Wochenplan Potenzen und Wahrscheinlichkeit

Potenzen

1. Wichtige Begriffe: Basis – Exponenten - Potenzwert

Wir betrachten folgende Gleichung aus einer Potenz mit der **Basis 3**, mit **dem Exponenten 4** und **dem Potenzwert 81**.

$$3^4 = 81$$

Ersetzt man jeweils Potenzwert, Basis oder Exponenten mit der Variablen x, so erhält man verschiedene Problemstellungen:

- Der Potenzwert ist gesucht: $3^4 = x$
- Die Basis ist gesucht: $x^4 = 81$

  $x = +/- \sqrt[4]{81}$
- Der Exponent ist gesucht: $3^x = 81$

Um den Exponenten zu berechnen, braucht man eine neue Rechenoperation: Den ***Logarithmus.*** Mit dem ***Logarithmus*** bestimmt man also den Exponenten (=x) einer festgelegten Basis (=3), um einen Potenzwert (= 81) zu erhalten.

- **Schreib- und Sprechweise:**
  - **Schreibe: $\log_3 81 = x$**
  - **Sprich: Logarithmus von 81 zur Basis 3 ist x**
- **Den Logarithmus mit dem Taschenrechner bestimmen:**
  - $\log_3 81$
  - $X = \frac{\log 81}{\log 3}$, **X = 4, da** $3^4 = 81$
  - **Taschenrechner: 81 log : 3 log = 4**

2. Berechne folgende Aufgaben

Berechne den Potenzwert

a) $3^4 =$ ____ b) $12^3 =$ ____ c) $625^{\frac{1}{2}} =$ ____

d) $5^{-2} =$ ____ e) $2^{10} =$ ____ f) $5^{-3} =$ _____

Berechne die Basis

Beispiel $x^2 = 81$ -> $\sqrt{81} = 9$ -> x = 9

$x^3 = 1331$ -> $\sqrt[3]{1331} = 11$ -> x = 11

a) $x^4 = 256$ -> ________________________________

b) $x^3 = 1728$ -> ________________________________

c) $x^2 = 361$ -> ________________________________

d) $x^6 = 15625$ -> ______________________________

Bestimme den Exponenten

Beispiel $3^x = 81$,

x =4, da 3*3*3*3 = 81 -> $3^4 = 81$

a) $2^x = 8$ -> x = ________________

b) $4^x = 16$ -> x = ________________

c) $5^x = 125$-> x = ________________

d) $9^x = 6561$-> x = ________________

e) $3^x = 2187$-> x = ________________

f) $2^x = 524\,288$-> x = ________________

3. Potenzgesetze

➔ Potenzen mit der gleichen Basis

Term	Term ohne Potenz	Ergebnis in Potenzschreibweise
$2^3 \cdot 2^5$ =	$2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2$ =	$2^{3+5} = 2^8$
$5^4 \cdot 5^7$ =	$5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5$	$5^{4+7} = 5^{11}$
$a^3 \cdot a^4$	$a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a$	$a^{3+4} = a^7$
Bei gleicher Basis können bei der Multiplikation die Potenzen addiert werden!		
$2^5 : 2^3$ =	32 : 8 =	$2^{5-3} = 2^2 = 4$
$4^4 : 4^2$ =	256 : 16 =	$4^{4-2} = 4^2 = 16$
$a^6 : a^3$ =	$\frac{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a}{a\cdot a\cdot a}$ =	$a^{6-3} = a^3$
Bei gleicher Basis kann bei der Division die Potenzen voneinander subtrahiert werden.		

➔ Potenzen mit gleichem Exponent

Term	Term ohne Potenz	Ergebnis in Potenzschreibweise
$4^2 \cdot 2^2$ =	$16 \cdot 4 = 64$	$(4\cdot2)^2 = 8^2$
$2^4 \cdot 3^4$ =	$16 \cdot 81 = 1296$	$= (2\cdot3)^4 = 6^4 = 1296$
Bei gleichen Exponenten können bei der Multiplikation die Basis multipliziert werden! Der Exponent bleibt gleich!		
$9^3 : 3^3$ =	729 : 27 = 27	$(9:3)^3 = 3^3 = 27$
$16^5 : 8^5$ =	1048576 : 32768 = 32	$(1048576 : 32768)^5 = 2^5$ = 32
Bei gleichen Exponenten können bei der Division die Basis dividiert werden! Der Exponent bleibt gleich!		

➔ Potenzen mit Klammer!

Potenz mit Klammer	Potenz in der Klammer aufgelöst	Term ohne Potenz	Ergebnis als Potenz
$(2^3)^2 =$	$(8)^2 =$	$8 \cdot 8 = 64$	$2^{3 \cdot 2} = 2^6 = 64$
$(2^2)^3 =$	$(4)^3 =$	$4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$	$2^{3 \cdot 2} = 2^6 = 64$
$(4^2)^3 =$	$(16)^3 =$	$16 \cdot 16 \cdot 16 = 4096$	$4^{2 \cdot 3} = 4^6 = 4096$
Bei Potenzen in und nach der Klammer, können die „Potenzen“ multipliziert werden?			

➔ Richtig oder falsch? Erkläre wie gerechnet werden muss!

	Richtig	Falsch	Erklärung
$2 \cdot 5^3 = 2 \cdot 125$			
$3 \cdot 5^4 = 15^4$			
$5^3 \cdot 5^4 = 5^{12}$			
$2^8 : 2^4 = 2^2$			
$2^8 : 2^4 = 2^4$			
$5^3 \cdot 5^4 = 5^7$			
$(6^2)^3 = 6^5$			
$(6^2)^3 = 6^6$			

4. Besonderheit (minus) - in der Potenz

$$\mathbf{3 \cdot 10^{-5}} = \frac{3}{10^5} = \frac{3}{100000}$$

$$\frac{a^{-6}}{y \cdot b^{-3}} = \frac{b^3}{y \cdot a^6}$$

Bei Minus in der Potenz kannst du zwischen Zähler und Nenner tauschen (Fahrstuhl). Das Vorzeichen ändert sich!!!

5. Wurzeln, kann man mit der Wurzel, aber auch als Bruch in der Potenz schreiben!

➔ **Beispiele:**

➔ $\sqrt{16} = \sqrt[2]{16} = 16^{\frac{1}{2}} = \mathbf{4}$

➔ $\sqrt[3]{27} = 27^{\frac{1}{3}} = \mathbf{3}$

➔ $\sqrt[4]{625} = 625^{\frac{1}{4}} = \mathbf{5}$

➔ $\sqrt[8]{4^4} = 4^{\frac{4}{8}} = 4^{\frac{1}{2}} = \mathbf{2}$

➔ $\sqrt[3]{2^9} = 2^{\frac{9}{3}} = \mathbf{2^3} = \mathbf{8}$

6. Aufgaben aus der Abschlussprüfung

7. Vereinfachen Sie die folgenden Terme so weit wie möglich.
Es gilt: $a, b, c > 0$

a) $\dfrac{3a^3 \cdot 4b^{-7} \cdot 3a^{-1} \cdot 3b^8}{9a^{-2} \cdot 15b}$

b) $\sqrt[5]{c^3} \cdot a^{-6} \cdot \sqrt[5]{c^2} \cdot a^{12}$

a) $\dfrac{3a^3 \cdot 4b^{-7} \cdot 3a^{-1} \cdot 3b^8}{9a^{-2} \cdot 15b} = \dfrac{108\, a^3 \cdot b^{-7} \cdot a^{-1} \cdot b^8}{135 a^{-2} \cdot b} = \mathbf{0{,}8}\ \dfrac{a^{3+(-1)} \cdot b^{-7+8}}{a^{-2} \cdot b} =$

$\mathbf{0{,}8}\ \dfrac{a^{3+(-1)} \cdot b^{-7+8}}{a^{-2} \cdot b} = \mathbf{0{,}8}\ \dfrac{a^2 \cdot b^1}{a^{-2} \cdot b} = \mathbf{0{,}8}\ \dfrac{a^2 \cdot a^2}{1} = \mathbf{0{,}8\ a^4}$

b) $\sqrt[5]{c^3} \cdot a^{-6} \cdot \sqrt[5]{c^2} \cdot a^{12}$

$c^{\frac{3}{5}} \cdot c^{\frac{2}{5}} \cdot a^{-6} \cdot a^{12} =$

$c^{\frac{3}{5}+\frac{2}{5}} \cdot a^{-6+12}$

$c^1 \cdot a^6 = \mathbf{c} \cdot a^6$

https://www.br.de/mediathek/video/mathe-pruefung-msa-bayern-terme-vereinfachen-potenzen-und-wurzel-2019-ag-ii-nr-7-av:5e956b263c14a7001345a619

➔ Weitere Aufgaben aus dem Jahr 2017

Vereinfachen Sie den folgenden Term so weit wie möglich.
Es gilt: x, y, **z** ≠ 0.

$$\frac{(3x^2+4x^2)\cdot x^3\cdot y^5\cdot 2\mathbf{z}^{-4}}{x^4\cdot y^5\cdot y^{-3}\cdot 2\mathbf{z}^2\cdot \mathbf{z}^{-6}}$$

6. Jede der folgenden vier Aussagen ist für $a>1$ korrekt. Weisen Sie dies jeweils durch mathematische Umformungen nach.

   a) $3\sqrt{9a^4}=9a^2$

   b) $\sqrt[3]{729a^8}\neq 9a^2$

   c) $\dfrac{27a^{-2}}{3a^{-4}}=9a^2$

   d) $\dfrac{1}{6^{-1}}+3a^2\neq 9a^2$

Lösung

$$\frac{(3x^2+4x^2)\cdot x^3\cdot y^5\cdot 2\mathbf{z}^{-4}}{x^4\cdot y^5\cdot y^{-3}\cdot 2\mathbf{z}^2\cdot \mathbf{z}^{-6}}=\frac{7x^2\cdot x^3\cdot y^5\cdot 2\cdot y^3\cdot \mathbf{z}^6}{x^4\cdot y^5\cdot 2\cdot \mathbf{z}^2\cdot \mathbf{z}^4}=7xy^3$$

6. a) $3\sqrt{9a^4}=3\cdot 3a^2=9a^2$

   b) $\sqrt[3]{729a^8}=9a^{\frac{8}{3}}$

   c) $\dfrac{27a^{-2}}{3a^{-4}}=9\cdot a^{-2}\cdot a^4=9a^2$

   d) $\dfrac{1}{6^{-1}}+3a^2=6+3a^2$

   andere Umformungen möglich

7. Wahrscheinlichkeit und Permutationen

Bearbeite die Prüfungsaufgaben. In den Erklärvideos werden die wichtigsten Informationen genannt.

Folgende Regeln/Begriffe solltest du kennen. Das wird in den Videos noch einmal erklärt:

- **→ Baumdiagramm zeichnen!**
- **→ Was bedeutet mit oder ohne zurücklegen?**
- **→ Knotenregel**
- **→ Pfadregel 1**
- **→ Pfadregel 2**
- **→ Wahrscheinlichkeit P =** $\frac{\text{günstige Ergebnisse}}{\text{mögliche Ergebnisse}}$
- **→ Permutationen: Berechnung Fakultät**

Bei einem Skirennen starten zwölf Läufer: Vier Deutsche, fünf Österreicher und drei Schweizer.
Die Startreihenfolge wird ausgelost, indem die Namen der Läufer nacheinander und zufällig aus einer Lostrommel gezogen werden.

a) Erstellen Sie für die Vergabe der ersten zwei Startplätze ein Baumdiagramm, das nur die Nationalitäten der Läufer berücksichtigt.
Beschriften Sie die Äste mit der jeweiligen Wahrscheinlichkeit.

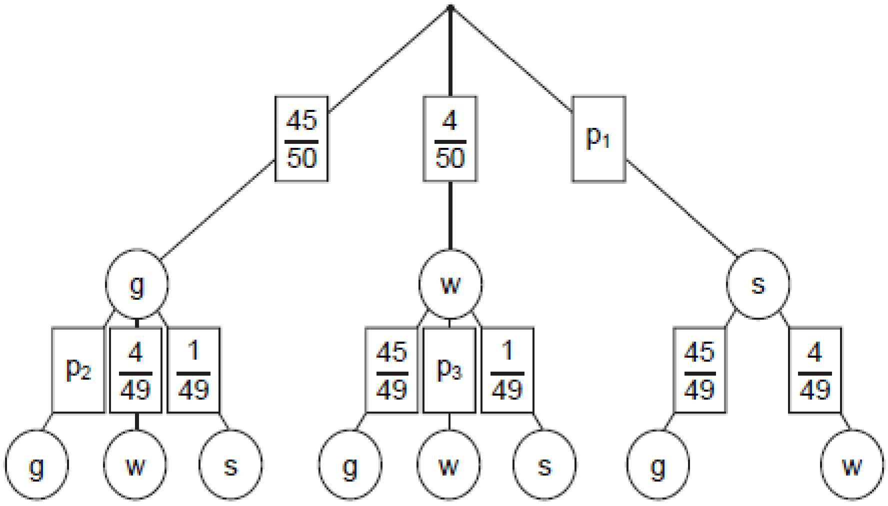
b) Ermitteln Sie rechnerisch die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter den ersten beiden Startern keiner aus der Schweiz befindet.

c) Die Österreicher planen für ihr Training ein eigenes Rennen.
Berechnen Sie die Anzahl aller Möglichkeiten, in welcher Reihenfolge sich die fünf Läufer dabei platzieren können. Gehen Sie davon aus, dass alle Skifahrer mit unterschiedlichen Zeiten ins Ziel kommen.

https://www.br.de/mediathek/video/mathe-pruefung-msa-bayern-baumdiagramm-knotenregel-pfadregel-kombinatorik-2017-ag-ii-nr-10-av:5e9565f92b5b530013d73d22

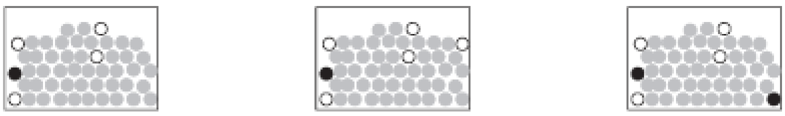
7. In einem Behälter befinden sich Kugeln in den Farben grau (g), weiß (w) und schwarz (s). Bei einem Zufallsexperiment wird zweimal nacheinander jeweils eine Kugel gezogen.

Das folgende Baumdiagramm stellt die möglichen Ergebnisse dieses Zufallsexperiments dar.



a) Begründen Sie anhand des Baumdiagramms, dass es sich um ein Zufallsexperiment ohne Zurücklegen handelt.

b) Notieren Sie auf Ihrem Lösungsblatt die Nummer des Behälters (siehe Abbildung unten), die zum dargestellten Baumdiagramm passt.



(1) (2) (3)

c) Geben Sie die im Baumdiagramm fehlenden Wahrscheinlichkeiten p_2 und p_3 in Bruchschreibweise an.

d) Berechnen Sie, wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, dass es sich bei den beiden gezogenen Kugeln um eine graue sowie um eine weiße handelt.

https://www.br.de/mediathek/video/mathe-pruefung-msa-bayern-baumdiagramm-knotenregeln-pfadregel-2018-ag-ii-nr-7-av:5e9564cca19b650013195c37