, S. 63):

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(v_{\text{A}}^2 - v_{\text{P}}^2\right) = G \cdot M \cdot m \cdot \left(\frac{1}{r_{\text{A}}} - \frac{1}{r_{\text{P}}}\right). \tag{1}$$

Nach dem Flächensatz (zweites keplersches Gesetz) gilt weiterhin:

$$r_{\text{A}} \cdot v_{\text{A}} \cdot \sin \varphi_{\text{A}} = r_{\text{P}} \cdot v_{\text{P}} \cdot \sin \varphi_{\text{P}}.$$

Der Winkel φ zwischen dem Radiusvektor und dem Geschwindigkeitsvektor hat für die Apsiden einen Betrag von 90°, daher vereinfacht sich die letzte Gleichung zu:

$$r_A \cdot v_A = r_P \cdot v_P$$
$$\Rightarrow v_A = \frac{r_P}{r_A} \cdot v_P. \qquad (2)$$

Setzt man v_A in die obige Energiegleichung (1) ein, so erhält man:

$$v_P^2 - \frac{r_P^2}{r_A^2} \cdot v_P^2 = 2 \cdot G \cdot M \cdot \left(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_A} \right)$$
$$\Rightarrow \left(1 - \frac{r_P^2}{r_A^2} \right) \cdot v_P^2 = \frac{2 \cdot G \cdot M}{r_P} \cdot \left(1 - \frac{r_P}{r_A} \right).$$

Der Term in der Klammer auf der linken Seite der letzten Gleichung kann nach der dritten binomischen Formel umgewandelt werden. Es ergibt sich nach Kürzen:

$$\left(1 + \frac{r_P}{r_A} \right) \cdot v_P^2 = \frac{2 \cdot G \cdot M}{r_P} \Rightarrow \frac{r_A + r_P}{r_A} \cdot v_P^2 = \frac{2 \cdot G \cdot M}{r_P} \cdot .$$

Aufgelöst nach v_P, danach eingesetzt in (2) ergibt sich für die Apsidengeschwindigkeiten:

$$v_P = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M}{r_A + r_P} \cdot \frac{r_A}{r_P}} = \sqrt{\frac{G \cdot M}{a} \cdot \frac{r_A}{r_P}}, \qquad (3a)$$

$$v_A = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M}{r_A + r_P} \cdot \frac{r_P}{r_A}} = \sqrt{\frac{G \cdot M}{a} \cdot \frac{r_P}{r_A}}. \qquad (3b)$$

Da der Startpunkt des Hohmann Transfers auf der Erdbahn ($r_P = r = 149{,}6 \cdot 10^9$ m) und der Zielpunkt am sonnennächsten Punkt der Marsbahn (Perihel des Mars: $r_A = r_{P,Mars} = 206{,}7 \cdot 10^9$ m) liegt, ergibt sich für die Start- bzw. Zielgeschwindigkeit des Raumschiffes:

v_P = 32084 m/s,
v_A = 23221 m/s.

Die Reisedauer für diesen Flug zum Mars lässt sich mittels des dritten keplerschen Gesetzes bestimmen. Demnach gilt für die Umlaufzeit um die Sonne längs der gesamten Hohmann Ellipse:

$$T = \sqrt{\frac{(0{,}5 \cdot (r + r_{P,Mars}))^3}{r^3} \cdot T_{Erde}^2} \approx 473\,\text{d}.$$

Für die Reisedauer benötigt man die Hälfte, also knapp 237 Tage, die Erde legt in dieser Zeit etwa zwei Drittel ihres Sonnenumlaufes zurück. Flögen Menschen also zum Mars, müssten sie längere Zeit auf dem roten Planeten verweilen, bis die Erde für den Rückflug den Mars auf der Innenbahn erneut überholt. Dies ist ein reales Problem des bemannten interplanetaren Raumfluges.

Verwendete Naturkonstanten:

Gravitationskonstante (Paetec-Formelsammlung, S. 69)	$G = 6{,}673 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}}$
Masse der Sonne (Paetec-Formelsammlung, S. 112)	$M = 1{,}989 \cdot 10^{30}$ kg
Mittlere Erdentfernung von der Sonne (ebd.)	$r = 149{,}6 \cdot 10^{9}$ m
Marsbahn, große Halbachse (Unsöld & Baschek 1991, S.21)	$a = 227{,}9 \cdot 10^{9}$ m
Aphel Mars	$r_{\mathrm{A,Mars}} = 249{,}1 \cdot 10^{9}$ m
Perihel Mars	$r_{\mathrm{P,Mars}} = 206{,}7 \cdot 10^{9}$ m

Literatur

Becker, F.-M.; Bossek, H.; Engelmann, L. et al (2004[4]): *Formelsammlung*, Paetec Verlag, Berlin

Krafft, F. (Hrsg., 2005): *Johannes Kepler. Astronomia Nova. Neue, ursächlich begründete Astronomie*, Matrix Verlag, Wiesbaden

Uffrecht, U. & Poppe T. (2002): *Lambacher Schweizer Themenheft. Himmelsmechanik und Raumfahrt*, Ernst Klett Verlag, Stuttgart

Unsöld, A. & Baschek, B. (1991[5]): *Der neue Kosmos*, Springer-Verlag, Berlin